

Analyse und Verbesserung der Simulationsmethode des Bremsenquietschens

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Nils Gräbner
geb. in Berlin

von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
-Dr.-Ing.-

genehmigte
Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Utz von Wagner
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Hartmut Hetzler

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 13. Oktober 2016

Berlin 2016

Für EDDA

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Motivation.....	4
1.2	Stand der Forschung	5
1.3	Ziel und Gliederung der Arbeit	9
2	Theoretische Untersuchung der etablierten Simulationsmethode.....	12
2.1	Beschreibung der etablierten Simulationsmethode.....	13
2.1.1	Das verwendete FE-Bremsenmodell	13
2.1.2	Beschreibung der einzelnen Simulationsschritte	13
2.1.3	Beschreibung des Verfahrens zum Lösen des Eigenwertproblems	16
2.2	Validierung der etablierten Simulationsmethode mit Minimalmodellen	20
2.2.1	Reibungsinduzierte Dämpfung.....	20
2.2.2	Viskose Dämpfung.....	23
2.2.3	Materialstrukturdämpfung.....	23
2.2.4	Fügestellendämpfung.....	25
2.2.5	Gyroskopische und zirkulatorische Einflüsse.....	25
2.2.6	Unsymmetrische Massenmatrix	32
2.2.7	Untersuchung des in der KEA verwendeten Verfahrens zur Lösung des Eigenwertproblems	33
2.3	Zusammenfassung.....	39
3	Vergleich der etablierten Simulationsmethode mit experimentellen Untersuchungen	40
3.1	Untersuchungen an Einzelkomponenten	41
3.2	Untersuchungen am Gesamtsystem.....	43
3.3	Untersuchungen am rotierenden System.....	45
3.4	Untersuchungen des Quietschverhaltens.....	47
3.5	Zusammenfassung.....	50
4	Relevanz von Nichtlinearitäten.....	52
4.1	Unterschied zwischen linearer und nichtlinearer Simulation	52
4.2	Messtechnische Untersuchung des nichtlinearen Verhaltens von Bremsen	58
4.3	Dominante Nichtlinearitäten im Bremssystem.....	60
4.3.1	Nichtlineares Verhalten des Reibmaterials	60
4.3.2	Nichtlinearitäten in Fügestellen.....	61
4.3.3	Nichtlineares Reibgesetz	61
4.4	Schwierigkeiten der nichtlinearen Simulation	61
4.5	Zusammenfassung.....	62
5	Identifikation und Einfluss einiger für das Quietschen relevanter Nichtlinearitäten	63
5.1	Identifikation des nichtlinearen Verhaltens des Reibmaterials	63

5.1.1	Beschreibung des Messaufbaus	64
5.1.2	Messdurchführung.....	66
5.1.3	Ergebnisse.....	70
5.2	Einfluss des experimentell ermittelten Verhaltes des Reibmaterials auf das Bremsenquietschen	72
5.3	Einfluss nichtlinearer Fügestellen auf das Quietschverhalten.....	76
5.4	Zusammenfassung.....	83
6	Beschreibung und Validierung eines Verfahrens zum Lösen hochdimensionaler, nichtlinearer Differentialgleichungssysteme	84
6.1	Methode zur Lösung hochdimensionaler, nichtlinearer Gleichungen	84
6.1.1	Lösen des linearisierten Problems	85
6.1.2	Projektion des nichtlinearen Gleichungssystems auf einen Unterraum	86
6.1.3	Generierung eines geeigneten Unterraums	86
6.1.4	Lösen des niedrigdimensionalen nichtlinearen Gleichungssystems	89
6.1.5	Berücksichtigung von nichtlinearem Materialverhalten	91
6.2	Validierung des Verfahrens mit einem vereinfachten FE-Modell	93
6.3	Ergebnisse für ein industrielles Bremsenmodell.....	98
6.4	Zusammenfassung.....	100
7	Zusammenfassung, Fazit und Ausblick.....	102
7.1	Zusammenfassung.....	102
7.2	Fazit.....	104
7.3	Ausblick.....	104
8	Literaturverzeichnis	106

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Scheibenbremse ist in der Automobilindustrie das am häufigsten verwendete System zur Geschwindigkeitsreduzierung. Dabei wird die kinetische Energie des Fahrzeuges durch Reibung fast vollständig in Wärme umgewandelt. Unter Umständen kann es jedoch vorkommen, dass ein sehr kleiner Teil dieser Energie das Bremssystem in Schwingungen bei Frequenzen von 1 bis 10 kHz versetzt, welche dann vom Fahrer oder der Umgebung als Quietschen wahrgenommen werden können. Objektiv betrachtet hat dies zwar keine Auswirkungen auf die sichere Funktionsweise der Bremse, wird aber subjektiv vom Fahrer oft als ein starker Qualitätsmangel empfunden (siehe z.B. [1], [2]). Nach einem Urteil des Schleswig-Holsteinischen Oberlandesgerichts vom 25.07.2008 (14 U 125/07) stellt eine quietschende Bremse bei einem Oberklassewagen sogar einen erheblichen Mangel dar und berechtigt den Käufer zur Rückgabe des Fahrzeuges. Für die Automobilindustrie können quietschende Bremsen somit zu einem enormen finanziellen Aufwand in Hinblick auf eventuelle Gewährleistungskosten führen und haben unter Umständen sogar eine Rufschädigung der Marke zur Folge.

Da es jedoch bislang keine allgemeingültige Abhilfemaßnahme gegen das Quietschen von Scheibenbremsen gibt, ist es notwendig, jede neue Kombination von Bremssystem (Bremsscheibe, Bremssattel, Bremshalter, Bremsbeläge) und Fahrzeug in zeitaufwändigen und kostenintensiven Versuchen hinsichtlich der Geräuschproblematik zu optimieren. Neben den hohen Kosten ist vor allem die Zeit ein kritischer Faktor. Da die Entwicklungszyklen für neue Fahrzeugmodelle immer kürzer werden, muss auch die Optimierung der Bremse hinsichtlich des Quietschverhaltens schneller werden. Ein wichtiges Werkzeug zur Verringerung der Entwicklungskosten und des Zeitaufwandes ist die Simulation des Bremsenquietschens. Die dabei am häufigsten verwendete Methode ist die sogenannte Komplexe Eigenwertanalyse (KEA, engl. Complex Eigenvalue Analysis) [3]. Dabei werden hochdimensionale lineare Finite-Elemente-Modelle verwendet, welche die zu simulierende Bremse möglichst exakt abbilden. Nach aktuellem Stand der Technik hat diese Methode jedoch nur einen geringen prädiktiven Charakter und wird daher üblicher Weise in Kombination mit experimentellen Untersuchungen eingesetzt. Dies liegt daran, dass die Simulationsergebnisse häufig nicht die Messergebnisse ausreichend genau beschreiben bzw. vorhersagen können. Dadurch ist es nicht möglich, bereits früh im Entwicklungsprozess verlässliche Simulationsergebnisse bezüglich der Quietschneigung einer neu entwickelten Bremse zu erhalten. Ob eine Bremse quietscht oder nicht, steht somit oftmals erst nach experimentellen Untersuchungen an Prototypen fest.

In dieser Arbeit wird daher untersucht, wo die Schwachstellen der aktuellen Simulationsmethode liegen und wie diese beseitigt werden können. Hierbei werden besonders nichtlineare Effekte eine Rolle spielen, da diese, wie in [4] gezeigt, bezüglich des Quietschverhaltens von Kfz-Scheibenbremsen eine elementare Bedeutung haben und bislang in der Simulation vernachlässigt werden.

1.2 Stand der Forschung

Im Allgemeinen wird das Phänomen Quietschen bei Bremsen durch reibungsinduzierte, selbst-erregte Schwingungen erklärt. Dabei existiert nach Durchführung einer Koordinatentransformation auf die statische Ruhelage eine instabile triviale Lösung. Das System schwingt dann mit zunächst exponentiell wachsender Amplitude und erreicht schließlich, bedingt durch Nichtlinearitäten, einen Grenzykel. Diese Grenzykelschwingung (Abbildung 1) kann bei ausreichender Amplitude Schall emittieren, welcher als Quietschen wahrgenommen wird. Die Schallabstrahlung erfolgt zu einem Großteil über die Bremsscheibe, welche dabei wie ein Lautsprecher wirkt. Eine allgemeine Beschreibung dieses Phänomens ist in [5] und [6] zu finden.

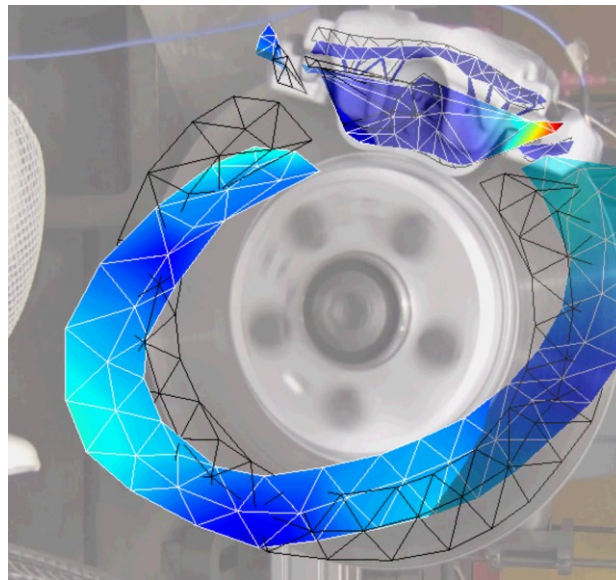


Abbildung 1: Darstellung einer mit einem 3D Scanning-Laser-Vibrometer gemessene Grenzykelschwingung bei 2,6 kHz und einer Amplitude von ca. 1 μm . Die Messung¹ erfolgte, während die Bremse quietschte und keine äußere Anregung aufgebracht wurde.

Die in der Simulation verwendeten, mathematisch-mechanischen Modelle können in zwei Modellklassen und zwei Simulationsmethoden unterteilt werden. Zum einen existieren sogenannte Minimalmodelle, welche häufig aus Starrkörpern oder elastischen Kontinua bestehen und üblicherweise eine überschaubare Anzahl an Freiheitsgraden haben (siehe [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]). Diese Modelle werden häufig im akademischen Umfeld verwendet und sind besonders gut geeignet, um einzelne spezielle Effekte des Bremsenquietschens zu erklären. Auf Grund der in diesen Modellen verwendeten Vereinfachungen, insbesondere hinsichtlich der Geometrie, sind sie jedoch nicht geeignet, das Verhalten realer Bremsen vollumfänglich zu beschreiben.

¹ Durchführung und Auswertung der Messung erfolgte an der Technischen Universität Berlin in Zusammenarbeit mit dem Institut für Mechanik und Meerestechnik der TU Hamburg-Harburg, Herr Tiedemann.

Dem gegenüber werden in der Industrie überwiegend hochdimensionale (bis zu mehreren Millionen Freiheitsgrade) Finite-Element-Modelle (FE-Modelle) verwendet, welche in der Lage sind, das dynamische Verhalten realer Bremsen abzubilden [14]. Diese Modelle umfassen in der Regel alle zum Bremssystem gehörenden Bauteile wie die Bremsscheibe, den Bremssattel, den Halter sowie die Bremsbeläge. Auch Teile des Fahrwerks, wie das Achslager, der Radträger sowie deren Lagerung bis hin zur Anbindung an die Karosserie, sind in den Modellen enthalten. Neben der Geometrie wird zudem der Einfluss des Reibkontaktes sowie die in Folge der Rotation der Bremsscheibe auftretenden gyroskopischen Effekte berücksichtigt (siehe Abschnitt 2.1). Unsymmetrien der Bremsscheibe welche z.B. durch die Kühlrippen entstehen werden dabei vernachlässigt, da diese zu periodischen Koeffizienten in der Bewegungsgleichung führen würden.

Nach aktuellem Stand der Technik besteht jedoch Unsicherheit darüber, ob die für das Bremsenquietschen relevanten Erregermechanismen in den FE-Modellen korrekt abgebildet sind [15]. Durch den Vergleich zwischen FE-Modellen und speziellen, analytischen Minimalmodellen, welche besonders gut einzelne Erregermechanismen beschreiben, kann diese Frage geklärt werden. In Abbildung 2 sind die verschiedenen Modellklassen grafisch dargestellt.

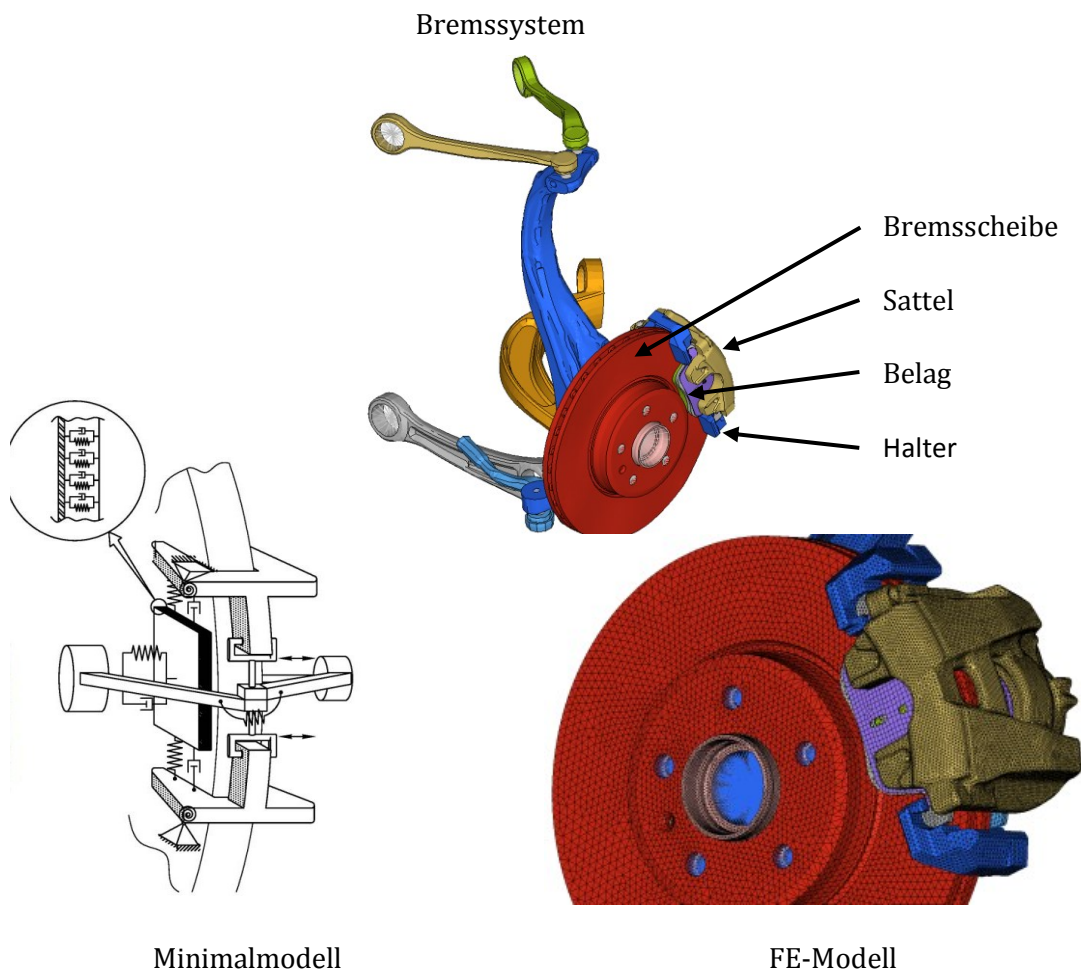


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Bremssystems (oben), Minimalmodell aus [16] (links) und ein typisches FE-Modell (rechts).

Hinsichtlich der Simulationmethode kann zwischen der linearen Stabilitätsanalyse sowie der unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten möglichen Analyse des Grenzykelverhaltens unterschieden werden. Im linearen Fall wird unter Vernachlässigung der Unsymmetrien in der Bremscheibe für beide Modellklassen eine zeitinvariante Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

Betrachtet, wobei $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ die Auslenkung aus der statischen Ruhelage $\mathbf{x}_0$ ist. Durch Berücksichtigung des Reibkontaktes sowie der Rotation der Bremscheibe treten neben der im Allgemeinen symmetrischen Massenmatrix $\mathbf{M}$ und der jeweils symmetrischen Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$ sowie Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ auch schiefsymmetrische Anteile durch die gyroskopische Matrix $\mathbf{G}$ und die zirkulatorische Matrix $\mathbf{N}$ auf. Entscheidend für das Stabilitätsverhalten ist vor allem die Matrix $\mathbf{N}$ und ihre Kombination mit $\mathbf{D}$ und $\mathbf{G}$. Wird das Phänomen Bremsenquietschen qualitativ durch eine instabile, triviale Lösung erklärt, ist somit besonders die korrekte Abbildung der Matrizen $\mathbf{N}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{G}$ entscheidend. Eine detaillierte Ausführung zum Einfluss der einzelnen Matrizen ist in [17] für den allgemeinen Fall dargestellt und in [9] und [18] speziell für das Bremsenquietschen.

Ein generelles Problem der linearen Stabilitätsanalyse ist, dass diese nur das Einsetzen des Quietschens, nicht jedoch die tatsächliche Grenzykelschwingung beschreiben kann. Dadurch ist es unmöglich, quantitative Aussagen über das tatsächliche Quietschverhalten zu treffen. Unter Experten herrscht Einigkeit, dass nichtlineare Effekte nicht vernachlässigt werden können [4]. In [19] ist gezeigt, dass experimentell ermittelte nichtlineare Steifigkeitswerte des Reibmaterials in einem realistischen Bremsenmodellen zu einem subkritischen Verzweigungsverhalten führen können (Abbildung 3). Durch die Koexistenz eines stabilen Grenzykels und einer stabilen trivialen Lösung ist die lineare Stabilitätsgrenze nicht mehr ausreichend, um ein mögliches Quietschen der Bremse auszuschließen.

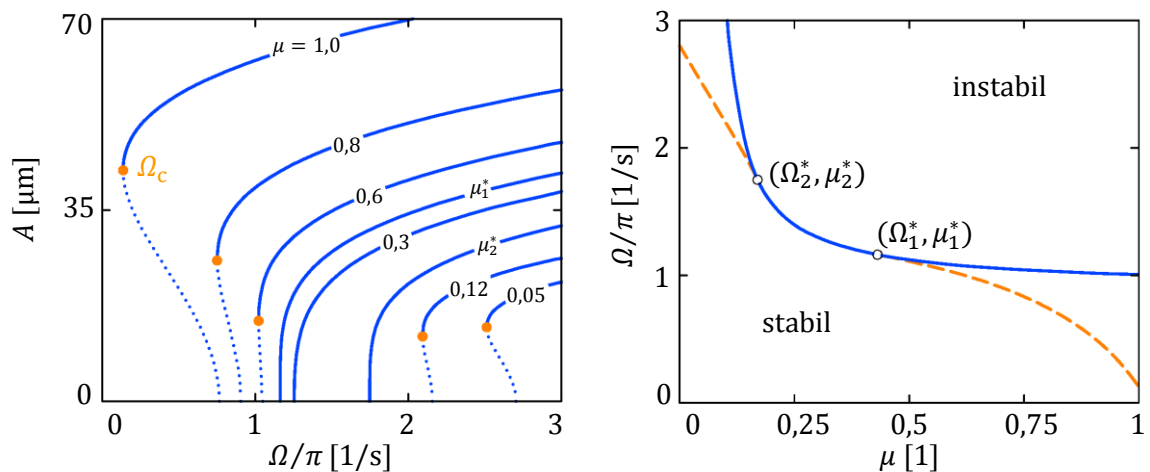


Abbildung 3: (rechts) Verzweigungsdiagramms der Amplitude A in Abhängigkeit des Reibbeiwerts μ und der Scheibendrehzahl Ω ; (links) die daraus resultierende Stabilitätsgrenze der linearen (durchgezogene Linie) und einer nichtlinearen (gestrichelte Linie) Analyse [19].

Ein weiteres Problem stellt das Einbinden von Nichtlinearitäten in die industriellen Bremsenmodelle dar. Aufgrund der Komplexität dieser Modelle kommt als Lösungsverfahren nach heutigem Stand der Technik nur die numerische Zeitintegration in Frage [20]. Doch selbst diese Methode ist nicht in der Lage, ein System mit mehreren Millionen Freiheitsgraden über eine, für die Bestimmung des Grenzykels ausreichend lange Zeit, zu integrieren [20]. Hinzu kommt die Problematik, dass diese Integration zur Bestimmung des Verzweigungsverhaltens für verschiedene Parametersätze und Anfangsbedingungen wiederholt werden müsste. Aus diesem Grund werden bei der industriellen Anwendung der Simulation fast ausschließlich lineare Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt, wobei die Modelle auf Basis der experimentellen Ergebnisse angepasst werden.

Es existieren diverse sogenannte „Model Order Reduction“ (MOR) Techniken mit welchen es möglich ist, die Dimension eines Differentialgleichungssystems effektiv zu reduzieren. Eine Übersicht dieser Methoden ist in [21], [22] und [23] zu finden. Üblicherweise werden diese Methoden für die Reduktion linearer Differentialgleichungen verwendet. In der KEA wird bei der Simulation des Bremsenquietschens eine MOR Technik verwendet welche das hochdimensionale lineare Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit nicht symmetrischen Matrizen auf einen Unterraum projiziert, welcher auf der Auswertung eines vereinfachten Systems mit symmetrischen Matrizen basiert [24]. Des Weiteren existieren „Parametric Model Order Reduction“ (PMOR) Techniken wie z.B. die „Proper Orthogonal Decomposition Method“ (POD) [25]. Mit dieser Methode ist es möglich, parameterabhängige Differentialgleichungssysteme auf einen Unterraum zu projizieren, welcher den Einfluss der Parameter beinhaltet aber selber nicht von diesen abhängig ist. Auch bei nichtlinearen dynamischen Problemen ist es möglich, die Dimension zu reduzieren. Dabei wird die häufig beobachtete Tatsache ausgenutzt, dass die Trajektorie eines diskreten Systems gut in einem Unterraum approximiert werden kann, Beispiele hierfür sind in [26], [27], [28] und [29] dargestellt. Der Vorteil bei der Reduktion der nichtlinearen Gleichungen liegt darin, dass dadurch auch hochdimensionale Probleme gelöst werden können. In [30] ist beschrieben wie es mit Hilfe der MOR Technik möglich ist sogar ein stark nichtlineares dynamisches Problem aus der Elastohydrodynamik ohne hohe Rechenleistung zu lösen. Ein speziell für die Simulation des Bremsenquietschens erfolgsversprechender Ansatz ist in [31] dargestellt. In dieser Arbeit wird die Dimensionsreduktion bei nichtlinear, gekoppelten Strukturen beschrieben. Nichtlinearitäten in Fügstellen haben nach [32] einen großen Einfluss auf das dynamische Verhalten von quietschenden Bremsen. In [33] ist beschrieben wie die Nichtlinearitäten in Fügstellen prinzipiell modelliert werden können und wie deren Einfluss auf das Verzweigungsverhalten von selbsterregten Systemen ist. Auch der prinzipielle Einfluss auf das Bremsenquietschen wird dort anhand eines Minimalmodells behandelt. Durch Anwendung der MOR Techniken wäre es möglich, Nichtlinearitäten aus Fügstellen auch in hochdimensionale FE-Modelle zu berücksichtigen. Dies wurde jedoch bisher nicht erprobt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der aktuelle Stand der Simulation des Bremsenquietschens einen zu geringen prädiktiven Charakter hat. Aus diesem Grund wird die Simulation in der Industrie überwiegend als ein Werkzeug betrachtet, welches die experimentellen Untersuchungen begleitet und unterstützt, sie jedoch nicht ersetzen kann. Für eine effiziente Optimierung des Geräuschverhaltens von Bremsen ist eine Verbesserung der Simulation, hin-

sichtlich des prädiktiven Charakters, speziell seitens der Automobilindustrie gewünscht. Durch die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten könnte die Aussagefähigkeit der Simulation deutlich verbessert werden. Hierfür bietet sich die Anwendung einer für das Bremsenquietschen angepasste MOR Technik an.

1.3 Ziel und Gliederung der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die bereits vorhandene und in der Industrie weit verbreitete Simulationsmethode zur Bestimmung des Quietschverhaltens von Kfz-Scheibenbremsen in Hinblick auf ihren prädiktiven Charakter zu verbessern. Dies wird erreicht in dem zunächst das etablierte Verfahren, die Komplexe Eigenwertanalyse (KEA), anhand von akademischen Minimalmodellen und experimentellen Untersuchungen auf möglicher Schwachstellen und deren Beseitigung untersucht wird. Die daraufhin entwickelten Verbesserungsvorschläge sollen es ermöglichen, die Ergebnisse der Simulation in Bezug auf das Quietschverhalten von Bremsen aussagekräftiger zu machen. Des Weiteren wird die Relevanz von Nichtlinearitäten anhand von experimentellen Untersuchungen und theoretischen Überlegungen betrachtet. Da die KEA nicht in der Lage ist, ein nichtlineares Systemverhalten in der Simulation zu berücksichtigen wird ein Verfahren präsentiert, welches es ermöglicht, auch diese Effekte in hochdimensionalen FE-Bremsenmodelle zu integrieren. Dieses Verfahren basiert auf klassischen MOR Techniken und soll dazu dienen, das Grenzzykelverhalten industrieller FE-Modelle in einer für den Entwicklungsalltag angemessenen Rechenzeit zu ermöglichen. Die zur Erreichung dieser Ziele notwendigen Arbeitsschritte sind in der Folgenden Übersicht dargestellt.

Kapitel 2: Theoretische Untersuchung der etablierten Simulationsmethode

Zu Beginn der Arbeit wird zunächst die etablierte Methode (KEA) Schritt für Schritt untersucht, um zu überprüfen, ob mit dieser Methode alle relevanten Effekte abgebildet werden können. Dies erfolgt anhand eines industriellen FE Bremsenmodells und akademischen Minimalmodellen. Dabei sollen mögliche Schwachstellen identifiziert werden. Die untersuchten Effekte sind

- der Einfluss des Reibkontaktes auf das dynamische System (zirkulatorische Terme),
- gyroskopische Einflüsse aufgrund der Rotation der Bremsscheibe und
- die korrekte Abbildung verschiedener Dämpfungseffekte wie
 - reibungsinduzierte Dämpfung,
 - viskose Dämpfung,
 - Materialstrukturdämpfung und
 - Dämpfung in Fügestellen.

Neben der Überprüfung dieser für die Stabilität grundlegenden relevanten Effekte erfolgt auch eine genaue Betrachtung des mathematischen Verfahrens, welches bei der KEA zur Lösung des Eigenwertproblems verwendet wird. Auf Grundlage der auf diese Weise identifizierten Schwierigkeiten werden Lösungsvorschläge erarbeitet, welche es ermöglichen, die Simulationsmethode in ihrer Aussagefähigkeit zu verbessern.

Kapitel 3: Vergleich der etablierten Simulationsmethode mit experimentellen Untersuchungen

Im zweiten Schritt werden verschiedene experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Das Ziel hierbei ist, weitere Effekte, die in der Simulation bisher nicht enthalten sind, zu identifizieren. Dabei wird mit der messtechnischen Untersuchung an Einzelkomponenten begonnen und anschließend das Gesamtsystem mit zunächst nicht rotierender Bremsscheibe betrachtet. Abschließend wird das quietschende Bremssystem unter Verwendung eines 3D Scanning Laser Systems vermessen und die Ergebnisse mit denen der KEA verglichen. Für die dabei identifizierten bisher nicht berücksichtigten Effekte werden - wie in dem Kapitel zuvor - Möglichkeiten dargestellt, wie diese in der KEA berücksichtigt werden können.

Kapitel 4: Relevanz von Nichtlinearitäten

In diesem Kapitel wird die prinzipielle Relevanz von Nichtlinearitäten untersucht. Zunächst werden einzelne während der experimentellen Untersuchung beobachtete Effekte an Hand von analytischen, nichtlinearen Minimalmodellen beschrieben. Damit wird gezeigt, dass diese Phänomene nur unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten erklärt werden können. Des Weiteren werden Messergebnisse zum Verzweigungsverhalten einer realen Bremse gezeigt, welche die Existenz von subkritischen Hopfverzweigungen belegen.

Kapitel 5: Identifikation und Einfluss einiger für das Quietschen relevanter Nichtlinearitäten

Nach Überprüfung der prinzipiellen Relevanz von Nichtlinearitäten erfolgt in diesem Kapitel eine genaue Untersuchung einiger der in einem Bremssystem tatsächlich vorhandenen Nichtlinearitäten. Dabei wird zunächst das nichtlineare Verhalten des Reibmaterials untersucht. Dazu wird ein Verfahren präsentiert, welches es ermöglicht den Einfluss der dynamischen Amplitude auf das Materialverhalten der Beläge in normaler und tangentialer Richtung experimentell zu identifizieren. Nach Durchführung von Messungen an einem Beispiel-Belag, werden die gemessenen Ergebnisse in ein vereinfachtes, analytisches Bremsenmodell implementiert. Dadurch soll der prinzipielle Einfluss dieser Nichtlinearität auf das Quietschverhalten untersucht werden. Des Weiteren werden die Ursachen und Auswirkungen von Nichtlinearitäten in Fügstellen betrachtet und ebenfalls hinsichtlich ihres Beitrages zum Grenzzykelverhalten untersucht.

Kapitel 6: Beschreibung und Validierung eines Verfahrens zum Lösen hochdimensionaler, nichtlinearer Differentialgleichungssysteme

Das letzte Kapitel widmet sich der Fragestellung, ob es möglich ist, die hochdimensionalen industriellen FE-Modelle durch Nichtlinearitäten zu erweitern und mit einem angemessenen Rechenaufwand auf ihr Grenzzykelverhalten hin zu untersuchen. Dazu wird eine speziell für dieses Problem angepasste MOR Technik beschrieben, welche es ermöglicht, das Grenzzykelverhalten hochdimensionaler nichtlinearer Differentialgleichungen mit wenig Rechenaufwand zu lösen. Die Methode basiert auf einer Projektion des hochdimensionalen Systems auf einen geeigneten, niedrigdimensionalen Unterraum. Dabei werden die Freiheitsgrade so massiv reduziert, dass auch die Bestimmung des Verzweigungsverhaltens möglich wird. Entscheidend ist dabei, dass die Modelreduktion keinen Einfluss auf die wesentlichen Systemeigenschaften

hat. Das Verfahren wird zunächst anhand eines vereinfachten FE-Modells validiert und anschließend an einem hochdimensionalen industriellen Modell getestet.

Die Erstellung der Arbeit erfolgte im Rahmen des IGF-Vorhaben 16799N der Forschungsvereinigung GFaI welches über die AiF im Rahmen des Programms zur Förderung der Industriellen Gemeinschaftsforschung (IGF) vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages gefördert wurde. Einige Vorarbeiten entstanden im Rahmen eines von der DFG geförderten Projektes mit dem Titel „Schnelles Berechnungsverfahren für Reibungskräfte in Bremsen“. Die Bearbeitung des IGF-Vorhaben 16799N mit dem Titel „Rechnergestützte Verfahren zur Entwicklung geräuscharmer Bremsen“ erfolgte an dem Fachgebiet Mechatronische Maschinendynamik des Instituts für Mechanik der Technische Universität Berlin von Prof. Dr.-Ing. Utz von Wagner, dem Institut für Mathematik der Technische Universität Berlin von Prof. Dr. Volker Mehrmann sowie dem Institut für Mechanik und Meerestechnik der Technische Universität Hamburg-Harburg von Prof. Dr. Norbert Hoffmann. Daher wird an Stellen der Arbeit wo gegebenenfalls in Zusammenarbeit gewonnene Erkenntnisse dargestellt sind dies verdeutlicht. Des Weiteren entstanden im Rahmen dieses Projektes die Veröffentlichungen [34], [35], [36], [37], [38], [39] und [40].

Gefördert durch:



aufgrund eines Beschlusses
des Deutschen Bundestages

Parallel zu einigen in dieser Arbeit behandelten Themen wurden an der Technische Universität Berlin die studentischen Arbeiten [41], [42], [43], [44], [45] und [46] angefertigt, auf die ebenfalls an den entsprechenden Stellen verwiesen wird.

2 Theoretische Untersuchung der etablierten Simulationsmethode

Die in der Industrie am häufigsten verwendete Methode zur Simulation des Bremsenquietschens ist die Komplexe Eigenwertanalyse (KEA) [47]. Dabei werden mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente Bremsenmodelle mit mehreren Millionen Freiheitsgraden erstellt. Diese Modelle beinhalten üblicherweise alle für das Quietschen relevanten Bauteile einer Kfz-Scheibenbremse, also die Bremsscheibe, den Bremsträger, den Bremssattel, sowie die Beläge und das Achslager. Häufig werden auch weitere Teile der Radaufhängung sowie deren Anbindung an die Karosserie berücksichtigt. Entscheidend neben der korrekten geometrischen und physikalischen Beschreibung dieser Bauteile sind in Hinblick auf die Simulation des Quietschverhaltens jedoch vor allem die Rotation der Bremsscheibe sowie die Berücksichtigung der Kontaktkräfte zwischen den Belägen und der Bremsscheibe. Im Allgemeinen führt die Berücksichtigung aller relevanten Effekte auf ein nichtlineares, nicht zeitautonomes, inhomogenes Differentialgleichungssystem der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{h}(t). \quad (2.1)$$

Die im industriellen Alltag verwendete Simulationsmethode (KEA) beschränkt sich jedoch auf die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens der linearisierten Störungsgleichung. Sei $\mathbf{y} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ die Verschiebung gegenüber der statischen Ruhelage $\mathbf{q}_0$ so ergibt sich durch die Anwendung der Taylorreihenentwicklung die linearisierte Störungsgleichung zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \bigg|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \right) \dot{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \bigg|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \right) \mathbf{y} + \mathbf{h}(t). \quad (2.2)$$

Wenn $\mathbf{q}_0$ die konstante statische Ruhelage ist und Gleichung (2.1) erfüllt, folgt aus (2.2)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \left(-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \bigg|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \right) \dot{\mathbf{y}} + \left(-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \bigg|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \right) \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Unter Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit von $\mathbf{f}$ sind auch die Terme vor $\dot{\mathbf{y}}$ bzw. $\mathbf{y}$ konstant in der Zeit. Durch Einführung der Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ kann Gleichung (2.3) dann als

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

geschrieben werden. Dieses lineare, zeitautonome, homogene Differentialgleichungssystem 2. Ordnung beschreibt näherungsweise das dynamische Verhalten einer realen Bremse, unter Berücksichtigung des anliegenden Bremsdrucks, der Rotation einer symmetrischen Bremsscheibe sowie dem Reibkontakt zwischen Belag und Bremsscheibe.

Zum Lösen des Differentialgleichungssystems (2.4) wird der Ansatz $\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{y}}e^{\lambda t}$ verwendet. Dies führt auf das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q})\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q}) = 0$ können Paare konjugiert komplexer Eigenwerte λ bestimmt werden. Die zugehörigen ebenfalls konjugiert komplexen Eigenvektoren $\hat{\mathbf{y}}$ können durch Einsetzen von λ in Gleichung (2.5) bestimmt werden. Aufgrund

der Struktur des linearen Differentialgleichungssystems können Eigenwertpaare (λ_k, λ_k^*) mit positivem Realteil existieren. Die dazugehörigen Paare konjugiert komplexer Eigenvektoren $(\hat{\mathbf{y}}_k, \hat{\mathbf{y}}_k^*)^2$ beschreiben die instabilen Schwingformen. Es ist offensichtlich, dass $\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{y}}_k e^{\lambda_k t} + \hat{\mathbf{y}}_k^* e^{\lambda_k^* t}$ eine Schwingung mit exponentiell wachsender Amplitude ist. In der Praxis werden daher die Lösungen, welche sich aus den Eigenwerten mit positivem Realteil zusammensetzen, dem Quietschen zugeordnet. Im folgenden Abschnitt wird an Hand eines Beispielmmodells detailliert gezeigt, wie in dem kommerziellen FE-Programm PERMAS die für die KEA benötigten Gleichungen erstellt und anschließend gelöst werden [24].

2.1 Beschreibung der etablierten Simulationsmethode

2.1.1 Das verwendete FE-Bremsenmodell

Für die grundlegende Analyse und die Erarbeitung möglicher Verbesserungen der etablierten Simulationsmethode wird ein Bremsenmodell verwendet, welches dem aktuellen Stand der Technik entspricht. Ein solches Modell wurde von einem deutschen Automobilhersteller zur Verfügung gestellt (siehe Abbildung 4). Es handelt sich dabei um ein FE-Bremsenmodell einer innenbelüfteten Vorderachsscheibenbremse. Das Modell wurde in der Serienentwicklung eingesetzt und so aufbereitet, dass es dem aktuellen Stand der Technik entspricht. Es beinhaltet alle relevanten Komponenten der Bremse, also Bremsscheibe, Halter, Sattel, Kolben und Beläge. Zudem umfasst es die Achslagerung sowie alle Teile der Radaufhängung. Die Diskretisierung aller Bauteile führt zu ca. 800.000 Freiheitsgrade. Ursprünglich wurde das Modell in dem FE-Programm ABAQUS erstellt, dann aber durch die Firma INTES in das hier verwendete Programm PERMAS übersetzt.

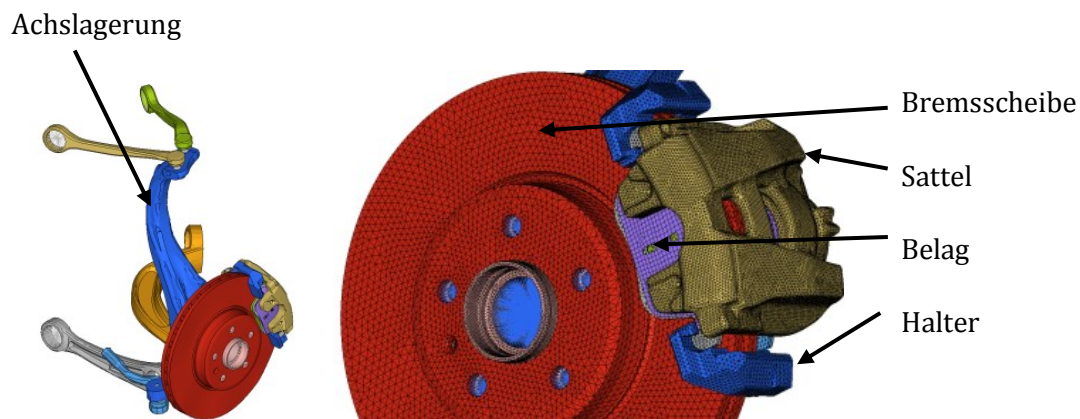


Abbildung 4: Gesamtansicht des FE-Bremsenmodells

2.1.2 Beschreibung der einzelnen Simulationsschritte

Der Zustand, den das Modell zu Beginn der Simulation beschreibt, ist zu vergleichen mit dem einer unbelasteten, stehenden Bremse. In diesem Zustand sind alle potentiellen Kontaktgebiete definiert, aber noch nicht geschlossen. Auch die Rotation der Bremsscheibe spielt zunächst keine

² $()^*$ kennzeichnet den konjugiert komplexen Partner

Rolle. Um alle Effekte zu berücksichtigen, welche durch das Aufbringen eines Bremsdruckes, die Rotation der Bremsscheibe sowie die daraus resultierenden Reibkräfte entstehen, sind mehrere Rechenschritte notwendig, die hier im Folgenden detailliert erörtert werden.

Die Bewegungsgleichung des Modells hat zunächst die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

wobei $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit sind und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv semidefinit und symmetrisch ist. $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ist der Verschiebungsvektor, welcher den aktuellen Deformationszustand des Systems beschreibt. Die Existenz der Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$ ist in diesem Berechnungsschritt davon abhängig ob Effekte wie Materialstrukturdämpfung oder viskose Dämpfung in der Modellierung berücksichtigt sind.

Schritt 1: Nichtlineare, statische Analyse zur Bestimmung des Kontaktzustandes

Der erste Schritt in der Berechnung ist eine statische, nichtlineare Kontaktanalyse (Abbildung 5). Hierbei wird der Bremsdruck als äußere Last aufgebracht und der Bremsscheibe eine Rotationsgeschwindigkeit Ω_{Ref} vorgegeben. Dabei wird jedoch nicht die Bremsscheibe im Modell tatsächlich gedreht, sondern lediglich die einzelnen Knoten mit einer Geschwindigkeitsinformation versehen. Diese Definition ist notwendig, um die Reibkräfte im Kontakt richtig abzubilden. Dadurch werden die Einflüsse einer nicht rotationssymmetrischen Bremsscheibe jedoch vernachlässigt. Das Ergebnis der Kontaktanalyse ist die Information, an welchen Stellen (Knoten) es zwischen den Komponenten tatsächlich zum Kontakt kommt und welche Normalkräfte dort wirken. Aus den Normalkräften und der Relativgeschwindigkeit können anschließend die Reibkräfte ermittelt werden. Letztlich wird die sich infolge dieser Kräfte einstellende statische Ruhelage $\mathbf{q}_0$ bestimmt.

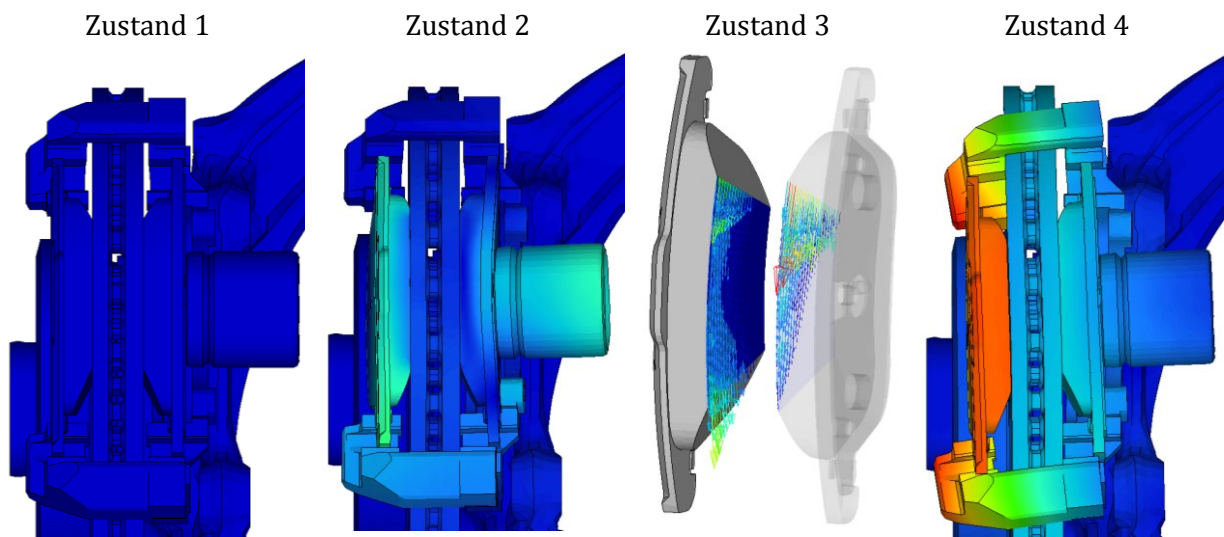


Abbildung 5: Unbelastetes System (Zustand 1), Bestimmung der Kontaktgebiete und Kontaktkräfte in Normalenrichtung auf Grund des statischen Bremsdruckes (Zustand 2), Bestimmung der Reibkräfte am Bremsbelag und der Bremsscheibe (Zustand 3), Deformation aufgrund der Reibungskräfte (Zustand 4).

Für die weiterführenden Berechnungsschritte wird das Modell unter Berücksichtigung des zuvor bestimmten Zustandes neu erstellt. Hierfür wird der Kontaktzustand „eingefroren“ und die geschlossenen Kontakte in Normalenrichtung durch Kontaktsteifigkeiten (MPCs³) welche mit dem Penalty-Verfahren bestimmt wurden gekoppelt. Nach diesem Schritt werden die Knotenverschiebungen mit $\mathbf{y} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ relativ zur statischen Ruhelage beschrieben. Der Anteil der Kontaktkräfte in tangentialer Richtung wird nach den Verschiebungen $\mathbf{y}$ bzw. Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{y}}$ partiell abgeleitet und linearisiert. Dadurch ergeben sich die Erweiterungen $\mathbf{K}_R$ zur Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{D}_R$ zur Dämpfungsmatrix. Der Index R symbolisiert, dass diese zusätzlichen Terme aus dem Reibkontakt resultieren. Diese Erweiterungen müssen weder symmetrisch noch schiefssymmetrisch sein. Durch die detaillierte Betrachtung der Kontaktkraft an einer Stelle des Kontaktgebietes kann dieses Vorgehen besser nachvollzogen werden. Sei $\mathbf{f}_N$ die vektorielle Normalkraft im Kontakt welche immer senkrecht zu der Kontaktfläche steht. Damit ist sowohl die Richtung als auch der Betrag dieser Kraft von den Verschiebungen $\mathbf{y}$ abhängig. Für die in diesem Kontakt wirkende Reibkraft gilt im Falle eines konstanten Reibwertes μ

$$\mathbf{f}_R = \mu |\mathbf{f}_N(\mathbf{y})| \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|} \quad (2.7)$$

wobei $\mathbf{v}_{rel}$ die Relativgeschwindigkeit zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag in dem betrachteten Kontaktpunkt ist, welche von den Verschiebungen $\mathbf{y}$ sowie den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{y}}$ abhängig ist. Durch Linearisierung der Kontaktkräfte

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_N(\mathbf{y}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_N(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}=\mathbf{0}} \mathbf{y} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}=\mathbf{0}} \dot{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

wird deutlich, dass die Normalkraft lediglich in der Matrix $\mathbf{K}_R$ erscheint und die Reibkraft sowohl in $\mathbf{K}_R$ als auch $\mathbf{D}_R$ enthalten ist. Eine detaillierte Beschreibung der Einflüsse der Kontaktkräfte auf die geschwindigkeits- und wegproportionalen Terme in der Differentialgleichung ist in [15] gegeben. Da die Relativgeschwindigkeit in der Reibkraft von der Rotationsgeschwindigkeit der Bremsscheibe abhängig ist, muss somit auch die Matrix $\mathbf{D}_R$ von dieser abhängen.

Die aus der Reibkraft resultierenden wegproportionalen Terme in $\mathbf{K}_R$ sind nicht zwingend symmetrisch, es handelt sich somit um sogenannte Folgelasten (siehe [48]). Diese nichtsymmetrischen Anteile (zirkulatorischen Terme) sind, bei einer mindestens positiv semidefiniten Dämpfungsmatrix ein notwendiges Kriterium für das Auftreten von Instabilitäten bzw. Eigenwerten mit positivem Realteil. Nach Durchführung des ersten Berechnungsschritts wird das Ausgangssystem (2.6) zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_R(\Omega))\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_R)\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

erweitert.

³ MPCs (Multi Point Constraints) werden in der FE-Modellierung verwendet um eine Kopplung zwischen zwei oder mehreren Freiheitsgraden zu erzwingen.

Schritt 2: Lineare statische Analyse zur Bestimmung der gyrokopischen Matrix und der geometrischen Steifigkeitsmatrix

Im nächsten Schritt wird das neu aufgebaute Modell, welches bereits die Kontaktbedingungen enthält, verwendet. Ziel dieses Rechenschrittes ist es, die Einflüsse aus der Rotation der Bremscheibe in der linearisierten Modellbildung zu berücksichtigen. Allgemein resultieren aus der Berücksichtigung der Rotation der Bremscheibe neben den gyrokopischen Effekten weitere Einflüsse. Aufgrund der nicht rotationssymmetrischen Geometrie der Bremscheibe ändern sich die Systemeigenschaften je nach Position der Scheibe. Bei einer konstanten Rotationsgeschwindigkeit ändern sich die Systemmatrizen somit periodisch über der Zeit. Damit wäre das System nicht mehr zeitinvariant, wodurch die Bestimmung des Stabilitätsverhaltens nicht mehr durch die bloße Bestimmung von Eigenwerten möglich ist. In [49] ist gezeigt, welchen Einfluss dieser Effekt hat und wie er unter Verwendung der Floquet-Theorie in der Simulation berücksichtigt werden kann. Auch wenn dieser Effekt einen unter Umständen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Stabilitätsverhalten hat, wird dieser in der KEA vernachlässigt [50]. Zur Berücksichtigung der gyrokopischen Effekte wird auf die rotierenden Teile der Bremse (Bremscheibe, Lager, usw.) eine äußere Last aufgeprägt, welche aus der Rotation dieser Bauteile resultieren würde. Durch Variation dieser Kräfte nach den Verschiebungen $\mathbf{y}$ und $\dot{\mathbf{y}}$ ist es möglich die gyrokopische Matrix $\mathbf{D}_G$, welche schiefsymmetrisch ist, zu bestimmen. Da die auf die rotierenden Teile wirkenden Kräfte infolge der Rotationsgeschwindigkeit Ω proportional zu dieser sind, ist auch die gyrokopische Matrix proportional zu Ω und kann als $\mathbf{D}_G(\Omega) = \mathbf{D}_G\Omega$ geschrieben werden.

Mithilfe einer statischen Berechnung kann der innere Spannungszustand der rotierenden Bauteile bestimmt werden. Damit kann die sogenannte geometrische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_G$ berechnet werden. Allgemein wird diese Matrix häufig in Verbindung mit Knicken oder Beulen verwendet und beinhaltet den Einfluss der inneren Spannungen welche am Ausgelenkten System angreifen. Sie ist symmetrisch aber nicht zwingend positiv definit und führt in dem hier betrachteten Fall, bei sehr hohen Drehzahlen, zu einer Versteifung der Bremscheibe. Die Abhängigkeit dieser Matrix gegenüber der Rotationsgeschwindigkeit Ω ist in hier quadratisch.

Die Bewegungsgleichung des Bremsenmodells hat somit die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_R(\Omega) + \mathbf{D}_G(\Omega))\dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_R + \mathbf{K}_G(\Omega))\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

und beinhaltet alle Effekte, welche üblicherweise in der KEA berücksichtigt werden.

2.1.3 Beschreibung des Verfahrens zum Lösen des Eigenwertproblems

Da es sich bei der oben hergeleiteten Differentialgleichung um ein lineares, zeitautonomes, homogenes Gleichungssystem handelt, ist für die Bestimmung der Lösung das Lösen eines Eigenwertproblems nötig. Im Folgenden ist detailliert erläutert wie dies in der KEA erfolgt [24], [51].

Schritt 3: Reelle Eigenwertanalyse

Die Bestimmung der Eigenwerte der Gleichung (2.10), welche mit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega) &= \mathbf{D} + \mathbf{D}_R(\Omega) + \mathbf{D}_G(\Omega) \text{ und} \\ \mathbf{Q}(\Omega) &= \mathbf{K} + \mathbf{K}_R + \mathbf{K}_G(\Omega) \end{aligned} \quad (2.11)$$

als

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}(\Omega)\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}(\Omega)\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

geschrieben werden kann, ist aufgrund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden und der Tatsache, dass die Matrizen $\mathbf{P}(\Omega)$ und $\mathbf{Q}(\Omega)$ nicht symmetrisch sind, nur mit großem Rechenaufwand möglich. Des Weiteren müsste zur Berücksichtigung des Parameters Ω das Differentialgleichungssystem mehrfach gelöst werden, wodurch sich die Rechenzeit abermals erhöht. Aus diesem Grund wird in dem von PERMAS verwendeten Verfahren zum Lösen der Differentialgleichung zunächst das vereinfachte Gleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

betrachtet. Dabei werden alle geschwindigkeitsproportionalen Terme sowie die nicht symmetrischen Anteile der Matrizen vernachlässigt. Das vereinfachte System ist zudem unabhängig von der Rotationsgeschwindigkeit Ω der Bremsscheibe. Die MPCs, welche die geschlossenen Kontakte miteinander verbinden, werden jedoch berücksichtigt. Zum Lösen des Systems muss das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

gelöst werden. Da $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit sind, existieren rein imaginäre Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ und reale Eigenvektoren $\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \dots, \hat{\mathbf{y}}_{2n}$ welche die Gleichung (2.14) erfüllen. In Abbildung 6 ist die Schwingform, welche durch einen der realen Eigenvektoren beschrieben wird, grafisch gezeigt.

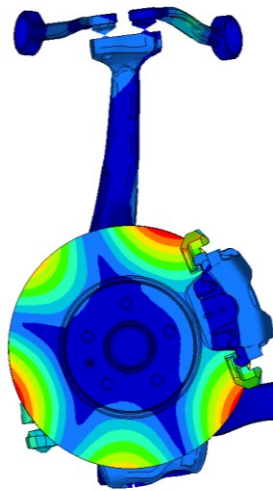


Abbildung 6: Reelle Eigenform bei 1859 Hz

Schritt 4: Komplexe Eigenwertanalyse

Wie bereits oben erwähnt ist das Lösen des ursprünglichen Gleichungssystems (2.10) auf Grund der Struktur der Matrizen und der Parameterabhängigkeit nur mit hohem Rechenaufwand möglich. Aus diesem Grund wird das System auf den Unterraum $\mathcal{R}_{Re}$, welcher durch die $n \times d$ dimensionale Unterraummatrix $\mathbf{R}_{Re}$ definiert ist (siehe Gleichung (2.18)), projiziert. Für $d \ll n$ ist das projizierte Gleichungssystem deutlich niedrigdimensionaler als das ursprüngliche System und kann somit einfacher gelöst werden. Durch Einsetzen der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{R}_{Re} \mathbf{q}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{R}_{Re} \dot{\mathbf{q}}, \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \mathbf{R}_{Re} \ddot{\mathbf{q}}\end{aligned}\tag{2.15}$$

und linksseitige Multiplikation der Gleichung mit $\mathbf{R}_{Re}^T$ ergibt sich das reduzierte Differentialgleichungssystem

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \left(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}}_R(\Omega) + \tilde{\mathbf{D}}_G(\Omega) \right) \dot{\mathbf{q}} + \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}_R + \tilde{\mathbf{K}}_G(\Omega) \right) \mathbf{q} = \mathbf{0}\tag{2.16}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{R}_{Re}^T \mathbf{M} \mathbf{R}_{Re}, \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{R}_{Re}^T \mathbf{D} \mathbf{R}_{Re}, \\ \tilde{\mathbf{D}}_R(\Omega) &= \mathbf{R}_{Re}^T \mathbf{D}_R(\Omega) \mathbf{R}_{Re}, \\ \tilde{\mathbf{D}}_G(\Omega) &= \mathbf{R}_{Re}^T \mathbf{D}_G(\Omega) \mathbf{R}_{Re}, \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{R}_{Re}^T \mathbf{K} \mathbf{R}_{Re}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_R &= \mathbf{R}_{Re}^T \mathbf{K}_R \mathbf{R}_{Re}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_G(\Omega) &= \mathbf{R}_{Re}^T \mathbf{K}_G(\Omega) \mathbf{R}_{Re}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Eine Besonderheit bei der Verwendung von $\mathbf{R}_{Re}^T$ für die linksseitige Multiplikation ist, dass die Symmetrieeigenschaften der Matrizen erhalten bleiben wodurch eine prinzipielle Aussage über das Stabilitätsverhalten des reduzierten Systems weiterhin möglich ist. Alternativ könnte z.B. eine Matrix verwendet werden welche sich aus den Linkseigenvektoren zusammensetzt. Diese müssten dann jedoch zunächst bestimmt werden. Das d -dimensionale Gleichungssystem (2.16) kann durch Transformation in den Zustandsraum bezüglich der Eigenwerte und Eigenvektoren, gelöst werden. Die dabei bestimmten $2d$ Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ treten in konjugiert komplexen Paaren auf. Diese Lösung kann mit Gleichung (2.15) in die physikalischen Koordinaten $\mathbf{y}$ zurück transformiert werden. Die Qualität der Lösung hängt davon ab, ob der Unterraum $\mathcal{R}_{Re}$ eine gute Näherung für die exakte Lösung enthält.

In dem etablierten Verfahren, welches auch von PERMAS verwendet wird, setzt sich die Unterraummatrix $\mathbf{R}_{Re}$ aus den Eigenvektoren des vereinfachten Systems (2.13) zusammen. Dabei wird der Spann der ersten d Eigenvektoren, welche zu Eigenwerten mit der kleinsten Frequenz gehören, verwendet. Die Unterraummatrix hat somit die Form

$$\mathbf{R}_{Re} = [\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \dots, \hat{\mathbf{y}}_d]\tag{2.18}$$

wobei gilt $|\text{Im}(\lambda_1)| < |\text{Im}(\lambda_2)| < \dots < |\text{Im}(\lambda_d)|$. Da $\mathbf{R}_{Re}$ unabhängig von der Rotationsgeschwindigkeit der Bremscheibe ist, muss es auch bei Variation dieser nur einmal für eine Referenzdrehzahl erzeugt werden. Dieses Vorgehen ermöglicht eine deutliche Einsparung von Rechenzeit und wird in PERMAS mit dem Befehl „MODAL ROTATING“ aufgerufen. In Abbildung

7 bis Abbildung 10 ist exemplarisch eine Lösung des Gleichungssystems (2.10) gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die komplexe Schwingform im Falle einer realen Darstellung mit Betrag der Auslenkung über die Zeit t , innerhalb einer Periode T , nie einen Zustand erreicht, in welchem alle Auslenkungen Null sind. Die Ähnlichkeit zu der Schwingform des realen Eigenvektors (Abbildung 6) ist jedoch zu erkennen. Der Plot der Eigenwerte mit positivem Realteil (Abbildung 11) zeigt die möglichen Quietschfrequenzen. Für das untersuchte Beispielmmodell existieren somit 10 potentielle Quietschfrequenzen mit dazugehörigen Schwingformen.

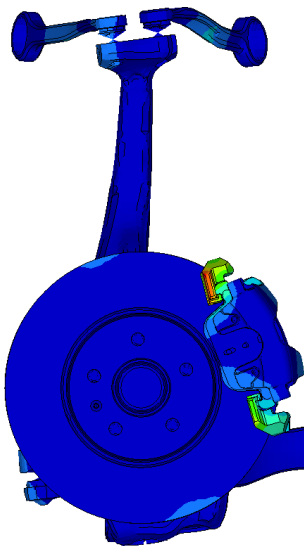


Abbildung 7:
komplexe Eigenform
bei 1873 Hz mit posi-
tivem Realteil bei
 $t = 0$

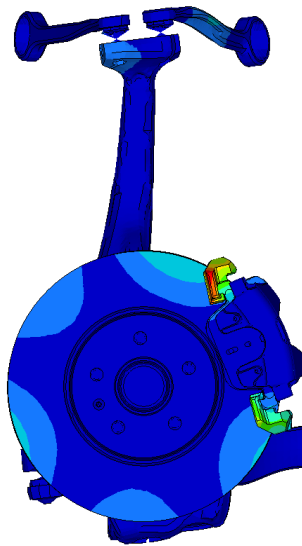


Abbildung 8:
komplexe Eigenform
bei 1873 Hz mit posi-
tivem Realteil bei
 $t = \frac{1}{4}T$

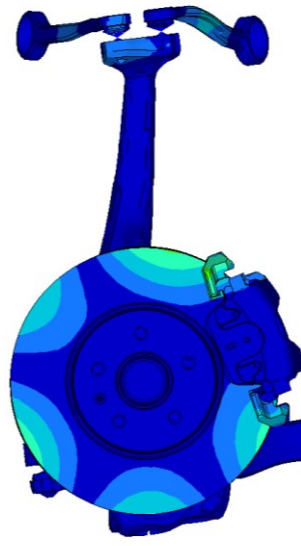


Abbildung 9:
komplexe Eigenform
bei 1873 Hz mit posi-
tivem Realteil bei
 $t = \frac{2}{4}T$

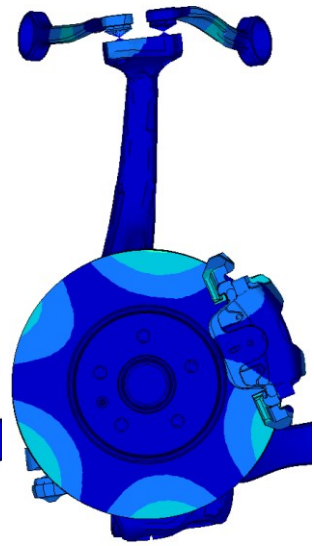


Abbildung 10:
komplexe Eigenform
bei 1873 Hz mit posi-
tivem Realteil bei
 $t = \frac{3}{4}T$

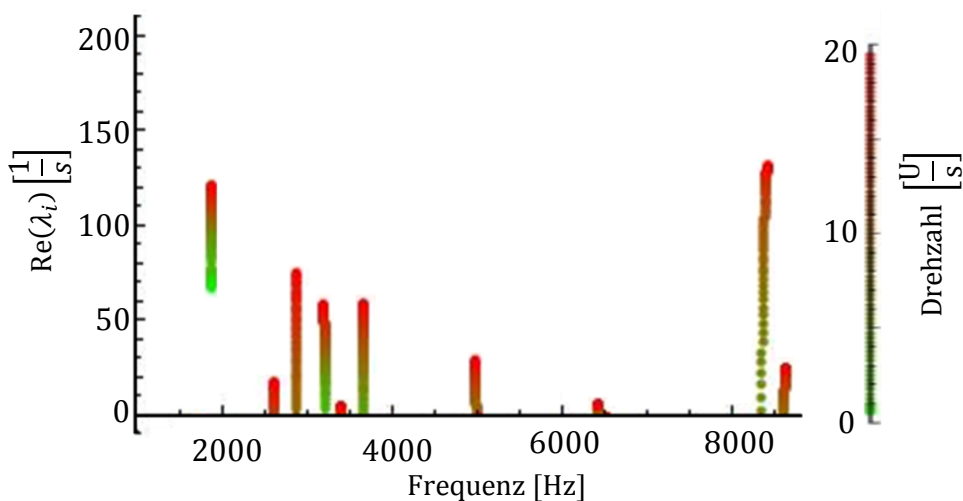


Abbildung 11: Darstellung der berechneten Eigenwerte λ_i des Bremsenmodells mit positivem Realteil unter Variation der Drehzahl.

2.2 Validierung der etablierten Simulationsmethode mit Minimalmodellen

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob die oben beschriebene Simulationsmethode tatsächlich alle für das Bremsenquietschen relevanten Effekte korrekt abbildet. Für diesen Zweck werden sogenannte Minimalmodelle erstellt, welche die Effekte separiert beinhalten. Diese Minimalmodelle haben den Vorteil, dass sie leicht verständlich und analytisch lösbar sind. Die analytische Lösung kann anschließend mit der Lösung eines FE-Modells, welches streng nach dem in Kapitel 2.1 beschriebenen Schema erstellt und gelöst wird, verglichen werden. Damit lässt sich sagen, ob der spezielle Effekt in der Modellbildung enthalten ist und zu nachvollziehbaren Ergebnissen führt.

2.2.1 Reibungsinduzierte Dämpfung

Die Berücksichtigung von Dämpfung in FE-Bremsenmodellen ist nach aktuellem Stand der Technik nicht ausreichend gegeben [52]. Oftmals wird die Dämpfung sogar gänzlich vernachlässigt, da davon ausgegangen wird, dass dies dazu führt, dass alle möglicherweise instabilen Schwingformen identifiziert werden. Dadurch werden jedoch auch Schwingformen als instabil bestimmt welche bei Berücksichtigung der Dämpfung stabil wären. Es gibt in Bremssystemen verschiedene Effekte, welche eine energieabführende Wirkung haben. Diese Effekte werden im Folgenden beschrieben und hinsichtlich ihrer korrekten Berücksichtigung in der KEA untersucht.

Wie bereits in Abschnitt 2.1.2 beschrieben können Reibkontakte in einem dynamischen Modell zu geschwindigkeitsproportionalen Termen in den linearisierten Bewegungsgleichungen führen (siehe: [8], [11]). Zur Überprüfung, ob dieser Effekt in der KEA korrekt berücksichtigt ist, wird das in Abbildung 12 dargestellte Minimalmodell betrachtet. Mit Minimalmodell ist in diesem Zusammenhang ein Modell gemeint, welches den zu untersuchenden Effekt abbildet und gleichzeitig möglichst einfach gehalten ist. Der Vorteil eines solchen Modells besteht darin, dass somit der zu untersuchende Effekt an sich besser verstanden werden kann. In Bezug auf die Frage, ob ein bestimmter Effekt in der KEA korrekt abgebildet ist, wäre die Betrachtung eines komplexen Modells eher hinderlich, da in diesem Fall das Systemverhalten nicht mit einem bestimmten Effekt begründet werden kann.

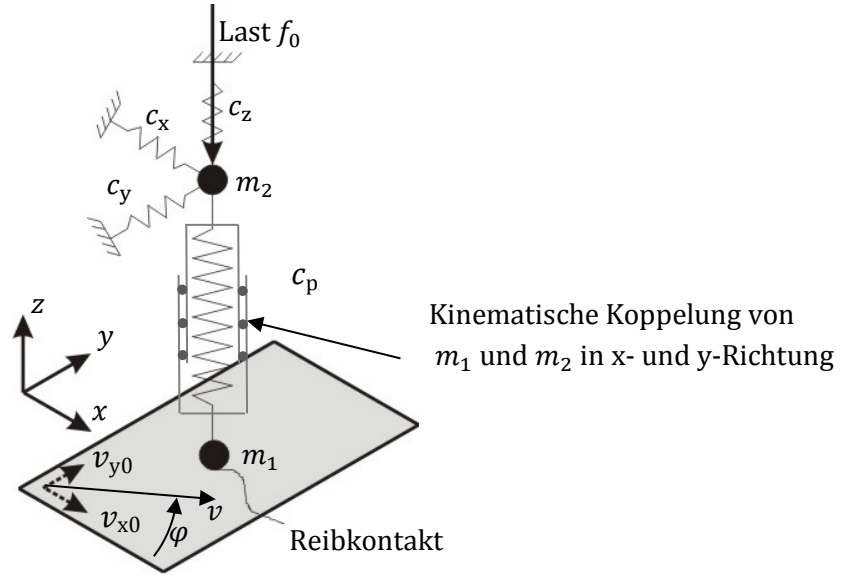


Abbildung 12: Minimalmodell zur Untersuchung von reibungsinduzierter Dämpfung

Das analytische Modell besteht aus zwei Massepunkten, die in x - und y -Richtung starr gekoppelt sind. In z -Richtung sind sie über eine Feder mit der Federkonstante c_p verbunden. Die untere Punktmasse befindet sich im Reibkontakt mit einer starren Ebene, die normal zur z -Achse steht und sich mit konstanter Geschwindigkeit v_{x0} in x -Richtung bzw. v_{y0} in y -Richtung bewegt. Die obere Punktmasse ist in alle drei Raumrichtungen elastisch gelagert und wird in negative z -Richtung mit der Kraft f_0 belastet. Das System hat somit 3 Freiheitsgrade $\mathbf{q} = (u, v, w)^T$, welche die Verschiebungen der oberen Punktmasse beschreiben. Die Verschiebung der unteren Punktmasse ist aufgrund der Kopplung in x - und y -Richtung gleich und in z -Richtung Null. Das analytische Modell kann ebenfalls als ein FE-Modell erstellt werden, wobei das Verfahren der KEA verwendet wird. Da das System keine dämpfenden Elemente enthält, können jegliche, in den Bewegungsgleichungen auftretenden, geschwindigkeitsproportionalen Terme auf den Reibkontakt zurückgeführt werden. Durch Freischneiden und der Annahme, es herrsche Coulombsche Reibung, ergibt sich nach der Linearisierung die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}\mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (2.19)$$

mit

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{v_{y0}^2}{(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)^{3/2}} & -\frac{v_{x0}v_{y0}}{(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)^{3/2}} & 0 \\ -\frac{v_{x0}v_{y0}}{(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)^{3/2}} & \frac{v_{x0}^2}{(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mu c_p f_0}{c_p + c_z}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} c_x & 0 & -\frac{\mu c_p v_{x0}}{\sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}} \\ 0 & c_y & -\frac{\mu c_p v_{y0}}{\sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}} \\ 0 & 0 & c_p + c_z \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Hierbei handelt es sich um ein nicht durchdringend gedämpftes System mit symmetrischer Matrix $\mathbf{P}$ und nichtsymmetrischer Matrix $\mathbf{Q}$. Unter Vernachlässigung der Reibung würden die geschwindigkeitsproportionalen Terme vollständig verschwinden und die Steifigkeitsmatrix

symmetrisch werden. Dies zeigt, welchen Einfluss in diesem Beispiel die Reibung in dem Kontakt hat und welche Effekte daraus resultieren. Mit den Parametern $c_x = \frac{2N}{m}$; $c_y = \frac{1N}{m}$; $c_z = \frac{2N}{m}$; $c_p = \frac{10N}{m}$; $m_1 = 1kg$; $m_2 = 1kg$; $f_0 = 10N$; $\mu = 0.1$ und der Geschwindigkeit der Ebene $(v_{x0} = \cos(\varphi\pi) \frac{m}{s}, v_{y0} = \sin(\varphi\pi) \frac{m}{s})$ folgt für die Eigenwerte bei $\varphi = 0$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0,208 - 0,978i \\ -0,208 + 0,978i \\ -0,707i \\ 0,707i \\ -2\sqrt{3}i \\ 2\sqrt{3}i \end{pmatrix} \frac{1}{s}. \quad (2.21)$$

Eine Veränderung von φ entspricht einer Drehung des Geschwindigkeitsvektors in der Ebene. Dies hat eine Auswirkung auf den Real- und Imaginärteil des ersten und zweiten Eigenwertpaares (vgl. Abbildung 13 und Abbildung 14). Auf die Darstellung des dritten Eigenwertpaares wurde hier verzichtet, dieser ist für alle φ rein imaginär und konstant.

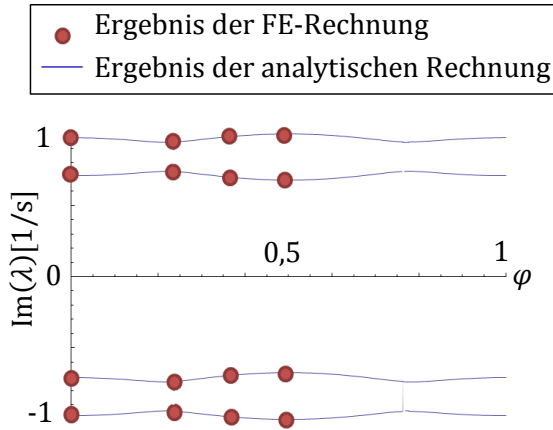


Abbildung 13: Imaginärteil der ersten zwei Eigenwertpaare über dem Parameter φ

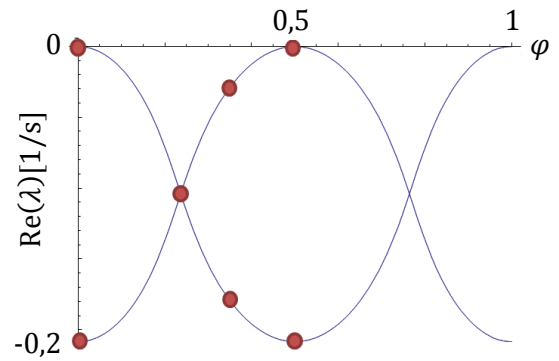


Abbildung 14: Realteil der ersten zwei Eigenwertpaare über dem Parameter φ

Zur Validierung wird ein FE-Modell erstellt, welches die gleichen Eigenschaften wie das Minimalmodell hat. Es besteht ebenfalls aus 2 Massepunkten, die in x - und y -Richtung über ein MPC⁴ gekoppelt sind. Die Lagerung der oberen Punktmasse wird ebenfalls über drei Federelemente realisiert. Der Reibkontakt wird zwischen dem unteren Massepunkt und der Fläche eines HEXE8⁵ Elements definiert. Die Knoten des HEXE8 Elements werden in allen Richtungen fest eingespannt. Die Berechnung der komplexen Eigenwerte des FE-Modells erfolgt mit dem in Kapitel 2.1 beschriebene Verfahren und liefert dieselben Ergebnisse wie das analytische Modell. Die Ergebnisse der FE-Berechnung sind in Abbildung 13 und Abbildung 14 mit roten Punkten markiert. Auch bei Variationen des Reibbeiwertes μ und der

⁴ MPCs (Multi Point Constraints) werden in der FE-Modellierung verwendet um eine starre Kopplung zwischen zwei oder mehreren Freiheitsgraden zu erzwingen.

⁵ HEXE8 ist in PERMAS ein Volumenelement mit 8 Knoten und linearen Ansatzfunktionen.

Absolutgeschwindigkeit $(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)^{1/2}$ waren die Ergebnisse des FE-Modells und die des analytischen Modells gleich. Es lässt sich also feststellen, dass der Effekt der Dämpfung aufgrund von Reibung in der FE-Modellierung korrekt abgebildet wird. Das bedeutet, dass in dem FE-Modell die Abhängigkeit der Reibkraft von den Verschiebungen und deren zeitlichen Ableitungen korrekt berücksichtigt werden. In der studentischen Arbeit [42] wird auf Grundlage des gleichen Minimalmodells gezeigt, dass dies auch für das FE-Programm ABAQUS gilt.

2.2.2 Viskose Dämpfung

Zur Überprüfung, ob viskose Dämpfung bei der Bestimmung der komplexen Eigenwerte ebenfalls korrekt berücksichtigt ist, wird das Minimalmodell aus Abschnitt 2.2.1 erweitert. Parallel zu der Steifigkeit c_z wird ein viskoser Dämpfer, mit der Dämpfungskonstante d_z , angebracht. Dieser Dämpfer hat auf die ersten beiden Eigenwertpaare keine Auswirkung. Der Einfluss des Dämpfers auf das dritte Paar ist in Abbildung 15 und Abbildung 16 dargestellt. Die Vergleichsergebnisse aus dem FE-Modell sind, wie bereits zuvor, durch rote Punkte markiert. Die Ergebnisse zeigen, dass auch dieser Effekt, selbst im Falle einer überkritischen Dämpfung, exakt in der KEA abgebildet wird.

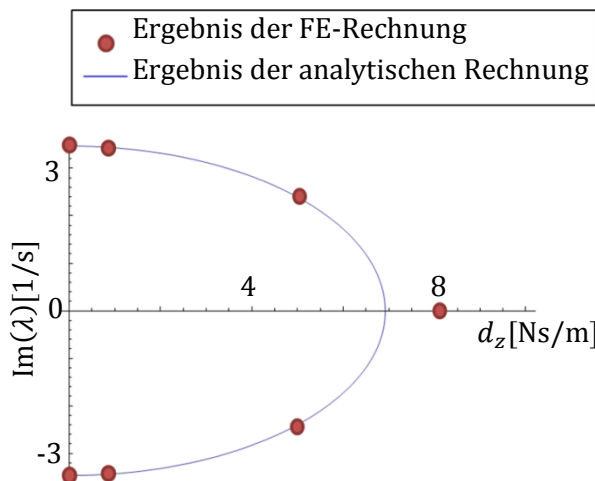


Abbildung 15: Imaginärteil des dritten Eigenwertpaares über der viskosen Dämpfung d_z

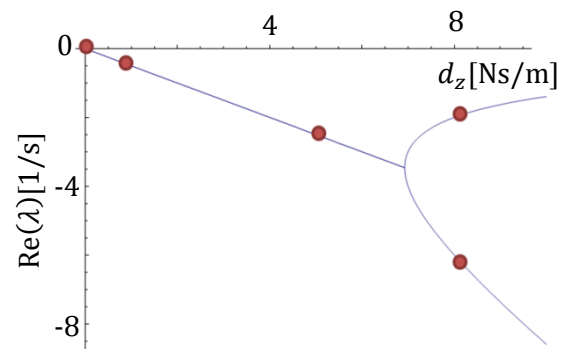


Abbildung 16: Realteil aller Eigenwertpaare über der viskosen Dämpfung d_z

2.2.3 Materialstrukturdämpfung

Die Materialstrukturdämpfung von Stahl ist im Allgemeinen nicht viskos, also nicht proportional zur Geschwindigkeit. In [53] wurde gezeigt, dass für eine harmonische Dehnung $\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon} \cos \Omega t$ für die Spannung in Folge der Dämpfung $\sigma_d = d \dot{\varepsilon}(t)/\Omega$ gilt. In den meisten FE-Programmen wird daher die Materialstrukturdämpfung als eine komplexe Steifigkeit behandelt. Sei

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

die zu einem ungedämpften System zugehörige Differentialgleichung mit den symmetrischen und positiv definiten Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Massenmatrix) und $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Steifigkeitsmatrix).

Die Berücksichtigung von Materialstrukturdämpfung erfolgt nach [54] üblicherweise durch eine Erweiterung der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (1 + id)\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Wobei d der sogenannte Strukturdämpfungsfaktor ist, welcher für verschiedene Stähle Werte zwischen 0,004 und 0,04 annimmt. Mit dem harmonischen Ansatz $\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}e^{i\omega t}$ ergibt sich das Eigenwertproblem

$$(-\omega^2\mathbf{M} + id\mathbf{K} + \mathbf{K})\mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Zum Vergleich dazu führt das System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

mit der viskosen Dämpfung $\mathbf{D}$ zu dem Eigenwertproblem

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{D} + \mathbf{K})\mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Es ist offensichtlich, dass Strukturdämpfung auch als äquivalente viskose Dämpfung $\mathbf{D}_q = d\mathbf{K}/\omega$, welche umgekehrt proportional zu ω ist, beschrieben werden kann. Die Bestimmung der Eigenwerte ω_i erfolgt durch Auswertung der Gleichung

$$\det(-\omega^2\mathbf{M} + id\mathbf{K} + \mathbf{K}) = 0. \quad (2.27)$$

Dies führt auf ein Polynom der Ordnung $2n$ mit komplexen Koeffizienten aber lediglich geraden Potenzen. Die Lösungen für ω treten somit in komplex konjugierten Paaren auf. Durch Einsetzen der i -ten Lösung ω_i in Gleichung (2.24) lassen sich die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{r}_i$ bestimmen. Somit ist die Summe aller Lösungen $\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{r}_i \cos(\omega_i t)$ reell. Da es sich um ein reelles System mit reellen physikalischen Größen handelt, ist die Gesamtlösung nur dann physikalisch sinnvoll, wenn diese auch reell ist.

Für den Fall, dass jedoch viskose Dämpfung und Strukturdämpfung in einem Model enthalten ist ergibt sich das Eigenwertproblem

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{D} + id\mathbf{K} + \mathbf{K})\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

welches zu der charakteristischen Gleichung

$$\det(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{D} + id\mathbf{K} + \mathbf{K}) = 0 \quad (2.29)$$

führt. Dieses Polynom der Ordnung $2n$ hat ebenfalls komplexe Koeffizienten, jedoch nicht ausschließlich gerade Potenzen. Die Lösungen für ω sind somit nicht mehr komplex konjugiert und somit ist auch die Gesamtlösung nicht mehr reell. Aus diesem Grund wird bei der KEA in FE-Programmen die Materialstrukturdämpfung durch die äquivalente viskose Dämpfung $\mathbf{D}_q = d\mathbf{K}/\omega_{\text{ref}}$ ersetzt. Dabei wird die Abhängigkeit gegenüber der Frequenz durch Definition einer Referenzkreisfrequenz ω_{ref} vernachlässigt (siehe [24] Seite 7-23). Dies hat zur Folge, dass die Strukturdämpfung nicht mehr im eigentlichen Sinne abgebildet wird und die Berechnung nur für ω nahe ω_{ref} richtige Ergebnisse liefert.

Eine Möglichkeit die Materialstrukturdämpfung dennoch korrekt zu berücksichtigen wäre, den Parameter ω_{ref} innerhalb des für das Bremsenquietschen relevanten Frequenzbereichs von 1 kHz bis 16 kHz zu variieren. Durch eine mehrfache Auswertung des Eigenwertproblems für unterschiedliche ω_{ref} könnte somit der Bereich, in welchem die Dämpfung näherungsweise korrekt berücksichtigt würde, erweitert werden. Auch wenn die Strukturdämpfung in Bremssystemen deutlich geringer ist als z. B. die Fügestellendämpfung, so zeigen die in [32] dargestellten Versuche, dass der Einfluss dieser Dämpfung einen erheblichen Einfluss haben kann. In den dort durchgeführten Versuchen wurde die üblicherweise aus Grauguss bestehende Bremsscheibe durch eine Stahlscheibe ersetzt. In diesem Fall zeigt das Bremssystem mit der gegossenen Scheibe, bei welcher die Strukturdämpfung bekannter Weise deutlich höher ist, ein signifikant besseres Geräuschverhalten. Eine Verringerung der Strukturdämpfung kann somit dazu führen, dass eine Bremse eher zum Quietschen neigt.

2.2.4 Fügestellendämpfung

Eine weitere Ursache für die Energiedissipation stellen die in einem Bremsensystem zahlreich vorhandenen Fügestellen dar. In [36] wird experimentell gezeigt, dass die Fügestellendämpfung einen bis zu zehnfach größeren Einfluss als die Materialstrukturdämpfung hat. In diesen Messungen werden die modalen Dämpfungen von Einzelkomponenten mit zusammengesetzten Baugruppen verglichen. Die Energiedissipation in Fügestellen erfolgt aufgrund von Reibung und ist somit, wie in [35] gezeigt, amplitudenabhängig. Die Fügestellendämpfung ist damit ein nicht-lineares Phänomen, dessen Einfluss in einem linearen Modell nicht ausreichend untersucht werden kann (vgl. Abschnitt 5.3). In der Komplexen Eigenwertanalyse ist diese Form der Energiedissipation in den Fügestellen somit nicht ausreichend modelliert. Eine genauere Beschreibung des Einflusses der nichtlinearen Fügestellendämpfung erfolgt in Kapitel 5.3. Dort wird anhand eines vereinfachten Fügestellenmodells gezeigt, dass das dabei verwendete Modell zwar keinen Einfluss auf die Stabilität der trivialen Lösung hat, jedoch maßgeblich für die Amplitude des sich einstellenden Grenzyklus und somit die Lautstärke des Quietschens verantwortlich ist. Anders ist dies jedoch bei der Steifigkeit in der Fügestelle. Durch eine geeignete Linearisierung dieser in einem für das Quietschen typischen Betriebspunkt kann zumindestens ihr Einfluss auf die Stabilität der trivialen Lösung berücksichtigt werden.

2.2.5 Gyroskopische und zirkulatorische Einflüsse

Der Einfluss von gyroskopischen und zirkulatorischen Effekten auf das Stabilitätsverhalten wird mit Hilfe eines weiteren Minimalmodells (aus [8]) überprüft, welches in Abbildung 17 dargestellt ist. Das Modell besteht aus einer mittig drehbar gelagerten Taumelscheibe. Die Scheibe ist starr und dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit Ω um die Symmetrieachse. Die Taumelbewegung wird über Torsionsfedern mit der Steifigkeit k_t gegenüber der Umgebung abgestützt. Im Abstand R_p vom Zentrum befinden sich zwei Stempel, die jeweils über Federn der Steifigkeit k an die Umgebung gekoppelt sind. Die Stempel sind zunächst masselos und mit der Kraft f_0 vorgespannt. Im Kontakt zwischen Stempel und Scheibe herrscht Coulombsche Reibung.

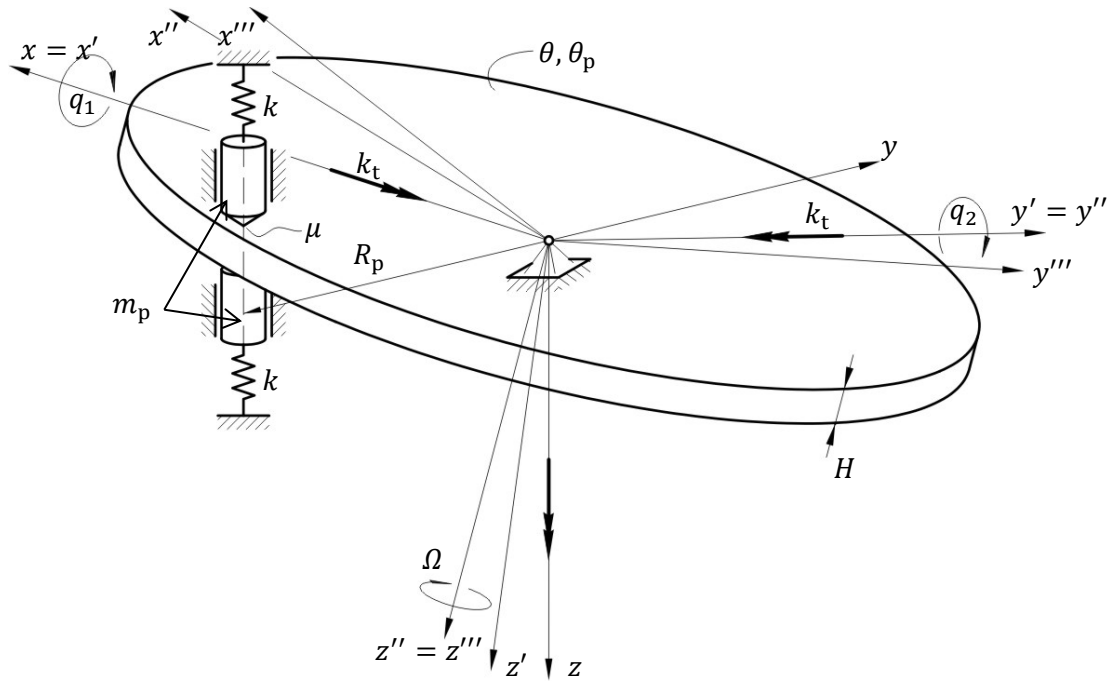


Abbildung 17: Minimalmodell einer Taumelscheibe (aus [8])

Das Modell besitzt somit zwei Freiheitsgrade in Form der Winkel q_1 und q_2 . Für diese ergibt sich nach der Linearisierung um die statische Ruhelage die Bewegungsgleichung

$$\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p \Omega} & \theta_p \Omega \\ -\theta_p \Omega & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 2kR_p^2 + HF_0 + k_t & \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p} \\ -HkR_p \mu & HF_0 + H\mu^2 F_0 + k_t \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

Es ist zu erkennen, dass weder die weg- noch die geschwindigkeitsproportionalen Terme symmetrisch sind. Die wegproportionalen Terme sind aufgrund der Reibung asymmetrisch. Da dieses Modell mehrere Effekte gleichzeitig beinhaltet, werden hier verschiedene Fälle betrachtet bei welchen sich jeweils einzelne Effekte ein- bzw. ausblenden lassen.

Fall 1 $\mu \neq 0, \theta_p \neq 0$:

In diesem Fall wird das Ausgangssystem betrachtet, welches die Effekte:

- reibungsinduzierte Dämpfung,
- Gyroskopie und
- zirkulatorische Kräfte

berücksichtigt. Das System enthält somit die grundlegenden Effekte, welche in der KEA in Bezug auf das Bremsenquietschen abgebildet werden.

Fall 2 $\mu = 0, \theta_p \neq 0$:

Wird der Reibungskoeffizient μ zu Null gesetzt, entfallen alle Effekte, welche durch den Reibkontakt hervorgerufen werden. In diesem Fall kann die Differentialgleichung als

$$\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 0 & \theta_p \Omega \\ -\theta_p \Omega & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 2kR_p^2 + HF_0 + k_t & 0 \\ 0 & HF_0 + k_t \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

geschrieben werden. Es ist zu erkennen, dass nun die reibungsinduzierte Dämpfung in den geschwindigkeitsproportionalen Termen verschwindet und lediglich die gyroskopischen Effekte übrig bleiben. Die Steifigkeitsmatrix ist in diesem Fall symmetrisch und beinhaltet keine Terme welche die Freiheitsgrade untereinander koppeln. Dieser Fall ist somit geeignet, um den Einfluss der Gyroskopie gesondert zu betrachten und zu überprüfen ob diese korrekt in der KEA abgebildet ist.

Fall 3 $\mu \neq 0, \theta_p = 0$:

Hier wird θ_p , das Flächenträgheitsmoment der Scheibe um x''' bzw. y''' , zu Null gesetzt. Die daraus resultierende Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p \Omega} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 2kR_p^2 + HF_0 + k_t & \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p} \\ -HkR_p \mu & HF_0 + H\mu^2 F_0 + k_t \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

beinhaltet die reibungsinduzierte Dämpfung sowie zirkulatorische Effekte. Da die korrekte Implementierung der reibungsinduzierten Dämpfung bereits untersucht wurde, bietet dieser Fall die Möglichkeit, den Einfluss einer nicht symmetrischen Steifigkeitsmatrix (zirkulatorische Effekte) genauer zu untersuchen.

Abbildung 18 zeigt ein FE-Modell, welches vergleichbare Eigenschaften hat wie das Minimalmodell. Die Taumelscheibe wird mit HEXE8 Elementen vernetzt, welchen ein sehr hoher Elastizitätsmodul zugeordnet wird, sodass diese annähernd starr ist. In der Mitte ist sie gelenkig gelagert. Da die Knoten der HEXE8-Elemente keine Rotationsfreiheitsgrade haben, ist es nicht möglich, Torsionsfedern zu implementieren. Aus diesem Grund wurden äquivalente translatorische Federn der Steifigkeit c_t verwendet, welche die Scheibe elastisch lagern. Der Reibkontakt wurde analog zum Minimalmodell aus Abbildung 12 implementiert.

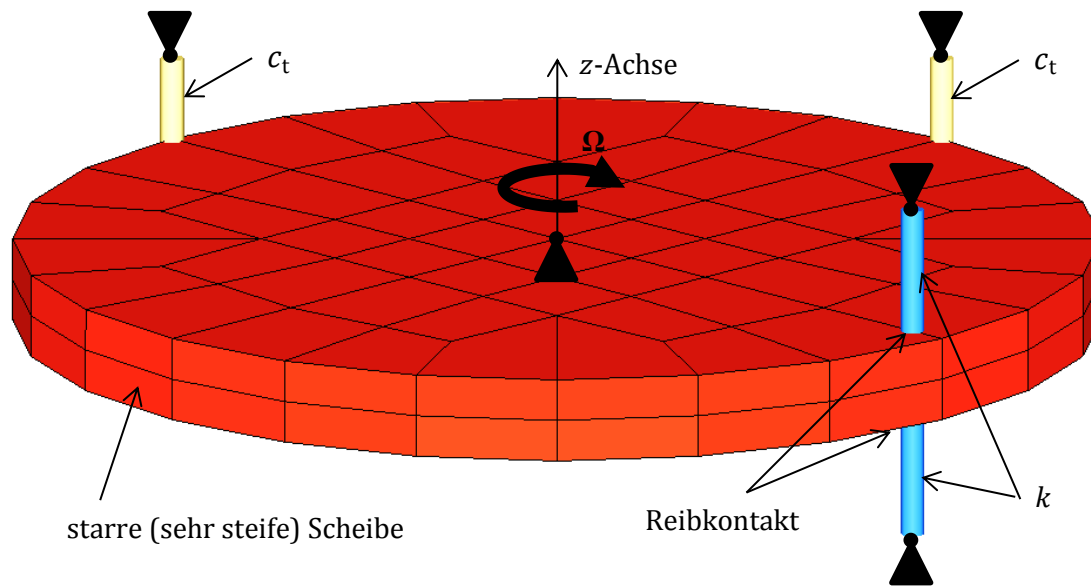


Abbildung 18: FE-Vergleichsmodell zum Taumelscheibenmodell

Die Ergebnisse für den zuvor definierten **Fall 1** sind in Abbildung 19 und Abbildung 20 zu finden. Dargestellt ist links die Frequenz und rechts der Realteil der Eigenwerte bei unterschiedlichen Rotationsgeschwindigkeiten und einem Reibbeiwert $\mu = 0,6$. Beide Modelle liefern bezüglich der Eigenwerte nahezu die gleichen Ergebnisse, sowohl den Realteil als auch die Frequenz betreffend. Der Einfluss der Rotationsgeschwindigkeit Ω wird ebenfalls korrekt abgebildet. Zum Lösen des Eigenwertproblems wurde das in 2.1.3 beschriebene PERMAS eigene MODAL ROTATING-Verfahren angewendet. Bei diesem Verfahren werden die Matrizen des FE-Modells nur einmal für eine Referenzdrehgeschwindigkeit aufgebaut, beinhalten aber die Abhängigkeit von Ω . Die Schwingform zu diesem Ergebnis ist in Abbildung 25 dargestellt.

Abbildung 21 und Abbildung 22 zeigen die Ergebnisse des analytischen und des FE-Modells für den **Fall 2**, bei welchem $\mu = 0$ ist. In diesem Fall sind die Eigenwerte rein imaginär, da die reibungsinduzierte Dämpfung sowie die zirkulatorischen Terme verschwinden. Durch den Einfluss der gyroroskopischen Effekte entfernen sich die Frequenzen der Moden mit steigendem Ω voneinander.

In den Ergebnissen in Abbildung 23 und Abbildung 24 wird der gyroroskopische Effekt, durch zu Null setzen von θ_p , unterdrückt (vgl. **Fall 3**). Bei dem FE-Modell wird das Hinzufügen der Matrix $\mathbf{D}_G$ unterdrückt. Auch bei dieser Rechnung stimmen die Ergebnisse von FE-Modell und analytischer Rechnung überein. Der Verlauf der Frequenz über der Rotationsgeschwindigkeit ist nahezu konstant. Bei den Realteilen ist zu erkennen, dass diese Null bzw. negativ sind und somit die Lösung grenzstabil ist.

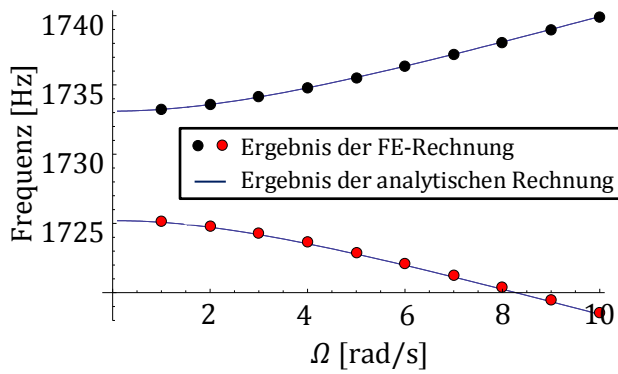


Abbildung 19: Fall 1: Frequenz über Rotationsgeschwindigkeit mit $\mu = 0,6$ und gyroskopischen Effekten eingeschaltet.

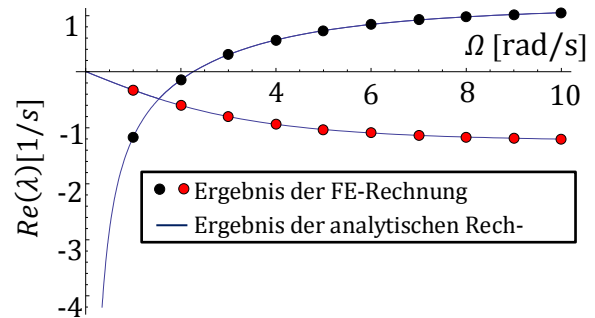


Abbildung 20: Fall 1: Realteil über Rotationsgeschwindigkeit mit $\mu = 0,6$ und gyroskopischen Effekten eingeschaltet.

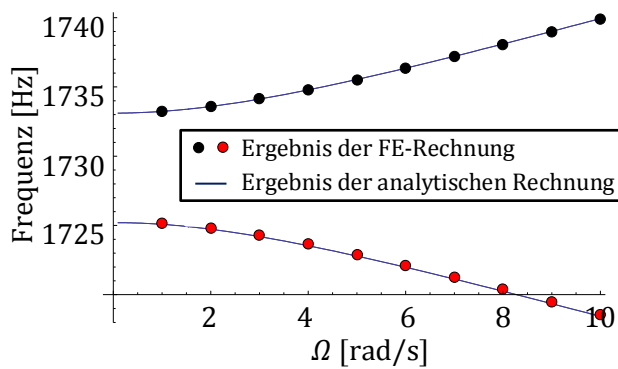


Abbildung 21: Fall 2: Frequenz über Rotationsgeschwindigkeit mit $\mu = 0$ und gyroskopischen Effekten eingeschaltet.

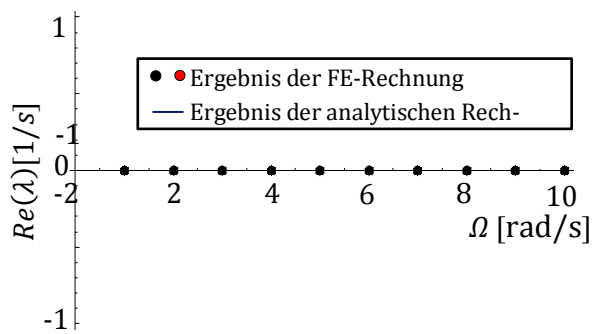


Abbildung 22: Fall 2: Realteil über Rotationsgeschwindigkeit mit $\mu = 0$ und gyroskopischen Effekten eingeschaltet.

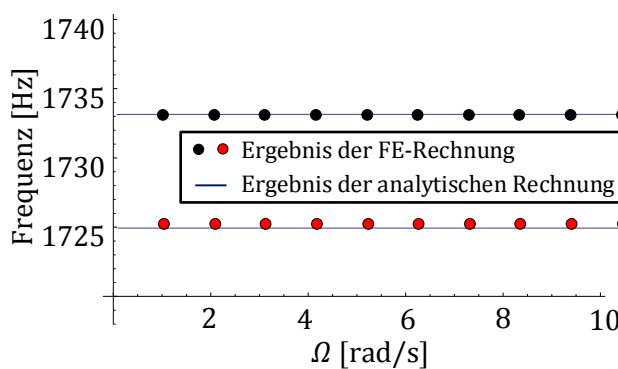


Abbildung 23: Fall 3: Frequenz über Rotationsgeschwindigkeit mit $\mu = 0,6$ und gyroskopischen Effekten ausgeschaltet.

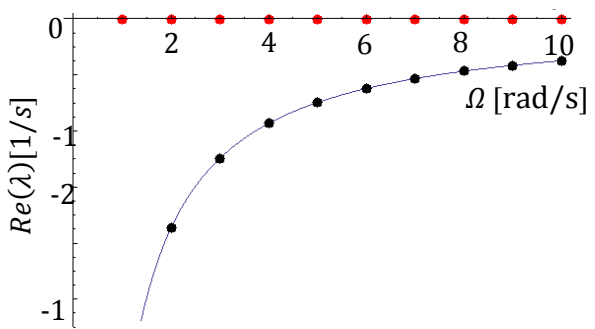


Abbildung 24: Fall 3: Realteil über Rotationsgeschwindigkeit mit $\mu = 0,6$ und gyroskopischen Effekten ausgeschaltet.

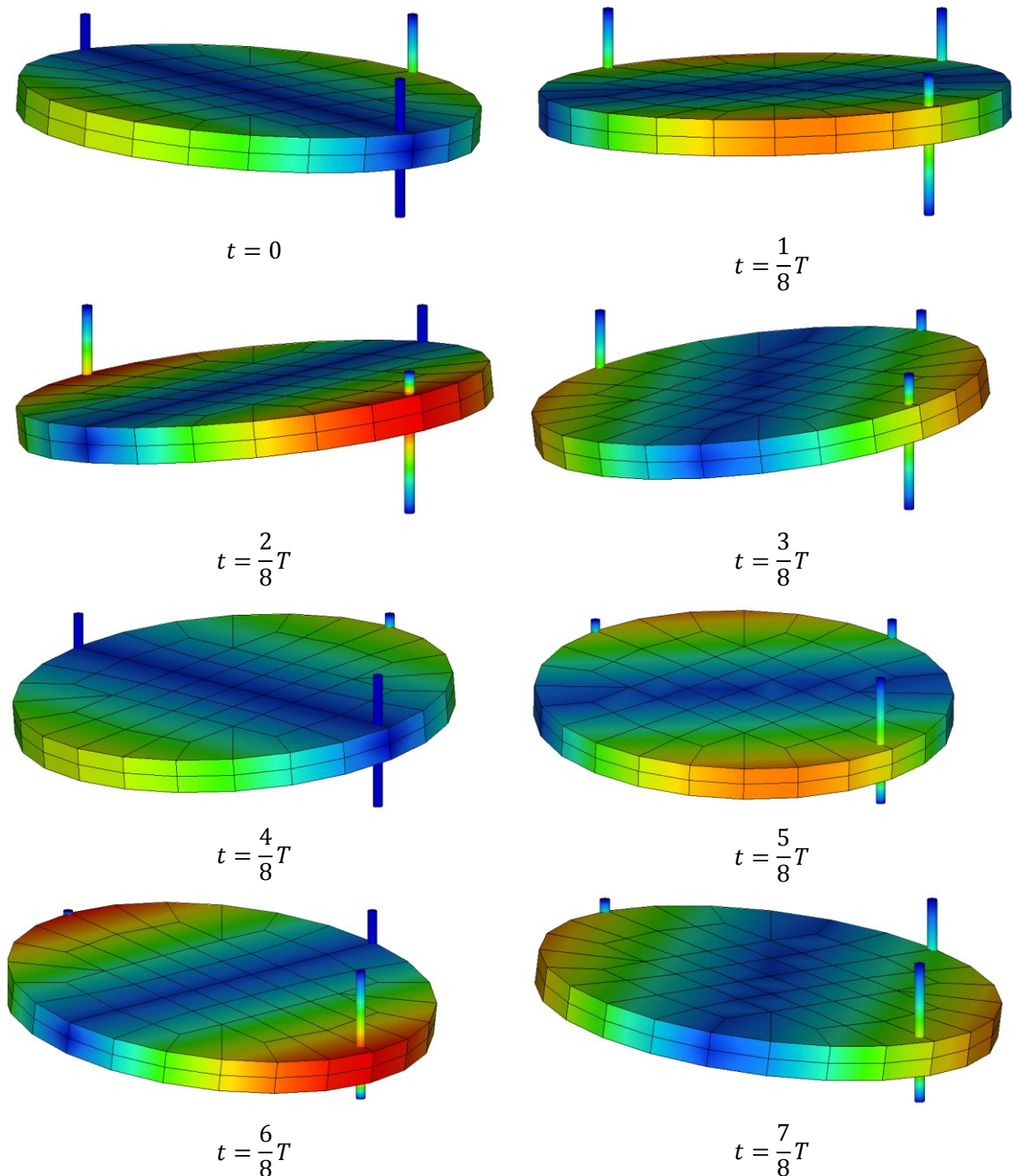


Abbildung 25: Darstellung der Eigenform bei 1736 Hz (Taumelbewegung der ausgelenkten Bremsscheibe zu unterschiedlichen Zeitpunkten t innerhalb einer Periode T). Farblich gekennzeichnet ist die absolute Verschiebung der einzelnen Elemente.

Das Ergebnis dieser Untersuchung ist, dass sowohl die analytische Rechnung als auch die mit dem FE-Programm PERMAS durchgeführte KEA nahezu identische und plausible Ergebnisse liefern. Das FE-Modell ist also in der Lage, die gyroskopischen sowie die zirkulatorischen Effekte korrekt abzubilden. Die Arbeit [42] zeigt, dass es in der FE-Software ABAQUS bis vor kurzem nicht möglich war, diesen Effekt zu berücksichtigen. In einem Bremsenmodell entstehen die gyroskopischen Terme aufgrund der sich drehenden Bremsscheibe. Da diese Rotation jedoch relativ langsam ist, könnte man vermuten, dass diese Terme vernachlässigt werden können.

Aus theoretischer Sicht können jedoch gyroscopische Terme das Stabilitätsverhalten eines Differentialgleichungssystems mit zirkulatorischen Termen stark beeinflussen. Sei $\mathbf{M}$ die symmetrische, positiv definite Massenmatrix, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{K}$ die symmetrischen und positiv semidefiniten Dämpfungs- bzw. Steifigkeitsmatrix, $\mathbf{N}$ die schiefsymmetrische zirkulatorische Matrix und $\mathbf{G}$ die ebenfalls schiefsymmetrische, gyroscopische Matrix. Wie in [48] gezeigt, treten Eigenwerte in einem System der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

in Quadrupeln auf, wodurch die triviale Lösung dieses Systems immer instabil bzw. grenzstabil ist. Durch Hinzufügen einer Dämpfungsmatrix ergibt sich das System zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (2.34)$$

dessen Lösung bei geeigneter Wahl von $\mathbf{D}$ stabil sein kann. Durch Berücksichtigung der gyroscopischen Matrix $\mathbf{G}$ ist es möglich, ein System dieser Art wieder zu destabilisieren. Die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

kann somit in Abhängigkeit von $\mathbf{G}$ stabil bzw. instabil sein. Da die der Simulation des Bremsenquietschens zugrundeliegende Differentialgleichung ebenfalls die Form von (2.35) hat, können die gyroscopischen Effekte somit durchaus das Stabilitätsverhalten beeinflussen. In [15], [11] und [50] ist detailliert gezeigt wie stark der Einfluss von gyroscopischen Termen bei Zirkulatorischen Systemen sein kann. Zur Überprüfung, in welchem Maße dieser Einfluss auch in den von der Industrie verwendeten FE-Modellen sein kann werden Simulationen bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten mit und ohne gyroscopischen Einfluss durchgeführt. Dabei wird das in Abschnitt 2.1.1 eingeführte, repräsentative Bremsenmodell (800.000 Freiheitsgrade) verwendet.

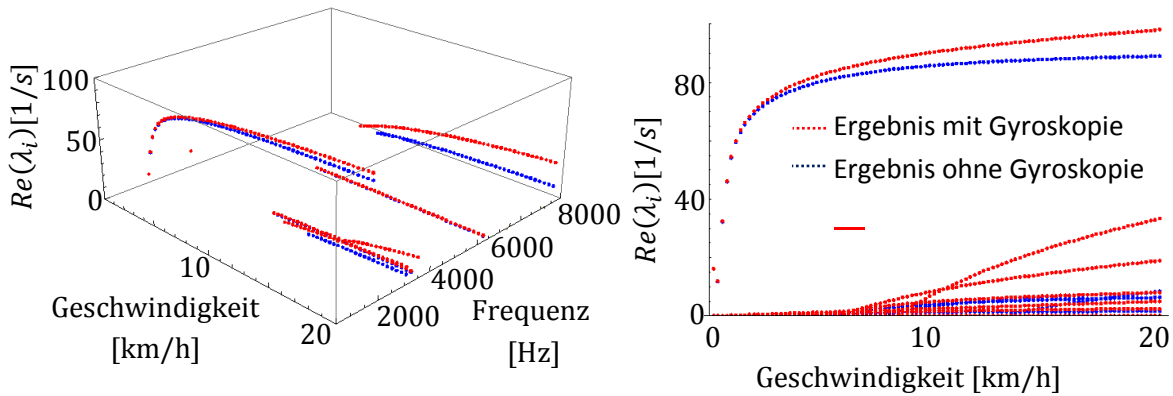


Abbildung 26: Darstellung der Simulationsergebnisse des FE-Modells mit und ohne gyroscopischen Einfluss, links Realteil über Frequenz und Fahrgeschwindigkeit, rechts Realteil über Fahrgeschwindigkeit

Die Simulationsergebnisse in Abbildung 26 zeigen, dass die gyroscopischen Effekte bei dem verwendeten FE-Modell einen erheblichen Einfluss auf den Realteil der Eigenwerte haben. Neben der deutlich erkennbaren Veränderung des Betrages der Realteile können die gyroscopischen Terme auch das Vorzeichen beeinflussen. Während bei der Simulation ohne

gyroskopische Effekte lediglich fünf Eigenwerte mit einem positiven Realteil auftraten, ergibt die Simulation mit gyroskopischen Effekten sechs Eigenwerte mit positivem Realteil. Dies verdeutlicht, dass selbst bei geringen Fahrgeschwindigkeiten von bis zu 20 km/h die gyroskopischen Effekte berücksichtigt werden sollten. Dies wurde bereits in [15] an Hand eines analytischen Bremsenmodells gezeigt.

2.2.6 Unsymmetrische Massenmatrix

In der einschlägigen Literatur, z. B. [56], welche sich mit der Dynamik mechanischer Systeme befasst, wird häufig die Massenmatrix als symmetrisch und positiv definit bezeichnet. Dies ist für die meisten technischen Anwendungen richtig, jedoch nicht zwingend eine Voraussetzung dafür, dass es sich um ein physikalisch plausibles Modell handelt. Wird das Minimalmodell aus Abbildung 17 dahingehend erweitert, dass die Stempel die Masse m_p besitzen, folgt aus Gleichung (2.30)

$$\begin{pmatrix} \theta + 2m_p R_p^2 & 0 \\ -Hm_p R_p \mu & \theta \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p \Omega} & \theta_p \Omega \\ -\theta_p \Omega & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 2kR_p^2 + HF_0 + k_t & \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p} \\ -HkR_p \mu & HF_0 + H\mu^2 F_0 + k_t \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Die Asymmetrie der Massenmatrix ist bedingt durch die Reibkräfte, welche nun abhängig von der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{q}}$ ist. Es existiert auch eine Darstellung von Gleichung (2.36) mit symmetrischer Massenmatrix. Dafür wird die erste Zeile nach $\ddot{q}_1$ aufgelöst

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta + 2m_p R_p^2} \left(\frac{H^2 \mu F_0}{2R_p \Omega} \dot{q}_1 + \theta_p \Omega \dot{q}_2 + (2kR_p^2 + HF_0 + k_t) q_1 + \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p} q_2 \right) \quad (2.37)$$

und das Ergebnis in Zeile zwei eingesetzt. Hierdurch ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \theta + 2m_p R_p^2 & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p \Omega} & \theta_p \Omega \\ -\theta_p \Omega + \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p \Omega} \left(\frac{-Hm_p R_p \mu}{\theta + 2m_p R_p^2} \right) & \theta_p \Omega \left(\frac{-Hm_p R_p \mu}{\theta + 2m_p R_p^2} \right) \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 2kR_p^2 + HF_0 + k_t & \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p} \\ -HkR_p \mu + (2kR_p^2 + HF_0 + k_t) \left(\frac{-Hm_p R_p \mu}{\theta + 2m_p R_p^2} \right) & (HF_0 + H\mu^2 F_0 + k_t) \left(\frac{-Hm_p R_p \mu}{\theta + 2m_p R_p^2} \right) \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p} \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

Da das Gleichungssystem nur mittels äquivalenter Umformungen anders dargestellt wurde, müssen die Lösungen von (2.36) und (2.38) identisch sein.

Der in Abbildung 29 und Abbildung 30 dargestellte Vergleich zwischen der analytischen Lösung von Gleichung (2.36) bzw. (2.38) und der Lösung des FE-Modells zeigt, dass es bezüglich des Realteils der Eigenwerte deutliche Abweichungen gibt.

Wird jedoch die Asymmetrie in der Massenmatrix vernachlässigt und an Stelle von Gleichung (2.36) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \theta + 2m_p R_p^2 & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p \Omega} & \theta_p \Omega \\ -\theta_p \Omega & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 2kR_p^2 + HF_0 + k_t & \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p} \\ -HkR_p \mu & HF_0 + H\mu^2 F_0 + k_t \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

betrachtet, liefern das analytische und das FE-Modell dieselben Ergebnisse (Abbildung 27 und Abbildung 28).

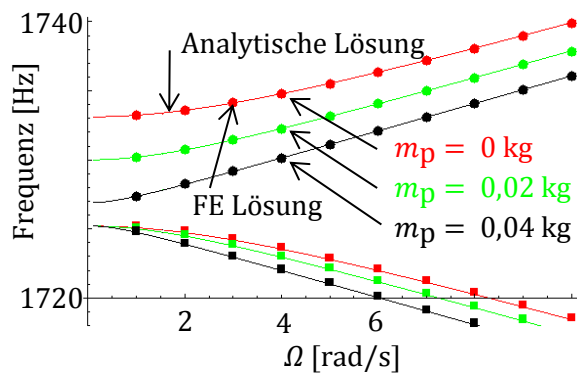


Abbildung 27: Frequenz über Rotationsgeschwindigkeit mit $m_p = 0$ kg, $m_p = 0,02$ kg und $m_p = 0,04$ kg und symmetrischer Massenmatrix

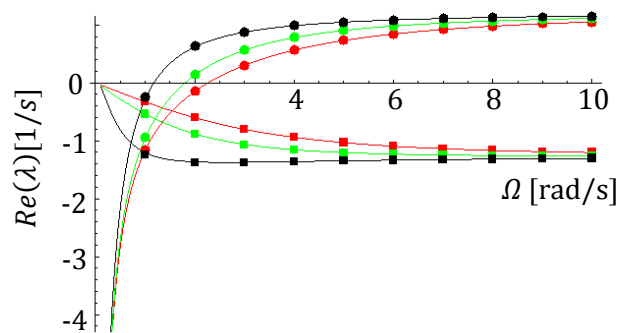


Abbildung 28: Realteil über Rotationsgeschwindigkeit mit $m_p = 0$ kg, $m_p = 0,02$ kg und $m_p = 0,04$ kg und symmetrischer Massenmatrix

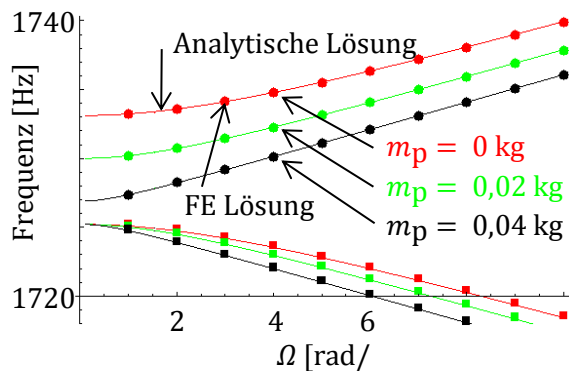


Abbildung 29: Frequenz über Rotationsgeschwindigkeit mit $m_p = 0$ kg, $m_p = 0,02$ kg und $m_p = 0,04$ kg und unsymmetrischer Massenmatrix

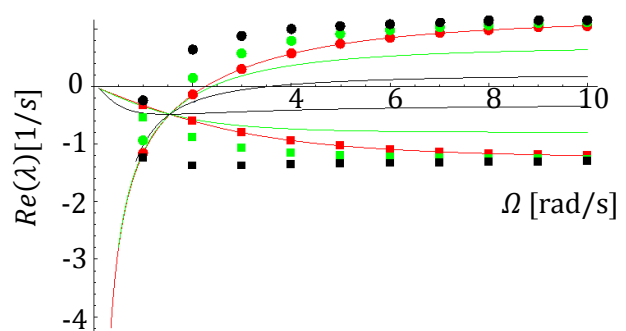


Abbildung 30: Realteil über Rotationsgeschwindigkeit mit $m_p = 0$ kg, $m_p = 0,02$ kg und $m_p = 0,04$ kg und unsymmetrischer Massenmatrix

Dies zeigt, dass Asymmetrien bezüglich der Massenmatrix, wie sie im Falle eines Reibkontaktes auftreten können, in der FE-Modellierung nicht korrekt abgebildet werden. Worin genau die Problematik besteht ist nicht klar, da das hier betrachtete System auch mit symmetrischer Massenmatrix darstellbar ist. Wie genau das FE-Programm intern vorgeht ist in diesem Fall unklar, fest steht jedoch, dass es sobald der Kontaktpunkt selber eine Masse besitzt falsche Ergebnisse liefert. Da üblicherweise jedoch der Kontakt bei der Simulation des Bremsenquietschens zwischen Volumenelementen ist, spielt dieser Effekt für die standardmäßig verwendeten FE-Modelle keine Rolle.

2.2.7 Untersuchung des in der KEA verwendeten Verfahrens zur Lösung des Eigenwertproblems

Wie bereits in Abschnitt 2.1.3 gezeigt, werden die komplexen Eigenwerte mit Hilfe einer Unterraumprojektion bestimmt. Da der Unterraum jedoch auf Grundlage eines vereinfachten Systems

bestimmt wird, enthält er nur eine Näherungslösung für das ursprüngliche Problem. Für die Größe des Unterraums gibt es dabei keine eindeutige Vorschrift, sondern lediglich eine Empfehlung. Dabei soll die höchste Frequenz der noch im Unterraum berücksichtigten Eigenform mindestens dreimal größer sein als die interessierende maximale Frequenz. Zur Untersuchung des Einflusses der Größe des Unterraums wird das FE-Modell aus Abschnitt 2.1.1 verwendet, welches dem industriellen Standard entspricht.

Mit diesem Modell werden mehrere Rechnungen mit unterschiedlich großem Unterraum durchgeführt. In Abbildung 31 ist der Realteil der Eigenwerte λ mit $\text{Re}(\lambda) > 0$ über der Größe des Unterraums dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Anzahl d (siehe Abschnitt 2.1.3) der im Unterraum berücksichtigten Moden einen deutlichen Einfluss hat. Die Ergebnisse konvergieren bis zu einer Größe von $d = 2000$ nicht. Eine weitere Erhöhung der Dimension des Unterraumes war aufgrund einer beschränkten Rechenkapazität nicht möglich. Bei dem untersuchten Modell empfiehlt der Industriepartner, welcher das Modell erstellt hatte, einen Wert von 350 für die Dimension des Unterraums. In Abbildung 31 ist zudem zu erkennen, dass die Anzahl der Eigenwerte mit positivem Realteil über d nicht konstant ist. Wird die Dimension des Unterraums größer als 450, existiert ein zusätzlicher Eigenwert mit positivem Realteil. Würde die Simulation streng nach Empfehlung der Modellersteller mit $d=350 < 450$ durchgeführt, so würde eine instabile Mode nicht detektiert werden. Dies zeigt deutlich, dass der in der KEA verwendete Unterraum in Bezug auf den Realteil der Eigenwerte zu falschen Ergebnissen führen kann.

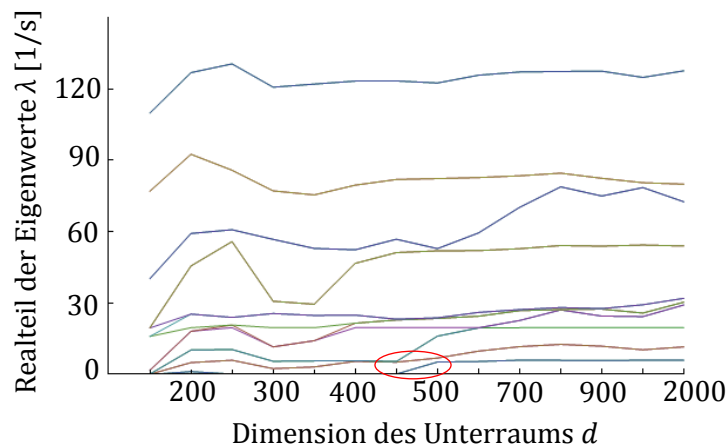


Abbildung 31 Einfluss der Dimension des Unterraums d auf den Realteil der instabilen Moden.

Eine mögliche Verbesserung der Methode zum Lösen des nichtsymmetrischen Eigenwertproblems wurde im Rahmen der Zusammenarbeit mit dem Institut für Mathematik der Technische Universität Berlin von Prof. Dr. Volker Mehrman, entwickelt (siehe [34]). Dabei wird der für die Projektion verwendete Unterraum auf Grundlage des Gesamtsystems (2.4) und nicht des vereinfachten Systems (2.13) gebildet. Um den dabei entstehenden erhöhten Rechenaufwand wieder zu minimieren wird die sogenannte Proper Orthogonal Decomposition (POD) Methode verwendet. Dadurch kann der Einfluss von Parametern, wie der Drehzahl, effizient im Unterraum berücksichtigen werden, so dass dieser bei einer Parameterstudie nicht jedes Mal neu berechnet werden muss. In Abbildung 32 wird ein Vergleich der Ergebnisse des industriellen FE-Modells (800.000 Freiheitsgrade) zwischen dem traditionellen Verfahren und der POD-Methode gezeigt.

Dargestellt sind dort die Eigenwerte mit positivem Realteil über der Frequenz. Da es sich bei beiden Methoden um Näherungslösungen handelt, ist es nicht möglich, die exakten Eigenwerte zu bestimmen. Zur Überprüfung der Qualität der Lösungen wird daher farblich das relative Residual $\mathcal{R}$, welches ein Maß für die Genauigkeit der Lösung darstellt, eingeführt. Dabei ist

$$\mathcal{R} = \log_{10} \left(\frac{\|(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{P} + \mathbf{Q}) \mathbf{v}_i\|_{\infty}}{\|(|\lambda_i|^2 |\mathbf{M}| + |\lambda_i| |\mathbf{P}| + |\mathbf{Q}|) |\mathbf{v}_i\|_{\infty}} \right) \quad (2.40)$$

mit λ_i der Näherungslösung des Eigenwerts und $\mathbf{v}_i$ der Näherungslösung des Eigenvektors. Der Vergleich der beiden Lösungsverfahren zeigt, dass diese teilweise übereinstimmen, aber teilweise sogar andere Aussagen bezüglich der Stabilität treffen. Die Betrachtung des relativen Residuals zeigt, dass die mittels der POD-Methode bestimmten Ergebnisse qualitativ besser sind, da hier das relative Residual kleiner ist. Mit der POD-Methode aus [34] ist es somit möglich, das hochdimensionale Eigenwertproblem akkurater zu lösen. Es sei erwähnt, dass die Bestimmung des Unterraums mit der POD-Methode rechenintensiver ist. Da der Unterraum jedoch bei einer Variation der Parameter nicht jedes mal neu bestimmt werden muss, hält sich der Gesamtrechnaufwand in Grenzen.

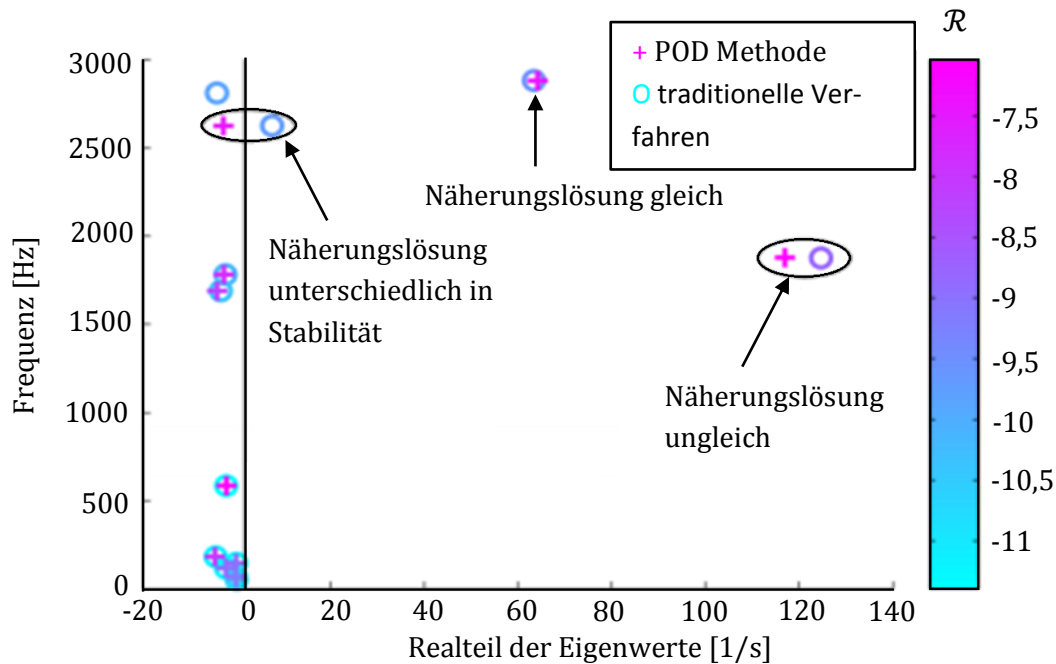


Abbildung 32: Vergleich der mit dem traditionellen Verfahren und der neuen Methode berechneten Eigenwerte (aus [34])

Während der Untersuchung des Lösungsverfahrens trat ein weiteres Problem auf, welches im Folgenden anhand eines Beispiels erläutert wird. Gegeben sei ein gedämpfter Schwinger mit drei Freiheitsgraden (Abbildung 33) und der entdimensionierten Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} 0,02 & -0,01 & 0 \\ -0,01 & 0,02 & -0,01 \\ 0 & -1 & 0,02 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 + c_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

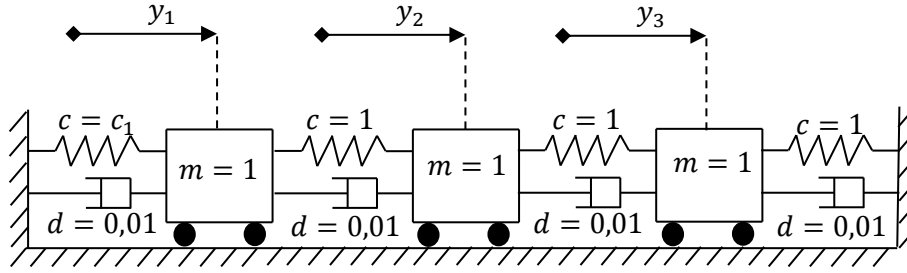


Abbildung 33: Schematische Darstellung eines Schwingers mit drei Freiheitsgraden

Mit dem Ansatz $\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}e^{\lambda t}$ ergibt sich das Eigenwertproblem

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 0,02 & -0,01 & 0 \\ -0,01 & 0,02 & -0,01 \\ 0 & -1 & 0,02 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1+c_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

welches für $c_1 = 1$ die Lösungen:

$$\lambda_{1/2} \approx -0,017 \pm 1,848i$$

$$\lambda_{3/4} \approx -0,01 \pm 1,414i$$

$$\lambda_{5/6} \approx -0,003 \pm 0,765i$$

hat. Für $c_1 \rightarrow \infty$ entspricht das System einem 2 Massenschwinger, welcher äquivalent zu dem in Abbildung 33 ist, mit dem Zusatz, dass $y_1(t) \equiv 0$ ist. Dieses System hat unter Verwendung eines identischen Ansatzes die Lösungen:

$$\lambda_{1/2} \approx -0,015 \pm 1,731i$$

$$\lambda_{3/4} \approx -0,005 \pm 1i$$

Wird jedoch das ursprüngliche Eigenwertproblem aus (2.42) mit $c_1 \rightarrow \infty$ betrachtet, ergeben sich rechnerisch noch die Eigenwerte $\lambda_{5/6} \approx 0,01 \pm \infty i$. Bei Verwendung des MATLAB-Befehls POLYEIG zum Lösen des Eigenwertproblems (2.42) ergibt sich für steigende c_1 jedoch das in Abbildung 34 dargestellte Ergebnis. Zunächst nähert sich die Lösung der exakten Lösung für das System mit zwei Freiheitsgraden an. Ab einem Wert von $c_1 > 10^{30}$ ergeben sich jedoch nicht mehr nachvollziehbare Ergebnisse. Die Realteile nehmen sogar positive Werte an, was einem instabilen Systemverhalten entspricht.

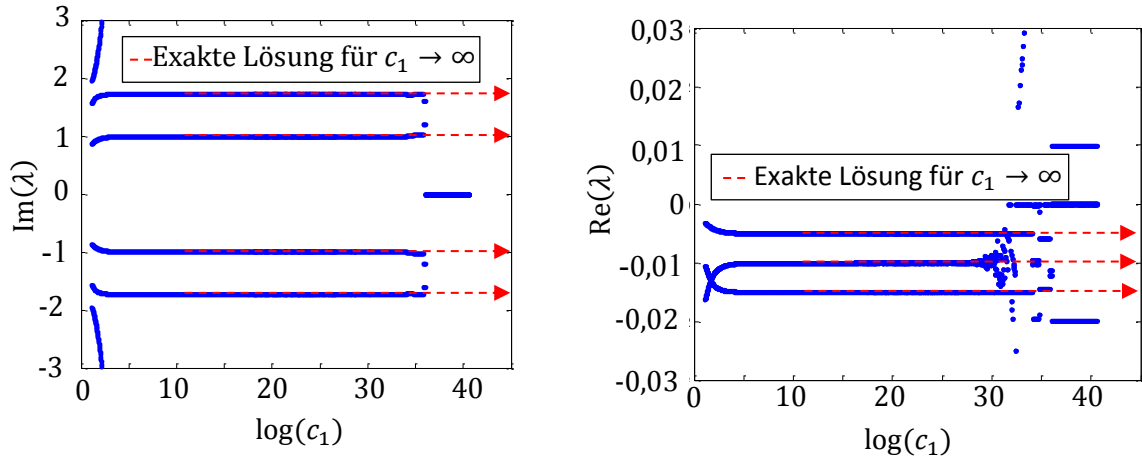


Abbildung 34: Plot des Imaginärteils und des Realteils über dem Logarithmus der Steifigkeit c_1

Bedingt ist dieses Verhalten der Lösung durch die Maschinengenauigkeit des Rechners. Da für das Abspeichern einer Variablen nur eine begrenzte Größe an Speicherplatz zur Verfügung steht, ist somit auch die Anzahl der Fließkommastellen beschränkt. Treten in einer Rechnung besonders große und besonders kleine Zahlen auf, so führt dies bei bestimmten Operationen zu falschen Ergebnissen. Dazu soll folgendes Beispiel betrachtet werden. Sei $a = 10^{10}$ und $b = 10^{-10}$ so ist $(a + b) - b = a$. Ist jedoch aufgrund der Maschinengenauigkeit nur eine Berücksichtigung von Gleitkommazahlen mit 16 Stellen möglich, so würde der Rechner bei der Addition von a und b als Ergebnis b speichern damit wäre $(a + b) - b = 0$.

In FE-Modellen werden häufig sehr steife Federn anstelle von starren Verbindungen verwendet oder Federkonstanten sehr klein gewählt, an Stellen, an denen die Kopplung verschwinden soll. Diese Modellierungstechniken führen dann unter Umständen zu den oben beschriebenen Problemen [57]. Ein Maß dafür, ob ein System mit beschränkter Maschinengenauigkeit noch lösbar ist, liefert die Größe der Konditionszahl κ [58]. Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A}$ ist diese mit

$$\kappa = \left| \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})} \right| \quad (2.43)$$

definiert. Dabei ist $\sigma_{\max}(\mathbf{A})$ der maximale Singulärwert von $\mathbf{A}$ und $\sigma_{\min}(\mathbf{A})$ der minimale Singulärwert. In Bezug auf die Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt, dass dies bei einer Konditionszahl größer als 10^{16} und der Verwendung von Gleitkommazahl mit doppelter Genauigkeit⁶ zu Fehlern führt. Sei $\mathbf{A}$ für ein beliebiges lineares, zeitinvariantes, dynamisches, System 2. Ordnung

$$\mathbf{A} = (\mathbf{M}z^2 + \mathbf{P}z + \mathbf{Q}) \quad (2.44)$$

und z eine beliebige Zahl in der komplexen Ebene, so ist die Konditionszahl κ des Systems auf der gesamten komplexen Ebene definiert. In Bezug auf das obige Beispiel (Abbildung 33) ergibt sich für $c_1 = 1$ und $c_1 = 10^{10}$ das in Abbildung 35 gezeigte Ergebnis für die Konditionszahl bei Variation der komplexen Zahl z . Für Werte von z nahe der Eigenwerte λ sind deutliche Spitzen

⁶ doppelte Genauigkeit (englisch double precision oder auch double) ist eine Bezeichnung für Variable, die beim Abspeichern 8 Byte belegen. Damit kann die Variable ca. 16 Nachkommastellen abbilden.

zu erkennen. Dies ist offensichtlich, da $\mathbf{A}(z = \lambda)$ nicht mehr den vollen Rang hat und somit $\kappa(\mathbf{A}(z = \lambda)) = \infty$ ist. Dies gilt nicht nur für dieses spezielle Beispiel sondern allgemein. In der Abbildung sind die Spitzen jedoch beschränkt, da z in Form eines Rasters variiert und somit $z = \lambda$ nie exakt erreicht wird. Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Konditionszahl für Werte von $z \neq \lambda$ für $c_1 = 1$ in der Größenordnung $\kappa < 10^2$ ist, wohingegen die Konditionszahl für $c_1 = 10^{10}$ die Größenordnung $\kappa > 10^{40}$ hat.

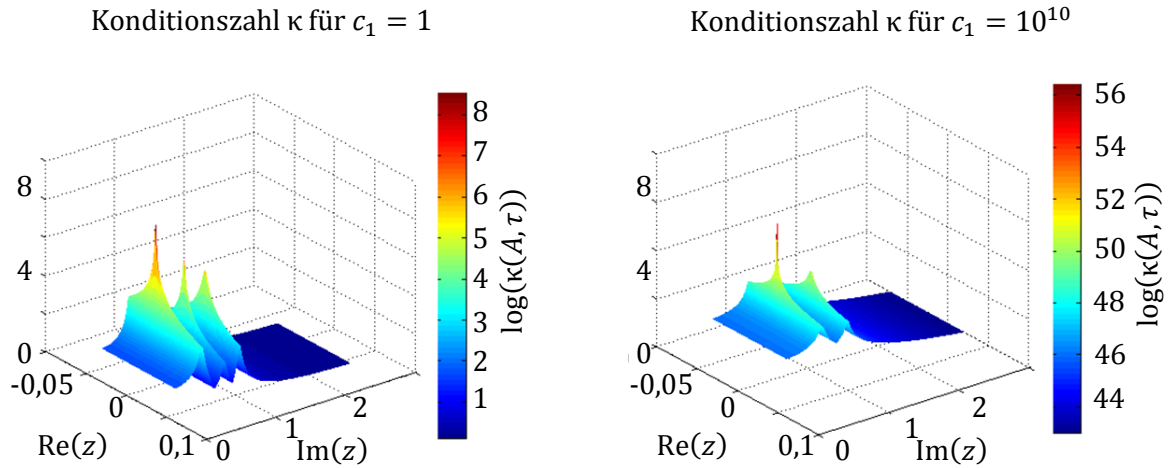


Abbildung 35: Logarithmische Darstellung der Konditionszahl des Beispielsystems (2.41) über der komplexen Ebene, Links für $c_1 = 1$ und rechts für $c_1 = 10^{10}$.

Unter Verwendung von Variablen mit doppelter Genauigkeit können Gleitkommazahlen mit bis zu 16 Stellen dargestellt werden. Ist die Konditionszahl also größer als 10^{16} ist das zugrundeliegende Eigenwertproblem nicht mehr akkurat lösbar. Die Erfahrung mit MATLAB und mit den verwendeten FE-Programmen zeigt jedoch, dass in einem solchen Fall dennoch Lösungen ohne jegliche Warnungen vom Programm bestimmt werden. Diese Lösungen können jedoch, wie oben gezeigt, falsch sein. Es kann somit vorkommen, dass aufgrund von ungeschickter Modellierung im FE-Modell ein mit gegebener Maschinengenauigkeit unlösbares Eigenwertproblem entsteht. In dem von der Industrie zur Verfügung gestellten FE-Modell liegt die Konditionszahl in einem Bereich von über 10^{15} und somit an der oberen Grenze der Lösbarkeit. Dies führte dazu, dass die berechneten Eigenwerte je nach verwendetem Lösungsalgorithmus⁷ unterschiedlich ausfielen [40]. Durch Verbesserungen in der Modellierung konnte die Konditionszahl auf 10^{12} gesenkt werden, was zu weniger Abweichungen bei den verschiedenen Lösungsverfahren führte. Die Veränderungen beziehen sich auf das Ersetzen von sehr steifen Federn durch kinematische Zwangsbedingungen und das Löschen von sehr weichen Federn.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es beim Lösen des hochdimensionalen Eigenwertproblems ein Verbesserungspotential gibt. Es besteht die Möglichkeit, den Lösungsalgorithmus durch Verwendung eines erweiterten Unterraumes zu verbessern und somit Unsicherheiten in der Genauigkeit zu eliminieren (siehe [34], [40], [59]). Des Weiteren sollte die Konditionszahl des

⁷ Verwendet wurde die „Shift-Invert-Arnoldi“ Methode [102] mit verschiedenen Shiftpunkten.

Eigenwertproblems während der Simulation untersucht werden. Hilfreich wäre bei ungeeigneten Konditionszahlen die Ausgabe einer Warnung mit dem Hinweis, die Modellierung zu überprüfen.

2.3 Zusammenfassung

Durch eine detaillierte Untersuchung der in der Industrie etablierten Methode zur Simulation des Bremsenquietschens konnte gezeigt werden, dass die grundlegenden relevanten Effekte korrekt berücksichtigt werden, sofern die Bremsscheibe rotationssymmetrisch ist. Die Untersuchung erfolgte auf Grundlage von analytischen Minimalmodellen, welche in dem FE-Programm PERMAS implementiert wurden. Das Ergebnis dieser Untersuchung war, dass die für die Existenz einer instabilen Lösung notwendigen zirkulatorischen Kräfte, welche aus dem Reibkontakt zwischen Bremsscheibe und Belag resultieren, korrekt in der KEA abgebildet werden. Des Weiteren wurde gezeigt, dass auch die aus der Reibung resultierende Dämpfung sowie die durch die Rotation der Bremsscheibe bedingten gyroskopischen Effekte korrekt abgebildet sind.

In Gesprächen mit Vertretern der Industrie stellte sich jedoch heraus, dass ihrer Meinung nach, die Berücksichtigung von gyroskopischen Termen keinen relevanten Einfluss in der Simulation des Bremsenquietschens habe. In der Arbeit [60] wird explizit gesagt, dass auf Grund der geringen Geschwindigkeiten die gyroskopischen Terme vernachlässigt werden können. Ein weiterer Beleg für diese Haltung der Industrievertreter findet sich in dem Beitrag [61], in welchem das Vorgehen bei der Simulation des Bremsenquietschens allgemein beschrieben wird. In Abschnitt 2.2.5 wurde jedoch gezeigt, dass auch bei geringen Geschwindigkeiten die gyroskopischen Effekte einen relevanten Einfluss auf die Realteile der Eigenwerte haben. Dies wird auch in den Arbeiten [9], [11] und [15] bestätigt.

Die infolge der Reibung möglicherweise unsymmetrische Massenmatrix führt in der KEA zu falschen Ergebnissen, was vermutlich darauf zurück zu führen ist, dass dieser Effekt in den FE Programmen üblicherweise nicht auftritt und somit vernachlässigt wird. Dieser Effekt kann aber auch durch geeignete Modellierung vermieden werden.

In Bezug auf die Berücksichtigung der Materialstrukturdämpfung stellte sich heraus, dass hierbei das üblicherweise verwendete Verfahren zu Fehlern führt. Es ist jedoch dargestellt, wie dieser Fehler vermieden werden kann.

Bei der Untersuchung des in der KEA üblicherweise verwendeten Verfahrens zur Lösung des unsymmetrischen Eigenwertproblems stellte sich heraus, dass der verwendete Unterraum zu Ergebnissen mit unzureichender Genauigkeit führt. Es wurde gezeigt, dass eine starke Abhängigkeit der Ergebnisse von der Dimension des üblicherweise verwendeten Unterraums besteht. Die Ergebnisse zeigen, dass unter Umständen sogar die Aussage bezüglich der Stabilität einzelner Moden falsch sein kann.

3 Vergleich der etablierten Simulationsmethode mit experimentellen Untersuchungen

In diesem Kapitel werden verschiedene experimentelle Ergebnisse dargestellt, welche zeigen ob eventuell weitere, bislang nicht in der Simulation berücksichtigte Effekte existieren, welche jedoch einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf das Bremsenquietschen haben. Der für die Durchführung der Messungen verwendete Bremsenprüfstand ist in Abbildung 36 dargestellt. Die Besonderheit des Prüfstandes besteht darin, dass die Bremsscheibe nicht über das Rad, sondern über die Antriebswelle angetrieben wird. Dies entspricht zwar nicht der Situation beim Bremsen am realen System, ermöglicht jedoch einen besseren messtechnischen Zugang zur Bremsscheibe, da diese unverstellt von außen sichtbar ist. damit besteht unter anderem die Möglichkeit, die Schwingform der Bremsscheibe während des Quietschens mithilfe von berührungslosen Messsystemen wie z. B. einem Laservibrometer zu messen. Der Prüfstand verfügt nicht über automatisierte Steuerungsmechanismen. Manuell kann jedoch die Drehzahl in einem Bereich von Null bis 100 U/min sowie der Bremsdruck von Null bis 20 bar eingestellt werden. Ein automatisierter Betrieb ist jedoch nicht möglich.



Abbildung 36: Darstellung des Bremsenprüfstandes mit Prüfaufbau und Messtechnik (3D Scanning Laser Vibrometer).

Bei der messtechnisch untersuchten Bremse handelt es sich um eine bereits in Serie gegangene Vorderrad-Scheibenbremse, welche von dem durch die Industrie bereitgestellten FE-Bremsenmodell beschrieben wird (vgl. Abbildung 4).

Im Folgenden sind die Messergebnisse verschiedener experimenteller Untersuchungen dargestellt. Durch einen Vergleich der aus diesen Ergebnissen resultierenden Eigenschaften der realen Bremse mit den Eigenschaften des FE-Bremsenmodells kann gezeigt werden, ob die Si-

mulation eventuell weitere Schwachstellen hat. Die experimentellen Untersuchungen beziehen sich zunächst auf das Übertragungsverhalten einzelner Komponenten und anschließend auf das Gesamtbremssystem mit zunächst nicht rotierender Bremsscheibe. Die Anregung erfolgt dabei wahlweise durch einen Shaker oder einen Modalhammer. In weiteren Tests wird der Einfluss der Rotation der Bremsscheibe auf das Stabilitätsverhalten analysiert. Durch weitere Messungen zur Identifikation der Grenzzykelschwingung im Quietschzustand ist ein detaillierter Abgleich der Simulationsergebnisse mit diesen Schwingformen möglich. Der Testaufbau umfasst dabei alle Bremsenkomponenten welche auch in der Simulation berücksichtigt werden.

3.1 Untersuchungen an Einzelkomponenten

Mit Hilfe einer experimentellen Modalanalyse wird zunächst das Schwingungsverhalten der einzelnen, ausgebauten Komponenten bestimmt und dieses dann mit Ergebnissen aus der Simulation verglichen. Dabei zeigt sich, dass es große Abweichungen zwischen den Messergebnissen und den Ergebnissen der FE-Berechnungen, welche an Hand von Sub-Modellen aus dem Gesamtmodell erfolgten, gibt. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass es sich bei dem Gesamtmodell um eines durch die Automobilindustrie zur Verfügung gestellten Modells handelte, welches dort zur Verbesserung des Quietschverhaltens eingesetzt wurde. Die Abweichungen zeigen sich in allen Komponenten (Bremsscheibe, Bremssattel, Bremsbelag und Bremshalter). Im Folgenden sind exemplarisch die Ergebnisse des Bremshalters genauer dargestellt.

Für die Durchführung der Messung wird der Halter auf eine weiche Unterlage gelegt, womit die Randbedingungen annähernd als frei angenommen werden können. Die Erregung erfolgt durch einen Modalhammer an einer Stelle. Parallel wird mit einem Beschleunigungsaufnehmer an unterschiedlichen Stellen die Systemantwort gemessen. Damit ist es möglich, neben dem Übertragungsverhalten auch die Schwingformen sowie die modale Dämpfung zu bestimmen. Für die Generierung der Vergleichsergebnisse aus dem FE-Modell wird zunächst der Halter von den übrigen Komponenten des Bremsenmodells isoliert und getrennt betrachtet. Auch in der Simulation wird die Randbedingung frei-frei⁸ gewählt. Mit Hilfe der „Frequency Response Analysis“, bei welcher auf Grundlage der Eigenmoden und Eigenwerte die Systemantwort im Frequenzbereich bestimmt werden kann, ist es möglich das Übertragungsverhalten des Haltermodells mit dem Programm PERMAS zu bestimmen. Dabei werden als Ein- und Ausgang die gleichen Größen und Positionen wie bei der Messung verwendet. In Abbildung 37 ist jeweils eine Übertragungsfunktion aus Simulation und Messung des Bremshalters dargestellt. Die Abweichungen hinsichtlich der Resonanzstellen und der Amplitude sind deutlich erkennbar. In Abbildung 38 ist die Position der Anregung und der gemessenen Antwort auf dem Bremshalter dargestellt.

⁸ Als frei-frei Lagerung wird der Zustand bezeichnet, in dem es keine geometrischen und physikalischen Kopplungen zwischen dem Objekt und der Umgebung gibt.

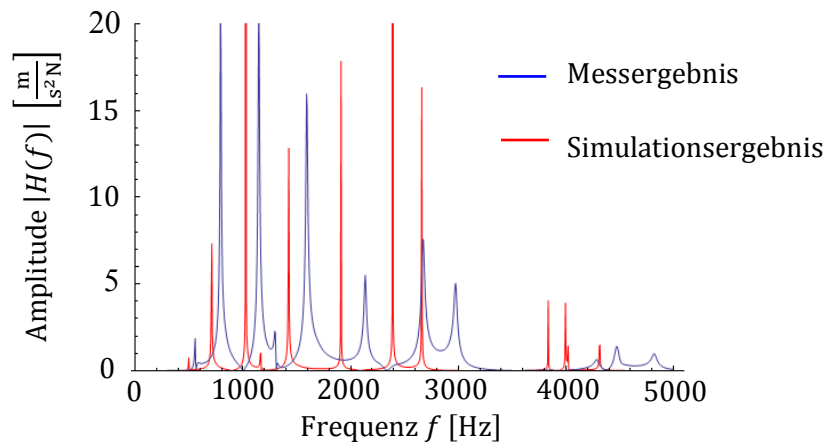


Abbildung 37: Vergleich der gemessenen (blau) und der durch die Simulation (rot) erhaltenen Übertragungsfunktion

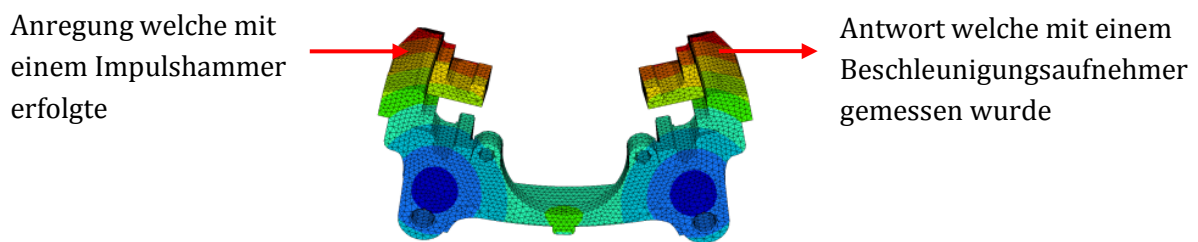


Abbildung 38: Position der Anregung und der gemessenen Antwort auf dem Bremshalter

Die hier für den Bremshalter dargestellte schlechte Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Simulation und der Messung zeigt sich auch bei Untersuchungen der Bremsscheibe, des Bremssattels und der Bremsbeläge. Durch die großen Abweichungen zwischen Modell und Messung in Bezug auf die Einzelkomponenten kann davon ausgegangen werden, dass die Modellbildung nicht ausreicht, um das tatsächliche, dynamische Verhalten im Gesamtsystem wiederzugeben.

Durch Variation des Elastizitätsmoduls des Halters ist es jedoch möglich, das Modell gegenüber der Messung anzupassen. In Abbildung 39 ist erneut die Übertragungsfunktion der Messung und der Simulation gezeigt. Durch Erhöhung des E-Moduls des Halters von 125 GPa auf 155 GPa ist es möglich, die Übereinstimmung hinsichtlich der Resonanzfrequenzen deutlich zu verbessern. Die Abweichungen in den Amplituden sind vor allem durch die ungenügende Berücksichtigung der Dämpfung zu erklären.

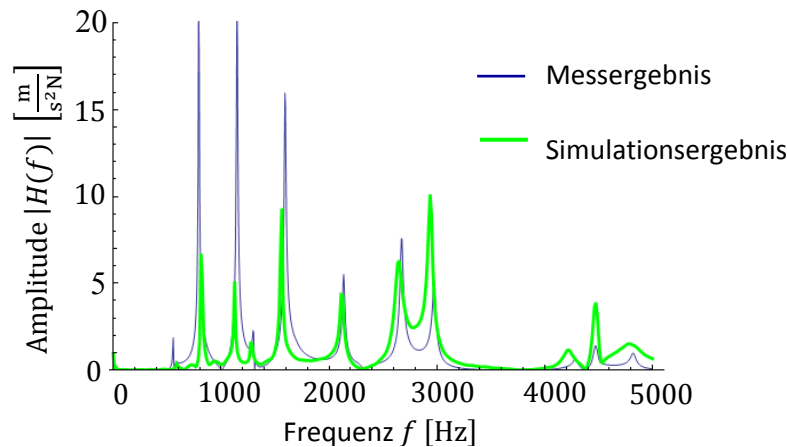


Abbildung 39: Vergleich der gemessenen (blau) und der durch Variation des E-Moduls verbesserten Simulation (grün) erhaltenen Übertragungsfunktion

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass unter Zuhilfenahme der experimentellen Modalanalyse die Möglichkeit besteht, das Eigenschwingungsverhalten der Einzelkomponenten der Bremse zu identifizieren. Durch Abgleich dieser Ergebnisse mit den Komponenten des FE-Modells und Anwendung des sogenannten MODEL UPDATING-Verfahrens (vgl. [62]) ist es möglich, die Simulation deutlich zu verbessern. Angemerkt sei, dass die korrekte Abbildung der Einzelkomponenten eine notwendige Bedingung ist, um ein in Bezug auf das Stabilitätsverhalten aussagekräftiges Modell zu erhalten. Speziell in Hinblick auf eine prädiktive Simulation, wäre eine bessere Abbildung der Einzelkomponenten hilfreich.

3.2 Untersuchungen am Gesamtsystem

Zur Untersuchung des Übertragungsverhaltens $H(f)$ des gesamten Bremsensystems wird dieses zunächst ohne eine Rotation der Bremsscheibe betrachtet. Dabei wird das System im Bereich des Bremssattels von der Rückseite der Scheibe mit einem Shaker erregt und die Systemantwort mit Hilfe eines Beschleunigungsaufnehmers auf der Bremsscheibe gemessen (Abbildung 40).

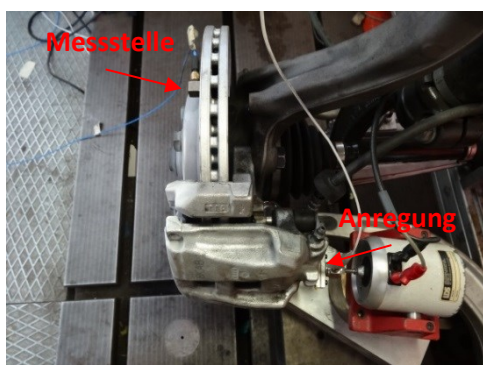


Abbildung 40: Testaufbau zur Bestimmung des Übertragungsverhaltens des Bremsensystems bei nichtrotierender Bremsscheibe

Die Erregung erfolgte durch ein Chirp Signal und unter Variation des Bremsdrucks. Zum Vergleich der Messungen mit Simulationsergebnissen wird das in Kapitel 2.1.1 eingeführte FE-Bremsenmodell verwendet. Für die Simulation wird das Modell um die äußere Anregung erweitert und eine „Frequency Response Analyses“ durchgeführt. Für den Vergleich mit der zuvor durchgeführten Messung wird in der Simulation die Systemantwort an dem Knoten ausgewertet, welcher sich an äquivalenter Position zu dem im Experiment verwendeten Beschleunigungsaufnehmer befindet. Die Simulation wird ebenfalls für verschiedene Bremsdrücke durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 41 dargestellt.

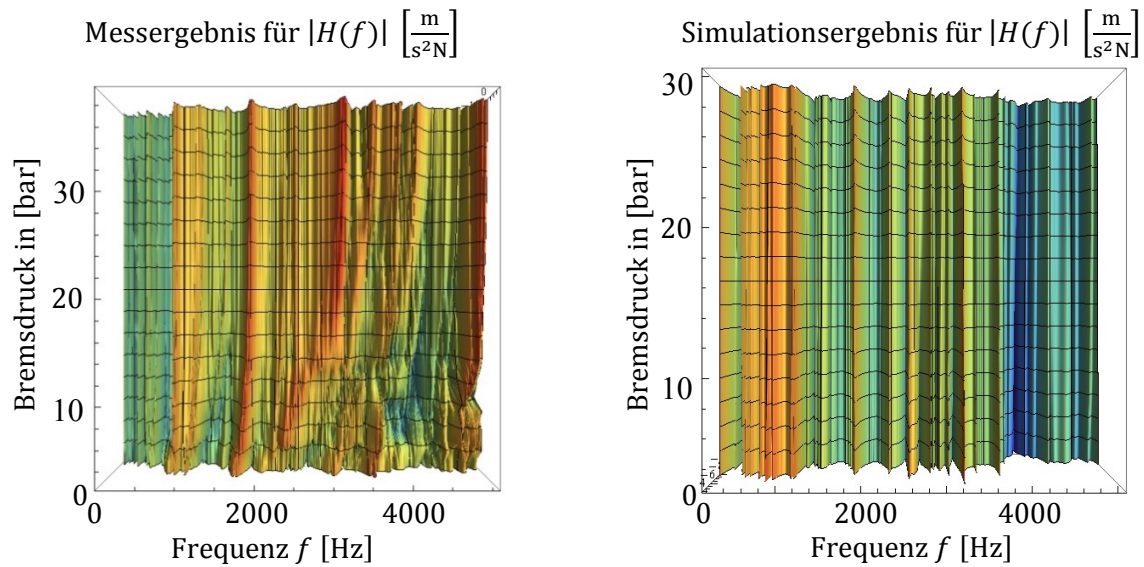


Abbildung 41: Vergleich der gemessenen (links) und der Berechneten (rechts) Übertragungsfunktionen unter Variation des Bremsdrucks

Es ist offensichtlich, dass die Ergebnisse keine gute Übereinstimmung zeigen. Während bei den Messergebnissen einige Resonanzstellen deutlich ausgeprägt sind, existieren bei der Simulation sehr viele, wobei keine von ihnen besonders klar dominiert. Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Peaks in der simulierten Übertragungsfunktion deutlich spitzer sind. Dies deutet darauf hin, dass die Dämpfung im Modell nicht ausreichend berücksichtigt ist. Wie in [36] gezeigt, ist die dominante Dämpfung in Bremssystemen in den Fügstellen zu finden. Da jedoch keine ausreichend genauen Werkzeuge zur Verfügung stehen, um diese zu identifizieren, wird sie in Standard FE-Modellen nicht berücksichtigt. Stattdessen wird eine Materialdämpfung verwendet, welche jedoch im Simulationsprozess nicht exakt abgebildet ist (siehe Kapitel 2.2.3).

Des Weiteren zeigen die Messergebnisse eine deutliche Abhängigkeit des Übertragungsverhaltens vom Bremsdruck. Diese Abhängigkeit ist in der Simulation nicht enthalten. Aus den Messergebnissen wird deutlich, dass mit steigendem Bremsdruck die Peaks in der Übertragungsfunktion in höhere Frequenzbereiche wandern. Dies weist auf eine Versteifung des Systems hin.

Die Erhöhung des Bremsdrucks hat zur Folge, dass sich die Vorspannung im Bremsbelag erhöht. Wie in [63] gezeigt, bewirkt eine Erhöhung der Vorspannung im Reibmaterial eine Versteifung desselben. Zudem wird dort gezeigt, dass diese Versteifung einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Stabilitätsverhalten der trivialen Lösung eines FE-Bremsenmodells hat. Mithilfe

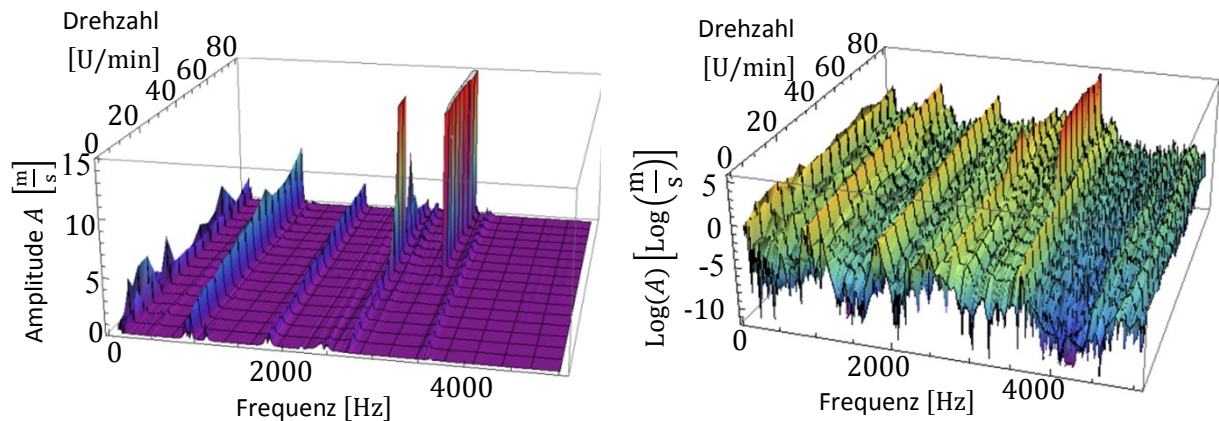
des an der TU Berlin entwickelten Prüfstandes DCTR [64], [65] (Dynamic Compression Test Rig) ist es möglich, die Steifigkeit des Reibmaterials unter Bedingungen, wie sie beim Quietschen auftreten, zu messen. In Kapitel 5.1 wird eine Weiterentwicklung des DCTRs beschrieben, mit welcher es einfacher möglich ist, die nichtlinearen Materialeigenschaften in Abhängigkeit der Vorspannung und der dynamischen Amplitude zu bestimmen. Die Erweiterung ermöglicht zudem die Erfassung des Schermoduls in tangentialer Richtung (Abbildung 57) des anisotropen Reibmaterials. Bei den in Kapitel 5.1 dargestellten Messungen stellt sich heraus, dass das Reibmaterial neben der progressiven Abhängigkeit der Steifigkeit gegenüber der Vorspannung auch ein degressives Verhalten der Steifigkeit gegenüber der dynamischen Amplitude hat.

In der Komplexen Eigenwertanalyse ist die Berücksichtigung von amplitudenabhängigen Systemparametern jedoch nicht möglich, da dieses zu einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem führt. Die Berücksichtigung des Einflusses der Vorspannung ist jedoch möglich. Wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, wird während der Simulation zunächst eine statische Kontaktanalyse durchgeführt, bei welcher der Bremsdruck schrittweise erhöht wird. Wäre die Abhängigkeit der Steifigkeit des Reibmaterials gegenüber der inneren Spannung in der Materialdefinition hinterlegt, könnte diese bei jeder Erhöhung des Bremsdruckes angepasst werden. Nach der Kontaktanalyse wäre somit der Einfluss der Vorspannung bzw. des Bremsdruckes auf die Steifigkeit des Reibmaterials korrekt berücksichtigt. Damit wäre die in Abbildung 41 dargestellte Abhängigkeit des Übertragungsverhaltens der Bremse gegenüber dem Bremsdruck auch in der Simulation enthalten. Auch der daraus resultierende Einfluss des Bremsdruckes auf das Stabilitätsverhalten der trivialen Lösung wäre somit Bestandteil der Simulation.

3.3 Untersuchungen am rotierenden System

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Rotation der Bremsscheibe auf das dynamische Verhalten der Bremse untersucht. Mit Hilfe eines Laservibrometers wird die Schwingungsantwort des Bremssystems auf der Bremsscheibe, bei Variation der Drehgeschwindigkeit der Scheibe, gemessen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 42 als Wasserfalldiagramme für zwei verschiedene Bremsdrücke (5 bar und 10 bar) dargestellt. Die linken Bilder zeigen die gemessene Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz und der Drehzahl. Rechts ist das Ergebnis im logarithmischen Maßstab dargestellt. Allgemein ist zu erkennen, dass die Drehzahl einen geringen Einfluss auf die Resonanzfrequenzen hat, jedoch deutlich das Stabilitätsverhalten beeinflusst. Während der Messung mit 5 bar ist das System bis zu einer Drehzahl von ca. 40 U/min geräuscharm und beginnt dann mit ca. 3,4 kHz hörbar zu quietschen. Diese Beobachtung findet sich in den Messergebnissen in Form eines deutlichen Peaks bei der entsprechenden Frequenz wieder. Bis zu einer Drehzahl von 50 U/min ist zusätzlich ein Peak bei 2,6 kHz zu erkennen, welcher jedoch deutlich kleiner ist. Auffällig ist vor allem, dass die Quietschfrequenz von 3,4 kHz bei niedrigeren Drehzahlen keine ausgeprägte Resonanzstelle ist.

Messung bei 5 bar Bremsdruck



Messung bei 10 bar Bremsdruck

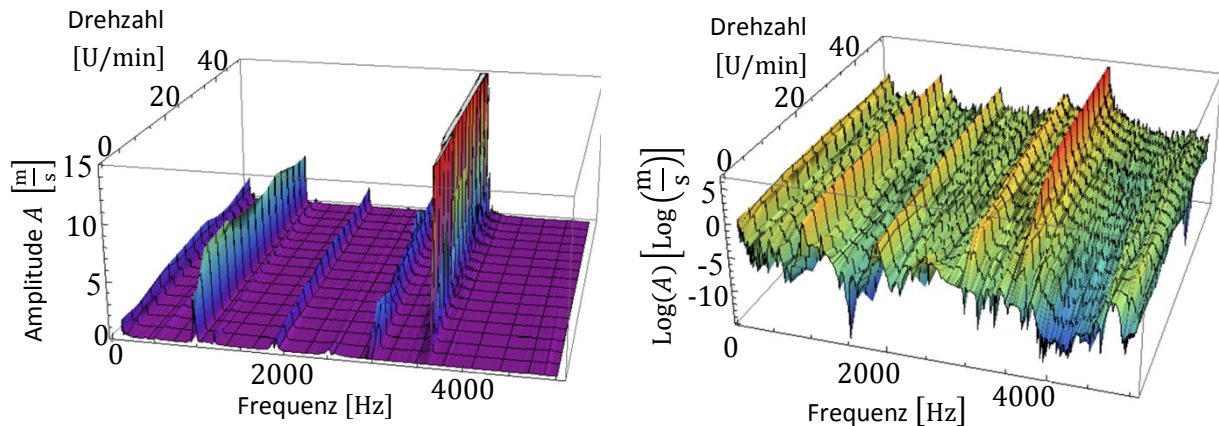


Abbildung 42: Wasserfalldiagramm der gemessenen Betriebsschwingung (Geschwindigkeit auf der Bremsscheibe in Normalenrichtung siehe Abbildung 40) einer Bremse unter Variation der Drehzahl. Darstellung mit linearer (links) und logarithmischer Skalierung (rechts), bei 5 bar anliegendem Bremsdruck (oben) und bei 10 bar (unten) .

Des Weiteren hat das Auftreten von Quietschen kaum Einfluss auf das Systemverhalten an sich, da zu erkennen ist, dass sich die Überhöhungen im Amplitudenfrequenzgang unmittelbar bevor sowie während des Quietschens nicht auffällig verändern. In Abbildung 43 ist dies noch einmal deutlicher dargestellt. Gezeigt ist dort die Amplitude über der Frequenz bei 35 U/min ohne Quietschen und bei 60 U/min mit Quietschen. Es ist erkennbar, dass die Verläufe nahezu identisch sind und sich lediglich durch den Peak bei 3,4 kHz unterscheiden. Dies zeigt, dass die in dem System vorhandenen Nichtlinearitäten zwar zu einer Begrenzung der selbsterregten Schwingung führen, gleichzeitig die Frequenz der Grenzykelschwingung jedoch in etwa der Eigenfrequenz entspricht. In Abschnitt 6.1.3 wird dieses Erkenntnis weiter verwendet.

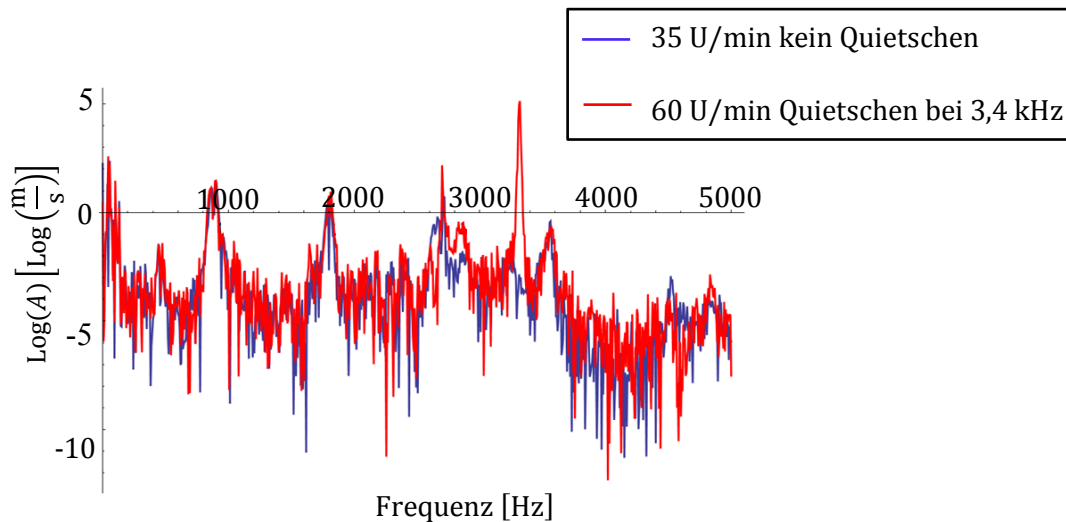


Abbildung 43: Vergleich der Amplitudenspektren der im Betrieb gemessenen Geschwindigkeiten auf der Brems Scheibe (siehe Abbildung 40), beim Quietschen (rot) und ohne Quietschen (blau) unter 5 bar anliegendem Bremsdruck.

3.4 Untersuchungen des Quietschverhaltens

Zur detaillierten Untersuchung des Quietschverhaltens der Kfz-Scheibenbremse werden mittels eines 3D Scanning Laser Vibrometer die Schwingformen während des Quietschens gemessen. Die Messungen erfolgten an der Technischen Universität Berlin in Zusammenarbeit mit Herrn Tiedemann des Institut für Mechanik und Meerestechnik der Technischen Universität Hamburg-Harburg. Ergebnisse dieser Messungen sind daher auch teilweise in [32] dargestellt. Durch die bereits oben erwähnte Besonderheit des Bremsenprüfstandes (Abbildung 36), welche eine freie Sicht auf die Brems Scheibe ermöglicht, kann die Schwingform der gesamten Brems Scheibe sowie von Teilen des Brems sattels und des Halters bestimmt werden. Das verwendete Messsystem (Polytec PSV 500 [66]) besteht aus drei Laservibrometern, welches die Schwinggeschwindigkeiten in zuvor definierten Punkten misst. Durch die drei Laser, welche aus unterschiedlichen Richtungen auf das zu vermessende Objekt gerichtet sind, ist es möglich, die Schwingung in alle drei Raumrichtungen zu erfassen. Durch ein automatisches Scannen der Oberfläche kann dies relativ schnell für die gesamte zu vermessende Struktur erfolgen. Da das Quietschen meist nur kurz auftritt und sehr sensibel gegenüber Parametern wie der Drehzahl, dem Bremsdruck und der Temperatur ist, kommt es vor, dass während einer Messung das Quietschen aufhört und erst durch Nachjustieren der Parameter wieder entsteht. Aus diesem Grund wird ein Zusatzsystem verwendet, welches die aktuelle Messung unterbricht sobald die Schwingungsamplitude einen Grenzwert unterschreitet und automatisch fortsetzt, wenn dieser Grenzwert wieder erreicht ist. Damit kann gewährleistet werden, dass tatsächlich nur die Schwingung während des Quietschens aufgezeichnet wird. In Abbildung 44 sind drei exemplarische Zeitverläufe der Schwingung während des Auftretens eines Quietschereignisses gezeigt. Es wird deutlich, dass das Quietschen kein stationärer Zustand ist. Das Bild links zeigt ein typisches, durchgängiges Quietschereignis. Deutlich zu erkennen ist die pulsierende Amplitude, wobei die Frequenz der Modulation mit der Rotation der Brems Scheibe korreliert. Das mittlere Bild zeigt ein Quietschereignis, welches periodisch auftritt, wobei die Periodendauer ebenfalls mit der Umdrehungsdauer

der Bremsscheibe übereinstimmt. Im rechten Bild ist ein zeitweise auftretendes Quietschereignis dargestellt. Dies verdeutlicht zum einen die Schwierigkeit, ein stationäres Quietschen im Prüfstand zu erzeugen und zum anderen die starke Variation der Amplitude über die Position der Bremsscheibe. Daraus resultiert beim Vermessen der Schwingform während des Quietschens, dass die Amplitude während der Messdauer nicht konstant ist. Wenn das System linear wäre und somit die Schwingungsamplitude keinen Einfluss auf die Schwingform hätte, wäre dies nicht relevant. Da es sich beim Quietschen jedoch um eine Grenzzykelschwingung handelt, welche aufgrund von Nichtlinearitäten existiert, kann das nichtlineare Verhalten nicht vernachlässigt werden. Für den Fall, dass es dennoch möglich ist, die Schwingform zu bestimmen, kann davon ausgegangen werden, dass diese jedoch nicht stark von der Amplitude beeinflusst wird.

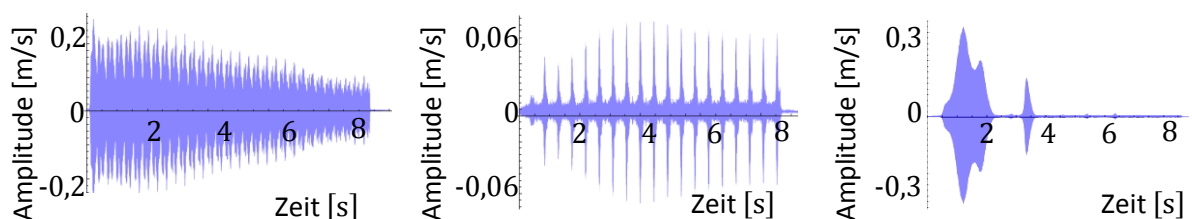
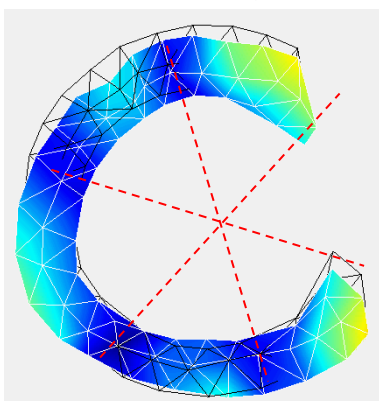


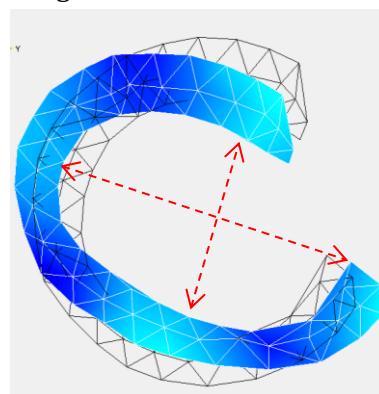
Abbildung 44: Zeitverläufe während des Quietschens, links: durchgängiges Quietschen mit pulsierender Amplitude, mittig: pulsierendes Quietschen, rechts: einzelnes Quietschen

Die Durchführung der Messung bei unterschiedlichen Bremsdrücken und Rotationsgeschwindigkeiten ergibt für das vorliegende Bremssystem drei Quietschfrequenzen mit dazugehörigen Schwingformen, welche nicht gleichzeitig auftraten sondern bei speziell gewählten Bremsdrücken und Drehzahlen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 45 dargestellt. Eine Besonderheit stellt dabei die Schwingform bei 2,6 kHz dar, bei welcher die Deformation der Bremsscheibe einer Ovalisierung entspricht. Die Identifikation dieser Schwingform war nur durch Verwendung des 3D Laser-Vibrometers möglich.

Schwingform mit 3 nodalen Durchmessern bei 1,75 kHz



Schwingform mit Ovalisierung bei 2,6 kHz



Schwingform mit 4 nodalen Durchmessern bei 3,4 kHz

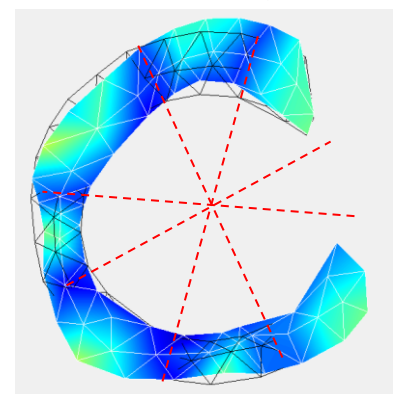


Abbildung 45: Darstellung und Klassifizierung der gemessenen Schwingformen während des Quietschens bei 1,75 kHz, 2,6 kHz und 3,4 kHz

Die Bestimmung der Schwingform erfolgt nicht in allen Messpunkten gleichzeitig sondern innerhalb eines Zeitraums von ca. 30 Sekunden. In dieser Zeit werden die Punkte nacheinander

gescannt und parallel immer der gleiche Referenzpunkt mit vermessen. Aus diesen Informationen kann im Anschluss die Schwingform bestimmt werden. Da, wie bereits oben erwähnt, die Amplitude während dieser Zeit nicht konstant ist, zeigt die Tatsache, dass die Identifikation der Schwingformen dennoch möglich ist, dass der Einfluss der Nichtlinearität auf die Schwingform klein sein muss.

Zum Vergleich der Messergebnisse mit der Simulation wird das Originalmodell, welches nicht die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Änderungen des E-Moduls enthält, verwendet. Dieses Modell hat im Frequenzbereich von 1-5 kHz 7 instabile Schwingformen (Abbildung 46) und somit deutlich mehr als die drei, welche experimentell bestimmt werden konnten. Dies ist vermutlich mit der mangelhaften Berücksichtigung von Dämpfungseffekten erklärbar. In Abbildung 47 sind drei der insgesamt sieben instabilen Schwingformen dargestellt. Diese Schwingformen stimmen in Bezug auf Form und Frequenz mit Ausnahme der Ovalisierung bei 2,6 kHz gut mit den Messergebnissen überein. Damit ist das Modell in der Lage die experimentell identifizierten Quietschereignisse ebenfalls zu identifizieren, wobei es weitere nicht relevante Schwingformen als instabil identifiziert. Diese gute Übereinstimmung dieser einzelnen Moden ist zunächst überraschend, da wie in Abschnitt 3.1 erläutert, das Modell die Resonanzfrequenzen der einzelnen Komponenten nicht korrekt abbildet. Da es jedoch bereits in der Industrie verwendet wurde, ist es wahrscheinlich, dass Anpassungen durchgeführt wurden, welche zu diesen guten Übereinstimmungen führen. In Gesprächen mit Industriepartnern von Fahrzeugherstellern und Bremsenzulieferern stellte sich heraus, dass häufig frei Parameter des Modells so angepasst werden, dass die im Experiment beobachteten Quietschereignisse in dem Modell auch als instabile Moden enthalten sind. Geeignet dafür sind die Parameter von linearen Federn und Dämpfern welche für die Modellierung in Fügstellen oder Bushings verwendet werden. Dabei ist das Ziel die experimentell identifizierten Quietschereignisse gut abzubilden, um so die Auswirkungen möglicher Abhilfemaßnahmen in der Simulation bewerten zu können. Einen tatsächlichen prädiktiven Charakter besitzt die Simulation damit jedoch nicht, da mehr instabile Moden identifiziert werden als tatsächlich Quietschereignisse auftreten. Zudem ist die Lösung des Modells quasi immer, also für beliebige Bremsdrücke und Drehzahlen, instabil, wo hingegen die experimentellen Untersuchungen auf dem Prüfstand gezeigt haben, dass es teilweise sehr schwierig ist Bedingungen einzustellen, unter denen die Bremse quietscht.

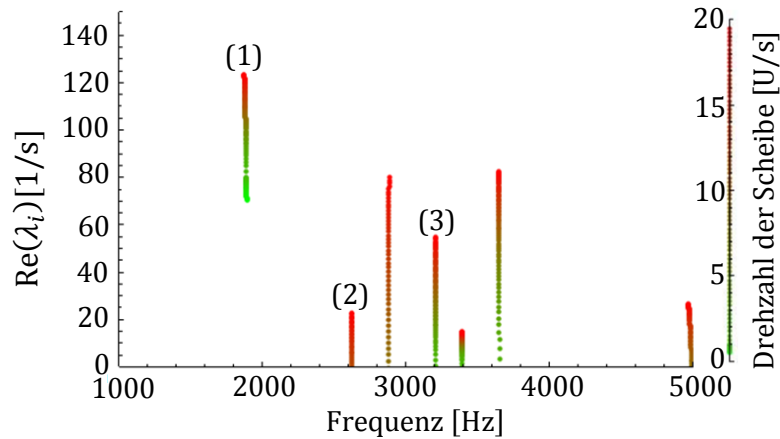


Abbildung 46: Ergebnis der komplexen Eigenwertanalyse: Darstellung der Eigenwerte mit positivem Realteil über der Frequenz unter Variation der Drehzahl.

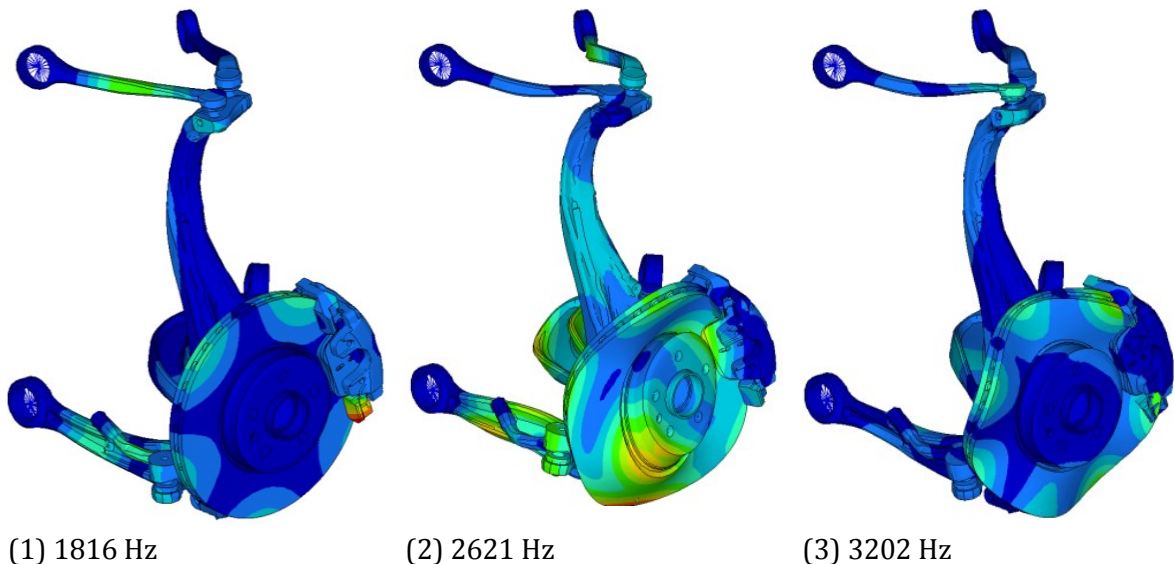


Abbildung 47: Darstellung der instabilen Schwingformen welche experimentell bestätigt werden konnten.

3.5 Zusammenfassung

Die mithilfe der experimentellen Untersuchung gewonnenen Erkenntnisse zeigen, dass es weitere Effekte gibt, welche bislang nicht ausreichend in der Simulation des Bremsenquietschens berücksichtigt sind. Diese Effekte sind der Einfluss des Bremsdruckes, die korrekte Berücksichtigung von Dämpfung und die Beobachtung, dass das Quietschen auch bei konstanten Betriebsparametern kein stationäres Verhalten hat (siehe Abbildung 44). Die Untersuchung des dynamischen Verhaltens der Einzelkomponenten zeigt, dass das hier betrachtete Modell zwar im Endergebnis eine gute Übereinstimmung zwischen dem gemessenen Quietschverhalten und den instabilen Moden hat, jedoch in Bezug auf das dynamische Verhalten der Einzelkomponenten Abweichungen enthält. Da die gute Übereinstimmung im Endergebnis vermutlich auf ein Nachjustieren unbekannter Parameter zurückzuführen ist, kann davon ausgegangen werden, dass auf diese Weise eine prädiktive Simulation nicht möglich ist. Der detaillierte Vergleich zwischen

experimentellen Untersuchungen und der Simulation zeigt zudem weitere Unstimmigkeiten. Offensichtlich wird die Dämpfung nicht korrekt berücksichtigt. Des Weiteren ist der Einfluss des Bremsdruckes in dem hier betrachteten Modell nicht enthalten. In [67] wird jedoch gezeigt, wie es möglich ist, eine nichtlineare Kontaktsteifigkeit zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe zu implementieren und wie sich diese auf die Stabilität der linearisierten Bewegungsgleichungen auswirkt. Das Ergebnis der dort geschilderten Untersuchung war, dass unter Berücksichtigung der Kontaktsteifigkeit ein signifikanter Zusammenhang zwischen Bremsdruck und Stabilitätsverhalten besteht.

Die Untersuchung der Bremse während des Quietschens ergab, dass das Quietschen meist ein nahezu monofrequentes Phänomen ist, dessen Amplitude wie erwartet nicht unbegrenzt wächst, sondern bedingt durch die Nichtlinearitäten einen Grenzykel erreicht. Dieses Verhalten kann in der linearen Stabilitätsanalyse nicht abgebildet werden, da es nur die Stabilität der trivialen Lösung beschreibt. Auffällig war jedoch, dass die Nichtlinearitäten scheinbar nur einen geringen Einfluss auf die Frequenz der Grenzykelschwingung haben, da sich diese mit der Amplitude des Quietschens nicht deutlich ändern. Die Ergebnisse bei der messtechnischen Bestimmung der Schwingformen während des Quietschens zeigen zudem, dass auch diese weitestgehend nicht von der Amplitude des Quietschens und somit nicht von den Nichtlinearitäten beeinflusst werden.

4 Relevanz von Nichtlinearitäten

Die oben beschriebene Simulationsmethode, die Komplexe Eigenwertanalyse (KEA), ist das nach heutigem Stand der Technik am weitesten verbreitete Werkzeug für die rechnerische Beurteilung des Quietschverhaltens von Bremssystemen. Wie bereits erläutert, kommt es jedoch immer wieder zu Abweichungen zwischen Simulation und Messung. Neben den bereits diskutierten Ursachen ist die KEA jedoch selbst unter Verwendung eines „perfekten“ Modells, welches alle relevanten Effekte abbildet, nicht in der Lage die Messergebnisse exakt vorherzusagen. Dies liegt daran, dass bei der KEA nur die Stabilität der, um die statische Ruhelage linearisierte, Störungsgleichung untersucht wird. Durch die Linearisierung entfallen jedoch gewisse Effekte wie z.B. das Grenzzykelverhalten.

Die Tatsache, dass Quietschen jedoch eine Grenzzykelschwingung ist und speziell die Amplitude dieser Schwingung und damit auch die Lautstärke des Quietschens nur unter Berücksichtigung von nichtlinearitäten bestimmt werden kann zeigt, dass eine lineare Betrachtung nicht ausreichen kann. Durch die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in schwingungsfähigen Systemen können weitere Effekte auftreten, welche insbesondere in Bezug auf Bremsenquietschen eine Rolle spielen. Im Folgenden werden diese Effekte mit Hilfe von Minimalmodellen sowie experimentellen Untersuchungen diskutiert und hinsichtlich ihrer praktischen Relevanz untersucht. Es sei angemerkt, dass auch die Berücksichtigung der Zeitvarianz des Systems relevant sein kann. Dies wird hier jedoch nicht betrachtet und es sei an dieser Stelle auf [50] und [68] verwiesen.

4.1 Unterschied zwischen linearer und nichtlinearer Simulation

Ein in der Literatur (z.B. [69], [70]) häufig verwendeter nichtlinearer Schwinger, welcher eine Grenzzykellösung besitzt, ist der Van-der-Pol-Oszillator. Dieser wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0 \quad (4.1)$$

beschrieben. Die um $y \equiv 0$ linearisierte Gleichung

$$\ddot{y} - \varepsilon\dot{y} + y = 0 \quad (4.2)$$

hat mit dem Ansatz $y(t) = Ae^{\lambda t}$ die Lösung

$$y(t) = A_1 e^{\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}\right)t} + A_2 e^{\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}\right)t}. \quad (4.3)$$

Für $0 < \varepsilon < 2$ entspricht dies einer exponentiell wachsenden, harmonischen Schwingung. In Abbildung 48 ist das Ergebnis für die Anfangsbedingungen $y(0) = 0,1$ und $\dot{y}(0) = 0$ dargestellt. Für den nichtlinearen Van-der-Pol-Oszillator (4.1) existiert keine geschlossene Lösung. Mit Hilfe der Zeitintegration ist es jedoch möglich, eine Näherungslösung zu bestimmen, welche in Abbildung 49 geplottet ist. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Lösung der nichtlinearen Gleichung zunächst ebenfalls exponentiell wächst, sich letztendlich aber einem stabilen Grenzzykel annähert. Die Existenz des Grenzzykels kann anschaulich durch eine energetische Betrachtung verdeutlicht werden.

Dafür wird Gleichung (4.1) mit $\dot{y}$ multipliziert und über eine Periodendauer T integriert. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2(t) - \frac{1}{2}\dot{y}^2(t+T) + \frac{1}{2}y^2(t) - \frac{1}{2}y^2(t+T) = \int_t^{t+T} -\varepsilon(1-y(\tau)^2)\dot{y}(\tau)^2 d\tau. \quad (4.4)$$

Für den Fall, dass eine Grenzzykellösung mit der Periodendauer T existiert, muss $y(0) = y(T)$ sowie $\dot{y}(0) = \dot{y}(T)$ gelten. Damit folgt aus (4.4) die Bedingung für die Existenz einer Grenzzykellösung

$$\int_t^{t+T} -\varepsilon(1-y(\tau)^2)\dot{y}(\tau)^2 d\tau = \Delta W = 0. \quad (4.5)$$

Eine genauere Betrachtung von ΔW zeigt, dass für kleine $y(\tau)$ und $\varepsilon > 0$ dem System innerhalb einer Periode Energie zugeführt wird ($\Delta W > 0$) und sich somit die Amplitude erhöht. Bei großen $y(\tau)$ wird dem System jedoch Energie entzogen ($\Delta W < 0$) wodurch sich die Amplitude verringert. Letztlich stellt sich eine Lösung für $y(\tau)$ ein, bei welcher das Energieniveau gemittelt über eine Periode konstant ist.

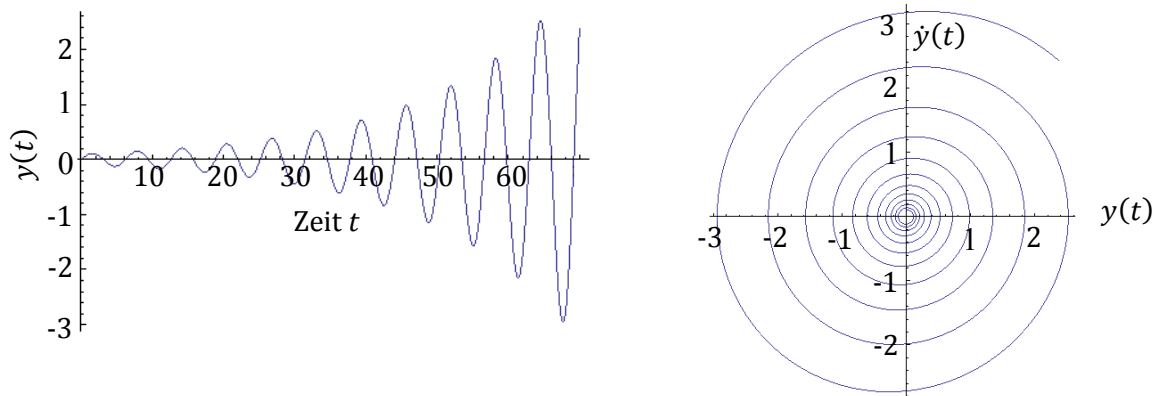


Abbildung 48: Ergebnis des linearisierten Van-der-Pol-Oszillators (4.2) im Zeitbereich und im Phasenraum.

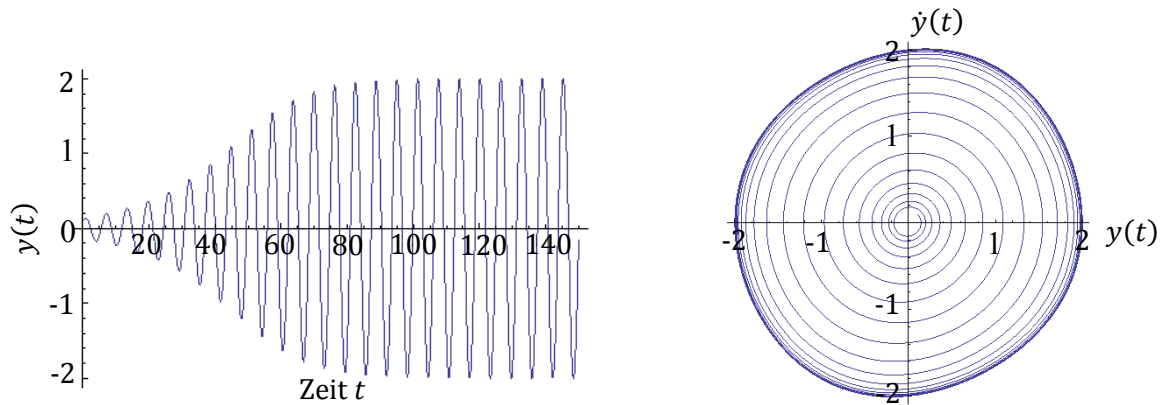


Abbildung 49: Ergebnis des nichtlinearen Van-der-Pol Oszillators (4.1) im Zeitbereich und im Phasenraum.

Zur Approximation dieser Grenzzykellösung kann neben der numerischen Integration auch die Methode der Harmonischen Balance verwendet werden, welche in Abschnitt 6.1.4 genauer erläutert wird. Mit dem Ansatz $y(t) = A\cos(\omega t)$ folgt aus (4.1)

$$-A\omega^2 \cos(\omega t) - A\omega\varepsilon \sin(\omega t) + \frac{1}{4}A^3\omega\varepsilon \sin(\omega t) + \frac{1}{4}A^3\omega\varepsilon \sin(3\omega t) + A\cos(\omega t) = 0. \quad (4.6)$$

Durch Vernachlässigung der höheren harmonischen Terme $\frac{1}{4}A^3\omega\varepsilon \sin(3\omega t)$ und einem Koeffizientenvergleich ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= -A\omega^2 + A \\ 0 &= -A\omega\varepsilon + \frac{1}{4}A^3\omega\varepsilon \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit der Lösung $A = 2$ und $\omega = 1$. Eingesetzt in den Ansatz folgt $y(t) = 2\cos(t)$, was in der Phasebene einem Kreis mit dem Radius 2 entspricht. Im Vergleich mit der durch numerische Integration bestimmten Lösung zeigt sich, dass die Ergebnisse hinsichtlich der Schwingungsamplitude sehr ähnlich sind. Durch Vernachlässigung der höher harmonischen Terme weicht die Form der Grenzzykelschwingung jedoch etwas ab. Diese Abweichung ist dann klein, wenn die Nichtlinearität klein, also ε nahe Null ist.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass nichtlineare Systeme im Vergleich zu linearen Systemen einen Grenzzykel besitzen können. In Bezug auf die Simulation des Bremsenquietschens bedeutet dies, dass sich die tatsächliche Quietschamplitude, und somit die Lautstärke, nur unter Berücksichtigung der Nichtlinearitäten identifizieren lässt.

Ein weiterer Effekt in der nichtlinearen Dynamik ist das Auftreten von mehrfachen Lösungen. Betrachtet wird ein System mit der Gleichung

$$\ddot{y} + (d + \varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 y^4)\dot{y} + y = 0. \quad (4.8)$$

Dieses System ist ähnlich dem Van-der-Pol-Oszillator (4.1). Es wird jedoch um den Parameter d , welcher die lineare, viskose Dämpfung beschreibt, erweitert. Zusätzlich wird der nichtlineare Term $\varepsilon_2 y^4 \dot{y}$ hinzugefügt und ε durch ε_1 ersetzt. Mit Hilfe der Harmonischen Balance kann unter Verwendung des Ansatzes $y(t) = A\cos(\omega t)$ die Lösung in Abhängigkeit von d , ε_1 und ε_2 bestimmt werden. In Abbildung 50 ist das Ergebnis für die Schwingungsamplitude A über die lineare Dämpfung d geplottet. Im linken Bild ist eine superkritische Verzweigung zu erkennen, welche sich bei den Parametern $\varepsilon_1 = 1$ und $\varepsilon_2 = 0$ ergibt. Für Werte von $d < 0$ ist die triviale Lösung $y(t) \equiv 0$ instabil und es existiert eine Grenzzykellösung, deren Amplitude mit kleiner werdendem d steigt. Ist $d = -1$, entspricht das erweiterte Problem der Van-der-Pol-Gleichung und besitzt dementsprechend die Grenzzykellösung mit der Amplitude $A = 2$. Die rechte Grafik zeigt ein subkritisches Verzweigungsverhalten, welche sich für $\varepsilon_1 = -2$ und $\varepsilon_2 = 1$ ergibt. Besonders interessant ist hierbei der Bereich für $0 < d < 0,5$. In diesem ist die triviale Lösung stabil. Es existiert zudem eine stabile Grenzzykellösung. Es treten somit in diesem Bereich zwei stabile und eine instabile Lösung auf, wobei von den Anfangsbedingungen abhängig ist, welche Lösung angenommen wird.

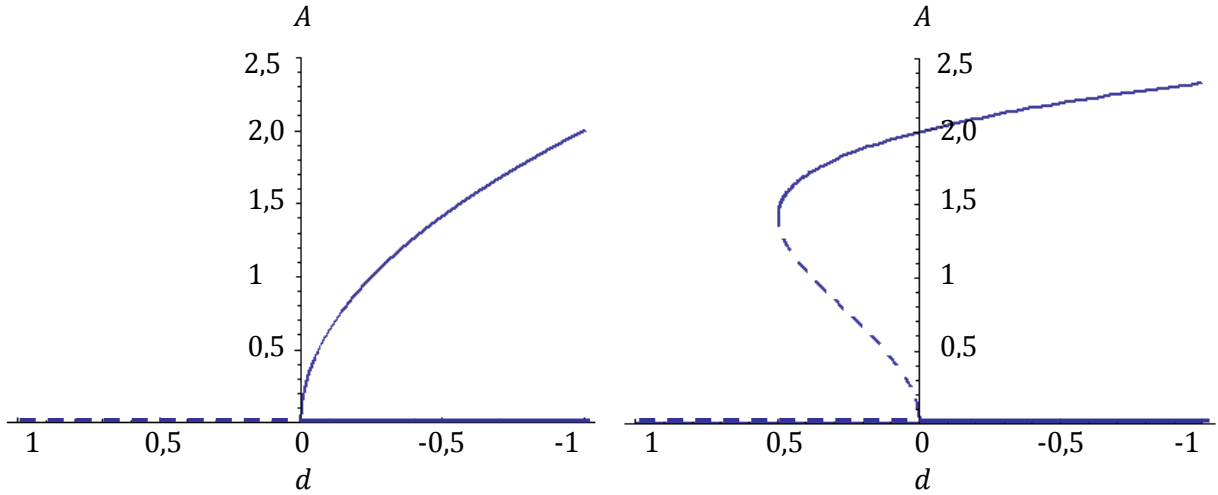


Abbildung 50: Darstellung der Amplitude A über der linearen Dämpfung d als superkritische (links) und als subkritische (rechts) Verzweigung.

Nach dieser Betrachtung ist klar, dass eine Simulation des Bremsenquietschens auf Basis von linearen Modellen nicht alle Phänomene abbilden kann. Im Falle einer superkritischen Verzweigung könnte es somit sein, dass aus der linearen Simulation eine ungenügende Aussage bezüglich des Quietschverhaltens resultiert. Die reine Betrachtung der Stabilität der trivialen Lösung ist in diesem Fall ungenügend, da in Folge von Nichtlinearitäten zusätzlich Lösungen mit einer Amplitude ungleich Null existieren können. Im Falle einer instabilen trivialen Lösung ist es jedoch möglich, dass die sich aufgrund von Nichtlinearitäten einstellende Grenzzykelschwingung eine kleine Amplitude hat und somit das System schwingt, aber diese Schwingung nicht als Geräusch wahrgenommen wird. In diesem Fall wäre die Aussage aus der linearen Simulation nicht ausreichend, da sie Quietschfrequenzen eines Bremssystems identifiziert, welche in der Realität nicht relevant sind. Damit ist es möglich, dass sich mit Hilfe der linearen Stabilitätsuntersuchung einerseits Quietschfrequenzen ermitteln lassen, die in der Realität nicht relevant sind und andererseits relevante Quietschfrequenzen nicht bestimmt werden können (vgl. [19]).

Eine weitere Beobachtung bei der linearen Simulation ist, dass häufig mehrere Eigenwerte mit positivem Realteil auftreten und somit das Ergebnis eine Überlagerung mehrerer Schwingformen mit unterschiedlichen Frequenzen sein müsste. Aus der messtechnischen Untersuchung in Abschnitt 3.4 zum Quietschverhalten resultiert jedoch, dass die untersuchte Bremse zwar unterschiedliche Quietschfrequenzen hat, diese jedoch in der Regel nicht gleichzeitig auftreten. Auch diese Abweichung zwischen Simulation und Realität lässt sich durch Hinzunahme von Nichtlinearitäten erklären. Betrachtet wird dazu ein System mit zwei Freiheitsgraden, welches durch das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}} - 10 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}} + 100 \begin{pmatrix} (y_1 - y_2)^2 & -(y_1 - y_2)^2 \\ -(y_1 - y_2)^2 & (y_1 - y_2)^2 + 35y_2^2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} = 0 \quad (4.9)$$

gegeben sei. Anschaulich entspricht dieses Gleichungssystem einem nichtlinearen Schwinger mit zwei Freiheitsgraden welches in Abbildung 51 dargestellt ist. Die zwei Massenpunkte sind über Federn untereinander und mit der Umgebung gekoppelt. Des Weiteren sind parallel zu den Federn Dämpfer angeordnet, deren Dämpfungsparameter teilweise abhängig von ihrer Deformation sind.

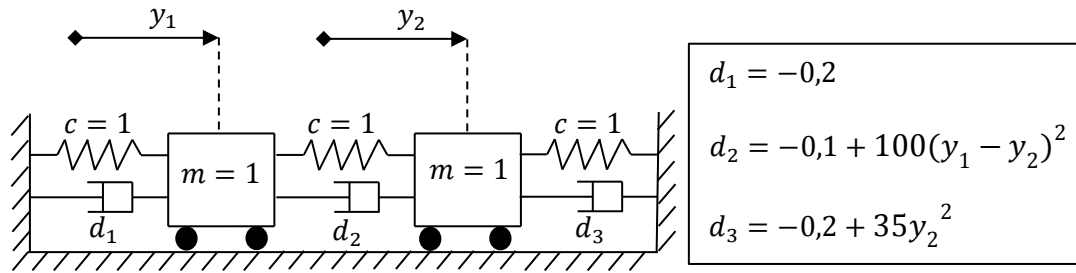


Abbildung 51: Darstellung des Schwingers mit zwei Freiheitsgraden und nichtlinearen Dämpfern inklusive der Systemparameter.

Das daraus resultierende linearisierte System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} -30 & -10 \\ -10 & -30 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

ist aufgrund der Definitheit der Dämpfungsmatrix instabil und besitzt die Eigenwertpaare $\lambda_{1/2} = 0.04 \pm 0.88i$ und $\lambda_{3/4} = 0.21 \pm 1.58i$, welche beide einen positiven Realteil haben. Da der Realteil des Eigenwertpaares $\lambda_{3/4}$ größer ist, könnte man annehmen, dass der sich aufgrund der Nichtlinearitäten einstellende Grenzykel näherungsweise dieser Lösung entspricht. In der komplexen Eigenwertanalyse ist diese Annahme gängige Praxis. Mit dieser Annahme würde nach Auswertung der linearen Simulation angenommen werden, dass dieses System mit einer Frequenz von $\text{Im}(\lambda_{3/4})/2\pi = 0,25$ Hz schwingt. Diese Annahme ist jedoch nicht haltbar was die folgende nichtlineare Betrachtung zeigt. Zum Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems (4.9) wird die numerische Zeitintegration verwendet. In Abbildung 52 ist der Zeitverlauf $y_1(t)$ dargestellt. Zunächst steigt die Amplitude exponentiell an und stagniert dann bei einer Amplitude von ca. 0,02. Im weiteren Verlauf steigt sie abermals exponentiell an und erreicht schließlich eine konstante Größe von ca. 0,1.

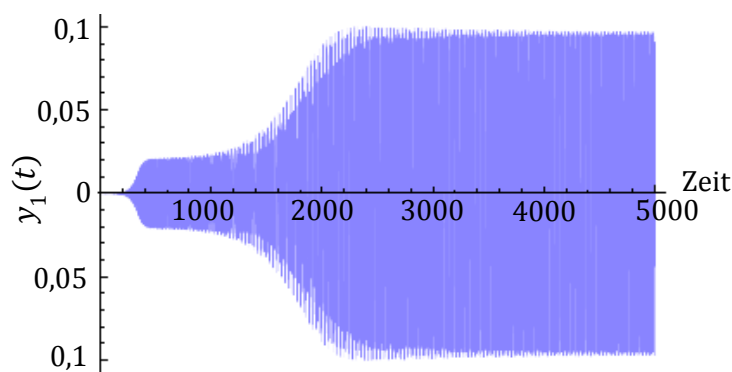


Abbildung 52: Darstellung des mit Hilfe der Zeitintegration erzielten Ergebnisses bezüglich der Auslenkung $y_1(t)$

Durch Darstellung dieses Zeitverlaufs als Wasserfalldiagramm (Abbildung 53) kann neben der Schwingungsamplitude zusätzlich die Schwingfrequenz zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt werden. In dieser Darstellung ist deutlich zu erkennen, dass zunächst das System mit der durch die lineare Simulation erwarteten Frequenz von 0,25 Hz schwingt, sich nach einiger Zeit

jedoch eine Grenzzykelschwingung mit ca. 0,14 Hz einstellt. Dies verdeutlicht, dass die Ergebnisse der linearen Simulation im Falle von mehrfachen Instabilitäten keine Auskunft darüber geben können, welche Frequenzen in der sich einstellenden Grenzzykellösung dominant sind. Zudem wird deutlich, dass die Größe des Realteils keinerlei Informationen über die Amplitude der Grenzzykelschwingung beinhaltet. In Abbildung 54 ist die Fouriertransformation des Grenzzykel am Ende der Integrationszeit geplottet. Zum Vergleich mit der linearen Stabilitätsanalyse sind in dem Diagramm zusätzlich die Realteile der Eigenwerte über der Frequenz dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass die sich einstellende dominante Frequenz der Grenzzykelschwingung nicht mit dem aus der linearen Analyse erwarteten Ergebnis übereinstimmt.

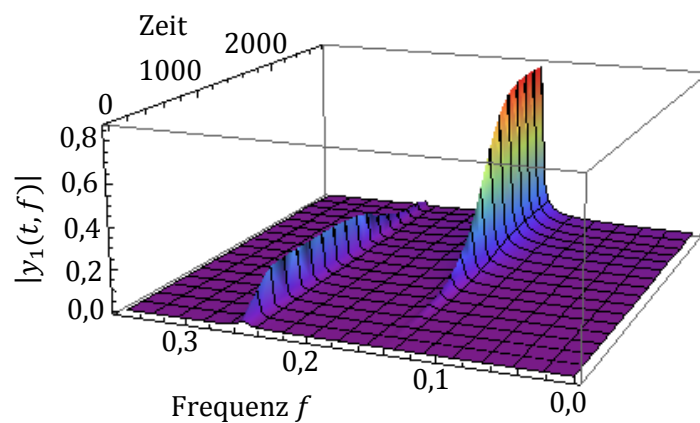


Abbildung 53: Darstellung des Zeitverlaufs $y_1(t)$ als Wasserfalldiagramm

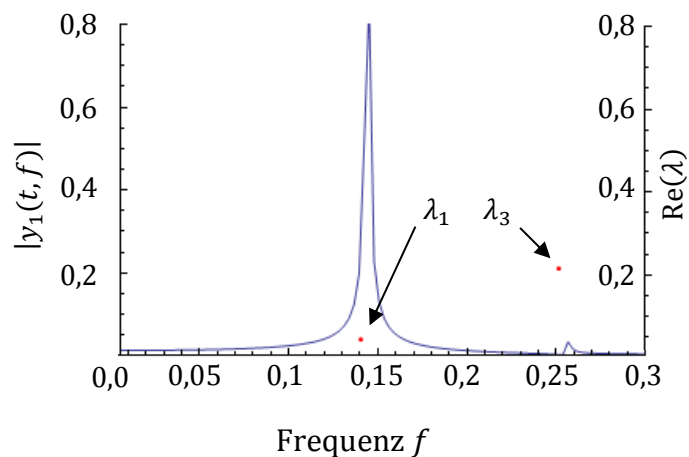


Abbildung 54: Darstellung der Fouriertransformation der Grenzzykelschwingung am Ende der Integrationszeit und Realteil der Eigenwerte über der Frequenz

4.2 Messtechnische Untersuchung des nichtlinearen Verhaltens von Bremsen

Im vorangehenden Abschnitt 4.1 ist dargestellt, inwiefern Nichtlinearitäten das dynamische Verhalten eines schwingungsfähigen Systems theoretisch beeinflussen können. Welche dieser Effekte tatsächlich in Bezug auf das Bremsenquietschen eine Rolle spielt, wird nun anhand von Messergebnissen diskutiert. Für die Durchführung der Messreihen wird die bereits in Kapitel 2.2 eingeführte, innenbelüftete Vorderradbremse eines Mittelklassewagens verwendet. Der verwendete Prüfstand ermöglicht die Durchführung sogenannter Schleppbremsungen. Dabei wird das Rad über die Antriebswelle mit Hilfe eines Elektromotors mit konstanter Drehzahl angetrieben und gleichzeitig ein Bremsdruck aufgebracht. Dieses Vorgehen ermöglicht es, anders als bei einer klassischen Stoppbremse, die Betriebsparameter wie Bremsdruck, Rotationsgeschwindigkeit und Temperatur über längere Zeit konstant zu halten. In der jetzt diskutierten Messung wird die Rotationsgeschwindigkeit zunächst langsam erhöht, anschließend reduziert und dann wieder erhöht (siehe Abbildung 55). Alle anderen Parameter blieben nahezu unverändert. Der eingestellte Bremsdruck ist dabei konstant 10 bar. Während des Versuchs wird neben der Drehzahl auch die Schwingung der Bremsscheibe an einem ortsfesten Punkt mit Hilfe eines Laservibrometers aufgezeichnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 55 dargestellt.

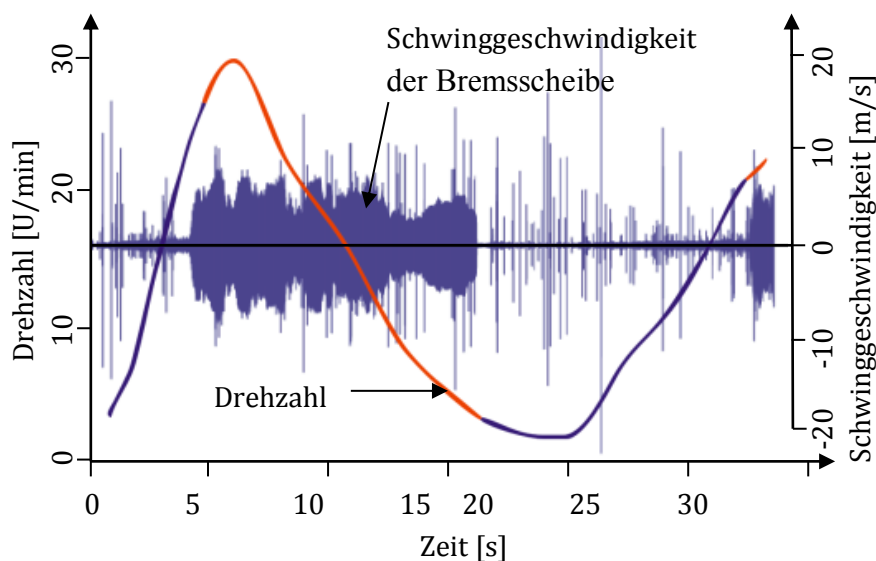


Abbildung 55: Darstellung der Drehzahl sowie der mit dem Laservibrometer gemessenen Schwinggeschwindigkeit der Bremsscheibe über der Zeit. Der in rot dargestellte Drehzahlverlauf verdeutlicht, dass die Bremse zu dieser Zeit hörbar quietscht.

Zu sehen sind die Schwinggeschwindigkeit sowie die Drehzahl der Bremsscheibe über der Zeit. Im Bereich von 0 bis 5 s wird die Drehzahl von nahezu Null auf ca. 28 U/min erhöht. Anhand der aufgezeichneten Amplitude der Schwingung ist zu erkennen, dass die Bremse zunächst nicht quietscht. Ab einer Drehzahl von mehr als 28 U/min beginnt die Bremse hörbar zu Quietschen. Durch eine Fouriertransformation dieses Signals ergibt sich, dass es sich dabei um eine annä-

hernd harmonische Schwingung mit ca. 3800 Hz handelt. Im weiteren Verlauf des Experiments wird die Drehzahl wieder bis nahe des Stillstandes reduziert. Während dieser Zeit ist deutlich zu erkennen, dass die hohe Schwingungsamplitude (Quietschen) eine Weile erhalten bleibt und erst bei sehr kleinen Drehzahlen von ca. 3 U/min schlagartig abfällt. Auch bei einer erneuten Erhöhung der Drehzahl ist die Bremse ruhig, bis die Drehzahl einen Wert von ca. 20 U/min überschreitet.

Die Untersuchung zeigt, dass in einem Drehzahlbereich von 3 bis 28 U/min sowohl Quietschen als auch kein Quietschen auftreten kann. In einem weiteren Versuch war es sogar möglich, bei einer konstanten Drehzahl von 20 U/min durch einen Schlag auf den Bremssattel zwischen den beiden Zuständen hin und her zu springen [71]. Dies bestätigt die bereits theoretisch untersuchte Beobachtung, dass nichtlineare Systeme in bestimmten Parameterbereichen mehrfache Lösungen besitzen. In Abbildung 56 ist das Ergebnis der Messung als Verzweigungsdiagramm veranschaulicht. Dargestellt ist die Amplitude der Schwingung der Bremsscheibe über der Drehzahl. Das Diagramm zeigt, dass die Bremse ein subkritisches Verzweigungsverhalten aufweist.

Die durchgeführte Messung zeigt deutlich, dass sowohl in der Simulation als auch in der messtechnischen Bewertung des Quietschverhaltens von Kfz-Scheibenbremsen der Einfluss von Nichtlinearitäten eine große Bedeutung hat. Durch bloße Betrachtung der Stabilität der trivialen Lösung ist es somit weder möglich, die tatsächliche Quietschamplitude zu bestimmen noch, wie in der KEA angenommen, die Quietschfrequenzen zu identifizieren. Somit liefert die lineare Simulation Ergebnisse, welche zum einen auf Quietschfrequenzen hinweisen, die bedingt durch Nichtlinearitäten keine Rolle spielen und andererseits werden einige relevante Lösungen nicht gefunden. In Bezug auf die Durchführung von Messungen bedeutet das Auftreten von subkritischen Verzweigungen, dass unter Umständen nicht alle potentiellen Quietschereignisse erfasst werden können. Dies ist der Fall, wenn die Anfangsbedingungen im Einzugsgebiet der stabilen trivialen Lösung liegen. Somit kann, wie oben beschrieben, die untersuchte Bremse bei z.B. 15 U/min quietschen, muss dies jedoch nicht. Für eine messtechnische Identifikation aller möglichen Quietschereignisse ist es somit nicht ausreichend, alle möglichen Parametervariationen zu untersuchen. Die Untersuchung müsste zudem verschiedene Anfangsbedingungen sowie eine variierende äußere Störung umfassen. Dies erklärt auch den hohen Aufwand bei der experimentellen Untersuchung des Quietschverhaltens von Bremsen. In [72] wird beschrieben wie umfangreich diese experimentellen Untersuchungen sind und gleichzeitig ein Verfahren vorgestellt, welches diese Untersuchungen stark vereinfachen kann.

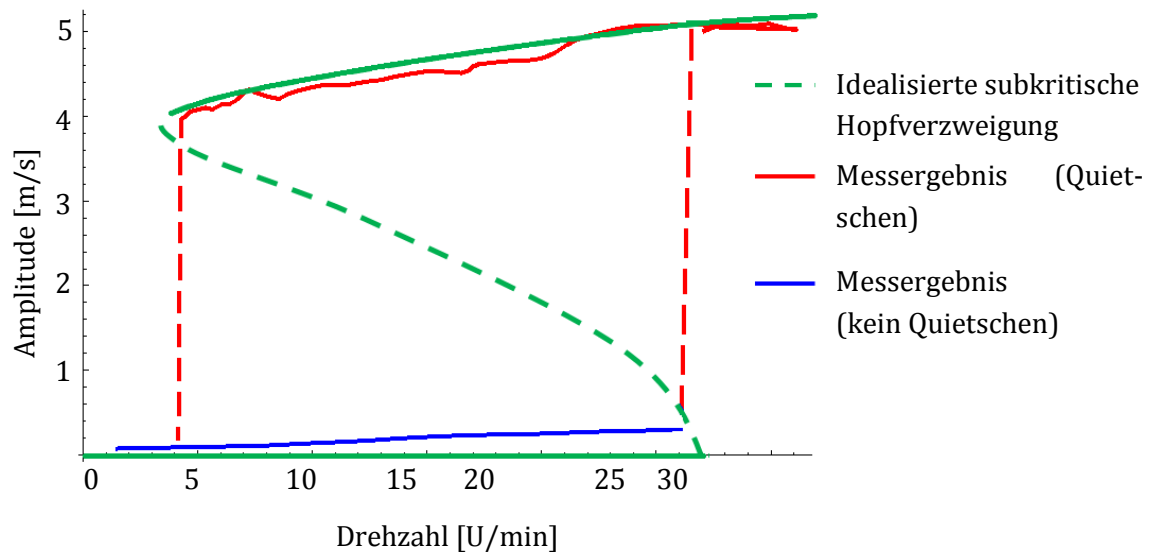


Abbildung 56: Darstellung der auf der Bremsscheibe gemessenen Amplitude über der Drehzahl im Vergleich zu einer Standardform einer subkritischen Hopfverzweigung

4.3 Dominante Nichtlinearitäten im Bremssystem

In einer regulären Kfz-Scheibenbremse existieren verschiedene Ursachen für nichtlineares dynamisches Verhalten. Allgemein wird zwischen geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten unterschieden. Da die während des Quietschens auftretenden Wegamplituden klein sind (ca. $1\text{ }\mu\text{m}$), können Nichtlinearitäten aufgrund des Einflusses geometrischer Veränderung infolge von großen Amplituden vernachlässigt werden. In den folgenden Abschnitten werden drei unterschiedliche, für das Bremsenquietschen relevante Arten von Nichtlinearitäten genauer betrachtet.

4.3.1 Nichtlineares Verhalten des Reibmaterials

Messungen bezüglich der mechanischen Eigenschaften des Reibmaterials unter quietschrelevanten Bedingungen [73] zeigen, dass dieses in Bezug auf die Steifigkeit ein progressives Verhalten gegenüber der statischen Vorspannung hat. Weiterhin ist nachgewiesen, dass bezüglich der dynamischen Kraft-Amplitude ein degressives Verhalten vorliegt. In [73] konnte zudem mithilfe von Minimalmodellen gezeigt werden, dass diese Nichtlinearitäten einen Einfluss auf das Grenzzykelverhalten von Bremsen haben.

4.3.2 Nichtlinearitäten in Fügstellen

Als Fügstellen werden Verbindungen zwischen zwei Bauteilen bezeichnet. Bei Bremssystemen wird zwischen geschraubten (z.B. Bremsscheibe an Radträger), gesteckten (z.B. Belag im Bremshalter) sowie Verbindungen mit Gummilager unterschieden. Die Gemeinsamkeit all dieser Fügstellen ist ein stark nichtlineares Verhalten, wobei der Einfluss der gesteckten Verbindungen auf das dynamische Verhalten in Hinblick auf das Quietschen am größten ist. Dies belegen die Messungen in [36]. Des Weiteren wird dort gezeigt, dass dieser Verbindungstyp gegenüber der dynamischen Amplitude eine progressive Dämpfung beinhaltet.

4.3.3 Nichtlineares Reibgesetz

Es ist allseits bekannt, dass die Annahme, die Reibkraft sei proportional zur Normalkraft, nicht allgemein gültig ist. In [74] ist dargestellt, wie komplex die Zusammenhänge zwischen Reibkraft und Normalkraft in der Realität sind. Komplexere Reibgesetze umfassen die Berücksichtigung der Relativgeschwindigkeit sowie den Einfluss der Normalkraft. In erweiterten Modellen ist es üblich, weitere Zustandsgrößen zu berücksichtigen. All diese Erweiterungen des Reibgesetzes führen zu Nichtlinearitäten, welche jedoch bei der Simulation des Bremsenquietschens mit der KEA vernachlässigt werden.

4.4 Schwierigkeiten der nichtlinearen Simulation

Die Tatsache, dass Nichtlinearitäten in der Simulation des Bremsenquietschens überwiegend vernachlässigt werden, lässt sich vor allem auf zwei grundlegende Probleme zurückführen. Zunächst müssten die nichtlinearen Systemeigenschaften, welche in Bremssystemen für die Existenz einer Grenzykellösung relevant sind, identifiziert werden. Diese Aufgabe ist zwar noch nicht abschließend erfüllt, es existieren jedoch mittlerweile richtungsweisende Möglichkeiten. So wurde beispielsweise in [32] ein Verfahren gezeigt, mit welchem die experimentelle Bestimmung des nichtlinearen Verhaltens dominanter Fügstellen in Bremssystemen möglich ist. Für die Identifikation des nichtlinearen Materialverhaltens der Bremsbeläge wird in Kapitel 5.1 ein experimentelles Verfahren dargestellt, mit welchem es möglich ist, die Normal- und Schersteifigkeit in Abhängigkeit der dynamischen Amplitude zu bestimmen.

Die zweite Herausforderung besteht darin, Nichtlinearitäten in geeigneter Weise in die Simulation zu integrieren. Es ist offensichtlich, dass dies auf Grundlage der FE-Modelle erfolgen muss, welche auch für die Untersuchung der Stabilität der trivialen Lösung verwendet werden. Eine Vereinfachung dieser Modelle hätte zur Folge, dass andere Effekte vernachlässigt werden und somit die Erweiterung der Simulation um Nichtlinearitäten keine wirkliche Verbesserung darstellt. Dies führt zu dem Problem, dass die resultierende nichtlineare Differentialgleichung die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden umfasst wie die lineare FE-Modelle welche zum Teil mehreren Millionen Freiheitsgraden haben. Da schon das Lösen niedrigdimensionaler nichtlinearer Differentialgleichungen mit hohem Rechenaufwand verbunden ist, muss die Frage der Realisierbarkeit beantwortet werden. Das Standardverfahren zum Lösen hochdimensionaler nichtlinearer Differentialgleichungssysteme der Form

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \quad (4.11)$$

ist die numerische Zeitintegration. Dabei wird ausgehend von einem Anfangszustand $\mathbf{y}(t = 0) = \mathbf{y}_0$ die Lösung $\mathbf{y}(t)$ schrittweise bestimmt. Die Schrittweite muss dabei an das Verhalten der Lösung angepasst werden. Im Falle eines näherungsweise harmonischen Verlaufs dieser wird die Schrittweite kleiner gewählt, je höher die Frequenz der Lösung ist. Der Rechenaufwand pro Zeitschritt hängt von der verwendeten Methode (implizit oder explizit) und den Freiheitsgraden, also der Dimension von $\mathbf{y}(t)$, ab. Der Gesamtrechenaufwand wird somit groß, wenn das System viele Freiheitsgrade hat und gleichzeitig viele Zeitschritte zum Finden der Lösung benötigt werden. Da das Bremsenquietschen ein hochfrequentes Phänomen ist und für die Bestimmung der Grenzzykellösung über einen verhältnismäßig großen Zeitraum (mehrere Sekunden) integriert werden muss, ist der Rechenaufwand hier nochmals größer (vgl. [20]).

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde dargestellt, wie relevant die Betrachtung von Nichtlinearitäten für die Simulation des Bremsenquietschens ist. Mit Hilfe von experimentellen Untersuchungen wurde zunächst das Verzweigungsverhalten einer realen Bremse dargestellt. Dabei stellt sich heraus, dass dieses subkritisch ist. In einer weiterführenden theoretischen Betrachtung wurde unter Verwendung eines Minimalmodells gezeigt, dass dieses Verhalten in der Simulation nur unter Hinzunahme von Nichtlinearitäten abgebildet werden kann. Von besonderer Bedeutung ist das sowohl experimentell als auch theoretisch nachgewiesene Ergebnis, dass die Stabilität der trivialen Lösung keine zuverlässige Aussage darüber beinhaltet, ob eine Bremse tatsächlich quietscht oder nicht. Des Weiteren wurden die Schwierigkeiten diskutiert, welche mit der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in der Simulation des Bremsenquietschens verbunden sind. Das Ergebnis ist, dass diese Simulation nach heutigem Stand der Technik zu rechenintensiv und daher in der Anwendung im industriellen Alltag nicht umsetzbar ist. In Kapitel 5 wird daher ein Verfahren beschrieben, welches das Lösen eines hochdimensionalen, nichtlinearen Differentialgleichungssystems mit deutlich geringerem Rechenaufwand erlaubt. Mit diesem Verfahren ist es möglich, ohne Vereinfachung in der Modellbildung das tatsächliche Bremsenquietschen anhand des Verzweigungsverhaltens und der Grenzzykelschwingung zu untersuchen. Im folgenden Kapitel wird dargestellt, wie spezielle nichtlineare Systemeigenschaften in Bremsen experimentell bestimmt werden können und wie deren Einfluss auf das Quietschverhalten ist.

5 Identifikation und Einfluss einiger für das Quietschen relevanter Nichtlinearitäten

5.1 Identifikation des nichtlinearen Verhaltens des Reibmaterials

Zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften des Reibmaterials wird im Folgenden ein Prüfverfahren beschrieben, welches auf der bereits etablierten Technologie des sogenannten DCTR (Dynamic Compression Test Rig) [65] basiert. Mit dieser Messmethode ist die Bestimmung der Steifigkeit einer Belagsprobe unter einer während des Quietschens anliegenden Belastung in Normalenrichtung möglich. Dabei wird zunächst eine Belagsprobe mit einer statischen Vorspannung in dieser Richtung belastet und im nächsten Schritt zu harmonischen Schwingungen angeregt. Die dynamische Amplitude beträgt dabei bis zu $1\text{ }\mu\text{m}$ bei einer Frequenz im Kilohertz-Bereich. Dies entspricht der Beanspruchung in Normalenrichtung des Reibmaterials während einer Bremsung, bei welcher ein Quietschereignis auftritt. Die Weiterentwicklung dieser Messmethode führt zu einem Prüfstand, welcher es ermöglicht, neben der Steifigkeit in Normalenrichtung auch die Schersteifigkeit zu bestimmen. Gleichzeitig wird die statische Vorspannung um einen Anteil in tangentialer Richtung erweitert. Durch diese Erweiterung ist es möglich, die Belastungssituation während des Quietschens (Abbildung 57), die sich aus dem durch den Bremsdruck bedingten Anteil in Normalenrichtung sowie einem aus der Reibkraft resultierenden Anteil in tangentialer Richtung zusammensetzt, besser abzubilden. Im folgenden Abschnitt wird detailliert auf die Funktionsweise des erweiterten Prüfstandes sowie die ebenfalls verbesserte Auswertemethode eingegangen. An dieser Stelle sei auf die studentische Arbeit [46] verwiesen, in welcher detailliert beschrieben ist wie die Messungen durchgeführt und ausgewertet werden. In dieser Arbeit ist zudem eine weitere Verbesserung der Auswertemethode beschrieben, welche es ermöglicht die Qualität der durchgeführten Messung zu charakterisieren. In einer weiteren studentischen Arbeit [43], wird ein alternatives Messprinzip, welches auf dem hier dargestellten Prüfaufbau basiert, beschrieben. Dieses Konzept lieferte jedoch nicht die gewünschten Ergebnisse und wird daher hier nicht erörtert.

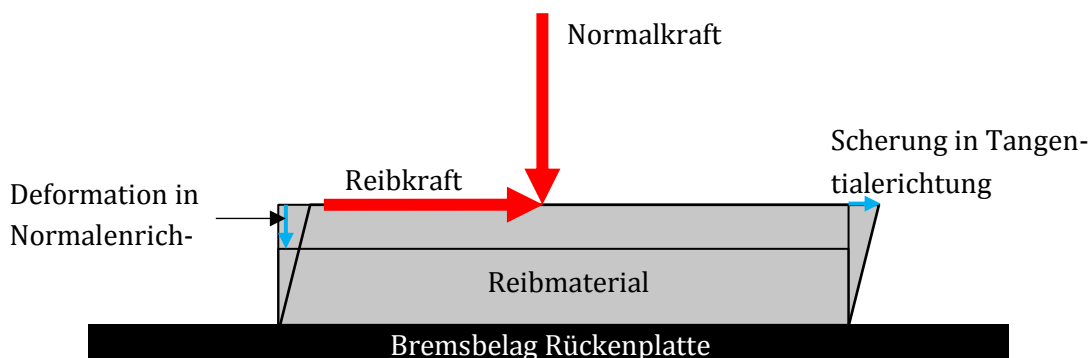


Abbildung 57: Seitenansicht eines Bremsbelags mit Darstellung der Belastungen und der daraus resultierenden Deformationen

5.1.1 Beschreibung des Messaufbaus

Der Prüfstand, welcher im Folgenden als DCSTR (Dynamic Compression Shear Test Rig), bezeichnet wird, ist in Abbildung 58 dargestellt. Das Messprinzip beruht darauf, dass zwei möglichst identische Belagsproben⁹ symmetrisch unter einem bestimmten Winkel¹⁰ angeordnet sind und in vertikaler Richtung mit einer statischen Vorspannung belastet werden. Anschließend werden die Proben mit Hilfe von Piezoaktoren ebenfalls in vertikale Richtung zu harmonischen Schwingungen angeregt. Durch die schräge Anordnung resultiert eine kombinierte statische sowie eine dynamische Deformation der Probe in Normalen- und Tangentialrichtung. Durch Messen dieser Deformation und der dafür benötigten Kraft können Steifigkeits- und Dämpfungswerte sowohl in normaler als auch in tangentialer Richtung bestimmt werden.

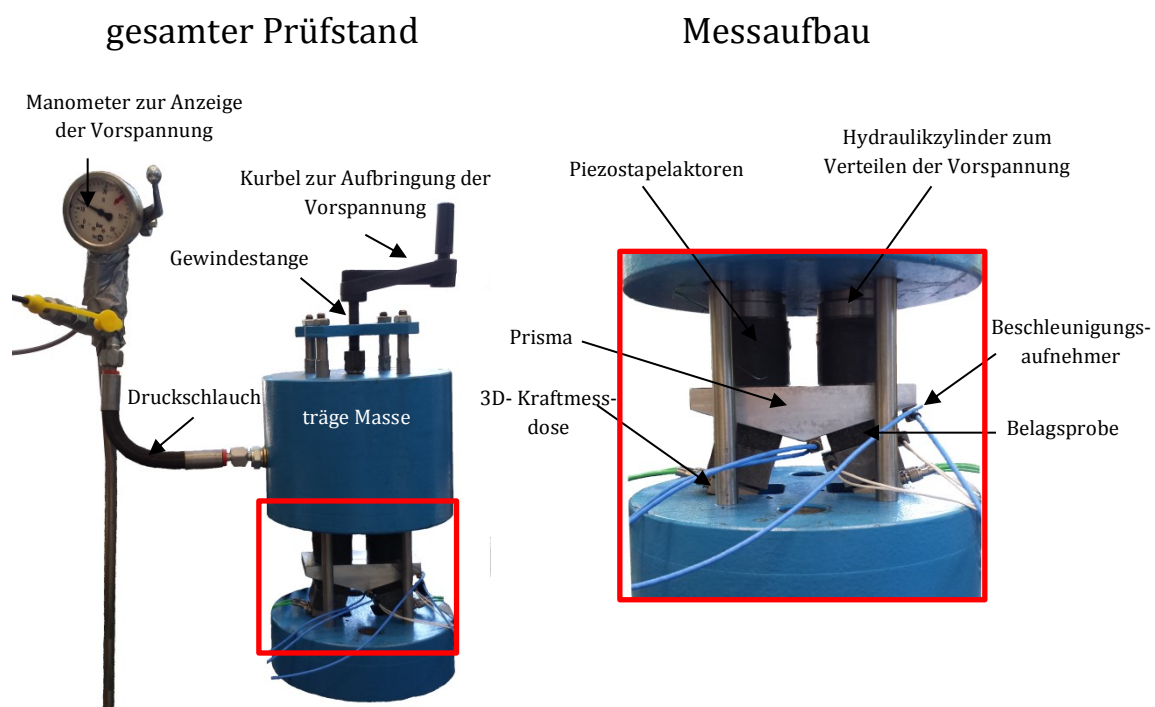


Abbildung 58: Darstellung des Versuchsaufbaus eines Prüfstandes zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften von Bremsbelagproben

Der Messaufbau befindet sich zwischen zwei trägen Massen, wobei die untere fest mit der Umgebung gekoppelt ist. Die obere Masse ist über eine Gewindestange und vier dünne Stäbe mit der unteren Masse weich gekoppelt. Durch diese Anordnung ist es möglich, die Schwingung der oberen Masse infolge der Erregung durch die zwei Piezoaktoren zu entkoppeln. Dabei gilt als Richtwert, dass die Resonanzfrequenz, bei welcher sich die obere Masse auf und ab bewegt (ca. 400 Hz), mindestens um den Faktor $\sqrt{2}$ kleiner sein muss als die Erregerfrequenz. Der Vorteil

⁹ Die Proben werden aus Bremsbelägen ausgeschnitten (siehe Abbildung 59) und haben eine quadratische Grundfläche mit einer Kantenlänge von 30 mm und einer Höhe welche der Dicke des originalen Bremsbelags entspricht.

¹⁰ Ein ähnlicher Prüfaufbau wird auch für die Bestimmung der Schersteifigkeit von Gummiprobe verwendet.

gegenüber einem steifen Gehäuse besteht darin, dass hier nur eine Beschränkung des Messbereiches nach unten gegeben ist und somit Messungen im hochfrequenten Bereich möglich werden. Zur Aufbringung der statischen Vorspannung ist die obere Masse über eine Gewindestange, welche an dem einen Ende ein Linksgewinde und am anderen Ende ein Rechtsgewinde hat, mit der unteren Masse gekoppelt. Damit kann durch Drehen dieser Stange die Masse auf und ab bewegt werden. Dies führt zu einer vereinfachten Handhabung des Prüfstandes, da die obere Masse nicht nur mit einer statischen Last nach unten gedrückt werden, sondern auch angehoben werden kann. Dies ermöglicht einen komfortablen Zugang zum Messaufbau (roter Kasten in Abbildung 58). Der Messaufbau selbst befindet sich zwischen den beiden trägen Massen und besteht aus zwei Piezoaktoren, welche sich nach oben an der trägen Masse abstützen und nach unten das Prisma¹¹ in vertikaler Richtung zu harmonischen Schwingungen anregen. Unterhalb des Prismas sind in einem Winkel von 17° zwei identische Belagsproben (Abbildung 59) mit einer Grundfläche von $30 \times 30 \text{ mm}$ angeordnet. Die Proben können eine Dicke von 5 mm bis 15 mm aufweisen und werden üblicher Weise aus ganzen Belägen ausgeschnitten.



Abbildung 59: links Original-Bremsbelag, rechts der für die Messung verwendete Ausschnitt

Unterhalb der Proben befindet sich eine 3D-Kraftmessdose, welche über eine Adapterplatte mit der Probe gekoppelt und nach unten fest mit der unteren trägen Masse verbunden ist. Durch die Schrägstellung der Proben um 17° gegenüber der horizontalen Ebene, werden diese in Folge der vertikalen Verschiebung des Prismas auch in tangentialer Richtung deformiert. Das Verhältnis zwischen der Deformation in tangentialer und normaler Richtung beträgt dabei 0,3. Dies entspricht in etwa dem Reibbeiwert zwischen Reibmaterial und Bremsscheibe, dadurch ist eine möglichst realistische Abbildung des Belastungszustandes in der realen Bremse möglich.

Eine detaillierte Darstellung des schematischen Aufbaus des Prüfstandes ist in Abbildung 60 gezeigt. Während der Inbetriebnahme eines ersten Prototyps des Prüfstandes stellte sich heraus, dass die gleichmäßige Verteilung der statischen Vorspannung auf beide Proben aufgrund von Fertigungstoleranzen des Messaufbaus sowie nicht ganz identischer Proben nicht gewährleistet werden kann. Zur Umgehung dieses Problems sind zwei Zylinder mit dahinterliegender Druckkammer in die obere träge Masse integriert. Durch eine Verbindung der beiden Druckkammern herrscht in beiden derselbe Druck. Dadurch ergeben sich die gleichen Kräfte, die auf die Zylinder wirken, welche dann jeweils an die Piezoaktuatoren weitergeleitet werden. Des Weiteren besteht dadurch die Möglichkeit, mittels eines Manometers den Druck in der Hydraulikflüssigkeit zu messen und somit direkt die statische Vorspannung während des Betriebs abzulesen.

¹¹ Als Prisma wird der Körper oberhalb der Belagsproben bezeichnet, welcher die Lasten in tangentiale und normale Richtung aufteilt.

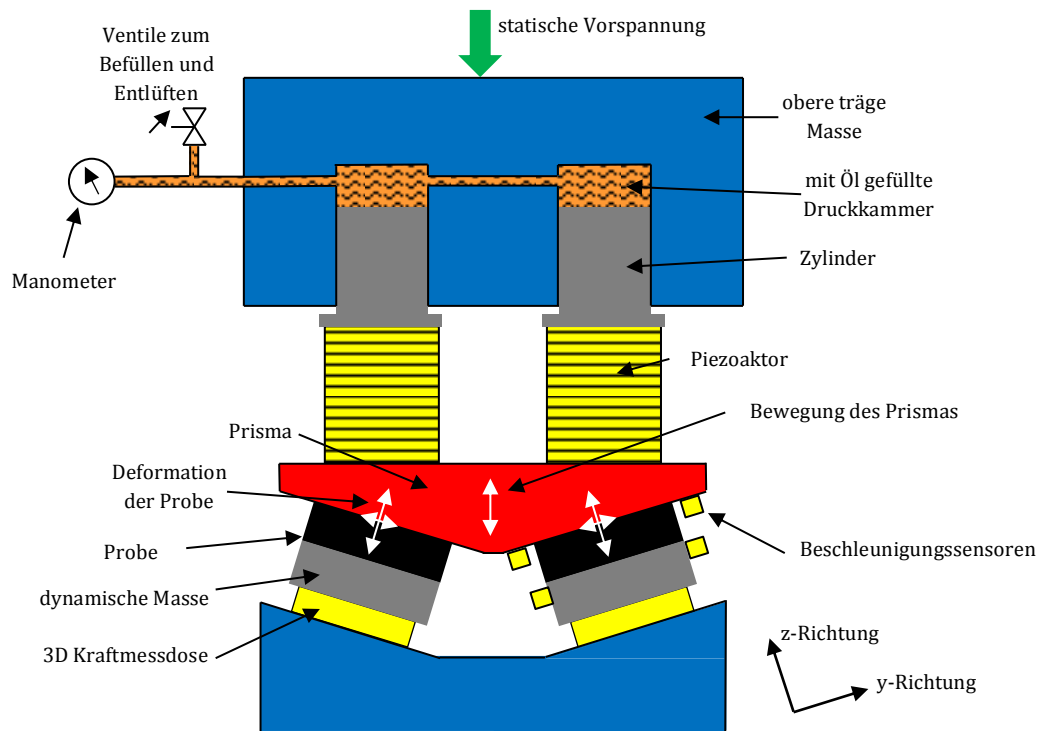


Abbildung 60: Prinzipskizze des Prüfstandes mit eingezeichneter Hydraulik (vgl. [46])

5.1.2 Messdurchführung

Für die Durchführung von Messungen zur Bestimmung der Belagssteifigkeit in Normalen- und Scherrichtung müssen zunächst die Proben aus den Belägen ausgeschnitten werden. Dies kann mittels Fräsen oder Wasserabrasivinjektorstrahlschneiden erfolgen. Anschließend wird die Belagrückenplatte der Probe entfernt. Dies ist notwendig, da andernfalls die von der Vorspannung abhängige Kontaktsteifigkeit zwischen der steifen Belagrückenplatte und der steifen dynamischen Masse in der Messauswertung berücksichtigt werden müsste. Durch das Entfernen der Rückenplatte entfällt diese Kontaktstelle und das Reibmaterial ist direkt im Kontakt mit der dynamischen Masse. Da das Reibmaterial jedoch sehr viel weicher ist als die Rückenplatte, entfällt der Einfluss der Kontaktsteifigkeit, da die anliegende Vorspannung nun ausreicht, dass der Kontakt wieder linear bezüglich der Steifigkeit ist. Die Verbindungsschicht zwischen Reibmaterial und Rückenplatte wird jedoch nicht entfernt, da diese besonders in Bezug auf die Dämpfung einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss hat. Dieser kann durch die Messung dann zusammen mit der des Reibmaterials identifiziert werden. Bei der Herstellung der Proben ist zu beachten, dass diese vor allem hinsichtlich ihrer Dicken möglichst identisch sind, da andernfalls der symmetrische Aufbau nicht mehr gegeben ist. Nachdem die Proben in den Prüfaufbau integriert sind, kann mit Hilfe der Kurbel die statische Last aufgebracht werden. Anhand des Manometers lässt sich die auf die Proben wirkende Last in vertikale Richtung bestimmen. Dabei gilt auf Grund des Verhältnisses zwischen der Querschnittsfläche der Zylinder und der Beläge, dass 1 bar in der Hydraulikflüssigkeit 0,9 bar Druck in den Proben entsprechen. Die tatsächliche Vorspannung in der Probe kann mittels der 3D-Kraftmessdosen bestimmt werden. Da es sich dabei jedoch um piezoelektrische Sensoren handelt, müssen zur Bestimmung von statischen Kräften spezielle

Ladungsverstärker¹² verwendet werden. Die Ansteuerung der beiden Piezoaktoren zum Aufbringen der dynamischen Last erfolgt über zwei Verstärker derselben Bauart, welche als Eingang das gleiche Signal erhalten. Für die Gewährleistung einer symmetrisch auf beide Proben einwirkenden, dynamischen Kraft, kann mittels einer Probemessung die Amplitude der einzelnen Aktoren durch Vergleich der dynamischen Kräfte eingestellt werden.

Die eigentliche Messung erfolgt üblicherweise bei konstanter statischer Vorspannung und variierender Amplitude der harmonischen Anregung. Das Erregersignal wird mithilfe eines Frequenzgenerators des Messrechners erzeugt und innerhalb der Messzeit linear von Null auf das Maximum erhöht. Dies ermöglicht die Erfassung des Einflusses unterschiedlicher dynamischer Amplituden in nur einem Durchlauf. Durch Wiederholung der Messung bei verschiedenen Vorspannungen kann anschließend auch dieser Einfluss bestimmt werden. Während der Messung werden die Zeitverläufe der insgesamt 8 Beschleunigungsaufnehmer (siehe gelbe Quadrate in Abbildung 60), welche sich oberhalb und unterhalb der Probe befinden, in y- und z-Richtung aufgezeichnet. Zudem wird der Zeitverlauf der dynamischen Kräfte ebenfalls in y- und z-Richtung erfasst. Die Auswertung der Signale zur Bestimmung der Steifigkeiten erfolgt im Zeitbereich und wird im Folgenden detailliert beschrieben.

Für die Auswertung stehen die vier oberhalb und unterhalb der Probe gemessenen Beschleunigungsverläufe $a_i^o(t)$ und $a_i^u(t)$ mit $i = 1,2,3,4$ sowie der dynamische Kraftverlauf $F_{KMD}(t)$ zur Verfügung. Da die Signale mitunter verrauscht sind und aufgrund der monofrequenten Anregung bekannt ist, welche Frequenz von Bedeutung ist, werden die Signale zunächst mit einem Bandpass gefiltert. Der Einfluss von höher Harmonischen Antworten wird dabei vernachlässigt. Beim Filtern ergibt sich ein Phasenversatz, welcher jedoch nicht das Ergebnis beeinflusst, da dieser für alle gefilterten Signale identisch ist. Im Anschluss werden die Beschleunigungssignale gemittelt, sodass sich $a^o = \sum_{i=1}^4 a_i^o(t)/4$ und $a^u = \sum_{i=1}^4 a_i^u(t)/4$ ergibt. Für die Bestimmung der Steifigkeit sind die Deformation der Probe sowie die dafür aufgebrachte Kraft notwendig. Anders als in der in [75] beschriebenen Auswertemethode des DCTR wird hier die Verschiebung nicht durch eine zweifache Integration der Beschleunigungssignale gewonnen. Durch Verwendung der Annahme, es handle sich um eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz Ω , kann die zweifache Integration auch durch eine Division durch $-\Omega^2$ bestimmt werden. Ω ist hierbei gleich die Erregerkreisfrequenz. Durch dieses Vorgehen wird der durch die Integration entstehende Phasenversatz zwischen Verschiebung und Kraftsignal vermieden. Die Deformation der Probe relativ zur statischen Auslenkung welche mit Δu bezeichnet wird, ergibt sich somit zu

$$\Delta u_n(t) = -\frac{1}{\Omega^2} (a_n^o - a_n^u) \quad (5.1)$$

in Normalenrichtung und

$$\Delta u_t(t) = -\frac{1}{\Omega^2} (a_t^o - a_t^u) \quad (5.2)$$

in tangentialer Richtung.

Für die Bestimmung der auf die Probe wirkenden Kraft muss neben der mit der 3D-Kraftmessdose gemessenen Kraft noch die Trägheitskraft der Masse m_{dyn} , welche sich zwischen

¹² Typ 5015A der Firma Kistler ermöglicht die Messung von statischen Kräften in piezoelektrischen Kraftsensoren

Probe und Kraftmessdose befindet, berücksichtigt werden. Die tatsächliche Kraft direkt unterhalb der Probe ergibt sich somit zu

$$\Delta F_n(t) = F_{\text{KMD},n}(t) + m_{\text{dyn}} a_n^u \quad (5.3)$$

in Normalenrichtung und

$$\Delta F_t(t) = F_{\text{KMD},t}(t) + m_{\text{dyn}} a_t^u \quad (5.4)$$

in tangentialer Richtung. Dabei ist zu beachten, dass dies die Kraft in Folge der dynamischen Anregung ist. Auf die Probe selber wirkt zusätzlich noch die statische Vorspannung welche mit $\hat{F}_n$ bzw. $\hat{F}_t$ bezeichnet wird.

Unter Verwendung der Methode der energetischen Balance [76] wird aus diesen Daten anschließend die um einen Arbeitspunkt linearisierte Steifigkeit und Dämpfung der Probe bestimmt. Der Arbeitspunkt kann durch Veränderung der statischen Kraft $\hat{F}$ sowie der dynamischen Amplitude $\Delta\hat{u}$ variiert werden. Damit ist es möglich, die lineare Federsteifigkeit $c(\Delta\hat{u}, \hat{F})$ und die lineare, viskose Dämpfung $d(\Delta\hat{u}, \hat{F})$ in Abhängigkeit dieses Arbeitspunktes zu messen.

$\Delta F_n(\Delta u_n)$ bezeichnet die Kraft-Weg-Hysterese, welche sich aus $\Delta F_n(t)$ und $\Delta u_n(t)$ durch Elimination der Zeit, in Folge der dynamischen Belastung um den Arbeitspunkt, ergibt (Abbildung 61). Sei $\max(\Delta u_n(t)) = \Delta\hat{u}_n$ die innerhalb einer Periode auftretende, relativ zur statischen Auslenkung, maximale Deformation der Probe. Unter Verwendung der Annahme einer in Bezug auf die dynamische Beanspruchung linearen Steifigkeit folgt für die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \int_0^{\Delta\hat{u}_n} \hat{F}_n(u) du + \frac{1}{2} \Delta F_n(\Delta\hat{u}_n) \Delta\hat{u}_n. \quad (5.5)$$

Der Term $\int_0^{\Delta\hat{u}_n} \hat{F}_n(u) du$ beschreibt dabei das Potential in Folge der statischen Auslenkung. Der Ausdruck $\frac{1}{2} \Delta F_n(\Delta\hat{u}_n) \Delta\hat{u}_n$ beschreibt das Potential in Folge der dynamischen Kraft unter der Annahme eines linearen Kraft-Weg-Gesetzes. Allgemein gilt für die potentielle Energie einer linearen Feder $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} c \Delta x^2$. Im Vorliegenden Fall gilt

$$E_{\text{pot}} = \int_0^{\Delta\hat{u}_n} \hat{F}_n(u) du + \frac{1}{2} c_n(\Delta\hat{u}_n, \hat{F}_n) \Delta\hat{u}_n^2. \quad (5.6)$$

Aus (5.5) und (5.6) folgt für die energetisch gemittelte Steifigkeit

$$c_n(\Delta\hat{u}_n, \hat{F}_n) = \frac{\Delta F_n(\Delta\hat{u}_n)}{\Delta\hat{u}_n}. \quad (5.7)$$

Analog gilt dies für die Steifigkeit in tangentialer Richtung

$$c_t(\Delta\hat{u}_t, \hat{F}_t) = \frac{\Delta F_t(\Delta\hat{u}_t)}{\Delta\hat{u}_t}. \quad (5.8)$$

Für die Bestimmung der Dämpfung $d(\Delta\hat{u}, \hat{F})$ muss die dissipative Energie betrachtet werden. Wenn $\Delta F(t) = \hat{F} \cos(\omega t + \varphi)$ und $\Delta u(t) = \Delta\hat{u} \cos(\omega t)$ gilt, ergibt sich für einen äquivalenten linearen, viskosen Dämpfer die dissipierte Energie zu

$$E_{\text{diss}} = \int_0^{2\pi} \Delta F(t) \Delta \dot{u}(t) dt = \pi \Delta \hat{F} \Delta \hat{u} \sin \varphi. \quad (5.9)$$

Mit der dissipativen Energie eines linear viskosen Dämpfers $E_{\text{diss}} = d(\Delta\hat{u}, \hat{F}) \Omega \pi \Delta \hat{u}^2$ folgt für die Dämpfungskonstante

$$d(\Delta\hat{u}, \hat{F}) = \frac{\hat{F} \sin \varphi}{\Omega \Delta\hat{u}}. \quad (5.10)$$

Es ist somit möglich, mithilfe der vom Prüfstand aufgezeichneten Daten die in einem bestimmten Arbeitspunkt linearisierte Steifigkeit und Dämpfung zu bestimmen. Durch die mehrfache Durchführung von Messungen in unterschiedlichen Arbeitspunkten ist es zudem möglich, die Abhängigkeit dieser Werte gegenüber der dynamischen Amplitude $\Delta\hat{u}$ sowie der Vorspannkraft $\hat{F}$ zu erhalten. Im Falle eines linearelastischen Materialverhaltens müsste $c(\Delta\hat{u}, \hat{F}) = \text{const}$ und $d(\Delta\hat{u}, \hat{F}) = \text{const}$ sein.

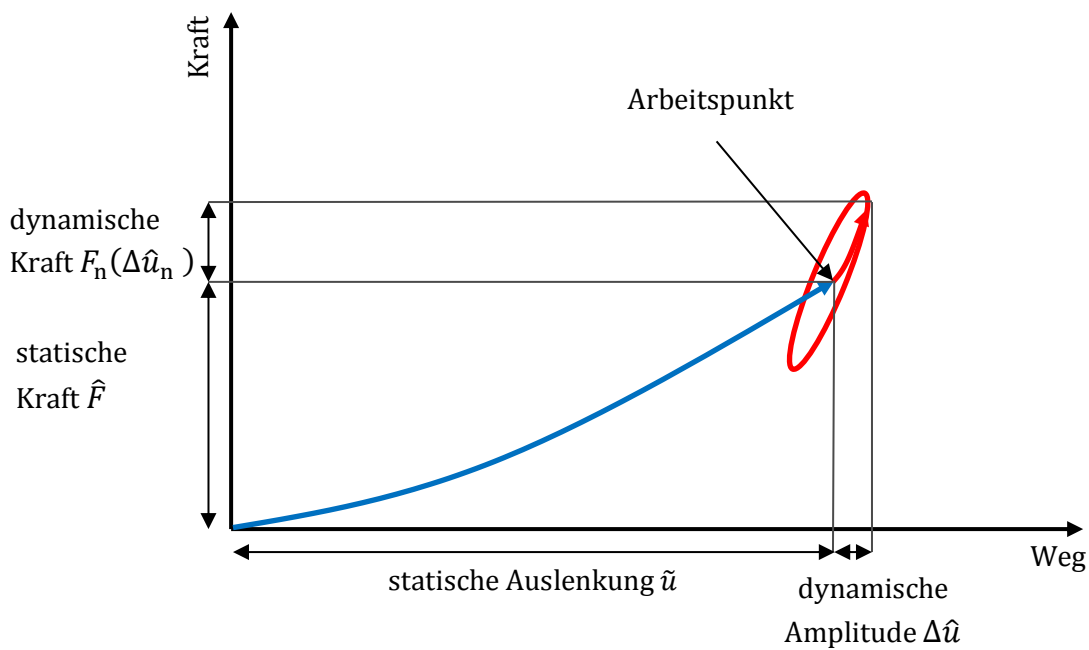


Abbildung 61: Skizze des Kraft-Weg-Verlaufs während einer exemplarischen Messung. Dargestellt ist die quasistatische Erhöhung der statischen Vorspannung (blau) und die anschließende dynamische Belastung (rot).

Unter der Annahme, die Dehnungen innerhalb der Probe seien konstant über das Volumen kann aus der Steifigkeit in Normalenrichtung der Elastizitätsmodul in diese Richtung mit

$$E(\Delta\hat{u}, \hat{F}) = c_n(\Delta\hat{u}_n, \hat{F}_n) \frac{h}{A} \quad (5.11)$$

bestimmt werden. Hierbei ist h die Dicke der Probe und A die Querschnittsfläche. Ebenso gilt für das Schubmodul

$$G(\Delta\hat{u}, \hat{F}) = c_t(\Delta\hat{u}_t, \hat{F}_t) \frac{h}{A}. \quad (5.12)$$

5.1.3 Ergebnisse

Zur Validierung der Messmethode wird zunächst eine 30 x 30 mm PLEXIGLAS® Probe mit einer Dicke von 13 mm vermessen. Während der Versuchsdurchführung wird die Probe mit 22,9 bar in Normalenrichtung und mit 1,2 bar in Querrichtung vorgespannt und mit einer Frequenz von 1500 Hz angeregt. Diese Belastung ist vergleichbar mit der Beanspruchung des Reibmaterials in einer quietschenden Bremse und wird auch bei weiteren Messungen verwendet. PLEXIGLAS® verhält sich hinsichtlich seiner mechanischen Materialeigenschaften nahezu linear und besitzt nach [77] ein Elastizitätsmodul von 3,3 GPa sowie nach [78] ein Schubmodul von 1,7 GPa. Die in Abbildung 62 und Abbildung 63 dargestellten Ergebnisse zeigen, dass der mit dem DCSTR ermittelte E-Modul von ca. 3,3 GPa einen konstanten Verlauf über die dynamische Amplitude hat und somit quantitativ und qualitativ mit dem in [77] ermittelten Parameter übereinstimmt. Der mittels DCSTR bestimmte Schubmodul ist ebenfalls nahezu konstant über der dynamischen Amplitude, jedoch mit ca. 1,2 GPa etwas geringer als der Vergleichswert aus [78]. Diese Abweichung kann durch die geringere Vorspannung sowie den damit verbundenen Einfluss der Kontaktsteifigkeit erklärt werden.

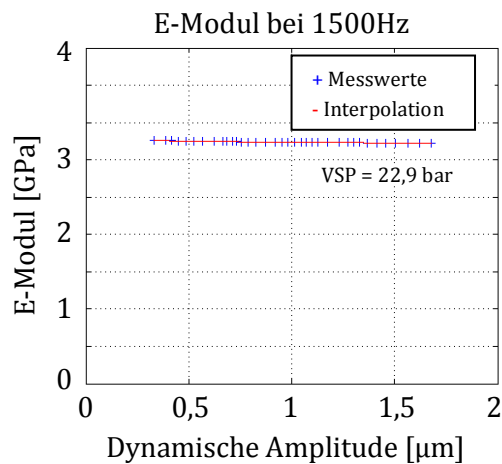


Abbildung 62: Darstellung des E-Moduls einer 30 mm x 30 mm x 13 mm PLEXIGLAS® Probe in Abhängigkeit der dynamischen Amplitude bei einer Vorspannung von 22,9 bar in Normalenrichtung

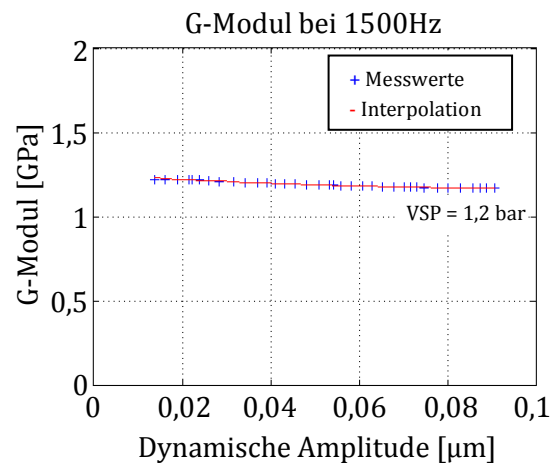


Abbildung 63: Darstellung des G-Moduls einer 30 mm x 30 mm x 13 mm PLEXIGLAS® Probe in Abhängigkeit der dynamischen Amplitude bei einer Vorspannung von 1,2 bar in Querrichtung

Nach erfolgreicher Validierung der Messmethode werden Messungen an verschiedenen Belagsproben durchgeführt. In Abbildung 64 und Abbildung 65 sind exemplarisch Ergebnisse eines NAO¹³ Belags gezeigt. Die Messung erfolgte bei 1500 Hz und variierender Vorspannung sowie variierender dynamischer Amplitude. Die Ergebnisse zeigen einen degressiven Verlauf der Module bezüglich der dynamischen Amplitude. Zudem ist zu erkennen, dass die Steifigkeit mit zunehmender Vorspannung ansteigt. Die Werte bezüglich des E-Moduls stimmen qualitativ und quantitativ mit den in [38] gezeigten Ergebnissen des DCTR überein. Für den Schubmodul liegen

¹³ Reibmaterial der Kategorie „Organic“ wird manchmal auch „Non Asbestos Organic“ oder NAO genannt [95].

bislang keine Vergleichswerte vor, es ist jedoch zu erkennen, dass der Schubmodul ca. dreimal kleiner ist als der E-Modul. Die daraus resultierende Querkontraktionszahl von 0.5 ist somit physikalisch plausibel.

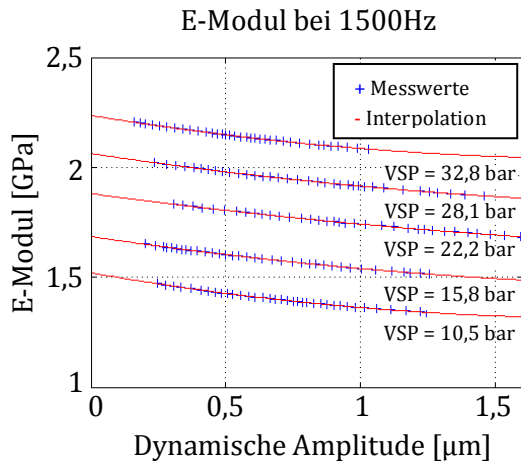


Abbildung 64: Darstellung des E-Moduls einer 30 mm x 30 mm x 10 mm Bremsbelagprobe ohne Rückenplatte in Abhängigkeit der dynamischen Amplitude bei verschiedenen Vorspannungen von 10,5 bar bis 32,8 bar in Normalenrichtung

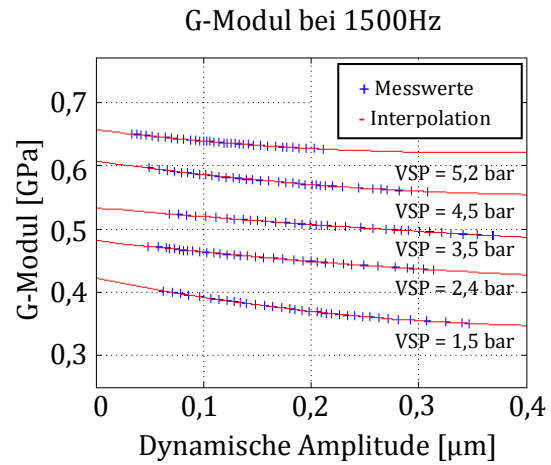


Abbildung 65: Darstellung des G-Moduls einer 30 mm x 30 mm x 10 mm Bremsbelagprobe ohne Rückenplatte in Abhängigkeit der dynamischen Amplitude bei verschiedenen Vorspannungen von 1,5 bar bis 5,2 bar in tangentialer Richtung

Die Ableitung eines allgemeingültigen nichtlinearen Kraftgesetzes aus den gemessenen Steifigkeitskennwerten ist nicht trivial, da zunächst ein Widerspruch besteht. Die Messergebnisse zeigen, dass die Steifigkeit mit zunehmender statischer Last steigt. Somit müsste für den Kraft-Wegverlauf $F(u)$ gelten, dass dieser progressiv ist. Eine Erhöhung der dynamischen Amplitude führt jedoch zu einer Verringerung der Steifigkeit woraus ein degressiver Verlauf für $F(u)$ resultieren würde. Aus diesem Grund wird im Folgenden nicht versucht eine Gesetzmäßigkeit für $F(u)$ zu bestimmen. Stattdessen wird die Steifigkeit des Reibmaterials bei einer bestimmten statischen Vorlast $\hat{F}_0$ in Abhängigkeit der dynamischen Auslenkung Δu bestimmt. Dies kann anschließend für unterschiedliche Vorspannungen wiederholt werden. Sinnvoll ist diese Betrachtung, da sich während eines Bremsvorganges die statische Last also der Bremsdruck im Vergleich mit der dynamischen Auslenkung nur sehr langsam ändert.

Für die Bestimmung des nichtlinearen Kraft-Weggesetzes wird das Verfahren der äquivalenten Linearisierung [69] verwendet. Dabei wird hier jedoch die gemessene lineare Steifigkeit durch eine nichtlineare ersetzt, so dass bei gleicher Amplitude die potentielle Energie identisch sind (vgl. Gleichung (5.5) und (5.6)).

$$E_{\text{pot}} = \int_0^{\hat{u}} F(u) du + \int_{-\Delta\hat{u}+\hat{u}}^{\Delta\hat{u}+\hat{u}} c(\Delta u, \hat{F}_0) \Delta u d\Delta u = \int_0^{\hat{u}} F(u) du + \frac{1}{2} c(\Delta\hat{u}, \hat{F}_0) \Delta\hat{u}^2 \quad (5.13)$$

Wird für die von der Deformation Δu abhängige Steifigkeit $c(\Delta u, \hat{F}_0)$ der polynomielle Ansatz der Form

$$c(\Delta u, \hat{F}_0) = c_0 + c_1 \Delta u^1 + c_2 \Delta u^2 + c_3 \Delta u^3 + c_4 \Delta u^4 \quad (5.14)$$

verwendet so folgt aus (5.13)

$$c(\Delta \hat{u}, \hat{F}_0) = c_0 + \frac{1}{2} c_2 \Delta \hat{u}^2 + \frac{1}{3} c_4 \Delta \hat{u}^4. \quad (5.15)$$

Es folgt somit, dass die Steifigkeit $c(\Delta \hat{u}, \hat{F}_0)$ als Funktion der Auslenkung Δu beschrieben werden kann. Dabei sei angemerkt, dass lediglich gerade Potenzen von Δu auftreten. Durch Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist es möglich, die Parameter c_0 , c_2 und c_4 so anzupassen, dass der gemessene Verlauf $c(\Delta \hat{u}, \hat{F}_0)$ möglichst gut approximiert wird. Dieser Verlauf bildet dann jedoch nur das Verhalten der Probe bei einer bestimmten statischen Last $\hat{F}_0$ ab. Eine Veränderung dieser Last führt somit zu einem anderen Verhalten bzw. anderen Parametern c_0 , c_2 und c_4 .

5.2 Einfluss des experimentell ermittelten Verhaltes des

Reibmaterials auf das Bremsenquietschen

Zur Untersuchung des Einflusses des mit dem DCSTR gemessenen Verhaltens des Reibmaterials auf die Stabilität und damit auf die Quietschneigung von Bremsen, wird in diesem Abschnitt das Minimalmodell aus Abbildung 17 verwendet. Dieses Minimalmodell, welches im Wesentlichen aus einer die Bremsscheibe repräsentierenden Taumelscheibe sowie den durch diskrete Federn ersetzten Bremsbelägen besteht, wird verwendet, um den Einfluss der Steifigkeiten der Beläge zu untersuchen. Die linearisierten Bewegungsgleichungen des Modells sind mit

$$\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \frac{H^2 \mu N_0}{2R\Omega} & 2\theta\Omega \\ -2\theta\Omega & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 2kR^2 + HN_0 + k_t & \frac{H^2 \mu N_0}{2R} \\ -HkR\mu & HN_0 + H\mu^2 N_0 + k_t \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (5.16)$$

gegeben, wobei $\mathbf{q} = [q_1(t), q_2(t)]^T$ die zwei Freiheitsgrade des Systems beinhaltet. Mit den in Tabelle 1 dargestellten Parametern folgt aus einer linearen Stabilitätsanalyse, dass die Lösung für Rotationsgeschwindigkeiten unterhalb einer kritischen Drehzahl Ω_{krit} stabil ist und darüber instabil. Ein besonderes Augenmerk während dieser Simulation gilt der Belagsteifigkeit k . Diese ist proportional zum Elastizitätsmodul des Reibmaterials, welches, wie in Abschnitt 5.1.3 gezeigt, einen degressiven Charakter gegenüber der dynamischen Amplitude besitzt. Zur Untersuchung dieses Einflusses wird zunächst die lineare Stabilitätsgrenze Ω_{krit} in Abhängigkeit zu diesem Parameter bestimmt. Das Ergebnis (Abbildung 66) zeigt, dass eine Verringerung der Steifigkeit zu einer Erhöhung der Stabilitätsgrenze führt. Ein degressives Verhalten der Steifigkeit gegenüber der dynamischen Amplitude hätte somit bei steigender Amplitude eine stabilisierende Wirkung. Dies lässt die Vermutung zu, dass im Falle einer nichtlinearen Betrachtung, in welcher die Steifigkeit gegenüber der deformation abnimmt, eine Grenzzykellösung existieren kann.

Parameter	Wert	Einheit	Bemerkung
θ	0,16	kg m ²	Massenträgheitsmoment der Scheibe
R	0,13	m	Scheibenreibradius
H	0,02	m	Scheibendicke
k_t	$1,88 \times 10^7$	N m	Steifigkeit der Aufhängung
k	6×10^6	N/m	Belagssteifigkeit
μ	0,6	1	Reibbeiwert
N_0	3000	N	Vorspannung (äquivalenter Bremsdruck)
Ω	Wird variiert	1/s	Drehgeschwindigkeit der Scheibe

Tabelle 1: Parameter des Bremsenmodells

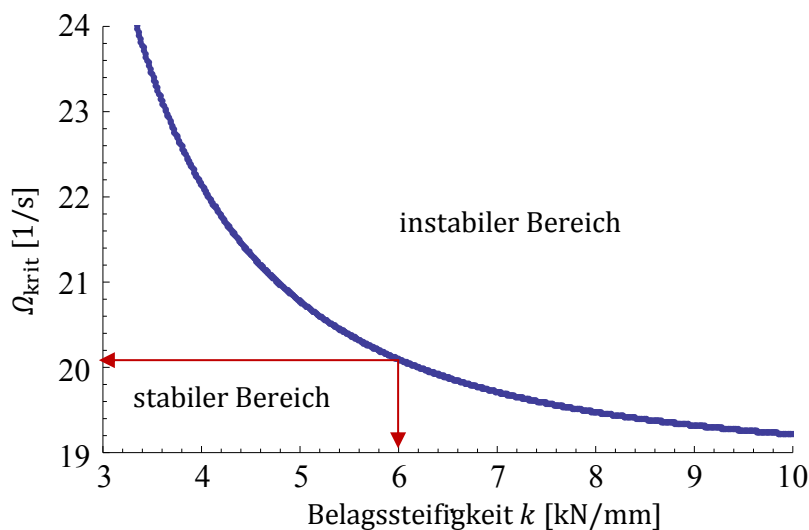


Abbildung 66: Stabilitätsgrenze über der Belagsteifigkeit

Zur Überprüfung dieser These wird nun das lineare Modell durch Berücksichtigung der nichtlinearen Abhängigkeit der Belagssteifigkeit von der dynamischen Deformation erweitert (vgl. Gleichung (5.20)). Hierbei werden die in der Messung zuvor identifizierten Steifigkeitskennlinien Abbildung 64 und Abbildung 65 verwendet. Das daraus resultierende, nichtlineare Gleichungssystem wird mithilfe der harmonischen Balance hinsichtlich einer oder mehrerer Grenzykellösungen untersucht. Da es für die Simulation nötig ist, die gemessenen Steifigkeitsverläufe in Form eines Polynoms zu beschreiben, werden die zuvor ermittelten Messergebnisse mit einem Polynom gefittet. Des Weiteren ist es nötig, den gemessenen Elastizitätsmodul mit Annahmen für die Geometrie der Bremsbeläge in dem Minimalmodell auf eine Steifigkeit umzurechnen. Dies erfolgt, indem die angepasste Steifigkeit bei einer Amplitude gleich Null den Wert 6×10^6 N/m annimmt. Damit entspricht die Linearisierung des nichtlinearen Modells der Gleichung (5.16). Die Ergebnisse sind in Abbildung 67 dargestellt. Das Bild links zeigt die Messwerte und das daran angepasste Polynom zweiten Grades (rote Linie). Das rechte Bild illustriert die Messwerte und ein daran angepasstes Polynom vierten Grades. Dabei werden jedoch nur Terme mit geraden Potenzen verwendet (vgl. Gleichung (5.15)). Es ist zu erkennen, dass die Übereinstimmung in beiden Fällen nicht gut ist. Durch die Verwendung anderer Ansatzfunktionen oder Polynome höherer Ordnung könnte die Übereinstimmung deutlich verbessert werden. Da dies

jedoch zu einem deutlich erhöhten Rechenaufwand beim Lösen der daraus resultierenden nicht-linearen Differentialgleichung führen würde, wird darauf hier verzichtet. Die Hinzunahme von ungeraden Potenzen in dem Ansatz für das nichtlineare Steifigkeitsgesetz würde die Approximation der Messdaten deutlich verbessern. Durch den in Gleichung (5.13) bis (5.15) beschriebenen Zusammenhang ist dies jedoch nicht möglich.

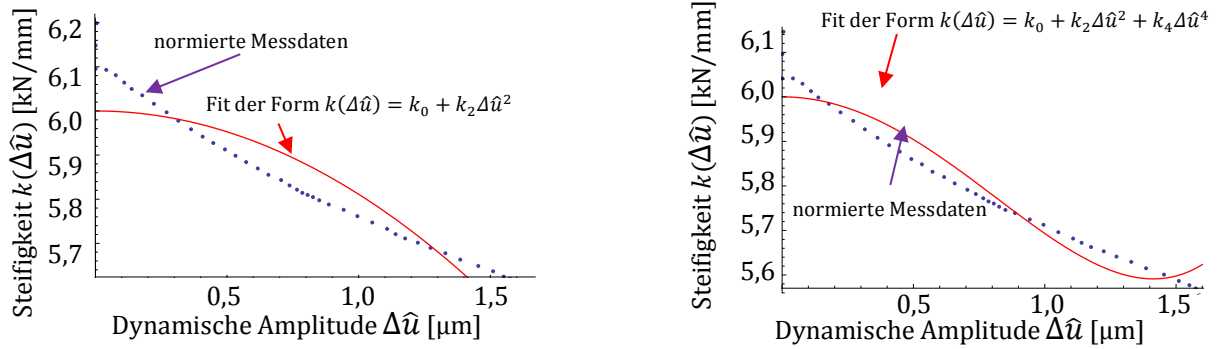


Abbildung 67: Darstellung der normierten Messergebnisse der Belagssteifigkeiten bei einer Vorspannung von 22,2 bar sowie zwei verschiedener Fit-Funktionen

Für die nichtlineare Erweiterung des Ausgangssystems wird k durch $k(\Delta u)$ ersetzt. Dabei ist Δu die dynamische Deformation der Beläge um den vorgespannten Zustand. In der Modellbildung ist $\Delta u = q_1(t)R_p$ gegeben. Daraus ergibt sich das nichtlineare DGL-System

$$\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p \Omega} & 2\theta \Omega \\ -2\theta \Omega & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} 2k(q_1(t)R_p)R_p^2 + HF_0 + k_t & \frac{H^2 \mu F_0}{2R_p} \\ -HkR_p \mu & HF_0 + H\mu^2 F_0 + k_t \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (5.17)$$

wobei mit Gleichung (5.15) gilt $k(q_1(t)R_p) = k_0 + \frac{k_2}{2}(q_1(t)R_p)^2 + \frac{k_4}{3}(q_1(t)R_p)^4$. Es sei angemerkt, dass die statische Vorspannung in diesem Modell keinen Einfluss auf die Ruhelage hat, da sie von beiden Seiten gleich auf die Taumelscheibe wirkt. Somit entspricht die aus Gleichung (5.17) abgeleitete um die statische Ruhelage linearisierte Störungsgleichung der zuvor betrachteten Gleichung (5.16). Im weiteren Verlauf werden zwei Fälle unterschieden. Im **Fall 1** wird die Nichtlinearität mit dem Polynom zweiten Grades beschrieben. Hierbei ergibt sich aus der Messung, dass $k_0 = 6 \times 10^6$ kN/mm, $k_2 = -1.89 \times 10^{17}$ kN/mm³ und $k_4 = 0$ ist. Im **Fall 2** wird das Polynom 4. Grades mit den Koeffizienten $k_0 = 6 \times 10^6$ kN/mm, $k_2 = -1.09 \times 10^{17}$ kN/mm³ und $k_4 = 1.02 \times 10^{29}$ kN/mm⁵ verwendet. Zum Lösen des nichtlinearen Problems wird die Harmonische Balance mit dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\omega t) \\ a_2 \cos(\omega t) + a_3 \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

verwendet. Nach Einsetzen des Ansatzes in Gleichung (5.17) ergeben sich zwei Gleichungen in der Zeit, welche hier mit $G_1(t) = 0$ und $G_2(t) = 0$ bezeichnet werden. Durch

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ B_{11} \\ A_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} G_1(t) \cos(\omega t) dt \\ \int_0^{2\pi} G_1(t) \sin(\omega t) dt \\ \int_0^{2\pi} G_2(t) \cos(\omega t) dt \\ \int_0^{2\pi} G_2(t) \sin(\omega t) dt \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

werden die Fourierkoeffizienten der ersten Ordnung bestimmt. Aus der Bedingung, dass diese Koeffizienten Null sein müssen, folgt ein algebraisches Gleichungssystem mit vier Gleichungen, aus welchen sich die Unbekannten a_1 , a_2 , a_3 und ω bestimmen lassen. a_1 entspricht dabei der Amplitude von $q_1(t)$ und $a_1 R_p$ der Amplitude $\Delta \hat{u}$ der Deformation des Belages. In Abbildung 68 ist die Lösung für $a_1 R_p$ über der Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe veranschaulicht. In Rot ist das Ergebnis für den Fall 1 dargestellt und in Blau für den Fall 2. Eine durchgezogene Linie bedeutet eine stabile Lösung, wohingegen eine instabile Lösung durch eine punktierte Linie dargestellt ist. Der Hauptunterschied zwischen den beiden betrachteten Fällen besteht darin, dass in Fall 1 die Steifigkeit einen rein degressiven Charakter gegenüber der Amplitude hat (Abbildung 67 links), wohingegen im Fall 2 die Steifigkeit zunächst abfällt, für größere Auslenkungen jedoch wieder zunimmt (Abbildung 67 rechts). Zudem sei angemerkt, dass messtechnisch die Steifigkeit nur bis zu einer Auslenkung von ca. $1,5 \mu\text{m}$ erfasst wurde und somit das Verhalten darüber hinaus nicht bekannt ist. Die üblichen Amplituden, mit welchen eine Bremse während des Quietschens schwingt, liegen ebenso im unteren einstelligen Mikrometer-Bereich. Somit sind die in Abbildung 68 dargestellten Ergebnisse mit einer Amplitude deutlich größer als $2 \mu\text{m}$ außerhalb des messtechnisch erfassten Bereichs. Das Ergebnis zeigt, dass die gemessene Nichtlinearität prinzipiell in der Lage ist, die im Falle einer instabilen, trivialen Lösung ($\Omega > \Omega_{\text{krit}}$) exponentiell über der Zeit aufklingende Schwingung zu begrenzen. Im Fall 1 existiert eine Grenzzykellösung, welche sich von dem Verzweigungspunkt ($\Omega = \Omega_{\text{krit}}$) nach rechts erstreckt und dabei eine Amplitude von ca. $3 \mu\text{m}$ erreicht. Auffällig ist, dass für höhere Amplituden eine weitere, instabile Lösung existiert. Diese markiert die Grenze des Einzugsbereiches der darunterliegenden Lösung. Sie ist jedoch irrelevant, da Amplituden dieser Größe in realen Bremsen nicht erreicht werden. Zudem ist die oben gewählte Approximation der Messdaten durch ein Polynom mit ausschließlich geraden Koeffizienten in diesem Bereich nicht plausibel. Im Falle von großen Amplituden wird die Belagssteifigkeit negativ was physikalisch in diesem Zusammenhang nicht möglich ist. Im Fall 2 existiert ebenfalls eine stabile Lösung, welche zunächst ähnlich wie die im Fall 1 verläuft. Diese Lösung endet jedoch, sobald die Amplitude einen Wert von ca. $3 \mu\text{m}$ überschreitet. Dies ist darauf zurückzuführen, dass ab dieser Grenze die Steifigkeit auf Grund der verwendeten Approximation wieder zunimmt und somit der das System stabilisierende degressive Charakter nicht mehr gegeben ist. An dieser Stelle sei auf [79] verwiesen wo gezeigt wird, dass bei der Anwendung der Harmonischen Balance unter Umständen Lösungen auftauchen, welche die Bewegungsgleichung nicht erfüllen. In den hier dargestellten Ergebnissen wurde jedoch mit Hilfe der numerischen Zeitintegration überprüft ob die in Abbildung 68 dargestellten stabilen Lösungen tatsächlich existieren.

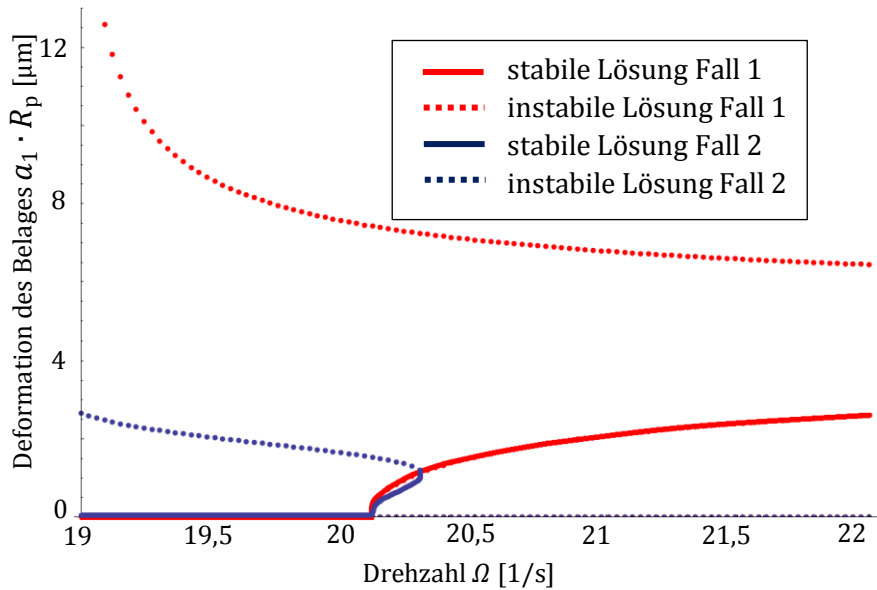


Abbildung 68: Darstellung des Verzweigungsverhaltens des vereinfachten Bremsenmodells mit nichtlinearer Steifigkeit der Beläge

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die durch das oben beschriebene Messverfahren ermittelte Nichtlinearität bezüglich des mechanischen Verhaltens der Bremsbeläge prinzipiell einen Einfluss auf das Grenzzykelverhalten von quietschenden Bremsen haben kann. Es wird jedoch auch deutlich, dass dieser Effekt nicht die alleinige Ursache für alle zuvor beobachteten Effekte darstellt. Das in Experimenten beobachtete, subkritische Verzweigungsverhalten wird hier beispielsweise nicht erreicht. Zudem existieren instabile Lösungen mit großer Amplitude, was bei dieser Modellierung dazu führt, dass Anfangsbedingungen existieren, mit welchen die Lösung nicht auf einen stabilen Grenzzykel hin läuft. Dieses Verhalten kann jedoch auf die verwendete Approximation der Messdaten zurück geführt werden.

5.3 Einfluss nichtlinearer Fügestellen auf das Quietschverhalten

Der Einfluss von Fügestellen auf das Verzweigungsverhalten von dynamischen Systemen wurde bereits in [33], [80], [81], [82] und [83] diskutiert. In der Dissertation von Herrn Tiedemann [32] wird der Einfluss von Fügestellen auf das Bremsenquietschen ausführlich beschrieben. Der Hauptunterschied, der hier dargestellten Zusammenhänge und denen in [32] besteht in dem verwendeten Modell, welches zur Beschreibung des Bremsenquietschens verwendet wird.

Für die Modellierung von reibungsbehafteten Fügestellen wird üblicherweise das sogenannte Jenkins-Element verwendet [84]. Dieses besteht aus einer Reihenschaltung einer linearelastischen Feder und eines Coulombschen Reibungselements (Abbildung 69).

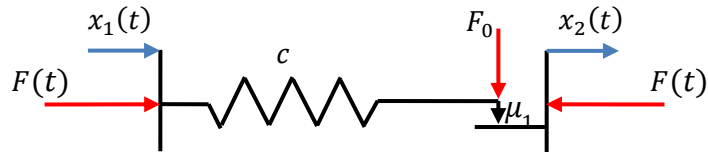


Abbildung 69: Darstellung des Jenkins Element

Das Element beinhaltet die tangentielle Kontaktsteifigkeit c , den im Kontakt herrschenden Reibbeiwert μ sowie die auf den Kontakt wirkende Last F_0 . Für $\Delta x(t) = x_2(t) - x_1(t) = A \cos(\omega t)$ ergibt sich bei Coulombscher Reibung mit Stick-Slip-Übergang die in Abbildung 70 dargestellte Kraft-Weg-Hysterese.

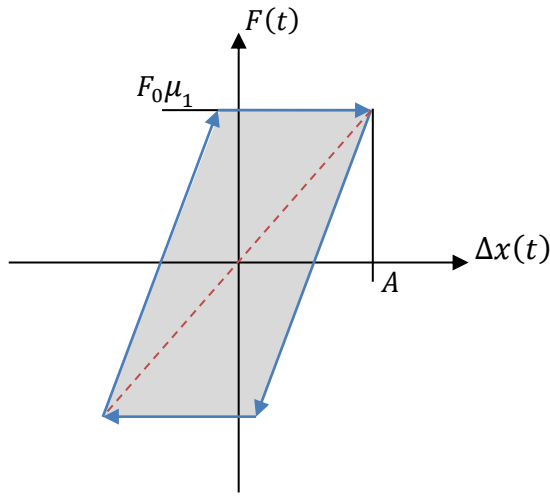


Abbildung 70: Hysterese eines Jenkins-Elements

Mit Hilfe der Methode der energetischen Balance [85] und der Annahme einer harmonischen Deformation lässt sich das Jenkins-Element ersetzen durch eine Parallelschaltung von einer nichtlinearen Feder der Steifigkeit c^* und eines nichtlinearen Dämpfers mit der Dämpfungskonstante d^* . Dabei gilt die Forderung, dass während jeder Schwingungsperiode die gleiche Energie dissipiert und die gleiche maximale, potentielle Energie erreicht wird. Mit dem Ansatz $x_1(t) = A \cos(\omega t)$ folgt für $|A| > \frac{F_0 \mu}{c}$ für die potentielle Energie

$$\frac{1}{2} c^* A^2 = \frac{1}{2} c \left(\frac{\mu_1 F_0}{c} \right)^2 \quad (5.20)$$

und für die dissipative Energie

$$d^* \omega \pi A^2 = 4 \mu_1 F_0 A \left(1 - \frac{\mu_1 F_0}{c A} \right). \quad (5.21)$$

Damit folgt für die nichtlineare Federkennlinie

$$c^*(A) = \frac{\mu_1^2 F_0^2}{c A^2}, \quad (5.22)$$

und für die nichtlineare Dämpferkennlinie

$$d^*(A, \omega) = \frac{4\mu_1 F_0}{\omega \pi |A|} \left(1 - \frac{\mu_1 F_0}{c|A|}\right). \quad (5.23)$$

Da für $|A| < \frac{F_0 \mu_1}{c}$ die Haftgrenze im Reibelement nicht überschritten wird, gelten die Gleichungen (5.22) und (5.23) nicht und es muss eine Fallunterscheidung gemacht werden. Es folgt für die Steifigkeitskennlinie

$$c^*(A) = \begin{cases} c & \text{für } |A| < \frac{F_0 \mu_1}{c} \\ \frac{\mu_1^2 F_0^2}{c A^2} & \text{für } |A| \geq \frac{F_0 \mu_1}{c} \end{cases}, \quad (5.24)$$

und für die Dämpfungskennlinie

$$d^*(A, \omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } |A| < \frac{F_0 \mu_1}{c} \\ \frac{4\mu_1 F_0}{\omega \pi |A|} \left(1 - \frac{\mu_1 F_0}{c|A|}\right) & \text{für } |A| \geq \frac{F_0 \mu_1}{c} \end{cases}. \quad (5.25)$$

Zur Untersuchung des Einflusses der Fügestellen in Bezug auf das Phänomen Bremsenquietschen wird im Folgenden das in Abschnitt 2.2.5 bereits eingeführte Minimalmodell einer Taumelscheibe verwendet. Für die Berücksichtigung der Fügestelle wird das Modell zunächst wie in Abbildung 71 dargestellt erweitert. Dabei wird die feste Einspannung, welche die den Bremsbelag repräsentierende Feder mit der Steifigkeit k an die Umgebung koppelt, durch einen Massepunkt m_p ersetzt. Der Massepunkt oberhalb der Scheibe erhält zwei Freiheitsgrade. Dabei ist q_3 die Verschiebung in Richtung der Scheibenebene und q_5 die in Normalenrichtung. Der untere Massepunkt besitzt analog die Freiheitsgrade q_4 und q_6 . In Normalenrichtung sind die Massepunkte über eine Feder mit der Federsteifigkeit k_s gekoppelt. Durch diese Erweiterung soll ein Bremssattel abgebildet werden. Die Kopplung der Punktmassen an die Umgebung erfolgt in Richtung der Scheibenebene über eine Feder-Dämpfer-Kombination mit den Konstanten k_{ip} und d_{ip} , welche den Bremsenhalter repräsentieren. In Normalenrichtung sind die den Bremssattel darstellenden Massepunkte m_p ebenfalls über eine Feder-Dämpfer-Kombination an die Umgebung gekoppelt. In einer realen Schwimmsattelscheibenbremse erfolgt diese Lagerung über Bolzen, welche innerhalb ihrer Führung, abgesehen von Reibungseffekten, frei verschiebbar sind. Für die Abbildung der Reibungseffekte in dieser Verbindung wird das oben beschriebene Jenkins-Element verwendet bzw. die in (5.24) und (5.25) hergeleitete, nichtlineare Federkennlinie $c^*(A)$ und Dämpferkennlinie $d^*(A, \omega)$. Das Modell umfasst somit sechs Freiheitsgrade und beinhaltet die idealisierte Abbildung der Bremsscheibe, des Bremssattels sowie des Bremshalters (Abbildung 72). Zudem wird die in Normalenrichtung reibungsbehaftete, verschiebbare Verbindung zwischen Sattel und Halter als Jenkins-Element abgebildet.

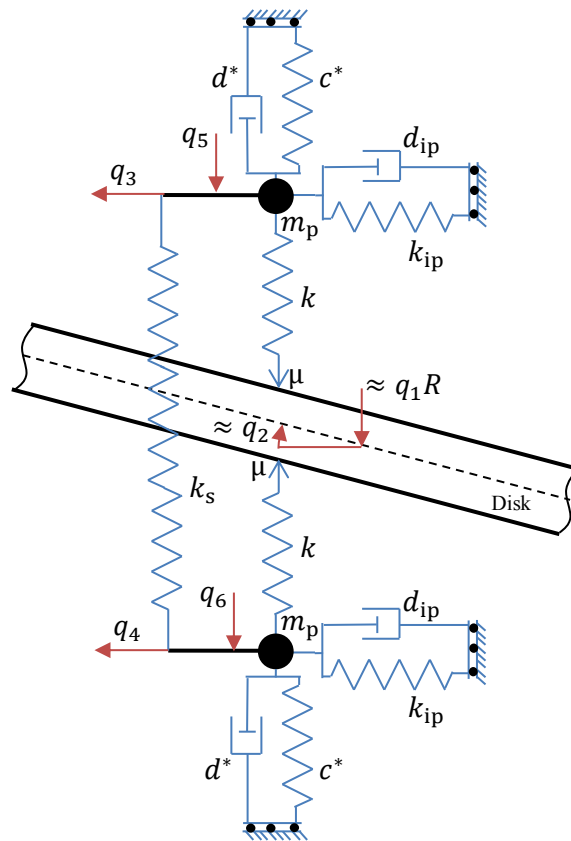


Abbildung 71: Darstellung der Modellerweiterung [86]

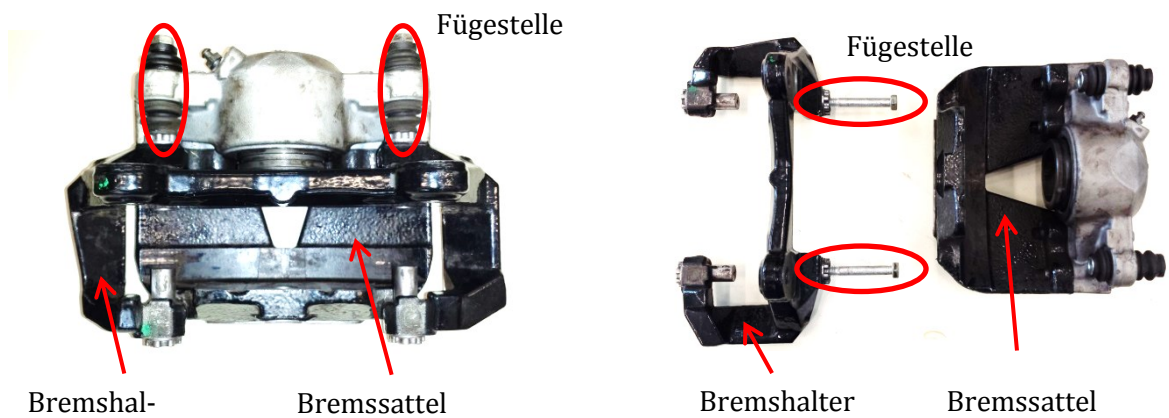


Abbildung 72: Darstellung des Sattels und des Halters zur Verdeutlichung der betrachteten Fügestelle einer Schwimmsattelbremse

Die das Model beschreibende Differentialgleichung hat die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}\mathbf{q} + \mathbf{f}_{\text{nl}} = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Dabei sind die Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_p \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{H^2\mu N_0}{2\Omega} & \Omega 2\Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega 2\Theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{\text{pi}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{\text{pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} k_t + HN_0 + 2kR^2 & \frac{H^2\mu N_0}{2R} & \frac{H\mu N_0}{2R} & -\frac{H\mu N_0}{2R} & -kR & -kR \\ -Hk\mu R - 2\mu N_0 R & k_t HN_0 + H\mu^2 N_0 & N_0 & -N_0 & \frac{1}{2}Hk\mu & \frac{1}{2}Hk\mu \\ -k\mu R & (1 + \mu^2)N_0 & k_{\text{ip}} & 0 & k\mu & 0 \\ k\mu R & -(1 + \mu^2)N_0 & 0 & k_{\text{ip}} & 0 & -k\mu \\ -kR & 0 & 0 & 0 & k + k_s + c & -k_s \\ -kR & 0 & 0 & 0 & -k_s & k + k_s + c \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

gegeben. Der Kraftvektor welcher die Nichtlinearitäten beinhaltet ist mit

$$\mathbf{f}_{\text{nl}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \begin{cases} 0 & \text{für } |q_5| < \frac{F_0\mu_1}{c} \\ \frac{4\mu_1 F_0}{\omega\pi|q_5|} \left(1 - \frac{\mu_1 F_0}{c|q_5|}\right) \dot{q}_5 + \frac{\mu_1^2 F_0^2}{cq_5^2} q_5 & \text{für } |q_5| \geq \frac{F_0\mu_1}{c} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 & \text{für } |q_5| < \frac{F_0\mu_1}{c} \\ \frac{4\mu_1 F_0}{\omega\pi|q_5|} \left(1 - \frac{\mu_1 F_0}{c|q_5|}\right) \dot{q}_6 + \frac{\mu_1^2 F_0^2}{cq_5^2} q_6 & \text{für } |q_5| \geq \frac{F_0\mu_1}{c} \end{cases} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

gegeben. Durch Lösen des um die statische Ruhelage $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{0}$ linearisierten Gleichungssystems

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

ist es möglich, eine Aussage bezüglich des Stabilitätsverhaltens der trivialen Lösung zu treffen. Dazu werden die Eigenwerte in Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit Ω bestimmt. Die dabei verwendeten Parameter setzen sich aus den bereits in Abschnitt 5.2 eingeführten (Tabelle 1) und denen in Tabelle 2 dargestellten Werten zusammen.

m_p	Masse des Bremssattels	0,15	kg
k_s	Steifigkeit des Bremssattels	$1 \cdot 10^6$	N/m
k_t	Torsionssteifigkeit der Lagerung der Bremsscheibe	$1,88 \cdot 10^7$	Nm
k_{ip}	Steifigkeit des Halters	$6 \cdot 10^6$	N/m
d_{ip}	Dämpfung des Halters	0,1	Ns/m

Tabelle 2: Modellparameter

Die Ergebnisse sind in Abbildung 73 und Abbildung 74 dargestellt. Das Modell besitzt bei höheren Drehzahlen ($\Omega > 13,5 \text{ 1/s}$) zwei instabile Moden, wobei diejenige mit dem größten positiven Realteil eine zugehörige Frequenz von $f = \frac{11000}{2\pi} \frac{1}{s} = 1750 \text{ Hz}$ hat. Des Weiteren lässt sich beobachten, dass eine Verringerung der Drehzahl zu einer Stabilisierung des Systems führt. Der Einfluss der Drehzahl auf den Imaginärteil bzw. auf die Frequenz ist gering.

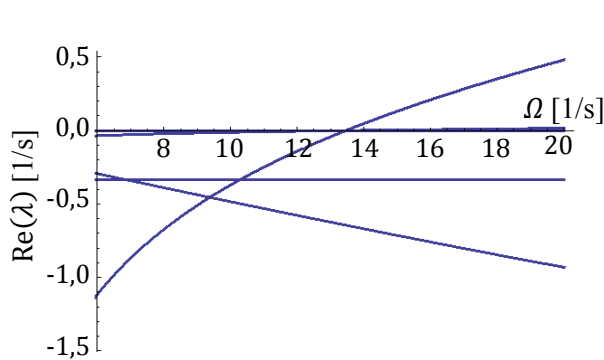


Abbildung 73: Darstellung der Realteile über der Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe

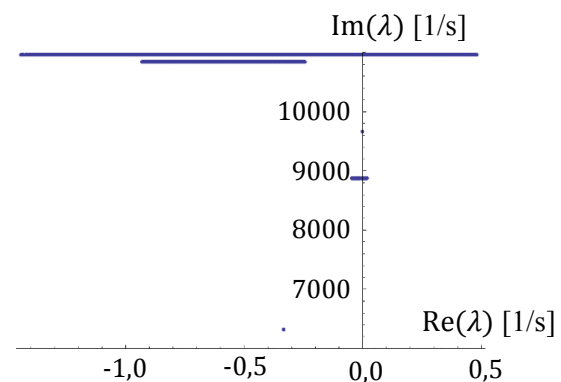


Abbildung 74: Darstellung der Imaginärteile über den Realteilen der Eigenwerte

Für die Untersuchung des Einflusses der Fügestelle auf das Stabilitätsverhalten werden die in Tabelle 3 dargestellten Parameter verwendet.

F_0	Normalkraft in der Fügestelle	5	N
c	Tangentiale Steifigkeit der Fügestelle	$6 \cdot 10^6$	N/m
ω	Kreisfrequenz der instabilen Mode	11 000	1/s
d_{ip}	Dämpfung des Halters	0,1	Ns/m
μ_1	Reibbeiwert in der Fügestelle	0,6	1

Tabelle 3: Zusatzparameter für das nichtlineare Model

Damit ergibt sich für die Ersatzsteifigkeit c^* und die Ersatzdämpfung d^* der in Abbildung 75 und Abbildung 76 dargestellte Verlauf über der Amplitude A . Auffällig ist, dass für kleine Amplituden die Dämpfung Null und die Steifigkeit konstant ist. Dies kann anschaulich damit erklärt werden, dass in diesem Bereich im Kontakt der Fügestelle Haften auftritt und somit nur die lineare Federsteifigkeit c eine Rolle spielt. Nach Überschreiten der kritischen Auslenkung von $A > \frac{F_0 \mu_1}{c}$ rutscht der Kontaktpunkt und Energie wird dissipiert. Dies führt zu einer Erhöhung der

Dämpfung und einer Reduktion der Steifigkeit. Nach weiterem Erhöhen der Amplitude fällt die Dämpfung wieder ab und erreicht ebenso wie die Steifigkeit für $A \rightarrow \infty$ Null.

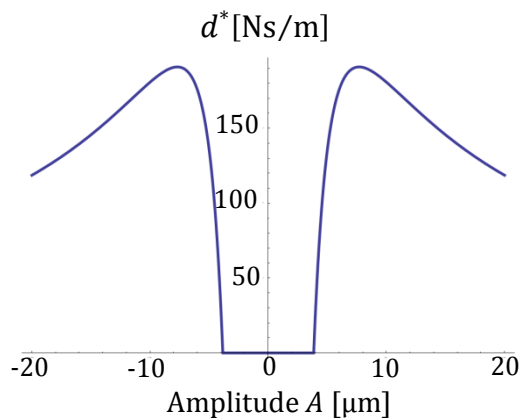


Abbildung 75: Darstellung der nichtlinearen Ersatzdämpfung in der Fügestelle über der Amplitude A

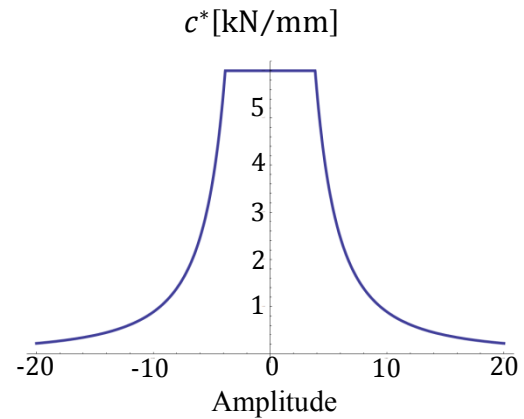


Abbildung 76: Darstellung der nichtlinearen Ersatzsteifigkeit in der Fügestelle über der Amplitude A

Zur Untersuchung des Einflusses der nichtlinearen Fügestelle auf das Stabilitätsverhalten der Bremse wird das Minimalmodell mithilfe der Zeitintegration gelöst. Dabei stellt sich heraus, dass nach ausreichend langer Integrationszeit ein Grenzykel (Abbildung 77, Abbildung 78) erreicht wird, welcher bei ausreichend großer Amplitude in der Praxis als Quietschen wahrgenommen werden kann.

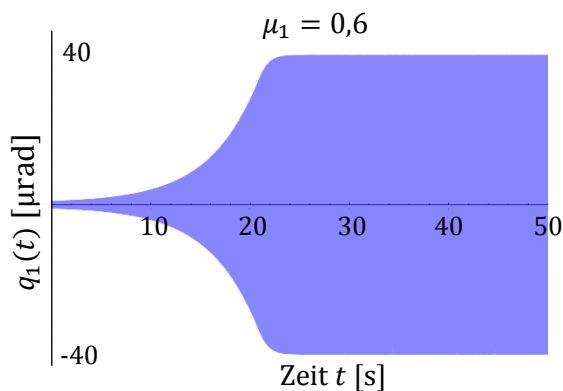


Abbildung 77: Darstellung des Zeitverlaufs des Freiheitsgrads q_1 bei Erreichen eines Grenzykels mit einer Amplitude von ca. $40 \cdot 10^{-6}$ rad.

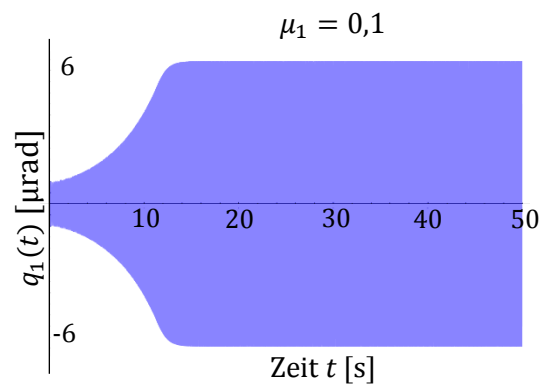


Abbildung 78: Darstellung des Zeitverlaufs des Freiheitsgrads q_1 bei Erreichen eines Grenzykels mit einer Amplitude von ca. $6 \cdot 10^{-6}$ rad.

5.4 Zusammenfassung

Nach einer vorrangegangenen, generellen Betrachtung des Einflusses von Nichtlinearitäten auf die Simulation des Bremsenquietschens wurde in diesem Kapitel der Einfluss einzelner Effekte gesondert untersucht. Dabei lag der Fokus auf dem nichtlinearen Verhalten des Reibmaterials sowie der Fügestellen. Wie bereits oben erwähnt, ist für die nichtlineare Simulation zunächst die experimentelle Bestimmung der nichtlinearen Systemparameter notwendig. Aus diesem Grund wurde hier eine Messmethode beschrieben, mit welcher es möglich ist, die mechanischen Eigenschaften des Reibmaterials in Abhängigkeit der dynamischen Amplitude zu bestimmen. Im Anschluss wurde mit Hilfe eines nichtlinearen Minimalmodells der Einfluss dieser gemessenen Nichtlinearität auf das Quietschverhalten von Bremsen untersucht. Hierfür wurde das Verzweigungsverhalten des Modells betrachtet. Dabei stellte sich heraus, dass die im Reibmaterial vorhandene Nichtlinearität einen deutlichen Einfluss auf das Verzweigungsverhalten hat und somit nicht vernachlässigt werden kann. Die Ergebnisse zeigten jedoch auch, dass die alleinige Berücksichtigung der Nichtlinearitäten im Reibmaterial nicht alle in den Experimenten beobachteten Effekte abbilden kann. Eine Ursache hierfür könnte die nicht ausreichende Polynomapproximation der gemessenen Steifigkeitskennlinie sein. Durch weitere Verbesserungen an dem DCSTR sowie der Auswertemethode könnte es möglich sein ein exakteres nichtlineares Materialmodell zu erhalten. Die Verwendung von komplexeren Approximationen führt jedoch auch zu einem deutlich erhöhten Rechenaufwand bei der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems. Im Anschluss wurde der Einfluss von Fügestellen beschrieben. Nach einer Einführung in das prinzipielle Verhalten von reibungsbehafteten Fügestellen wurde deren Einfluss auf das Quietschverhalten gezeigt. Dazu wurde abermals ein nichtlineares Minimalmodell verwendet, welches eine Bremse in vereinfachter Form abbildet. Das Ergebnis dieser theoretischen Untersuchung ist, dass Fügestellen einen großen Einfluss auf die Grenzzykelamplitude haben, jedoch nicht zwingend zu einem subkritischen Verzweigungsverhalten führen. Damit wurde zwei für das Bremsenquietschen relevante Nichtlinearitäten untersucht, welche einzeln betrachtet jedoch nicht alle experimentell beobachtete Effekte abbilden können. Es kann jedoch vermutet werden, dass eine Kombination beider Effekte dazu in der Lage wäre.

6 Beschreibung und Validierung eines Verfahrens zum Lösen hochdimensionaler, nichtlinearer Differentialgleichungssysteme

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren beschrieben, welches es ermöglicht, die bei der nichtlinearen Simulation des Bremsenquietschens auftretenden hochdimensionalen, nichtlinearen Differentialgleichungssysteme mit geringem Rechenaufwand zu lösen. Ein solches Verfahren ist nötig, da die bereits etablierte Methode dazu nicht in der Lage ist. Wie bereits zuvor dargestellt, ermöglicht die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten die Bestimmung des Grenzykelverhaltens. Damit kann das tatsächliche Quietschverhalten von Bremsen bestimmt werden und nicht mehr wie bei einer linearen Betrachtung lediglich die Stabilität der trivialen. In [87] ist ebenfalls eine Methode dargestellt, welche die Bestimmung einer Näherungslösung von hochdimensionalen, nichtlinearen Differentialgleichungen ermöglicht. Diese Methode verwendet teilweise ähnliche Annahmen wie das hier beschriebene Verfahren, legt jedoch den Schwerpunkt auf die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten bezüglich des Reibkontaktes zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag.

6.1 Methode zur Lösung hochdimensionaler, nichtlinearer Gleichungen

Die hier beschriebene Möglichkeit zur Lösung hochdimensionaler, nichtlinearer Differentialgleichungssysteme basiert auf der Anwendung der klassischen „Model Order Reduction“ (MOR) Technik (vgl. [88]) um die Dimension des Ausgangsproblems zu reduzieren. Für die Berücksichtigung von Parametereinflüssen und Nichtlinearitäten auf den Unterraum wird zusätzlich die „Proper Orthogonal Decomposition Methode“ (POD) (vgl. [89]) verwendet. Im Folgenden wird zunächst das Verfahren, wie es hier für die Simulation des Bremsenquietschens verwendet wird, dargestellt und anschließend anhand eines Beispiels verdeutlicht.

Gegeben sei die nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit n Freiheitsgraden

$$\tilde{f}(\ddot{y}, \dot{y}, y) = \mathbf{0}. \quad (6.1)$$

Durch Separation von $\tilde{f} \in \mathbb{R}^n$ in weg-, geschwindigkeits- und beschleunigungsproportionale Terme sowie in nichtlineare Anteile kann (6.1) geschrieben werden als

$$\mathbf{M}\ddot{y} + \mathbf{P}\dot{y} + \mathbf{Q}y + f(\dot{y}, y) = \mathbf{0}. \quad (6.2)$$

Die Massenmatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit und symmetrisch, die geschwindigkeitsproportionalen Terme $\mathbf{P} = \mathbf{D} + \mathbf{G}$ setzen sich aus der positiv semidefiniten¹⁴, symmetrischen Dämpfungsmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und der schiefsymmetrischen, gyroskopischen Matrix $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zusammen. Die wegproportionalen Terme lassen sich zerlegen in $\mathbf{Q} = \mathbf{K} + \mathbf{N}$, wobei $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die positiv definite, symmetrische Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die schiefsymmetrische,

¹⁴ Dies gilt im Falle eines über die Relativgeschwindigkeit konstanten Reibwertes.

zirkulatorische Matrix ist. Der lineare Anteil der Gleichung, welcher zu dem Eigenwertproblem der Komplexen Eigenwertanalyse (KEA) führt, besitzt aufgrund der zirkulatorischen Matrix m Eigenwerte mit positivem Realteil. Das linearisierte Problem besitzt somit m instabile Lösungen. Durch Hinzunahme der Nichtlinearitäten $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$ können diese Lösungen jedoch für $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$ wieder stabil werden. Die anfangs instabile, triviale Lösung nähert sich dann einer stabilen Grenzzykelschwingung $\mathbf{y}_g(t)$ an. Ziel der im Folgenden beschriebenen Methode ist es, diese Grenzzykellösung zu bestimmen. Wie bereits in Abschnitt 4.4 erwähnt, ist dies jedoch für hochdimensionale Systeme mit einem zu großen Rechenaufwand verbunden. Die Idee hinter dem hier beschriebenen Verfahren ist, dass die hochdimensionale, nichtlineare Gleichung (6.2) auf einen niedrigdimensionalen Unterraum $\mathcal{R}$, welcher eine gute Näherung der Lösung $\mathbf{y}_g(t)$ enthält, projiziert wird. Das niedrigdimensionale Problem kann anschließend mit geringem Rechenaufwand gelöst werden. Die Problematik besteht hier darin, einen geeigneten Unterraum zu finden. Wie bereits in Kapitel 2.2 beschrieben, stellte sich durch experimentelle Untersuchungen heraus, dass die Amplitude einen geringen Einfluss auf die Schwingform während des Quietschens hat. Aus diesem Grund wird für die Erstellung des Unterraums zunächst die Annahme verwendet, dass der Einfluss, der in dem Differentialgleichungssystem enthaltenen Nichtlinearität, auf die Schwingform vernachlässigt werden kann. In diesem Fall kann die Grenzzykellösung $\mathbf{y}_g(t)$ als eine Linearkombination der Schwingformen, welche sich aus der Lösung des linearisierten Systems ergeben, dargestellt werden.

6.1.1 Lösen des linearisierten Problems

Zur Bestimmung des Unterraums wird zunächst Gleichung (6.2) linearisiert und gelöst. Dazu wird der Ansatz

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} \quad (6.3)$$

in

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

eingesetzt. Dies führt zum Eigenwertproblem

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (6.5)$$

Durch Aufstellen und Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q}) = 0$ können n Paare konjugiert komplexer Eigenwerte λ_i bestimmt werden. Die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ lassen sich durch Einsetzen von λ_i in Gleichung (6.5) bestimmen. Aufgrund der Struktur des linearen Differentialgleichungssystems existieren m Eigenwertpaare λ_i^k mit positivem Realteil. Die dazugehörigen Paare komplex konjugierter Eigenvektoren $\mathbf{v}_i^k$ beschreiben die instabilen Schwingformen. Für den Index i gilt hierbei $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

6.1.2 Projektion des nichtlinearen Gleichungssystems auf einen

Unterraum

Die für die Projektion des Systems (6.2) verwendete Unterraummatrix sei $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, wobei $m \ll n$ ist. Zunächst wird die Koordinatentransformation

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{R}\mathbf{x}(t) \quad (6.6)$$

eingeführt. Es ist offensichtlich, dass aufgrund der Dimension von $\mathbf{R}$ der neue Koordinatenvektor $\mathbf{x}$ die Länge m hat. Durch Einsetzen von (6.6) in (6.2) folgt

$$\mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\mathbf{R}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (6.7)$$

Mithilfe einer linksseitigen Multiplikation der Gleichung (6.7) mit $\mathbf{R}^T$ ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{f}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

mit $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R}$, $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R}$, $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^T \mathbf{Q} \mathbf{R}$ und $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{R}^T \mathbf{f}$ mit $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^m$. Das ursprüngliche Gleichungssystem mit der Dimension n wird somit durch ein m -dimensionales, deutlich kleineres Gleichungssystem ersetzt, welches auch mit beschränkter Rechenleistung prinzipiell lösbar ist. Somit ist es möglich, $\mathbf{x}(t)$ aus (6.8) zu bestimmen. Diese Lösung kann mithilfe von (6.6) in die physikalischen Koordinaten $\mathbf{y}(t)$ zurückgeführt werden. Es ist jedoch offensichtlich, dass mit $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ nicht beliebige $\mathbf{y}$ bestimmt werden können, sondern nur diejenigen, welche sich aus einer Linearkombination der Spalten von $\mathbf{R}$ ergeben.

6.1.3 Generierung eines geeigneten Unterraums

Wie oben gezeigt, muss die für die Projektion verwendete Unterraummatrix $\mathbf{R}$ bestimmte Anforderungen erfüllen. Sie sollte möglichst wenig Spalten haben, damit das projizierte System eine kleine Dimension hat. Zudem sollte die tatsächliche Lösung $\mathbf{y}_g(t)$ gut durch die Linearkombination der Spalten von $\mathbf{R}$ approximiert werden können.

Die einfachste Methode, einen Unterraum zu definieren, ist diesen als Spann der instabilen Moden des linearen Systems anzunehmen. Dies beinhaltet die Annahme, dass die Nichtlinearitäten keinen Einfluss auf die Schwingformen haben (vgl. Kapitel 2.2). In diesem Fall müsste die Grenzzykelschwingung $\mathbf{y}_g(t)$ eine Linearkombination der Eigenvektoren $\mathbf{v}_i^k$ sein. Die Unterraummatrix $\mathbf{R}_1$, welche den Unterraum $\mathcal{R}_1$ aufspannt, ist in diesem Fall gegeben mit

$$\mathbf{R}_1 = [\text{Re}(\mathbf{v}_1^k), \text{Im}(\mathbf{v}_1^k), \text{Re}(\mathbf{v}_2^k), \text{Im}(\mathbf{v}_2^k), \dots, \text{Re}(\mathbf{v}_m^k), \text{Im}(\mathbf{v}_m^k)], \quad (6.9)$$

wobei $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times 2m}$ ist.

Da die Eigenvektoren aus Gleichung (6.5) für $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ allgemein nicht orthogonal bezüglich der Systemmatrizen sind, wird das projizierte Gleichungssystem nicht entkoppelt sein. Zudem führen die Nichtlinearitäten zu einer Kopplung der projizierten Gleichungen. Eine unvollständige Unterraummatrix ($2m < n$) wird somit zu einem Fehler führen. Dieser Fehler kann minimiert werden, je mehr Eigenvektoren in der Unterraummatrix enthalten sind. Dies führt jedoch zu einer Erhöhung der Freiheitsgrade des projizierten Systems und somit zu einem großen Rechenaufwand. Dennoch könnte eine Verbesserung des Unterraums erzielt werden, indem z. B. h

Schwingformen $\mathbf{v}_i^s$ mit zugehörigen Eigenfrequenzen, die nahe der kritischen Frequenzen liegen, ebenfalls berücksichtigt werden. In diesem Fall hat die Unterraummatrix die Form

$$\mathbf{R}_2 = [\mathbf{R}_1, \text{Re}(\mathbf{v}_1^s), \text{Im}(\mathbf{v}_1^s), \text{Re}(\mathbf{v}_2^s), \text{Im}(\mathbf{v}_2^s), \dots, \text{Re}(\mathbf{v}_h^s), \text{Im}(\mathbf{v}_h^s)]. \quad (6.10)$$

Die Dimension des projizierten Problems würde sich um h erhöhen. Es ist jedoch nicht gesagt, dass der auf diese Weise definierte Unterraum $\mathcal{R}_2$ die Grenzzykelschwingung $\mathbf{y}_g(t)$ besser approximiert als der Unterraum $\mathcal{R}_1$.

Eine weitaus bessere Methode ist es, den Einfluss der Nichtlinearitäten auf die Schwingform direkt zu berücksichtigen. Dies lässt sich besonders einfach realisieren, wenn die Nichtlinearität auf eine oder mehrere diskrete Stellen im Modell reduziert werden kann. Speziell bei der Berücksichtigung von nichtlinearen Fügestellen ist dies möglich, da diese in den meisten Modellen durch diskrete Parallelschaltungen von nichtlinearen Feder- und Dämpferelementen zwischen zwei Knoten berücksichtigt werden. Für den Fall, dass der nichtlineare Anteil in der Ausgangsgleichung (6.1) dadurch entsteht, dass eine diskrete Feder eine von den Verschiebungen abhängige Federsteifigkeit

$$c = c_0 + c_{\text{nl}}(\mathbf{y}) \quad (6.11)$$

hat, kann für die Bestimmung eines besseren Unterraums wie folgt vorgegangen werden. Die Linearisierung der Gleichung (6.1) erfolgt nicht mehr um die statische Ruhelage $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, sondern um eine beliebige andere Stelle $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$. Damit ändert sich (6.11) zu

$$c = c_0 + c_{\text{nl}}(\mathbf{y}_0) + \tilde{c}_{\text{nl}}(\Delta\mathbf{y}) = \quad (6.12)$$

Dies führt zu einem anderen linearen Problem. Damit ist die Steifigkeit des linearisierten Systems nicht mehr c_0 sondern $c_0 + c_{\text{nl}}(\mathbf{y}_0)$. Da die Größenordnung der Grenzzykelschwingung $\mathbf{y}_g(t)$ bekannt ist (beim Bremsenquietschen ca. $1\text{-}10\mu\text{m}$), kann auch die Größenordnung von $c_0 + c_{\text{nl}}(\mathbf{y}_0) = \hat{c}$ mit (6.11) abgeschätzt werden. Das linearisierte Gleichungssystem (6.4) ist somit abhängig vom Parameter $\hat{c}_0$ und kann geschrieben werden als

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}(\hat{c})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}(\hat{c})\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (6.13)$$

Die aus diesem System resultierenden Eigenvektoren $\mathbf{v}_i^k(\hat{c})$, welche zu Eigenwerten mit positivem Realteil gehören, sind somit auch abhängig vom Parameter $\hat{c}$. Da die Lösung hochdimensionaler Eigenwertprobleme jedoch unter Berücksichtigung von Parametern rechenaufwändig ist, werden diskrete Parametersätze $[\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_j, \dots, \hat{c}_J]$ verwendet. Dies führt auf $m \cdot J$ Eigenvektoren $\mathbf{v}_i^k(\hat{c}_j)$. Diese Eigenvektoren können einen Unterraum bilden, welcher den Einfluss der Nichtlinearitäten auf die instabilen Schwingformen beinhaltet. Die resultierende Unterraummatrix $\mathbf{R}_3$ hat die Form

$$\mathbf{R}_3 = [\mathbf{V}_1^k, \mathbf{V}_2^k, \dots, \mathbf{V}_m^k]. \quad (6.14)$$

mit

$$\mathbf{V}_i^k = [\text{Re}(\mathbf{v}_i^k(\hat{c}_1)), \text{Im}(\mathbf{v}_i^k(\hat{c}_1)), \text{Re}(\mathbf{v}_i^k(\hat{c}_2)), \text{Im}(\mathbf{v}_i^k(\hat{c}_2)), \dots, \quad (6.15)$$

$$\text{Re}(\mathbf{v}_i^k(\hat{c}_j)), \text{Im}(\mathbf{v}_i^k(\hat{c}_j))].$$

Da der Einfluss der Nichtlinearitäten auf die Eigenvektoren gering ist, bestehen die $\mathbf{V}_i^k$ aus näherungsweise den gleichen Spalten. Diese Eigenschaft führt nach der Projektion zu einem System, welches nahezu linear abhängige Gleichungen beinhaltet und somit unter Berücksichtigung von numerischen Fehlern nur schwer zu lösen ist. Dies kann umgangen werden, indem $\mathbf{R}_3$ mithilfe der Singulärwertzerlegung [90] durch eine andere Matrix ersetzt wird. Sei $\mathbf{R}_3 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine beliebige Matrix, so existieren orthogonale Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sowie $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit den Einträgen $\sigma_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\sigma_{ii} < \sigma_{jj}$ für $i < j$, für die

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (6.16)$$

gilt. Diese Darstellung heißt Singulärwertzerlegung, wobei σ_{ii} die Singulärwerte sind. Die Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \text{ und} \\ \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die Matrix $\mathbf{R}_3^d$ mit $\text{Rang}(\mathbf{R}_3^d) = d < \text{Rang}(\mathbf{R}_3)$ ist die beste Approximation von $\mathbf{R}_3$ im Sinne

$$\min \|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_3^d\|_2 \quad (6.18)$$

wenn $\mathbf{R}_3^d = \sum_{i=1}^d \sigma_{ii} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ beziehungsweise

$$\mathbf{R}_3^d = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^d\mathbf{V}^T \quad (6.19)$$

gilt. Der Fehler beträgt dabei

$$\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_3^d\|_2 = \sigma_{d+1}. \quad (6.20)$$

Dieser ist klein, wenn der numerische Rang von $\mathbf{R}_3$ kleiner als d ist [91]. Dabei gilt

$$\mathbf{\Sigma}^d = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

mit $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_d) \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Die Matrix $\mathbf{R}_3^d$ ist somit die bestmögliche Näherung zu $\mathbf{R}_3$ mit dem Rang h . Da $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ orthogonal zueinander sind, wird aus (6.19) durch Multiplikation mit $\mathbf{U}^T$ von links und $\mathbf{V}$ von rechts zu

$$\mathbf{U}^T \mathbf{R}_3^d \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Damit ist nach [92] offensichtlich, dass

$$\mathbf{R}_3^d = \mathbf{U}^d \mathbf{D} (\mathbf{V}^d)^T \quad (6.23)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^d &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_d] \text{ und} \\ \mathbf{V}^d &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d] \end{aligned} \quad (6.24)$$

gilt. Da die Spalten von $\mathbf{R}_3^d$ offenbar eine Linearkombination der Spalten von $\mathbf{U}^d$ sind, kann $\mathbf{R}_4 = \mathbf{U}^d$ ebenfalls als Unterraummatrix verwendet werden. Wenn das nichtlineare Gleichungssystem abhängig von einem oder mehreren Parametern wie z.B. der Drehzahl Ω der Bremsscheibe oder des Reibbeiwertes μ ist, kann das oben beschriebene Verfahren ebenfalls verwendet werden. In diesem Falle hat Gleichung (6.13) die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}(\hat{c}, \Omega, \mu)\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}(\hat{c}, \Omega, \mu)\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (6.25)$$

Die daraus resultierenden Eigenvektoren $\mathbf{v}_i^k(\hat{c}, \Omega, \mu)$ welche die instabilen Moden beschreiben, besitzen dann zusätzlich eine Abhängigkeit gegenüber den weiteren Parametern. Zur Bestimmung der Unterraummatrix $\mathbf{R}_4$ kann nun ebenfalls die Singulärwertzerlegung durchgeführt werden. Der resultierende Unterraum hat zwar eine etwas größere Dimension, beinhaltet jedoch zusätzlich den Einfluss der Systemparameter.

6.1.4 Lösen des niedrigdimensionalen nichtlinearen Gleichungssystems

In diesem Abschnitt werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert, das in seiner Dimension reduzierte aber dennoch nichtlineare Gleichungssystem

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{f}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (6.26)$$

zu lösen.

6.1.4.1 Numerische Zeitintegration

Das Gleichungssystem (6.26) kann durch das Einführen des Zustandsraumvektors $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$ in ein System 1. Ordnung transformiert werden. Aus (6.26) folgt dann

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{Q}} & -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{P}} \end{pmatrix} \mathbf{p} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

wobei $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix der Dimension $m \times m$ ist. Für einen gegebenen Anfangszustand $\mathbf{p}_0$ kann diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mithilfe der numerischen Integration gelöst werden. Grundsätzlich gibt es Einschritt- und Mehrschrittverfahren. Zu den bekanntesten Einschrittverfahren gehört das s-stufige Runge-Kutta-Verfahren [93], welches sowohl explizit als auch implizit formuliert werden kann. Falls Gleichung (6.27) mehrere stabile Lösungen besitzt, wird die numerische Integration immer nur die Lösung liefern, in deren Einzugsbereich die Anfangsbedingung $\mathbf{p}_0$ liegt. Damit tatsächlich alle Lösungen gefunden werden, müsste $\mathbf{p}_0$ variiert werden. Dies ist jedoch mit zusätzlichem Rechenaufwand verbunden. Im Falle eines parameterabhängigen Gleichungssystems wie z. B.

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{P}}(\Omega)\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{Q}}(\Omega)\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{f}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (6.28)$$

wobei Ω die Drehzahl der Bremsscheibe ist, müsste die Integration für verschiedene Ω wiederholt werden. Dies ist unter Umständen mit einem hohen Zeitaufwand verbunden, jedoch möglich, wenn die Dimension m des Gleichungssystems klein ist.

6.1.4.2 Harmonische Balance

Das von Krylov und Bogoljubow entwickelte Verfahren der Harmonischen Balance [69] basiert auf dem Ansatz, die nichtlinearen Terme der Gleichung (6.26) durch Fourier-Reihen zu beschreiben. Dies entspricht der Annahme, dass die Schwingung des nichtlinearen Systems periodisch ist und sich als Fourier-Reihen darstellen lässt. Ein möglicher Ansatz, für eine erste Näherungslösung, für ein m -dimensionales, nichtlineares, homogenes Differentialgleichungssystem kann

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}_1 \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{x}}_2 \sin(\omega t), \quad (6.29)$$

sein, wobei $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{x}_{11}, \hat{x}_{12}, \hat{x}_{13}, \dots, \hat{x}_{1m})^T$ und $\hat{\mathbf{x}}_2 = (0, \hat{x}_{22}, \hat{x}_{23}, \dots, \hat{x}_{2m})^T$ ist. Zur Berücksichtigung weiterer Terme in der Lösung kann der Ansatz noch durch Hinzunahme von Termen höherer Ordnung wie $\hat{\mathbf{x}}_{2N-1} \cos(N\omega t) + \hat{\mathbf{x}}_{2N} \sin(N\omega t)$ mit $N \in \mathbb{N}$ erweitert werden. Wie in [79] beschrieben kann auch die Berücksichtigung konstanter Terme notwendig sein. Durch Einsetzen von Ansatz (6.29) in (6.26) ergibt sich für polynomiale Nichtlinearitäten ein Gleichungssystem, in welchem Terme mit $\sin^p(\omega t) \cos^{\tilde{p}}(\omega t)$ auftreten. Diese können durch die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \sin^p(\omega t) &= \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \cos\left((p-2k)\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right); \quad p \in \mathbb{N}, \\ \cos^{\tilde{p}}(\omega t) &= \frac{1}{2^{\tilde{p}}} \sum_{k=0}^{\tilde{p}} \binom{\tilde{p}}{k} \cos((\tilde{p}-2k)\omega t); \quad \tilde{p} \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \sin(N\omega t) \cos(\tilde{N}\omega t) &= \frac{1}{2} \left(\sin((N-\tilde{N})\omega t) - \sin((N+\tilde{N})\omega t) \right); \quad N, \tilde{N} \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.30)$$

ersetzt werden. Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs entsteht das algebraische Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \omega) = 0, \quad (6.31)$$

aus welchem $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ und ω bestimmt werden können. Da das Gleichungssystem nichtlinear in $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ und ω ist, können mehrere Lösungen existieren, wobei nur die reellen relevant sind.

Die Anwendung der Harmonischen Balance liefert alle Lösungen $\mathbf{x}(t)$ von Gleichung (6.26) durch einmaliges Lösen eines nichtlinearen, algebraischen Gleichungssystems. Die Lösung erfolgt jedoch nur bis zur Ordnung des gewählten Ansatzes im oben beschriebenen Fall, also ohne höherharmonische Anteile. Zudem kann nicht eindeutig bestimmt werden, welche Lösungen stabil bzw. instabil sind. Dies könnte im Nachhinein durch numerische Integration getestet werden. Für den Fall, dass das zu lösende Gleichungssystem (6.28) parameterabhängig ist, kann durch Aufstellen des parameterabhängigen, algebraischen Gleichungssystems

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \omega, \Omega) = 0 \quad (6.32)$$

$\mathbf{x}(\Omega, t)$ bestimmt werden. Somit lässt sich in nur einem Schritt beispielsweise das Verzweigungsverhalten von (6.28) bestimmen. Dies ist deutlich schneller als die Anwendung der numerischen Integration, allerdings nur für eine kleine Dimension von (6.28) möglich. Da andernfalls das Lösen des nichtlinearen, algebraischen Gleichungssystems (6.32) zu rechenaufwändig ist.

6.1.5 Berücksichtigung von nichtlinearem Materialverhalten

Die Berücksichtigung eines nichtlinearen Materialverhaltens, bei welchem beispielsweise der Elastizitätstensor $\mathbf{C}$ von den Komponenten des Dehnungstensors $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ abhängig ist, kann mit der oben beschriebenen Methode nicht ohne weiteres realisiert werden. Die Problematik besteht darin, das nichtlineare Gleichungssystem überhaupt darstellen zu können.

Betrachtet wird nun das nichtlineare Materialgesetz $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ wobei die Abhängigkeit von $\mathbf{C}$ gegenüber $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ als Polynom fünften Grades in der Form

$$\mathbf{C}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\| + \mathbf{C}_2 \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2 + \mathbf{C}_3 \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^3 + \mathbf{C}_4 \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^4 + \mathbf{C}_5 \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^5 \quad (6.33)$$

gegeben ist. Der Ausdruck $\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|$ steht hier für eine beliebige Norm von $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ z.B. der einachsigen Vergleichsdehnung nach von Mises. Wird diese Abhängigkeit in einem FE-Modell berücksichtigt, so folgt daraus eine nichtlineare Kraftvektor $\mathbf{f}$, welcher von den Knotenverschiebungen $\mathbf{y}$ abhängig ist. Das zu lösende, nichtlineare Gleichungssystem hätte in diesem Fall die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (6.34)$$

Der Unterschied zu dem oben behandelten Problem, in welchem die Nichtlinearität ausschließlich an diskreten Stellen im Modell auftritt, ist, dass nun $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ nahezu voll besetzt ist und in jeder Zeile ein Polynom $P(\mathbf{y})$ stehen kann. Im Falle der Berücksichtigung nichtlinearer Terme bis zum Grad fünf wäre $P(\mathbf{y})$ ebenfalls ein Polynom fünften Grades mit so vielen Variablen, wie der jeweilige Freiheitsgrad Kopplungen mit anderen Freiheitsgraden besitzt. Für ein Polynom des Grades p mit n Variablen müssen $(p+1)^n$ Terme gespeichert werden. Im Falle einer Kopplung von zehn Freiheitsgraden müssten somit $(5+1)^{10} = 60.466.176$ Terme pro Zeile von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ abgespeichert werden. Dies führt zu einem enormen Speicherbedarf und macht die Durchführung der Projektion auf den Unterraum schwierig. Dies ist auch der Grund dafür, dass in einem FE-Programm Gleichung (6.34) nie komplett aufgestellt wird.

Zur Umgehung dieser Problematik sollte die Projektion auf den Unterraum erfolgen, bevor das gesamte, nichtlineare Gleichungssystem aufgestellt wird. Wie dies möglich ist, wird im Folgenden erklärt. Zunächst wird, wie in Abschnitt 6.1.3 gezeigt, die Unterraummatrix $\mathbf{R}$ auf Grundlage des linearen Systems gebildet. Für das Aufstellen des nichtlinearen Gleichungssystems soll nun die Abhängigkeit des lokalen Elastizitätstensor $\mathbf{C}$ von dem lokalen Dehnungstensor $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ berücksichtigt werden. Dabei gilt $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ mit $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y})$. An dieser Stelle wird jedoch bereits die Koordinatentransformation $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ eingeführt, sodass $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{R}\mathbf{x})$ ist. Wenn der lokale Elastizitätstensor somit von $\mathbf{R}\mathbf{x}$ abhängig ist muss dementsprechend auch die Matrix $\mathbf{Q}$ eine Abhängigkeit von $\mathbf{x}$ haben. Durch eine Taylorreihenentwicklung kann diese Abhängigkeit dann in der Form

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{C}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{R}\mathbf{x}))) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^5 \frac{\partial^k \mathbf{K}(\mathbf{x} = \mathbf{0})}{\partial x_i^k} \frac{x_i^k}{k!} \quad (6.35)$$

geschrieben werden. Die in Abschnitt 6.1.2 beschriebene Unterraumprojektion kann nun bereits an dieser Stelle durch rechtsseitige Multiplikation mit $\mathbf{R}$ und linksseitiger Multiplikation mit $\mathbf{R}^T$ erfolgen, wodurch sich

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\bar{\varepsilon}(\mathbf{R}\mathbf{x}))) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^5 \frac{\partial^k \mathbf{R}^T \mathbf{K}(\mathbf{x}=\mathbf{0}) \mathbf{R}}{\partial x_i^k} \frac{x_i^k}{k!} \quad (6.36)$$

ergibt.

Durch dieses Vorgehen ist es zu keiner Zeit nötig, die nichtlinearen Terme des nicht projizierten Gesamtsystems zu speichern, wodurch die Berücksichtigung von nichtlinearem Materialverhalten möglich wird. Die einzige Aufgabe besteht nun darin, den Term $\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^5 \frac{\partial^k \mathbf{R}^T \mathbf{K}(\mathbf{x}=\mathbf{0}) \mathbf{R}}{\partial x_i^k} \frac{x_i^k}{k!}$ zu bestimmen. Dies müsste innerhalb des FE Programms erfolgen, wodurch ein Erproben dieses Verfahrens an hochdimensionalen FE-Modellen im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist.

Für eine bessere Veranschaulichung des oben beschriebenen Vorgehens wird daher hier ein vereinfachtes Modell betrachtet. Das Modell besteht aus drei masselosen Dehnstäben welche wie in Abbildung 79 gezeigt angeordnet sind. Die Berücksichtigung eines nichtlinearen Materialgesetzes erfolgt hierbei durch einen dehnungsabhängigen Elastizitätsmodul, welches mit

$$E_{nl}(\varepsilon) = E_0 + E_2 \varepsilon^2 + E_4 \varepsilon^4 \quad (6.37)$$

gegeben ist. Das Modell ist offensichtlich deutlich einfacher als ein FE-Modell mit Volumenelementen. Speziell der hier vorliegende einachsige Spannungszustand in den Stäben ermöglicht eine gute Veranschaulichung des oben beschriebenen Vorgehens zur Berücksichtigung eines nichtlinearen Materialgesetzes.

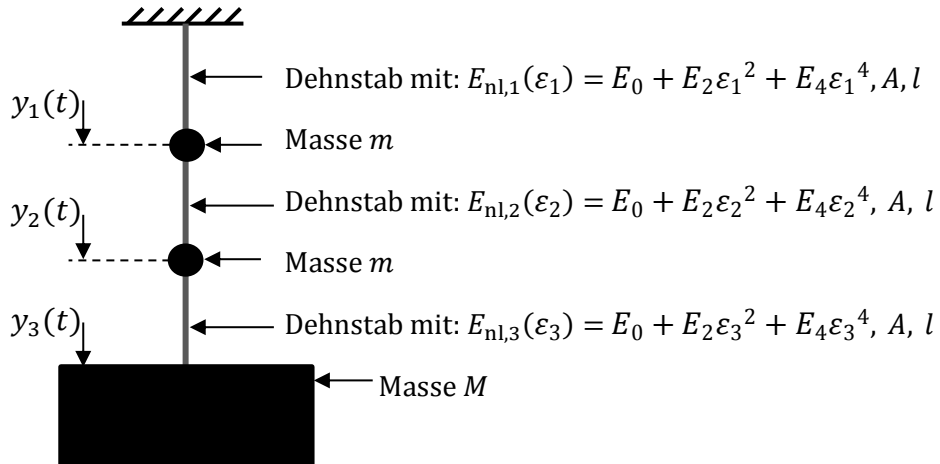


Abbildung 79: Darstellung eines Minimalmodells welches aus drei Dehnstäben und drei Punktmassen besteht.

Die das System beschreibenden Bewegungsgleichung ist mit

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \frac{A}{l} \begin{bmatrix} E_{nl,1}(\varepsilon_1) + E_{nl,2}(\varepsilon_2) & -E_{nl,2}(\varepsilon_2) & 0 \\ -E_{nl,2}(\varepsilon_2) & E_{nl,2}(\varepsilon_2) + E_{nl,3}(\varepsilon_3) & -E_{nl,3}(\varepsilon_3) \\ 0 & -E_{nl,3}(\varepsilon_3) & E_{nl,3}(\varepsilon_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.38)$$

gegeben. Mit den in Abbildung 79 gegebenen nichtlinearen Materialgesetzen und $\varepsilon_1 = y_1/l$, $\varepsilon_2 = (y_2 - y_1)/l$ sowie $\varepsilon_3 = (y_3 - y_2)/l$ wird deutlich, dass bereits bei diesem, lediglich drei Freiheitsgrade beinhaltenden, Modell der nichtlinearen Kraftvektor $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ relativ viele Terme

beinhaltet. Aus diesem Grund soll das Gleichungssystem (6.45) auf den, durch die Unterraummatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

repräsentierten Unterraum projiziert werden, ohne $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ zu bestimmen. Um dies zu erreichen, wird die bei der Projektion durchgeführte Koordinatentransformation $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ bereits in das Materialgesetz eingesetzt. In dem hier beschriebenen Beispiel ist $\mathbf{x} = x_1$, da $\mathbf{R}$ nur eine Spalte hat. Es ergibt sich demnach für die dehnungsabhängigen Elastizitätsmoduln der einzelnen Stäbe

$$E_{nl,1}(\mathbf{x}) = E_{nl,2}(\mathbf{x}) = E_{nl,3}(\mathbf{x}) = E_0 + \frac{1}{9}E_2x_1^2 + \frac{1}{81}E_4x_1^4. \quad (6.40)$$

Durch einsetzen von $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ und $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{x}}$ in Gleichung (6.45) und linksseitige Multiplikation mit $\mathbf{R}^T$ ergibt sich die reduzierte Bewegungsgleichung zu

$$\left(\frac{5}{9}m + M\right)\ddot{x}_1 + \frac{A}{3l}\left(E_0x_1 + \frac{1}{9}E_2x_1^3 + \frac{1}{81}E_4x_1^5\right) = 0. \quad (6.41)$$

Damit wurde gezeigt, dass es möglich ist, das in der Dimension reduzierte Gleichungssystem auch bei einem nichtlinearen Materialgesetz effizient zu bestimmen. Angemerkt sei hier noch, dass für $m = 0$ das hier betrachtete System im Falle einer Linearisierung um $x_1 = 0$ die Lösung $x_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{AE_0}{3lM}}t - \varphi_1\right)$ hat. Durch die Rücktransformation auf die Ausgangskoordinaten ergibt sich die Lösung

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{AE_0}{3lM}}t - \varphi_1\right) \\ \frac{2}{3}A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{AE_0}{3lM}}t - \varphi_1\right) \\ 1A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{AE_0}{3lM}}t - \varphi_1\right) \end{pmatrix}, \quad (6.42)$$

welche einer der drei Lösungen des nichtreduzierten Systems entspricht.

6.2 Validierung des Verfahrens mit einem vereinfachten FE-Modell

Mit dem in Kapitel 6.1 beschriebenen Verfahren ist es möglich, hochdimensionale, nichtlineare Gleichungssysteme stark in ihrer Dimension zu reduzieren. Da die nichtreduzierten Ausgangssysteme jedoch mit der im Rahmen dieser Arbeit zur Verfügung stehenden Rechenleistung nicht gelöst werden können, existiert keine Referenzlösung, anhand derer eine Validierung der Reduktionsmethode stattfinden kann. Aus diesem Grund wird zunächst ein vereinfachtes Bremsenmodell untersucht, welches zwar alle Effekte enthält, die auch bei industriellen Bremsenmodellen berücksichtigt werden, aber dennoch bereits im reduzierten Zustand eine deutlich geringere Zahl an Freiheitsgraden beinhaltet. Für die Anwendung der Methode wurde diese in dem Programm MATHEMATICA der Firma WOLFRAM implementiert. In [45] ist eine mögliche Umsetzung des Verfahrens in MATLAB beschrieben. Dort sind zudem einige weiterführende Anwendungsbeispiele dargestellt.

Das hier betrachtete Modell (Abbildung 80) besteht aus einer sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω drehenden, elastischen Scheibe, welche im Mittelpunkt fest eingespannt ist. Die Bremsbeläge werden vereinfacht durch Federn dargestellt. Die Federn sind einseitig fest mit der Umgebung gekoppelt und auf der anderen Seite über einen Reibkontakt mit der Scheibe verbunden. Auf die Kontaktpunkte wirken zudem statische Lasten, die den Bremsdruck symbolisieren.

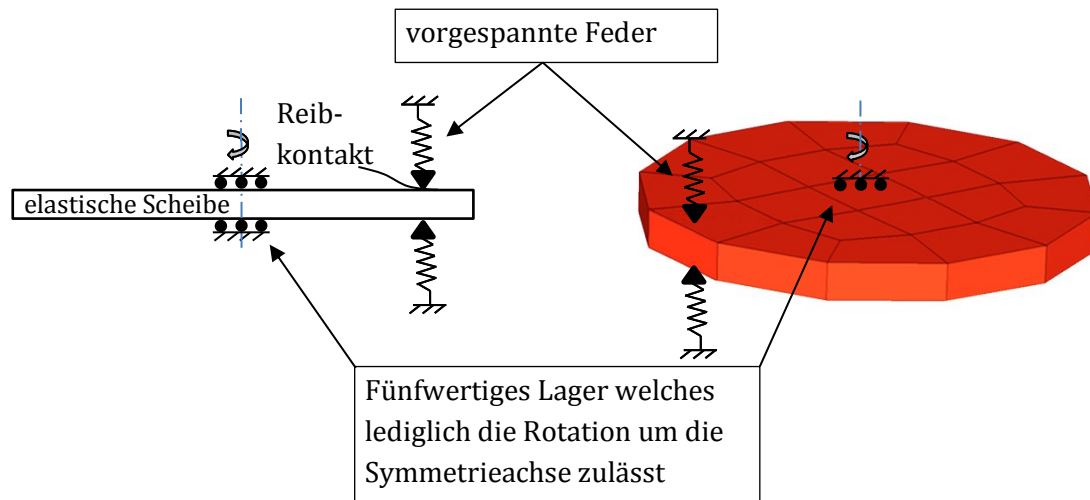


Abbildung 80: Prinzipskizze des vereinfachten Bremsenmodells (links), FE-Modell (rechts)

Die linearisierten Bewegungsgleichungen des Modells werden mithilfe des in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Verfahrens erstellt. Dabei wird darauf geachtet, dass alle Simulationsschritte exakt wie bei der KEA üblich durchgeführt werden. Das daraus resultierende Differentialgleichungssystem entspricht Gleichung (2.10), wobei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n=144}$ 144 Freiheitsgrade umfasst. Mit dem Ansatz $\mathbf{y}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ ergeben sich n Paare konjugiert komplexer Eigenwerte λ_i und die dazugehörigen konjugiert komplexen Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$. In Abbildung 81 sind die Realteile der Eigenwertpaare über der Rotationsgeschwindigkeit der Bremsscheibe dargestellt. Aus dem Diagramm lässt sich ablesen, dass die lineare Stabilitätsgrenze des Systems bei $\Omega_{\text{Krit}} = 11,2 \text{ rad/s}$ liegt. Bei einer weiteren Erhöhung der Drehzahl existiert ein weiteres Eigenwertpaar mit Realteil größer Null, wodurch ab einer Winkelgeschwindigkeit von ca. 21 rad/s zwei instabile Schwingformen koexistieren.

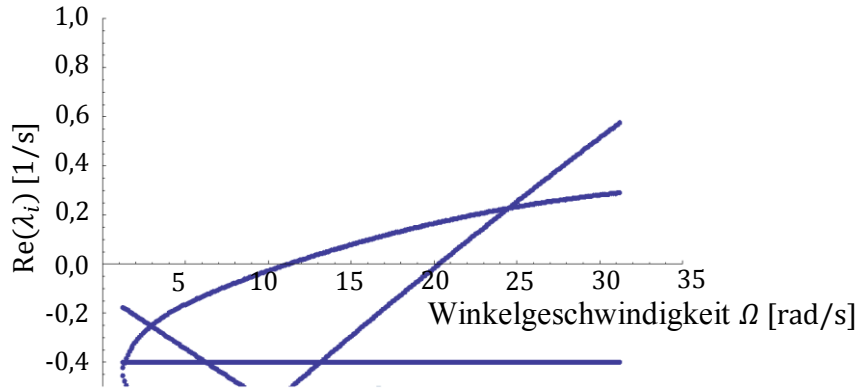


Abbildung 81: Darstellung der Realteile der Eigenwerte über der Winkelgeschwindigkeit der Bremsscheibe

Zur Erprobung der in Abschnitt 6.1 beschriebenen Reduktionsmethode zum Lösen eines hochdimensionalen, nichtlinearen Gleichungssystems wird, wie in Abschnitt 6.1.2 gezeigt, ein geeigneter Unterraum $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{144 \times 40}$ erzeugt. Der Unterraum beinhaltet in diesem Fall die beiden Eigenvektoren zu den zwei Eigenwerten mit positivem Realteil sowie deren Abhängigkeit gegenüber der Rotationsgeschwindigkeit der Bremsscheibe. Daraus ergibt sich ein Unterraum mit der Dimension 40. Durch Anwendung der ebenfalls in Abschnitt 6.1.2 beschriebenen Singulärwertzerlegung von $\tilde{\mathbf{R}}$ kann diese Dimension auf 8 reduziert werden, wodurch sich der Unterraum $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{144 \times 8}$ ergibt. In Abbildung 82 sind die Singulärwerte der Unterraummatrix $\tilde{\mathbf{R}}$ in absteigender Reihenfolge in logarithmischer Skala dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass diese schnell kleiner werden und ab dem achten bereits kleiner als 10^{-10} sind.

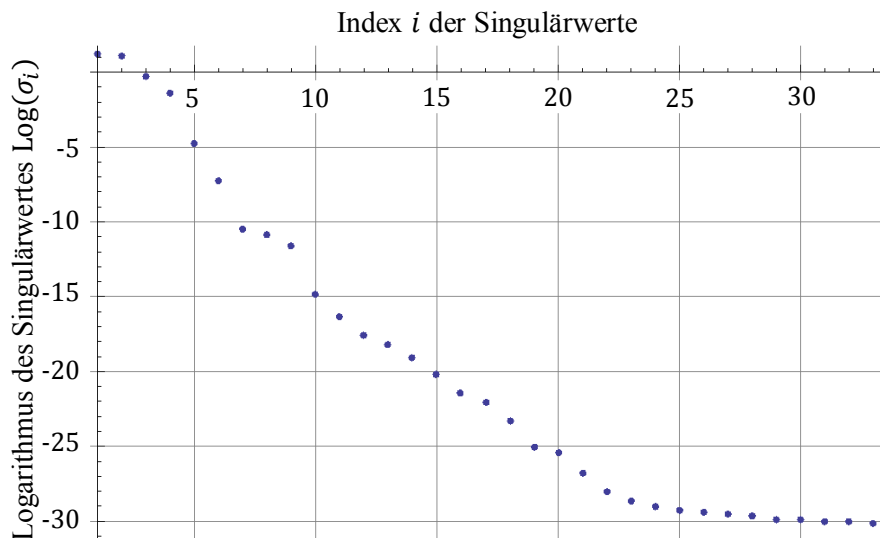


Abbildung 82: Darstellung der logarithmierten Singulärwerte der Unterraummatrix $\tilde{\mathbf{R}}$ in absteigender Reihenfolge

Nachdem auf Basis des linearen Modells ein geeigneter Unterraum definiert ist, erfolgt nun eine nichtlineare Erweiterung des Modells. Die dabei gewählte Form der Nichtlinearität sollte dabei dazu führen, dass eine Grenzykellösung existiert. Aus diesem Grund wird parallel zu den die Beläge repräsentierenden Federn jeweils ein Dämpfer mit einer von der Auslenkung Δy abhängigen viskosen Dämpfung $d = 10^3 \frac{\text{N s}}{\text{m}^3} \Delta y^2$ angeordnet. Die daraus resultierende Kraft ist

$$F = 10^3 \frac{\text{N s}}{\text{m}^3} \Delta y^2 \dot{y}. \quad (6.43)$$

Der Betrag der im oberen und unteren Kontakt herrschenden Normalkraft F_o und F_u ergibt sich, unter Berücksichtigung der linearen Steifigkeit c und der statischen Vorspannung F_0 , damit zu

$$F_o = 10^3 \frac{\text{N s}}{\text{m}^3} \Delta y_o^2 \dot{\Delta y}_o + \Delta y_o c + F_0 \text{ und} \quad (6.44)$$

$$F_u = 10^3 \frac{\text{N s}}{\text{m}^3} \Delta y_u^2 \dot{\Delta y}_u + \Delta y_u c + F_0.$$

Da das FE-Modell mit Volumenelementen aufgebaut ist und somit keine rotatorischen Freiheitsgrade hat, sind Δy_o und Δy_u linear abhängig von den im System vorhandenen Freiheitsgraden $\mathbf{y}$. Damit kann die nichtlineare Differentialgleichung geschrieben werden als

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_R(\Omega) + \mathbf{D}_G(\Omega)) \dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_R + \mathbf{K}_G(\Omega)) \mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (6.45)$$

Dies entspricht der linearen Bewegungsdifferentialgleichung (2.10) der KEA, welche um den nichtlinearen Kraftvektor $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ erweitert wurde. Da in diesem Beispiel nur lokale Nichtlinearitäten enthalten sind ist die Bestimmung von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ ohne weiteres möglich. Nach Durchführung der Koordinatentransformation $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ und linksseitiger Multiplikation mit $\mathbf{R}^T$ folgt aus Gleichung (6.45)

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{P}}(\Omega) \dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{Q}}(\Omega) \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{R}\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (6.46)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{R}^T \mathbf{M}, \\ \tilde{\mathbf{P}}(\Omega) &= \mathbf{R}^T (\mathbf{D} + \mathbf{D}_R(\Omega) + \mathbf{D}_G(\Omega)), \\ \tilde{\mathbf{K}}(\Omega) &= \mathbf{R}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_R + \mathbf{K}_G(\Omega)) \text{ und} \\ \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{R}\mathbf{x}) &= \mathbf{R}^T \mathbf{f}(\mathbf{R}\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Zur Überprüfung, ob die Lösung des reduzierten Systems (8 FHG) mit der Lösung des Ausgangssystems (144 FHG) übereinstimmt, wird durch numerische Integration beider Systeme die Lösung für eine spezielle Rotationsgeschwindigkeit ($\Omega = 13,5 \text{ 1/s}$) bestimmt. Das Ergebnis ist in Abbildung 83 dargestellt. Im linken Bild ist der Zeitverlauf der Koordinate $q_1(t)$ nach Integration des reduzierten Systems und Rücktransformation auf die physikalischen Koordinaten dargestellt. Das rechte Bild veranschaulicht das Ergebnis, welches sich durch die Integration des Gesamtsystems ergibt. Dabei sind die Anfangsbedingungen so gewählt, dass sie auf der Grenzykellösung des rücktransformierten, reduzierten Systems liegen. Falls die Lösung des reduzierten Systems der des Nichtreduzierten entspricht muss so der Einschwingvorgang nicht mit simuliert werden wodurch sich die Simulationszeit stark verringert.

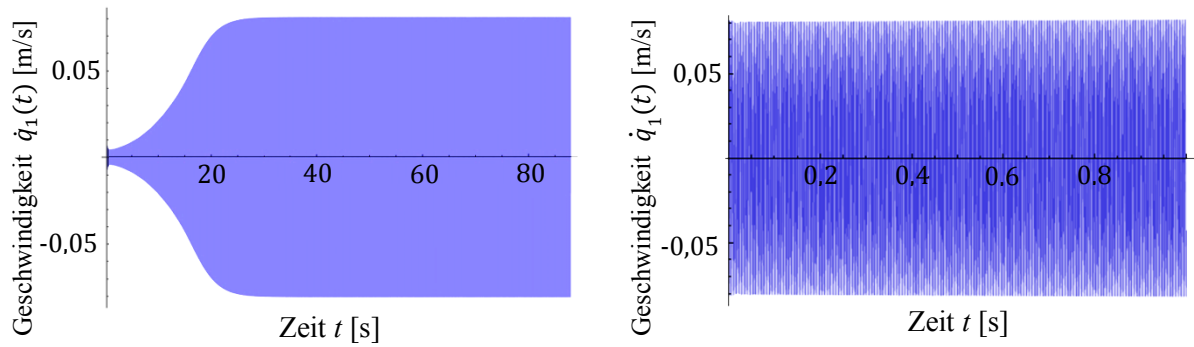


Abbildung 83: Zeitverlauf der Verschiebung des reduzierten Systems (links) und des Gesamtsystems (rechts)

Das linke Bild zeigt deutlich, dass eine Grenzzykellösung im Falle der Reduktion existiert. Im rechten Bild ist zu erkennen, dass diese Lösung auch der Lösung des Gesamtsystems entspricht, da sich die Amplitude nicht mehr ändert. Durch eine hier nicht dargestellten Betrachtung eines kurzen Zeitintervalls lässt sich in beiden Ergebnissen eine identische Periodendauer von $T = 3,8 \cdot 10^{-3}$ s identifizieren. Für einen besseren Vergleich der beiden Grenzzykeln, sind diese in Abbildung 84 im Phasenraum für beide Lösungsverfahren geplottet. Das Bild zeigt deutlich, dass das Ergebnis durch Anwendung der Reduktionsmethode sehr gut mit dem Ergebnis des Gesamtsystems übereinstimmt und somit davon ausgegangen werden kann, dass die Methode zu plausiblen Ergebnissen führt. Die in Abschnitt 6.1 beschriebenen Annahmen sind somit in diesem Fall zulässig.

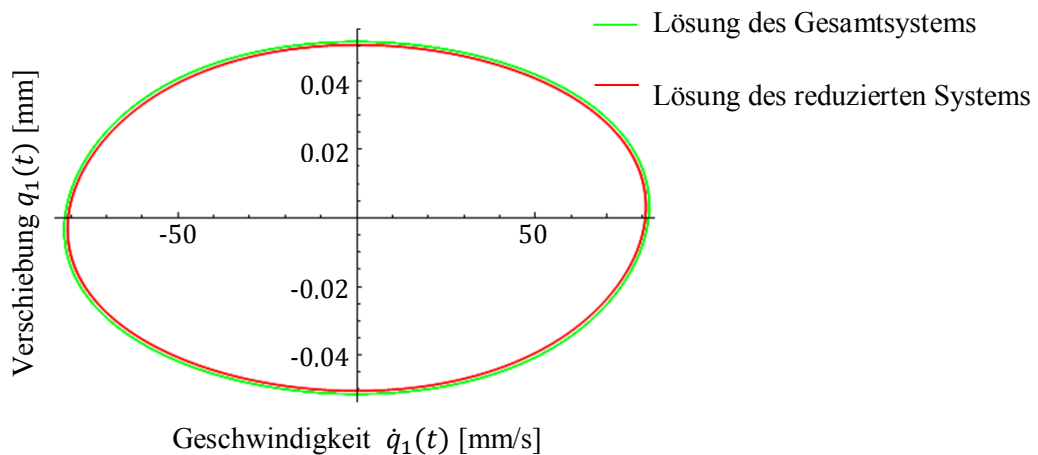


Abbildung 84: Vergleich der Grenzzykellösung im Phasenraum. Grün ist die Referenzlösung aus der Integration des Gesamtsystems und rot die Vergleichslösung des reduzierten Systems. Die Periodendauer ist in beiden Fällen $T = 3,8 \cdot 10^{-3}$ s.

6.3 Ergebnisse für ein industrielles Bremsenmodell

Nach erfolgreicher Validierung des Verfahrens anhand eines vereinfachten Modells wird in diesem Abschnitt überprüft, ob die Anwendung auch bei industriellen Bremsenmodellen mit deutlich mehr Freiheitsgraden erfolgreich ist. Verwendet wird das bereits in Abschnitt 2.1.1 eingeführte Modell einer Kfz-Scheibenbremse. Da die Größe des Unterraums abhängig von der Zahl der Eigenwerte mit positivem Realteil ist, wurde zunächst das Modell um physikalisch sinnvolle Materialstrukturdämpfung erweitert. Nach dieser Erweiterung und der Lösung der linearen Differentialgleichung in Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit Ω [rad/s] der Bremsscheibe ergab sich das in Abbildung 85 links gezeigte Verhalten der Eigenwerte mit positivem Realteil über Ω . Das Bild auf der rechten Seite zeigt die Eigenwerte mit positivem Realteil über der Frequenz bei einer Rotationsgeschwindigkeit von $\Omega = 3,14$ rad/s. Es ist zu erkennen, dass das lineare System bei dieser Rotationsgeschwindigkeit sechs Eigenwerte mit positivem Realteil hat. Auf Grundlage der zu diesen sechs Eigenwerten zugehörigen Eigenvektoren wird, wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, der Unterraum für die Systemreduktion erstellt. Dabei wird jedoch der Einfluss der Drehzahl auf den Unterraum vernachlässigt.

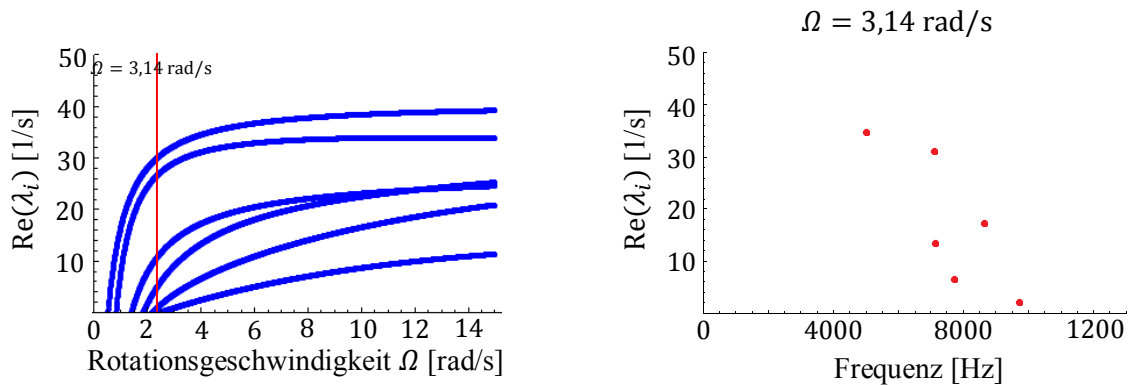


Abbildung 85: Darstellung der Eigenwerte mit positivem Realteil über der Rotationsgeschwindigkeit Ω (links) und für $\Omega=3,14$ rad/s über der Frequenz (rechts)

Im Zuge der Erprobung der Möglichkeit, das Grenzzykelverhalten auch für ein so hochdimensionales System zu bestimmen, wird das lineare Modell, welches instabile, triviale Lösungen besitzt, um eine Nichtlinearität erweitert, die zu einem Grenzzykelverhalten führen kann. Dabei wird in den Fügstellen zwischen Belag, Rückenplatte und Bremshalter (Abbildung 86) eine progressive Dämpfung verwendet, welche der des zuvor betrachteten vereinfachten Modells entspricht (vgl. Gleichung (6.43)). Die Deformation Δy_i des Elementes, welches die Fügstelle beschreibt, wird hierbei aus dem Betrag der Differenz der benachbarten Knotenverschiebungen gebildet. Wie in [94] gezeigt, kann für die Existenz eines Grenzzykels auch die degressive Steifigkeit relevant sein. Da hier jedoch die Überprüfung der Reduktionsmethode im Vordergrund steht ist die Art der Nichtlinearität möglichst einfach gewählt.

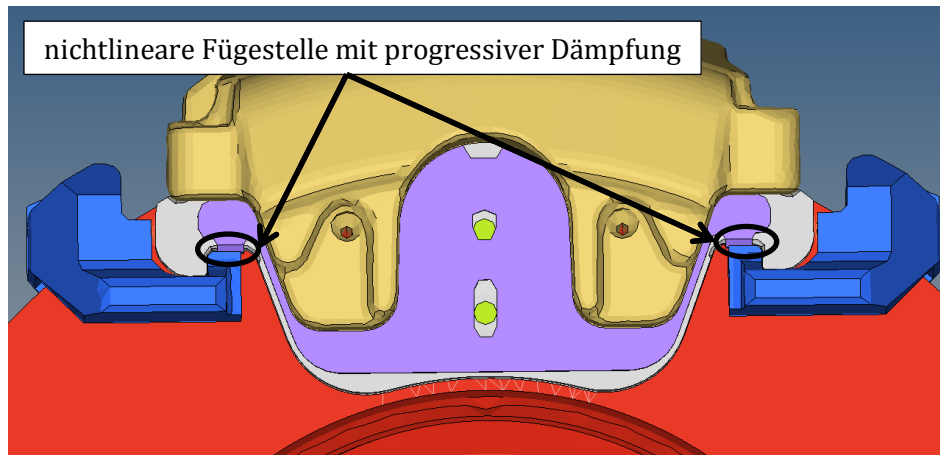


Abbildung 86: Darstellung der für die Einbindung einer progressiven Dämpfung verwendeten Fügestelle

In Kapitel 5.3 ist beschrieben, dass Fügstellendämpfung diese Charakteristik besitzen und dass dies zu einem Grenzzykel führen kann. Des Weiteren ist die nachträgliche Integration von Nichtlinearitäten in Fügstellen an diskreten Stellen des Modells deutlich einfacher als beispielsweise die Berücksichtigung nichtlinearer Materialkennwerte. Bezieht sich die Nichtlinearität auf eine konkrete Steifigkeit oder Dämpfung zwischen zwei Freiheitsgraden des Modells, so enthält der Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, welcher die nichtlinearen Terme zusammenfasst, lediglich zwei Einträge die abhängig von den $n = 2$ Freiheitsgraden y_i und y_k sind. Wird die Nichtlinearität beschrieben durch ein Polynom des Grades $p = 5$, ergibt sich die Anzahl der in jedem Eintrag enthaltenen Terme zu $(p + 1)^n = 36$. Damit ist der Vektor $\mathbf{f}(y_i, y_k)$ schwach besetzt und kann ohne weiteres auf den Unterraum projiziert werden. In dem hier untersuchten Fall ist die Dämpfung in den zwei betrachteten Fügstellen abhängig von Δy_1 und Δy_2 welche jeweils von zwei Knotenverschiebungen abhängen. Somit hat $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ zwölf Einträge welche jeweils aus $(3 + 1)^2 = 16$ Termen bestehen. Im Falle nichtlinearen Materialverhaltens wären deutlich mehr Freiheitsgrade betroffen. Das prinzipielle Vorgehen in diesem Fall ist in Abschnitt 6.1.5 beschrieben.

Nach Implementierung der nichtlinearen Erweiterung und Projektion des großdimensionalen Systems auf den Unterraum ist es möglich, mittels Zeitintegration den Grenzzykel bei einer Rotationsgeschwindigkeit von $\Omega = 3,14$ rad/s zu bestimmen. In Abbildung 87 ist links der zeitliche Verlauf des Freiheitsgrades $q_1(t)$ nach der Rücktransformation in physikalische Koordinaten gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Amplitude zunächst exponentiell steigt, dann jedoch gegen einen konstanten Wert konvergiert. Im Bild rechts ist der Zeitverlauf zum Ende der Integrationszeit dargestellt. Es ist erkennbar, dass die Schwingung bei einer Frequenz von ca. 5 kHz nahezu harmonisch ist.

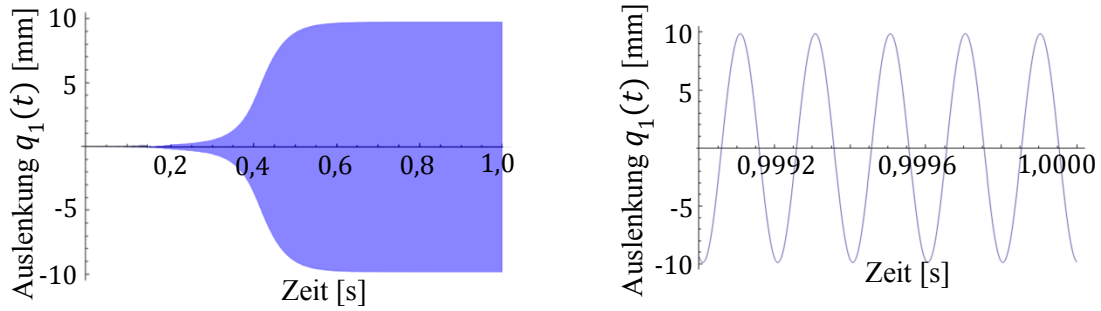


Abbildung 87: Plot des Zeitverlaufes des Freiheitsgrades $q_1(t)$ während der numerischen Integration (links) über die gesamte Integrationszeit, (rechts) im eingeschwungenen Zustand

Durch die starke Reduktion der Freiheitsgrade ist es zudem möglich, das Grenzykelverhalten bei unterschiedlichen Rotationsgeschwindigkeiten zu bestimmen und somit das Verzweigungsverhalten des Systems zu untersuchen. Dabei wird die numerische Integration des reduzierten Systems für verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten wiederholt. Das Ergebnis ist in Abbildung 88 dargestellt. Zu sehen ist die Amplitude des Grenzykels über der Rotationsgeschwindigkeit Ω . Es ist deutlich zu erkennen, dass es sich um ein superkritisches Verzweigungsverhalten handelt und die Stabilitätsgrenze der trivialen Lösung (Abbildung 85) mit dem Verzweigungspunkt überein stimmt.

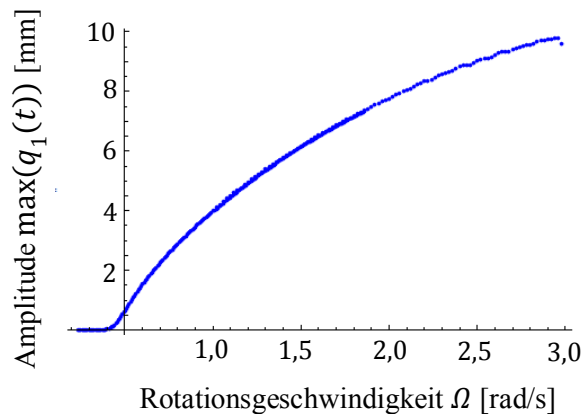


Abbildung 88: Darstellung des Verzweigungsverhaltens eines industriellen Bremsenmodells

6.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Verfahren zum Lösen hochdimensionaler, nichtlinearer Differentialgleichungen, wie sie bei der Simulation des Bremsenquietschens auftreten, vorgestellt und validiert. Das Verfahren basiert auf einer Unterraumprojektion, wodurch es möglich ist, die Dimension des nichtlinearen Differentialgleichungssystems stark zu reduzieren. Der für die Reduktion verwendete Unterraum basiert hierbei auf der Lösung des linearisierten Differentialgleichungssystems und beinhaltet die relevanten Schwingformen sowie deren Abhängigkeit gegenüber den Nichtlinearitäten und den Systemparametern. Durch die Verwendung der Singulärwertzerlegung war es zudem möglich, die Dimension des Unterraumes noch weiter zu verringern. Ein weiterer Vorteil der Singulärwertzerlegung ist, dass dadurch die Spalten der Unterraummatrix orthogonal zueinander sind, wodurch die Lösung des reduzierten Systems

numerisch stabiler ist. Zur Validierung des Verfahrens wurde zunächst ein vereinfachtes Modell betrachtet. Das Modell beinhaltet zwar die für das Bremsenquietschen relevanten Effekte, hat aber eine geringere Anzahl an Freiheitsgraden. Dadurch war es möglich, die Grenzzykellösung dieses Modells auch ohne eine vorherige Reduktion zu bestimmen. Im Anschluss wird das Modell unter Verwendung der in diesem Kapitel vorgestellten Reduktionsmethode gelöst und der dabei berechnete Grenzzykel mit dem des Ursprungsmodells verglichen. Die Ergebnisse beider Lösungen stimmen gut überein, was zeigt, dass die neue Methode in der Lage ist, die tatsächliche Lösung zu bestimmen.

Nach erfolgreicher Validierung der Methode erfolgte eine Erprobung dieser an einem hochdimensionalen industriellen Bremsenmodell. Das dabei verwendete FE-Modell einer Kfz-Scheibenbremse beinhaltet 800.000 Freiheitsgrade und eine nichtlineare Fügestelle mit progressivem Dämpfungsverhalten. Das Ergebnis dieser Untersuchung zeigte, dass es mithilfe der Reduktionsmethode möglich ist, das Grenzzykelverhalten eines solchen Modells zu bestimmen. Die dabei benötigte geringe Rechenzeit ermöglicht es zudem, auch das Verzweigungsverhalten dieses Modells zu bestimmen (Abbildung 88). In Bezug auf die Simulation des Bremsenquietschens ergeben sich dadurch viele neue Möglichkeiten. Es ist nun möglich, nicht mehr nur die Stabilität der trivialen Lösung zu betrachten, sondern das tatsächliche Quietschen (die Grenzzykellösung) in einer Simulation zu bestimmen. Durch Anwendung des in der studentischen Arbeit [44] dargestellten HELS-Verfahrens [98] ist es möglich, die in der Grenzzykellösung enthaltenen Informationen so zu interpretieren, dass damit die Schallabstrahlung bestimmt werden kann.

7 Zusammenfassung, Fazit und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war es, die Simulation des Bremsenquietschens zu verbessern. Dies erfolgte durch eine detaillierte Untersuchung der Ursachen für die aktuell nicht befriedigende Aussagefähigkeit der Simulation und der Erarbeitung von Verbesserungsmöglichkeiten. Eine Verbesserung bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die in Versuchen gemessenen Effekte auch tatsächlich in der Simulation abgebildet werden.

Zunächst wurde die in der Industrie weit verbreitete Simulationsmethode, die Komplexe Eigenwertanalyse (KEA), theoretisch untersucht. Dies erfolgte unter Verwendung eines FE-Bremsenmodells, welches dem industriellen Standard entspricht und auch bereits bei einem Automobilhersteller für die Optimierung des Quietschverhaltens verwendet wurde. Die zunächst rein theoretische Betrachtung zeigte, dass die grundlegenden relevanten Effekte (zirkulatorische Kräfte, reibungsinduzierte Dämpfung und gyroskopische Terme) korrekt in der KEA berücksichtigt sind. In Bezug auf die Einbindung der Materialstrukturdämpfung in das Modell zeigte sich, dass hierbei das üblicherweise verwendete Verfahren zu Fehlern führen kann. Es wurde jedoch beschrieben, welche Änderungen in der Simulationsmethode notwendig sind um diese Fehler zu vermeiden. Bei der Untersuchung des in der KEA verwendeten Verfahrens zur Lösung des unsymmetrischen Eigenwertproblems stellte sich heraus, dass der dabei verwendete Unterraum zu Ergebnissen mit unzureichender Genauigkeit führt. Auch in Bezug auf diese Problematik wurde eine Möglichkeit gezeigt, wie die Simulation durch Verwendung eines anderen Unterraums verbessert werden kann.

In diversen experimentellen Untersuchungen zum dynamischen Verhalten des Bremssystems wurde gezeigt, dass das hier betrachtete FE-Modell die grundlegenden dynamischen Eigenschaften der realen Bremse nicht ausreichend genau abbildet. Trotz dieser Abweichungen zeigte sich in Bezug auf das Quietschverhalten der Bremse eine recht gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Diese gute Übereinstimmung im Endergebnis sollte jedoch insofern hinterfragt werden, da das Modell z. B. die Resonanzfrequenzen der einzelnen Komponenten nicht korrekt abbildete.

Durch weitere experimentelle Untersuchungen wurde gezeigt, dass es neben den bereits in der KEA berücksichtigten Effekten weitere gibt, welche für das Quietschverhalten von Bremsen relevant sind. Speziell Dämpfungseffekte sind allgemein in der Modellbildung nicht ausreichend berücksichtigt. Des Weiteren wurde dargestellt, dass der Einfluss des Bremsdruckes auf das Übertragungsverhalten in der aktuelle Modellbildung nicht enthalten ist. Die experimentellen Untersuchungen zeigten jedoch, dass der Bremsdruck entscheidend sein kann, ob eine Bremse quietscht oder nicht. Aus diesem Grund wurde ein Verfahren beschrieben, welches es ermöglicht, diesen Einfluss auch in der Simulation zu berücksichtigen.

Untersuchungen der Bremse auf einem Bremsenprüfstand zeigten, dass Quietschen meist ein nahezu monofrequentes Phänomen ist, dessen Amplitude, bedingt durch die im Bremssystem

enthaltenen Nichtlinearitäten, einen Grenzykel erreicht. Dieses Verhalten kann in der linearen Stabilitätsanalyse (KEA) nicht abgebildet werden, da diese nur die Stabilität der trivialen Lösung der linearisierten Störungsgleichung betrachtet. Auffällig war in diesem Zusammenhang, dass die Nichtlinearitäten, welche für die Existenz einer Grenzykellösung notwendig sind, scheinbar nur einen geringen Einfluss auf die Schwingform während des Quietschens haben. Dadurch war es möglich, diese auch bei nicht konstanter Amplitude experimentell zu bestimmen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wurde dargestellt, wie relevant die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten für die Simulation des Bremsenquietschens ist. Mithilfe von experimentellen Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass Bremsenquietschen ein superkritisches Verzweungsverhalten haben kann. In einer weiterführenden theoretischen Betrachtung wurde unter Verwendung eines Minimalmodells gezeigt, dass dieses Verhalten in der Simulation nur unter Hinzunahme von Nichtlinearitäten abgebildet werden kann. Besonders entscheidend ist hierbei, dass sowohl experimentell als auch theoretisch nachgewiesen wurde, dass die Stabilität der trivialen Lösung keine zuverlässige Aussage darüber beinhaltet, ob eine Bremse tatsächlich quietscht oder nicht. Somit wurde gezeigt, dass die KEA nicht geeignet ist, das tatsächliche Quietschen bzw. dessen Auftreten zu simulieren.

Nachdem die Notwendigkeit der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in der Simulation des Bremsenquietschens diskutiert wurde, könnte erarbeitet werden, welche Schritte notwendig sind, um diese in die Simulation zu integrieren. Zunächst wurde gezeigt, welche Nichtlinearitäten in Bezug auf das Bremsenquietschen relevant sind. In dieser Arbeit wurde diesbezüglich der Einfluss des nichtlinearen Reibmaterials der Bremsbeläge sowie der Fügestellen detaillierte untersucht. Dies erfolgte durch die Einbindung dieser Nichtlinearitäten in analytische Minimalmodelle. Das Ergebnis dieser Untersuchung verdeutlichte, dass die alleinige Berücksichtigung der Nichtlinearitäten im Reibmaterial zwar einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Quietschverhalten hat, jedoch nicht alle in den Experimenten beobachteten Effekte abbilden kann. Die Fügestellen haben ebenfalls einen großen Einfluss auf die Grenzykelamplitude, führen jedoch nicht zwingend zu einem subkritischen Verzweungsverhalten. Durch die Kombination beider Effekte könnte dies jedoch möglich sein. Ein Weiterer notwendiger Schritt für die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte in der Simulation war die messtechnische Bestimmung nichtlinearer Systemparameter. In dieser Arbeit wurde dazu ein Messverfahren dargestellt, welches es ermöglicht, das nichtlineare Materialverhalten der Bremsbeläge zu bestimmen.

Letztlich bestand jedoch die größte Herausforderung bei einer nichtlinearen Simulation darin, dass hochdimensionales, nichtlineares Differentialgleichungssystem zu lösen. Nach heutigem Stand der Technik ist dies zu rechenintensiv, wodurch die Berücksichtigung dieser Effekte im industriellen Alltag nicht umsetzbar ist. In dieser Arbeit wurde daher ein Verfahren beschrieben, mit welchem es möglich ist, ein solches Problem mit deutlich geringerem Rechenaufwand zu lösen. Dieses Verfahren ermöglicht, das tatsächliche Bremsenquietschen anhand des Verzweungsverhaltens und der Grenzykelschwingung von nichtlinearen FE-Bremsenmodellen mit mehreren Millionen Freiheitsgraden zu untersuchen. Es basiert auf der Projektion des hochdimensionalen Systems auf einen niedrigdimensionalen Unterraum. Der für die Reduktion verwendete Unterraum beinhaltet die relevanten Schwingformen sowie deren Abhängigkeit gegenüber Nichtlinearitäten und Systemparametern. Das Verfahren wurde durch Vergleichs-

rechnungen mit einem vereinfachten FE-Modell validiert. Die Anwendung dieser Reduktionsmethode auf ein FE-Bremsenmodell mit 800.000 Freiheitsgraden und einer nichtlinearen Fügestelle mit progressivem Dämpfungsverhalten zeigte, dass es nun möglich ist, das Grenzzykelverhalten eines solchen Modells zu bestimmen.

7.2 Fazit

Das zentrale Ergebnis dieser Arbeit ist, dass eine rein lineare Betrachtung des Phänomens Bremsenquietschen nicht ausreichend ist um die Simulation tatsächlich Prädiktiven anwenden zu können. Aus diesem Grund wurde eine Methode beschrieben, welche auf der Komplexen Eigenwertanalyse basiert aber zudem auch Nichtlinearitäten in der Simulation berücksichtigen kann. Mit dieser Methode und den ebenfalls in dieser Arbeit beschriebenen Möglichkeiten einige der relevanten Nichtlinearitäten zu identifizieren, ist es nun möglich das tatsächliche Bremsenquietschen, also die Grenzzykelamplitude, sowie das Verzweigungsverhalten einer Bremse besser zu simulieren.

Die zu Beginn durchgeführte detaillierte Untersuchung der Komplexen Eigenwertanalyse ergab, dass zwar die grundlegenden Effekte wie zirkulatorische Terme, Gyroskopie oder die reibungsinduzierte Dämpfung korrekt abgebildet werden, es aber Ungenauigkeiten bezüglich des Eigenwertlösers und der Berücksichtigung von Materialstrukturdämpfung gibt. Zudem konnte nachgewiesen werden, dass der Bremsdruck einen relevanten Einfluss auf das Systemverhalten hat, welcher jedoch in dem hier betrachteten Modell nicht enthalten war. Für die identifizierten Probleme wurden Lösungen erarbeitet, welche es ermöglichen können, bereits in der linearen Betrachtung bessere Ergebnisse zu erhalten.

7.3 Ausblick

Die Erweiterung der in der Industrie am häufigsten verwendeten Simulationsmethode (KEA) um nichtlineare Effekte beinhaltet ein grundlegendes Überdenken der bisherigen Strategie zur Entwicklung geräuscharmer Bremsen. Auch wenn hier detailliert dargelegt wurde, wie diese Methode aufgebaut ist und dass sie für die untersuchten Modelle zu plausiblen Ergebnissen führt, sind für eine industrielle Anwendung dieser Methode weitere Arbeitsschritte erforderlich:

- Für eine effiziente Anwendung des Verfahrens im industriellen Umfeld ist es notwendig, dieses zunächst in ein kommerzielles FE-Programm zu integrieren. Dadurch bestünde dann auch die Möglichkeit, die nichtlinearen Systemeigenschaften bereits dort zu hinterlegen. Des Weiteren könnten so neben Nichtlinearitäten in diskreten Stellen auch ein nichtlineares Materialverhalten berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 6.1.5).
- Bevor die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in der Simulation jedoch tatsächlich zu einer Verbesserung der Ergebnisse führt, ist es zudem nötig, umfangreiche Kenntnisse über die in einem Bremssystem enthaltenen Nichtlinearitäten zu erlangen. Auch wenn in dieser Arbeit und in [32] bereits gezeigt wurde, wie dies prinzipiell erfolgen kann, so sind auf diesem Gebiet noch einige Problemstellungen ungelöst. Speziell die Bestimmung von Dämpfungskenngrößen erweist sich in der Praxis oft als schwierig, wodurch diese selbst in der linearen Simulation mitunter noch nicht ausreichend bekannt sind. Des Weiteren sei auf die in Abschnitt 5.2 ermittelten Widersprüche bezüglich des nichtlinea-

ren Verhaltens der Bremsbeläge verwiesen. Durch die Verwendung eines erweiterten Ansatzes für das Anfitzen der Messdaten z.B. durch Verwendung von Beträgen der nicht geraden Potenzen könnten die gemessenen Verläufe bezüglich der Steifigkeit deutlich besser berücksichtigt werden.

- Die Umsetzung dieser Punkte resultiert in einer deutlich verbesserten Simulationsgüte, wodurch es möglich wird, bereits früh im Entwicklungsprozess eine Bremse hinsichtlich ihres Geräuschverhaltens zu optimieren. Dadurch kann vermieden werden, dass eventuelle, für das Quietschverhalten notwendige Änderungen, erst auf dem Prüfstand detektiert werden können.
- Die Verbesserung umfasst jedoch nicht nur die rechtzeitige Erarbeitung von Abhilfemaßnahmen. Durch die Berücksichtigung der nichtlinearen Effekte in der Simulation können diese Effekte auch gezielt zur Verbesserung der Geräuscheigenschaften genutzt werden. Während bei der Betrachtung der Stabilität der trivialen Lösung lediglich die Möglichkeit besteht, diese zu stabilisieren, existieren in einem nichtlinearen System weitere Möglichkeiten. So könnte z. B. durch gezielte Beeinflussung der Nichtlinearitäten es ermöglicht werden, dass das System zwar eine instabile triviale Lösung besitzt, die sich daraufhin einstellende Grenzzykelschwingung jedoch in einem nicht hörbaren Frequenzbereich liegt. Gerade im Falle von mehrfachen instabilen Lösungen ist durch die Nichtlinearitäten bedingt in welcher Frequenz das System tatsächlich schwingt.
- Auch das in [70] beschriebene Phänomen „Quenching“, welches nur unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten existiert, könnte so in der Simulation erprobt werden. Mit „Quenching“ ist in diesem Zusammenhang das Auslöschen einer unerwünschten Schwingung durch eine Fremderregung gemeint. In der studentischen Arbeit [41] ist dargestellt, wie dies prinzipiell in Bezug auf die Unterdrückung von Bremsenquietschen erfolgen kann. Die dazu benötigte Erregung des Systems kann entweder durch einen Aktor erfolgen oder aber durch eine gezielt provozierte zusätzliche Selbsterregung.

Auch wenn noch einige Arbeitsschritte notwendig sind, bis die Simulation des Bremsenquietschens tatsächlich die relevanten, nichtlinearen Effekte berücksichtigt, so wird in dieser Arbeit ein Weg dahin aufgezeigt. Besonders in Hinblick auf die vielfältigen und neuen Möglichkeiten, welche sich aus einer solchen Verbesserung der Simulation ergeben, wird deutlich, wieviel Potential die Simulation des Bremsenquietschens hinsichtlich der Entwicklung geräuscharmer Bremsen noch hat.

8 Literaturverzeichnis

- [1] K. Bill und B. Breuer, „Brake Technology Handbook“, *SAE International*, 2008.
- [2] J. Glisovic, „Research of the Justification for the High Warranty Costs due to Disc Brake Noise“, *7th International Quality Conference, Center for Quality, Faculty of engineering, University of Kragujevac*, 2013.
- [3] N. M. Kinkaid, „Automotive Disc Brake Squeal“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 267, pp. 105-166, 2002.
- [4] D. Hochlenert, „Nonlinear Stability Analysis of a Disk Brake Model“, *Nonlinear Dynamics*, Bd. 58, pp. 63-73, 2009.
- [5] G. Sheng, „Friction-Induced Vibrations and Sound: Principles and Applications“, *CRC Press, Boca Raton*, 2008.
- [6] N. Kinkaid, O. O'Reilly und P. Papadopoulos, „Automotive Disc Brake Squeal“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 267, pp. 105-166, 2003.
- [7] N. Hoffmann, M. Fischer, R. Allgaier und L. Gaul, „A Minimal Model for Studying Properties of the Mode-Coupling Type Instability in Friction Induced Oscillations“, *Mechanics Research Communications*, Bd. 29, pp. 197-205, 2002.
- [8] U. von Wagner, D. Hochlenert und P. Hagedorn, „Minimal Models for Disk Brake Squeal“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 302, pp. 527-539, 2007.
- [9] D. Hochlenert, G. Spelsberg-Korspeter und P. Hagedorn, „Friction Induced Vibrations in Moving Continua and Their Application to Brake Squeal“, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Bd. 74, pp. 542-549, 2007.
- [10] H. Chowdhary, A. Bajaj und C. Krousgrill, „An Analytical Approach to Model Disc Brake Systems for Squeal Prediction.“, *Proceedings of the ASME Desing Engineering Technical Conference*, 2001.
- [11] D. Hochlenert, „Selbsterregte Schwingungen in Scheibenbremsen: Mathematische Modellbildung und aktive Unterdrückung von Bremsenquietschen“, Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2006.
- [12] S. Schlagner, „Schnelle Charakterisierung des Geräuschverhaltens von Kfz-Scheibenbremsen“, Dissertation, Technische Universität Berlin, 2009.

- [13] H. Hetzler, D. Schwarzer und W. Seemann, „Analytical Investigation of Steady-State Stability and Hopf-Bifurcations Occurring in Sliding Friction Oscillators with Application to Low-Frequency Disc Brake Noise“, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Bd. 12.1, pp. 83-99, 2007.
- [14] H. Ouyang, W. W. Nack und F. Chen, „On Automotive Disc Brake Squeal Part II: Simulation and Analysis“, *SAE Technical Paper Series (2003-01-0648)*, 2003.
- [15] H. Hetzler, „Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens“, Dissertation, Universität Karlsruhe, 2008.
- [16] T. Jearsiripongkul, „Squeal in floating caliper disk brakes: a mathematical model“, Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2005.
- [17] P. Müller, „Stabilität und Matrizen“, Springer Verlag, 1977.
- [18] G. Spelsberg-Korspeter, O. Kirillov und P. Hagedorn, „Modeling and Stability Analysis of an Axially Moving Beam With Frictional Contact“, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Bd. 75, pp. 1-10, 2008.
- [19] D. Hochlenert, U. von Wagner und S. Hornig, „Bifurcation Behavior and Attractors in Vehicle Dynamics“, *Machine Dynamic Problems*, Bd. 33, pp. 57-73, 2009.
- [20] H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan und F. Chen, „Numerical analysis of automotive disc brake squeal: a review“, *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, pp. 207-231, 2005.
- [21] A. Antoulas und S. Gugercin, „A comparative study of 7 algorithms for model reduction“, *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Nr. 3, pp. 2367-2372, 2000.
- [22] A. Antoulas, D. Sorensen und S. Gugercin, „A survey of model reduction methods for large-scale systems“, *Contemporary mathematics*, Nr. 280, pp. 193-220, 2001.
- [23] U. Baur, P. Benner, B. Haasdonk, C. Himpe, I. Martini und M. Ohlberger, „Comparison of methods for parametric model order reduction of instationary problems“, *Preprint*, 2015.
- [24] Intes, PERMAS User's Reference Manual, Stuttgart: INTES Publication No. 450, 2012.
- [25] G. Kerschen, J. C. Golinval, A. F. Vakakis und L. A. Bergman, „The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems: An Overview“, *Nonlinear Dynamics*, Bd. 42, Nr. 1-3, pp. 147-169, 2005.
- [26] M. Rewienski und J. White, „Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations“, *Linear Algebra and its Applications*, Bd. 415, Nr. 2, pp. 426-454, 2006.

- [27] T. Bui-Thanh, K. Willcox und O. Ghattas, „Parametric Reduced-Order Models for Probabilistic Analysis of Unsteady Aerodynamic Applications“, *AIAA Journal*, Bd. 46, Nr. 10, pp. 2520–2529, 2008.
- [28] K. Carlberg, J. Cortial, D. Amsallem, M. Zahr und C. Farhat, „The GNAT Nonlinear Model Reduction Method and its Application to Fluid Dynamics Problems“, *AIAA Paper 2011-3112*, 6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference, Honolulu, USA, 2011.
- [29] T. Lieu, C. Farhat und M. Lesoinne, „Reduced-Order Fluid/Structure Modeling of a Complete Aircraft Configuration“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 195, pp. 5730–5742, 2006.
- [30] D. Maier, C. Hager, H. Hetzler, N. Fillot, P. Vergne, D. Dureisseix und W. Seemann, „A Nonlinear Model Order Reduction Approach to the Elastohydrodynamic Problem“, *Tribology International*, Bd. 82, pp. 484–492, 2015.
- [31] H. Festjens, G. Chevallier und J. Dion, „Nonlinear Model Order Reduction of Jointed Structures for Dynamic Analysis“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 333, Nr. 7, pp. 2100–2113, 2014.
- [32] M. Tiedeman, The Dynamics of Assembled Structures Excited by Friction, Dissertation Technische Universität Hamburg-Harburg, 2015.
- [33] H. Hetzler, „Bifurcations in Autonomous Mechanical Systems under the Influence of Joint Damping“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 333, Nr. 23, pp. 5953–5969, 2014.
- [34] N. Gräbner, S. M. Quraishi, C. Schröder, V. Mehrmann und U. von Wagner, „New Numerical Methods for the Complex Eigenvalue Analysis of Disk Brake Squeal“, *Proceedings of Eurobrake Conference*, 2014.
- [35] N. Gräbner, M. Tiedemann, U. von Wagner und N. Hoffmann, „Nonlinearities in Friction Brake NVH-Experimental and Numerical Studies“, *SAE Technical Paper No. 2014-01-2511*, 2014.
- [36] M. Tiedemann, S. Kruse und N. Hoffmann, „Dominant Damping Effects in Friction Brake Noise, Vibration and Harshness: the Relevance of Joints“, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D: Journal of Automobile Engineering*, Bd. 229, Nr. 6, pp. 728-734, 2014.
- [37] M. Tiedemann, S. Kruse und N. Hoffmann, „Dominant Damping Effects: the Relevance of Joints“, *Proceedings of Eurobrake Conference*, 2013.
- [38] U. von Wagner, S. Hornig, N. Gräbner und H. Gödecker, „Schnelle Wege zur Entwicklung leiser Bremsen – aktuelle Forschung und Perspektiven“, *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12*:

Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, pp. 115-147, 2013.

- [39] M. Tiedemann, M. Stender und N. Hoffmann, „Impact of Joints on Dynamic Behaviour of Brake Systems“, *Proceedings of Eurobrake Conference*, 2014.
- [40] N. Gräbner, V. Mehrmann, S. Quraishi, C. Schröder und U. von Wagner, „Numerical Methods for Parametric Model Reduction in the Simulation of Disk Brake Squeal“, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016.
- [41] C. Fabry, Beeinflussung selbsterregter Schwingungen durch Fremderregung, Masterarbeit, Technische Universität Berlin, FG Mechatronische Maschinendynamik, 2013.
- [42] L. Pan, „Untersuchung der für die Simulation des Bremsenquietschens relevanten Effekte in der FE-Software ABAQUS“, Bachelorarbeit, Technische Universität Berlin, FG Mechatronische Maschinendynamik, 2013.
- [43] F. Ebrahim, „Numerische und Experimentelle Untersuchung zur Realisierung eines neuen Konzeptes des DCSTR-Prüfstandes“, Bachelorarbeit, Technische Universität Berlin, FG Mechatronische Maschinendynamik, 2014.
- [44] M. Behn, „Untersuchung des HELS-Verfahrens zur vibro-akustischen Analyse an einer Kfz Scheibenbremse“, Masterarbeit, Technische Universität Berlin, FG Mechatronische Maschinendynamik und Technische Akustik, 2015.
- [45] J. Gieseler, „Implementierung und Validierung einer Methode zum Lösen hochdimensionaler nichtlinearer Differentialgleichungssysteme“, Bachelorarbeit, Technische Universität Berlin, FG Mechatronische Maschinendynamik, 2015.
- [46] H. Blumentritt, „Durchführung von Messungen an einem Prüfstand zur Identifikation von Bremsbelageigenschaften und Verbesserung der Auswertemethode“, Bachelorarbeit, Technische Universität Berlin, FG Mechatronische Maschinendynamik, 2015.
- [47] H. Ouyang, W. Nack, W. und F. Chen, „On Automotive Disc Brake Squeal Part II: Simulation and Analysis“, *SAE Technical Paper Series 2003-01-0648*, 2003.
- [48] P. Hagedorn und D. Hochlenert, Technische Schwingungslehre, Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel, 2015.
- [49] P. Schwerdtner, „Numerische Simulation nicht-autonomer, dynamischer Systeme zur Untersuchung von Bremsenquietschen“, Bachelorarbeit, Technische Universität Berlin, FG Mechatronische Maschinendynamik, 2015.
- [50] G. Spelsberg-Korspeter, „Braking of Symmetries for Stabilisation of Rotating Continua in Frictional Contact“, *Journal of Sound and Vibrations*, Bd. 322.4, pp. 798-807, 2009.

- [51] Abaqus, Documentation 6.14.
- [52] G. Fritz, J. J. Sinou, J. M. Duffal und L. Jézéquel, „Investigation of the Relationship Between Damping and Mode-Coupling Patterns in Case of Brake Squeal“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 307.3, pp. 591-609, 2007.
- [53] K. Washizu, „Variational Methods in Elasticity and Plasticity“, Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [54] K. Knothe und H. Wessels, „Finite Elemente“, Springer-Lehrbuch, Berlin pp. 350, 1991.
- [55] G. Spelsberg-Korspeter, „Robust Structural Design Against Self-Excited Vibrations“, Springer, 2013.
- [56] P. Hagedorn und D. Hochlenert, „Technische Schwingungslehre: Schwingungen linearer diskreter mechanischer Systeme“, Harri Deutsch, 2012.
- [57] R. Kannan, S. Hendry, N. J. Higham und F. Tisseur, „Detecting the Causes of Ill-Conditioning in Structural Finite Element Models“, *Computers & Structures*, Bd. 133, pp. 79–89, 2014.
- [58] D. A. Belsley, E. Kuh und R. E. Welsch, „The Condition Number“, in *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*, New York, John Wiley & Sons, pp. 10–100, 1980.
- [59] S. Quraishi, C. Schröder und V. Mehrmann, „Solution of Large Scale Parametric Eigenvalue Problems Arising from Brake Squeal Modeling“, *PAMM, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Bd. 14, pp. 891–892, 2014.
- [60] D. Wallner, „Experimental and Numerical Investigation on Brake Squeal“, Dissertation Technischen Universität Graz, 2013.
- [61] H. Marschner, „Mit Sicherheit leise - Neue Wege zur geräuscharmen Bremse“, *XXX. Internationales μ -Symposium*, pp. 52-66, 2011.
- [62] M. Friswell und J. E. Mottershead, „Finite Element Model Updating in Structural Dynamics“, *Springer Science & Business Media*, Bd. 38, 1995.
- [63] S. Hornig, N. Gräbner und U. von Wagner, „Influence of Dynamic Brake Pad Properties on Automotive Disk Brake Squeal“, *PAMM*, pp. 345-346, 2011.
- [64] S. Hornig und U. von Wagner, „Experimental Identification of Brake Lining Material Properties Subjected to Combined Static and High Frequency Loading-A Step Towards a Better Prediction of Disc Brake Squeal“, *SAE Technical Paper No. 2011-01-2353*, 2011.

- [65] S. A. Hornig, "Development of Measurement and Identification Methods for Automotive Brake Lining Material Properties in NVH Relevant Loading Parameter Range", Dissertation, Technische Universität Berlin, 22.04.2015.
- [66] Polytec, „www.polytec.com“, (Online). Verfügbar: http://www.polytec.com/fileadmin/user_uploads/Products/Vibrometers/PSV-500/documents/OM_DS_PSV-5003D_2012_12_PDF_D.pdf. [Zugriff am März 2015].
- [67] H. Hetzler und K. Willner, „On the Influence of Contact Tribology on Brake Squeal“, *Tribology International*, Bd. 46, Nr. 1, pp. 237–246, 2012.
- [68] G. Spelsberg-Korspeter, „Eigenvalue Optimization Against Brake Squeal: Symmetry, Mathematical Background and Experiments“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 331, Nr. 19, pp. 4259–4268, 2012.
- [69] P. Hagedorn, „Nichtlineare Schwingungen“, *Koch Buchverlag*, 1982.
- [70] A. H. Nayfeh und D. T. Mook, "Nonlinear Oscillations", *John Wiley & Sons*, 2008.
- [71] N. Gräbner, „www.Youtube.com“, (Online). Verfügbar: <https://www.youtube.com/watch?v=zclp8vLKJzU&feature=youtu.be>. [Zugriff am 31.03.2015].
- [72] H. Gödecker, „Ein Verfahren zur schnellen experimentellen Charakterisierung der Quietschneigung von Kfz-Scheibenbremsen“, Dissertation TU Berlin, 2015.
- [73] S. A. Hornig, D. Hochlenert, H. Gödecker, N. Gräbner und U. von Wagner, „Steps towards Predictive Simulation and Faster Experimental Investigation of Automotive Brake Systems with Respect to Squeal“, *SAE Technical Paper No. 2013-01-1908*, 2013.
- [74] B. Feeny, A. Guran, N. Hinrichs und K. Popp, „A historical Review on Dry Friction and Stick-Slip Phenomena“, *Applied Mechanics Reviews*, Bd. 51, Nr. 5, pp. 321-341, 1998.
- [75] S. A. Hornig und U. Von Wagner, „Improvement of Brake Squeal Simulation Reliability by Measurement and Identification of Friction Material Properties“, *SAE Technical Paper No. 2012-01-1806*, 2012.
- [76] J.-H. He, „Preliminary Report on the Energy Balance for Nonlinear Oscillations“, *Mechanics Research Communications*, Bd. 29, Nr. 2, pp. 107-111, 2002.
- [77] „Plastics - Determination of Tensile Properties - Part 2: Test Conditions for Moulding and Extrusion Plastics“, *ISO 527-2*, 2012.
- [78] „Plastics - Testing with the Torsion Pendulum“, *ISO 537*, 1989.

- [79] U. von Wagner und L. Lentz, „On Some Aspects of the Dynamic Behavior of the Softening Duffing Oscillator under Harmonic Excitation“, *Archive of Applied Mechanics*, 2016.
- [80] H. Yabuno, Y. Kurata und N. Aoshima, „Effect of Coulomb Damping on Buckling of a Two-Rod System“, *Nonlinear Dynamics*, Bd. 15, Nr. 3, p. 207–224, 1998.
- [81] Y. Hiroshi, Y. Kunito und T. Kashimura, „Analysis of the van der Pol System with Coulomb Friction Using the Method of Multiple Scales“, *Journal of Vibration and Acoustics*, Bd. 130, Nr. 4, 2008.
- [82] H. Hetzler, „On the Effect of Non-Smooth Coulomb Damping on Flutter-Type Self-Excitation in a Non-Gyroscopic Circulatory 2-Dof-System“, *Nonlinear Dynamics*, 2013.
- [83] H. Hetzler, „Friction Induced Vibrations Under the Influence of Joint-Damping“, *Proceedings of Eurobrake*, 2013.
- [84] M. Oldfield, H. J. Ouyang, J. E. Mottershead und A. Kyprianou, „Modelling and Simulation of Bolted Joints Under Harmonic Excitation“, *Materials Science Forum*, Bd. 440, pp. 421-428, 2003.
- [85] K. Magnus, „Schwingungen“, Teubner-Verlag, 2008.
- [86] N. Gräbner, H. Gödecker und U. von Wagner, „On the Influence of Damping on Brake Vibrations“, in *International Conference on Engineering Vibration*, Ljubljana, 2015.
- [87] G. Vermot des Roches, E. Balmes, R. Lemaire und T. Pasquet, „From Transient Simulations to Extended Complex Mode Analysis. Squeal Simulation of an Industrial Automotive Brake“, in *Eurobrake*, Dresden, 2012.
- [88] Z. Bai, „Krylov Subspace Techniques for Reduced-Order Modeling of Large-Scale Dynamical Systems“, *Applied Numerical Mathematics*, Bd. 43, Nr. 1, pp. 9-44, 2002.
- [89] G. Kerschen, J. C. Golinval, A. F. Vakakis und L. A. Bergman, „The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems: An Overview“, *Nonlinear Dynamics*, Bd. 4, pp. 147-169, 2005.
- [90] I. N. Bronstein, J. Hromkovic, B. Luderer, H. R. Schwarz, J. Blath, A. Schied und S. Gottwald, „Taschenbuch der Mathematik“, Springer-Verlag, 2012.
- [91] A. Chatterjee, „An Introduction to the Proper Orthogonal Decomposition“, *Current Science*, pp. 808 ff, 2000.
- [92] S. Volkwein, „Model Reduction Using Proper Orthogonal Decomposition“, Lecture Notes, Institute of Mathematics and Scientific Computing, University of Graz, 2011.

- [93] C. Runge, „Math. Annalen: Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen“, *Mathematische Annalen*, Bd. 46, pp. 167-178, 1895.
- [94] S. T. M. Kruse, B. Zeumer, P. Reuss, H. Hetzler und N. Hoffmann, „The Influence of Joints on Friction Induced Vibration in Brake Squeal“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 340, pp. 239-252, 2015.
- [95] B. Breuer und H. B. Karlheinz, „Bremsenhandbuch“, ATZ/MTZ-Fachbuch, 2012.
- [96] B. Noble, „Applied Linear Algebra“, Prentice-Hall, Nr 3, 1969.
- [97] Y. Saad, „Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems“, University Press, Manchester, Bd. 158, pp. 197 ff, 1992.
- [98] S. F. Wu, „The Helmholtz Equation Least Squares Method - For Reconstructing and Predicting Acoustic Radiation“, *Modern Acoustics and Signal Processing*, Springer, New York, 2015.