Suite IV - Die Zerrissene

Teil 1: Essays 249 - 259

Meinem Vater

Errata Suite I.
KLT. Elemente der Klassischen Lagrange Theorie.
E**-Schnitt von** x. $(E \ \mathsf{sv} \ x)$.
Einschränkung von x **auf** E **...** $(x \restriction E)$.
x_{fkt}.
$E\cup$**Verschiebung von** x. $x(E \cup .)$.
$E\cap$**Verschiebung von** x. $x(E \cap .)$.
x_{c1}. x_{c2}.
$(E|a)$**-partielle Relation von** x. $x\,(E|a.)$.
Cartesisches Produkt von x. $\mathsf{cp}\,x$.
$\bigcup$**Axiom.**
$x\,(E|p.|a.)$.

MSC2010: 03B30, 03B35, 70A05.

Andreas Unterreiter

19. Juni 2015

In den Voraussetzungen von **18-35** muss es natürlich
"$\mathsf{ran}\, r$" an Stelle von "$\mathsf{dom}\, r$" heissen.

18-35(Satz)

a) *Aus "r Relation" und*
"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]) = 0)$"

folgt "r Funktion".

b) *Aus "r Relation" und*
"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (0 \neq (r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}])))$
$\Rightarrow (\alpha = \beta)$"

folgt "r Funktion".

<u>Beweis</u> **18-35** `a)`

`VS` gleich (r Relation) $\wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]) = 0))$.

`1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(r^{-1}) = \mathsf{ran}\, r$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]) = 0)$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\,(r^{-1}) = \mathsf{ran}\, r$"
folgt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\,(r^{-1})) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\,(r^{-1})) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]) = 0)$.

`3:` Aus `2` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\,(r^{-1})) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\,(r^{-1})) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]) = 0)$"
folgt via **9-22**: r^{-1} injektiv.

`4:` Aus `VS` gleich "r Relation ..." und
aus `3` "r^{-1} injektiv"
folgt via **18-19**: r Funktion.

`b)`

`VS` gleich (r Relation)
$\wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (0 \neq (r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}])))$
$\Rightarrow (\alpha = \beta)$.

`1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(r^{-1}) = \mathsf{ran}\, r$.

`2:` Aus `VS` gleich
"$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (0 \neq (r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]))$
$\Rightarrow (\alpha = \beta)$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\,(r^{-1}) = \mathsf{ran}\, r$"
folgt:
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\,(r^{-1})) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\,(r^{-1})) \wedge ((0 \neq (r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]))$
$\Rightarrow (\alpha = \beta)$.

`3:` Aus `2`$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\,(r^{-1})) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\,(r^{-1}))$
$\wedge((0 \neq (r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}])) \Rightarrow (\alpha = \beta)$
folgt via **9-22**: r^{-1} injektiv.

`4:` Aus `VS` gleich "r Relation ..." und
aus `3` "r^{-1} injektiv"
folgt via **18-19**: r Funktion.

□

Der Term $x[\{.\}]$ von Definition **21-15(Def)** ist via **8-5(Def)** und **27-8(Def)** nicht vom Bild von $\{.\}$ unter x - so selten dieser Term auch in Betracht gezogen werden mag - zu unterscheiden. In Abänderung der Notation soll ab sofort

$$x[\{\bullet\}] = \mathsf{21.3}(x) \ = \{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, x[\{\Omega\}]))\},$$

eingesetzt werden.

Aussagen `pq)` von **30-83** müssen durch Vorliegendes ersetzt werden:

30-83(Satz)

...

`p)` *Aus "$\preceq$ Halbordnung in z" folgt "$\preceq^{-1}$ Halbordnung in z".*

`q)` *Aus "$\preceq$ Relation" und "$\preceq^{-1}$ Halbordnung in z" folgt "$\preceq$ Halbordnung in z".*

`r)` *"$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in z" genau dann, wenn "$\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z".*

`s)` *Aus "$\preceq$ Relation" und "$\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z" folgt "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in z".*

Beweis **30-83** ... `p)`

`1:` $\preceq$ Halbordnung in z

$\overset{\textbf{30-79(Def)}}{\Leftrightarrow}$ $(\preceq \text{ Relation in } z) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } z) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } z)$

$\overset{\textbf{11-7}}{\Rightarrow}$ $(\preceq^{-1} \text{ Relation in } z) \wedge (\preceq \text{ reflexiv in } z) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } z)$

$\overset{\text{c)}}{\Leftrightarrow}$ $(\preceq^{-1} \text{ Relation in } z) \wedge (\preceq^{-1} \text{ reflexiv in } z) \wedge (\preceq \text{ transitiv in } z)$

$\overset{\text{g)}}{\Leftrightarrow}$ $(\preceq^{-1} \text{ Relation in } z) \wedge (\preceq^{-1} \text{ reflexiv in } z) \wedge (\preceq^{-1} \text{ transitiv in } z)$

$\overset{\textbf{30-79(Def)}}{\Leftrightarrow}$ $\preceq^{-1}$ Halbordnung in z.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\preceq \text{ Halbordnung in } z) \Rightarrow (\preceq^{-1} \text{ Halbordnung in } z)$.

`q)` `VS` gleich $(\preceq \text{ Relation}) \wedge (\preceq^{-1} \text{ Halbordnung in } z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "... $\preceq^{-1}$ Halbordnung in z"
folgt via des bereits bewiesenen `p)`: $(\preceq^{-1})^{-1}$ Halbordnung in z.

`2:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Relation... "
folgt via **13-3**: $\preceq = (\preceq^{-1})^{-1}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\preceq$ Halbordnung in z.

<u>Beweis **30-83**</u> `r)`

`1:` $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in z

$\stackrel{\textbf{30-79(Def)}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq$ antiSymmetrisch in z)

$\stackrel{\textbf{11-7}}{\Rightarrow}$ ($\preceq^{-1}$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq$ antiSymmetrisch in z)

$\stackrel{\texttt{c)}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq^{-1}$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq$ antiSymmetrisch in z)

$\stackrel{\texttt{g)}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq^{-1}$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq$ antiSymmetrisch in z)

$\stackrel{\texttt{i)}}{\Leftrightarrow}$ ($\preceq^{-1}$ Relation in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ reflexiv in z) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ transitiv in z) $\wedge$($\preceq^{-1}$ antiSymmetrisch in z)

$\stackrel{\textbf{30-79(Def)}}{\Leftrightarrow}$ $\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z.

`2:` Aus `1`
folgt: ($\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in z) $\Rightarrow$ ($\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z).

`s)` `VS` gleich ($\preceq$ Relation) $\wedge$ ($\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z).

`1:` Aus `VS` gleich "… $\preceq^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z"
folgt via des bereits bewiesenen `r)`:
$(\preceq^{-1})^{-1}$ antiSymmetrische Halbordnung in z.

`2:` Aus `VS` gleich "$\preceq$ Relation… "
folgt via **13-3**: $\preceq = (\preceq^{-1})^{-1}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in z.

□

In **#61** wird in <u>sse-**Notation**</u> bei "$\&$_`sse`_$\overline{\&}$" der Zeichensatz `typewriter` an Stelle von sans serif verwendet.

<u>sse-**Notation**</u>

Sind " $\&$ " und " $\overline{\&}$ " Klassen, so gilt

" $\&$ sse $\overline{\&}$ " genau dann, wenn: " $\&$_sse_$\overline{\&}$ " .

In **70-4(Bem)** muss es an Stelle von "… InklusionsRelation *ssp* in einer Klasse x …" natürlich "… InklusionsRelation *ssp* in der Klasse $\mathcal{P}(x)$:…" heissen:

70-4.Bemerkung

Gemäß **70-1** ist die InklusionsRelation *ssp* in der Klasse $\mathcal{P}(x)$ unten Stark Vollständig, also ist *ssp* via **55-6** auch unten Stark KettenVollständig. Wie in **70-3** ausserdem fest gestellt wird, ist *ssp*, falls x eine Unmenge ist, oben Nicht-Stark-Vollständig. Dies schließt nicht aus, dass *ssp* oben Stark KettenVollständig ist - in der Tat müsste hierfür gezeigt werden, dass die Vereinigung jeder nicht leeren *ssp*_Kette - die auch eine Unmenge sein kann - eine Menge ist. Dies kann getrost bezweifelt werden, auch wenn es mir an Mitteln fehlt - wie sollte etwa eine *ssp*_Kette, die eine Unmenge ist, konstruiert werden? - die Zweifel in einen Beweis umzumünzen.

In **#74** wird in <u>sub-**Notation**</u> bei “$\&$_sub_$\overline{\&}$” der Zeichensatz `typewriter` an Stelle von sans serif verwendet.

<u>sub-**Notation**</u>

Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

“ $\&$ sub $\overline{\&}$ ” genau dann, wenn: “ $\&$_sub_$\overline{\&}$ ” .

Die Reihenfolge der Variablen ist bei der Definition von $\texttt{82.1}(\ldots)$ in **82-1(Def)** vertauscht. Richtig muss es heißen:

82-1(Definition)

1) $\ldots$

2) $\texttt{82.1}(E, M) = \{\omega : E(\omega)\_M\_\omega\}$.

Im August 2o13 ist später als geplant **Suite III - Die Elementare** beendet. Es wird klar, dass ein weiteres Vorgehen nach der bis dahin entwickelten Form das Verfassen einer Formelsammlung dringend notwendig macht. Die Arbeit an dieser Formelsammlung geht nur schleppend voran. Insbesondere das Ordnen der Resultate der Arithmetik stellt unerwartet große Schwierigkeiten dar. Immer seltener gelingt es an einer arithmetischen Formelsammlung zu arbeiten. Schließlich kommt die Arbeit an der Formelsammlung zum Erliegen und es fehlt die Kraft, an den Suiten weiterzuarbeiten.

An dieser Situation ändert sich mehr als einen Monat nichts, eine hartnäckige Erkrankung kommt hinzu und es scheint der Abbruch des Projekts “LebensWerk” unmittelbar bevorzustehen.

Um wieder auf die Beine zu kommen beginne ich mit dem Überarbeiten seit Studientagen brachliegender Bücher über Wavelets und asymptotischer Analysis. Wie durch ein Wunder kommt eine lange verschollene Freude am Rechnen und analysieren zurück. Es fügt sich, diese Freude mit dem LebensWerk zu kombinieren und zu einer neuen - bereits ursprünglich tief gewünschten - Form der Darstellung zu finden.

Die “neue” Form liegt deutlich näher an der “üblichen” mathematischen Darstellungsweise als die kleinstschrittige Argumentationslinie der ersten drei Suiten. So werden Hilfskonzepte - wie das Differenzieren - stellenweise als bekannt vorausgesetzt und es werden darauf abhebende Resultate formuliert und auf argumentative Weise bewiesen.

Die erhöhte Fehleranfälligkeit der “neuen” Form ist offensichtlich. Doch sehe ich mich durch die akribischen Vorarbeiten an den ersten drei Suiten geradezu gereinigt genug, die Fehlerwahrscheinlichkeit auf ein von mir bislang unerreichtes Niveau zu senken.

Auch werden ab sofort mehrere, mitunter wenig miteinander verwobene Bereiche in loser Abfolge abgearbeitet. Zu groß ist der Rückstau der Dinge “die ich sonst noch so kann” verglichen mit den Erkenntnissen, die in den ersten drei Suiten bislang dokumentiert sind.

Es wird immer wieder vorkommen, dass ein bereits eingesetztes Konzept erst später genauer unter die Lupe genommen wird.

Wegen einer nicht leiht zu nehmenden Erkrankung muss die Arbeit am LebensWerk für vier Monate unterbrochen werden.

Die innere Auseinandersetzung um die “leichte Darstellung”, wie sie etwa in den Essays der klassischen Lagrange-Theorie **KLT** praktiziert wird - und die “reine Komposition” - die bis zu **Suite III - Die Elementare** den Stil vorgibt - tritt immer wieder, beispielsweise beim Übergang von den Essays **#249-#257** zu den Essays **#258,#259**, auf und verleiht **Suite IV** den Titel “**Die Zwiespältige**” .

Im Dezember 2014 stirbt mein Vater. Er war einer der Wenigen am Fortgang meines LebensWerkes Anteil Nehmenden. Zu diesem Zeitpunkt ist die Erst-Version von **Suite IV - Die Zwiespältige** fertig gestellt. Ich widme **Suite IV - Die Zwiespältige** meinem Vater.

In **#249** beginne ich mit der klassischen Lagrange-Theorie der Mechanik - Kurzform KLT - *so wie ich sie sehe* und so wie ich sie in mehreren Vorlesungen vorgestellt habe.

In **#250** wird für $c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}^s)$ und $g : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^m$, I ist ein echtes reelles Intervall und $0 \neq \boldsymbol{\mathcal{D}}$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{1+2s}$ mit $1 \leq s, m \in \mathbb{N}$ die Funktion g^*c als $\{(\lambda, g(\lambda, c(\lambda), \dot{c}(\lambda))) : \lambda \in J\}$ definiert. Im interessantesten Fall $\{(\lambda, c(\lambda), \dot{c}(\lambda)) : \lambda \in J\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{D}}$ gilt $g^*c : J \to \mathbb{R}^m$.

Als spezielle $\leq$ _Intervalle werden im Rahmen der KLT in **#251** reelle Intervalle und echte reelle Intervalle in die Essays eingebracht.

Ab **#252** wird im Rahmen der KLT das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, mit $\langle\, u \mid v \,\rangle_m$ bezeichnet. Auf den Index wird verzichtet, wenn über die zu Grunde liegende Lagrange-Funktion und deren Anzahl von Freiheitsgraden s kein Zweifel besteht. In diesen Fällen ist $\langle\, u \mid v \,\rangle = \langle\, u \mid v \,\rangle_s$. Es werden s, L-Kurven vorgestellt. Der Term $\Delta_{\mathtt{elg}}(c, L)$ wird definiert.

In **#253** werden s, L-WirkungsStationäre Kurven und Lösungen von (s, L)(ELG) - den "Euler-Lagrange-Gleichungen" - definiert. Es wird gezeigt, dass beide Definitionen äquivalent sind.

Das Kraftfeld $\mathtt{K}$ und das Impulsfeld $\mathtt{P}$ werden im Kontext der KLT in **#254** vorgestellt. Die Änderungsrate von $\mathtt{P}^*c$ längs s, L-Kurven c wird ermittelt. (s, L)(ELG) wird mit Hilfe von $\mathtt{P}, \mathtt{K}$ als Zweites Newtonsches Gesetz re-formuliert.

In **#255** werden im Kontext von KLT das Energiefeld $\mathtt{E}$, das kEnergiefeld $\mathtt{T}$ und das pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}$ vorgestellt. Wegen Unklarheit genereller Übereinkunft werden hier die Begriffe "Gesamtenergie", "kinetische Energie" und "potentielle Energie" vermieden. Es gilt stets $\mathtt{E} = \langle\, \mathtt{P} \mid \mathtt{v} \,\rangle_s$ und $L = \mathtt{T} - \boldsymbol{\Phi}$ sowie $\mathtt{E} = \mathtt{T} + \boldsymbol{\Phi}$. Es werden Formeln für die Änderungsraten von L^*c, $\mathtt{E}^*c$, $\mathtt{T}^*c$ und $\boldsymbol{\Phi}^*c$ für s, L-Kurven c hergeleitet. Gilt $\partial_{\mathtt{t}} L = 0$, so bleibt $\mathtt{E}^*q$ für jede Lösung q von (s, L)(ELG) konstant.

#256 ist der linearen Algebra gewidmet. $\mathsf{ONB2}(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, ist die Menge aller geordneten, zweidimensionalen Orthonormalsysteme im $\mathbb{R}^m$.
Für $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und $z, y, u, w \in \mathbb{R}^m$ wird $\langle\, z \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid w \,\rangle_m - \langle\, z \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid u \,\rangle_m$ im Ansatz diskutiert.

(u, w)Drehimpulsdichten $\mathtt{I}(u, w)$ un (u, w)Drehmomentdichten $\mathtt{M}(u, w)$ werden in **#257** definiert. Die Änderungsrate von $\mathtt{I}(u, w)^*c$ wird für s, L-Kurven c und $u, w \in \mathbb{R}^s$ ermittelt. Ist q eine Lösung von (s, L)(ELG), so ist im Fall $u, w \in \mathbb{R}^s$ die Änderungsrate von $\mathtt{I}(u, w)^*q$ gleich $\mathtt{M}(u, w)^*q$.

Essay **#258** fällt durch die Vielzahl an Seiten auf. Dies liegt an der rigorosen Überarbeitung von **Suite IV - Die Zwiespältige**. Es werden unter Anderem der E-Schnitt von x mit Bezeichnung $(E\ \mathsf{sv}\ x)$, die $E\cup$Verschiebung von x mit Bezeichnung $x(E\cup.)$ und die Klasse x_{fkt}, die in allen Fällen eine Funktion ist, in das LW eingebracht. Sowohl $(E\ \mathsf{sv}\ x)$ als auch $x(E\cup.)$ sind vorbereitende Konzepte für die Einführung partieller Funktionen, die in der reellen Analysis mehrerer Veränderlicher eine große Rolle spielen. Der $E\cap$Verschiebung von x, die bereits seit **#16** Bestandteil der Essays ist, wird mit $x(E\cap.)$ ein eigenes Symbol verliehen.

Ähnlich wie der vorausgehende Essay ist **#259** von intensiver Überarbeitung geprägt. Es resultiert eine große Seitenanzahl. Es werden die Funktionen x_{c1} und x_{c2} vorgestellt, die für Mengen x, p die Gleichungen $x_{\mathsf{c1}}(p) = (x, p)$ und $x_{\mathsf{c2}}(p) = (p, x)$ zur Verfügung stellen. Der Definitions-Bereich der Relation $x\,(E|a.)$ besteht genau aus jenen Mengen b für die $\{(a, b)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x$ gilt. Die Menge (b, c) genau dann in $x\,(E|a.)$, wenn b eine Menge ist und $(\{(a, b)\} \cup E, c) \in x$ gilt. Ist f eine Funktion, so gilt für alle $b \in \mathsf{dom}\,(f\,(E|a.))$ die "entlarvende" Gleichung $f\,(E|a.)\,(b) = f(\{(a, b)\} \cup E)$, die den Einsatz von $f\,(E|a.)$ als "partielle Funktion" von f vorbereitet. Das cartesische Produkt $\mathsf{cp}\, x$ wird vorgestellt. Hierbei ist x eine *beliebige* Klasse. Wegen $\mathsf{cp}\ x = \mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}}$ spielen cartesische Produkte von Funktionen eine besondere Rolle. Ist $\mathsf{dom}\, x$ eine Unmenge, so gilt $\mathsf{cp}\ x = 0$ und dies ist auch der Fall, wenn $x(p) = 0$ für wenigstens ein p gilt. Andernfalls ist - unter Einsatz des **AuswahlAxioms** - die Klasse $\mathsf{cp}\ x$ stets nicht leer. Mit Hilfe des frisch eingebrachten $\bigcup$**Axiom**s wird gezeigt, dass $\mathsf{cp}\ x$ stets eine Menge ist. Auch wird die Funktion $x\,(E|p.|a.)$, deren wesentlichste Charakterisierung in der Gleichung $x\,(E|p.|a.)\,(q) = x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)$ für alle q aus dem Definitions-Bereich von $x\,(E|p.|a.)$ liegt, untersucht. Im Speziellen werden die Fälle $g : \mathsf{cp}\ f \to A$ mit $f : D \to B$ und $E \in \mathsf{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$ diskutiert.

In **#260** werden Begriffe zur Beschreibung von Familien von Transformationen, die jede L-Zustandskurve in eine L-Zustandskurve überführen vorgestellt. Zum Beispiel ist g genau dann k-$\mathtt{KLT}$ von $parfkt, ort, crv$, wenn $k \in \mathbb{N}$ oder $k = \infty$ und $g : \mathsf{cp}\ parfkt \to \mathbb{R}^s$ und $parfkt$ Funnktion und $ort, crv \in \mathsf{dom}\, parfkt$ mit $ort \neq crv$ und $parfkt(crv)$ =nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nur aus Häufungspunkten besteht und $p \in \mathsf{cp}\ \left(parfkt \downharpoonleft \{ort, crv\}^C\right)$ und für alle $\sigma \in parfkt(crv)$ und alle L-Zustandskurven c auch $g\,(\{(ort, \alpha)\} \cup p|\circ.)\, c$ eine L-Zustandskurve mit Definitions-Bereich= $\mathsf{dom}\, c$ ist. $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^m)$ ist die Menge aller linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$.

Ergänzend zur Mengenlehre wird in **#261** die auch an sich interessante Formel $x \subseteq \mathcal{P}(\bigcup x)$ fest gestellt. Auch werden zusätzlich Aussagen für $g : \mathsf{cp}\ f \to A$, $f : D \to B$, deren Einsatz en passant in **#260** erfolgt, bewiesen. Auf dem Weg erfolgen Beweise weiterer Aussagen der elementaren Mengenlehre. Der Term $\{(p, q)\} \cup x$ rückt neuerlich in den Fokus der Betrachtungen.

In **#262** werden die Klassen $\bigcup(x[E])$, $\bigcap(x[E])$ zuerst allgemein und dann für Funktionen $x = f$ untersucht. Die Gleichungen $\{p,\mathcal{U}\} = \{p\}$, $\{\mathcal{U}, q\} = \{q\}$ und $\{\mathcal{U},\mathcal{U}\} = 0$ werden etabliert. Für jede Funktion f und *beliebige* Klassen p, q gilt $f[\{p, q\}] = \{f(p), f(q)\}$. Als Spezialfälle werden $f = 0$ und $f = \mathsf{id}_D$ betrachtet.

Unabhängig von einer "Grundmenge" wird in **#263** eine Topologie definiert. In erster Linie wird auf eine funktionstheoretische Formulierung zurück gegriffen. Danach werden die erwarteten, auf Vereinigungs- und Durchschnittsbildung ruhenden Resulte bewiesen. Interessanter Weise ist jede Topologie notwendiger Weise eine Menge.

Topologien in X werden in klassischer Weise in **#264** in die Essays eingeführt. Jede Topologie in X ist eine Topologie. Ist τ eine Topologie in X, so sind τ, X Mengen und es gilt $\bigcup \tau = X$. Ist τ eine Topologie schlechthin, so ist τ eine Topologie in $\bigcup \tau$. Ist X eine Menge, so sind sowohl $\{0, X\}$ als auch $\mathcal{P}(X)$ Topologien in X. $\{0, X\}$ ist die gröbste Topologie in X. $\mathcal{P}(X)$ ist die feinste Topologie in X.

#265. Eine Relation r ist genau dann$\neq 0$, wenn $0 \neq \mathsf{dom}\, r$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $0 \neq \mathsf{ran}\, r$. Entsprechendes gilt für Funktionen. Falls $f : D \to B$, so gilt $0 \neq f$ genau dann, wenn $0 \neq D$.

#266. Im ersten Essay zur Modellierung wird ein zeitdiskretes Modell zur Generation und dem Abbau biologischer Entitäten - etwa von Neutrophilen in der Blutbahn - mit konstanter Lebensdauer hergeleitet und diskutiert.

#267. Ist eine Lagrange-Funktion unter einer C^2-Familie von Transformationen Ψ in gewissem Sinne invariant, so ist die Funktion $\left\langle\ \mathtt{P} \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}\ \right\rangle^* q$ für bestimmte, im Invarianz-Bereich verlaufende Lösungen von (ELG) konstant.

#268. Es werden $\mathbb{R}^m$Drehungen$\perp(u, w)$ der Ebene $\mathsf{span}\{u, w\}$ als $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ in die Essays eingeführt. Bleibt eine Lagrange-Funktion unter einer geeigneten Familie derartiger Drehungen invariant, ist $\mathtt{I}(u, w)^*q$ für Lösungen q von (ELG), die im Invarianz-Bereich verlaufen, konstant und $\mathtt{M}(u, w)^*q$ ist gleich der Nullfunktion $\mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$.

#269. Im TransformationsSatz (ELG) werden Bedingungen an Koordinatenfunktionen Γ - mit lokalisierter Version Ψ - formuliert, so dass aus der "krummlinigen Version von (ELG)" - nämlich aus $((\nabla_{\mathtt{v}}(L\tilde{\ }\Psi))^*Q)^\bullet = (\nabla_{\mathtt{x}}(L\tilde{\ }\Psi))^*Q$ - folgt, dass $\Psi \circ Q$ eine Lösung von (ELG) (in "cartesischen Koordinaten") ist. Interessanter Weise muss $\{\Psi_{,1}, \ldots, \Psi_{,m}\}$ nur längs Q ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^s$ sein.

#270. Polarkoordinaten, Kugelkoordindaten und Zylinderkoordinaten werden - auch im Hinblick auf **#269** - in die Essays eingebracht.

#271. Eine mir kommunizierte "Gartenbauformel" wird zur näherungsweisen Berechnung der Fläche mondsichelförmiger Ornamente eingesetzt. Die Gültigkeit der "Gartenbauformel" für parabolische Berandungslinien wird verifiziert und es wird die Approximationsgüte in anderen Fällen diskutiert.

#272. Ist das Impulsfeld in hier nicht näher beschriebenem Sinn lokal bezüglich der Geschwindigkeit invertierbar, so kann die Hamilton-Funktion von L bezüglich der lokalen Umkehrtransformation von $\mathtt{P}$ definiert werden. Die Lösungen korrespondierender Hamilton-Jacobi-Gleichungen `(HJG)` hängen eng mit Lösungen von `(ELG)` zusammen. Unter hier nicht näher interessierender Bedinungen sind für jede Lösung q von `(ELG)` die Funktionen $q, \mathtt{P}^*q$ Lösungen von `(HJG)`. Sind umgekehrt Q, P Lösungen von `(HJG)`, so ist Q Lösung von `(ELG)` und es gilt $P = \mathtt{P}^*Q$.

#273. Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$ ist jede Lagrange-Funktion $L : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, für die unter anderem

$$L(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(t,x),$$

mit $(t,x) \in C$ und zeit- und ortsabhängiger Massen-Matrix M_{ij} und Potential V gilt. Resultate der KLT werden für so strukturierte Lagrange-Funktionen adaptiert.

#274. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall eines “nur von der Zeit t abhängenden Potentials V” angewendet.

#275. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall eines “nur von den Ortskoordinaten x abhängenden Potentials V” angewendet.

#276. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall eines konstanten Potentials V angewendet.

#277. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer “nur von der Zeit t abhängenden Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i,j = 1, \ldots, s$” angewendet.

#278. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer “nur von der Zeit t abhängenden Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i,j = 1, \ldots, s$” und eines “nur von der Zeit abhängenden Potentials V” angewendet.

#279. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer “nur von der Zeit t abhängenden Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i,j = 1, \ldots, s$” und eines “nur von den Ortskoordinaten abhängenden Potentials V” angewendet.

#280. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer “nur von der Zeit t abhängendenMassen-Matrix $M_{i,j}$, $i,j = 1, \ldots, s$” und eines konstanten Potentials V angewendet.

#281. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer “nur von den Ortskoordinaten x abhängenden Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i,j = 1, \ldots, s$” angewendet.

#282. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer “nur von den Ortskoordinaten x abhängenden Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i,j = 1, \ldots, s$” und eines “nur von der Zeit t abhängenden Potentials V” angewendet.

#283. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer "nur von den Ortskoordinaten x abhängenden Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, s$" und eines "nur von den Ortskoordinaten x abhängenden Potentials V" angewendet.

#284. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer "nur von den Ortskoordinaten x abhängenden Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, s$" und eines konstanten Potentials V angewendet.

#285. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer konstanten Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, s$, angewendet.

#286. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer konstanten Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, s$, und eines "nur von der Zeit t abhängenden Potentials V" angewendet.

#287. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer konstanten Massen-Matrix $M_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, s$, und eines "nur von den Ortskoordinaten x abhängenden Potentials V" angewendet.

#288. Die Resultate von **#273** werden auf den Spezialfall einer konstanten Massen-Matrix $M_{i,j}$, und eines konstanten Potentials V angewendet.

#289. Als Einstimmung in die gewöhnlichen Differential-Gleichungen - mit dem englischen Titel "ODE" - wird unter anderem die Differential-*Ungleichung* $\dot{c} \leq L \cdot c$ mit $c(t_\circ) = 0$ auf einem Intervall $]t_\circ|\tau[$ betrachtet und mit Methoden der elementaren Analysis behandelt. Die Resultate der Betrachtungen helfen bei späteren Aussagen über die Verzweigungsfreiheit von Lösungen.

#290. x löst $\&^\bullet = F(t, \&)$ genau dann, wenn x, F Funktionen sind, wenn $\mathsf{dom}\, x$ ein echtes reelles Intervall ist, wenn x differenzierbar ist und wenn für alle $t \in \mathsf{dom}\, x$ die Gleichung $x^\bullet(t) = F(t, x(t))$ gilt. Es werden maximale Lösungen und AWPe begrifflich in die Essays eingebracht und Beispiele erläutern die neuen Konzepte.

#291. Aus $x = y$ folgt $x \times y = y \times x$. Soll aus $x \times y = y \times x$ auf $x = y$ geschlossen werden, so gelingt dies, wenn etwa $0 \neq x \times y$ gefordert wird.

#292. Falls M transitiv und symmetrisch in z ist so gilt für alle $p, q \in z$ entweder $z \cap M[\{p\}] = z \cap M[\{q\}]$ oder $(z \cap M[\{p\}]) \cap (z \cap M[\{q\}]) = 0$.

#293. Es gilt $\bigcup x_{\text{sngltn}} = x$. Die Klasse $\{0 : \lambda \in x\}$ ist genau dann leer, wenn $x = 0$. Es gilt $\{0 : \lambda \in x\} = \{0\}$ genau dann, wenn $0 \neq x$. Die Gleichung $\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = x \cap y[z]$ steht *nicht ohne Weiteres* zur Verfügung. Es gilt stets $\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} \subseteq x \cap y[z]$. Falls $x \cap y[\{\alpha\}]$ für alle $\alpha \in z$ *eine Menge* ist, so folgt $\bigcup\{x \cap y[\{\lambda\}] : \lambda \in z\} = x \cap y[z]$. Es gilt $\{\mathcal{U} \cap x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\} = \{x[\{\lambda\}] : \lambda \in y\}$.

#294. Äquivalenzrelationen erscheinen in den Essays. Einer allgemeinen Ahnung folgend wird hier und im Folgenden von Äquivalenzrelationen *auf* z anstelle von

ÄquivalenzRelationen *in* z, bei denen restriktiv mit Definitions- und Bild-Bereich umgegangen werden müsste, gesprochen. Bedauerlicher Weise müsste konsistenter Weise etwa auch von "reflexiv (antiReflexiv, transitiv, symmetrisch, antiSymmetrisch) *auf* z" an Stelle von "... *in* z" gesprochen werden. Dies ist wegen der bereits in **#30** getroffenen Definitionen aber nicht mehr möglich.

#295. Dem "Einführungskurs EK" sind in zunehmenden Maße einige Essays gewidmet. Hier geht es um Grundbegriffe der Kombinatorik. Die Formel

$$\sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} = \binom{1+n}{1+k}, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

erregt Gefallen.

#296. Das Zählmaß wirft seine Schatten voraus. Es wird gezeigt, dass aus $n, m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$ und $y \in \mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m$ mit $x \cap y = 0$ das intuitiv klare, doch etwas mühsam zu beweisende $x \cup y \in \mathcal{U}_{2+(n+m)} \setminus \mathcal{U}_{1+(n+m)}$ folgt. Auf dem Weg dahin wird unter anderem $\mathcal{U}_{-1} = 0$ gesetzt.

#297. Das Zählmaß # ordnet in entsprechend definierter Weise jeder Menge die Anzahl ihrer Elemente zu. Falls x eine unendliche Menge ist gilt $\#(x) = +\infty$. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge x ist gleich dem Infimum der Menge all jener $n \in \mathbb{N}$ für die $x \in \mathcal{U}_n$ gilt. Ist x eine Unmenge so gilt $\#(x) = \mathcal{U}$.

#298. Die Klassen $\mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{stm}, \mathsf{Dlt}$ sind die von den Klassen-Operationen deduzierten Algebren in $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. So gilt etwa $p\_\mathsf{cup}\_q = p \cup q$ für alle Mengen p, q.

#299. x ist genau dann injektiv auf E, wenn $(x \restriction E)$ injektiv ist. Ist E eine Unmenge mit $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$ und ist die Funktion f injektiv auf E, so ist $f[E]$ eine Unmenge.

#300. Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Klassen $\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$ Unmengen. Wie bereits in **240-9** fest gestellt, sind die Klassen $\mathcal{U}_n$ für $1 \leq n \in \mathbb{N}$ Unmengen. Somit wird hier der Nachweis geliefert, dass die Differenz-Klasse von Unmengen eine Unmenge sein kann. Das Beweis-Detail $0 \neq \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, erfordert einen Induktions-Beweis. Der eigentliche Beweis verwendet kein Induktiions-Argument.

#301. Besteht eine sse_Kette x nur aus Funktionen (aus injektiven Klassen, aus Bijektionen), so ist $\bigcup x$ eine Funktion (eine injektive Klasse, eine Bijektion).

#302. In sehr allgemeiner Form heisst eine Klasse R "$c\_M\_, \phi$-rekursiv (mit Startwert (p, q)), wenn für alle $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R$ mit $((c, \alpha), \gamma) \in M$ die Aussage $(\beta, \delta) \in \phi$ folgt (und zusätzlich $(p, q) \in R$ gilt). Interessanter Weise sind Aussagen über $\subseteq$-maximale Fortsetzungen von $c\_M\_, \phi$-rekursiven Mengen verfügbar, wenn die Suche auf TeilMengen einer festen "Grundmenge" eingeschränkt wird.

#303. Es wird eine EK-geeignete Darstellung einer Lösungskurve von $x^2 + 2cxy + y^2 = 1$, $c \in \,]-1|1[$, gegeben. Hierbei soll $x, y \in \mathbb{R}$ gelten.

#304. Wenn R eine $c\_E\_,,\phi$-rekursive Klasse ist, so sind die Spezialfälle, in denen E eine Algebra in A oder ϕ eine Funktion oder R eine Funktion ist von besonderem Interesse. In jeder Menge gibt es eine $\subseteq$ $-$maximale $c\_E\_.,\phi$-rekursive *Funktion.* Falls es überhaupt eine $c\_E\_.,\phi$-rekursive Funktion mit Starwert (p,q) gibt, die eine Teilmenge einer Menge u ist, so gibt es auch eine $\subseteq$-maximale derartige Funktion.

#305. Die allgemeinen Untersuchungen $c_E_.,\phi-$rekursiver Klassen werden auf $1+.,\phi-$rekursive Klassen mit Definitions-Bereich$\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$ angewendet. Es sind Eindeutigkeits-Resultate für $1+.,\phi-$rekursive *Funktionen* mit diesen Definitions-Bereichen unter der Voraussetzung, dass ϕ eine Funktion ist, verfügbar. Auch werden "$\subseteq$ $-$maximale Fortsetzungssätze" für $1+.,\phi-$rekursive Klassen mit Definitions-Bereich$\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$ präsentiert. Die speziellen Definitions-Bereiche erfordern aufwändige Untersuchungen.

#306. Sind R,S jeweils $c\_E\_,,\phi$-rekursive Klassen, so ist üblicherweise nicht zu erwarten, dass auch $R\cup S$ $c\_E\_,,\phi$-rekursiv ist. Es werden zusäzliche Bedinigungen gefunden, unter denen $R\cup S$ eine $c\_E\_.,\phi$-rekursive Klasse ist. In weiterer Folge werden Bedingungen angegeben, die garantieren, dass $\{(p,q)\}\cup f$ eine $c\_E\_.,\phi$-rekursive Funktion ist. Dabei wird unter anderem davon ausgegangen, dass f eine $c\_E\_,,\phi$-rekursive Funktion ist.

#307. Ist q ein Element der *Menge* A und ist $\phi:A\to A$, so gibt es eine $1+.,\phi$-rekursive Funktion $\Omega:\mathbb{N}\to A$ mit Startwert $(0,q)$. Es gilt $\Omega(0)=q$ und $\Omega(1+n)=\phi(\Omega(n))$, $n\in\mathbb{N}$.

#308. Die Vereinigung aller $1+.,\phi-$rekursiven Funktionen mit Startwert $(0,q)$ und Definitions-Bereich$\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$ ist $\texttt{rf0}q\phi$. Falls q eine Menge ist und falls ϕ eine Funktion ist, so ist $\texttt{rf0}q\phi$ die größtmögliche derartige Funktion und die Funktions-Werte aller derarartigen Funktionen sind durch $\texttt{rf0}q\phi$ eindeutig bestimmt. Gilt $q\in A$ Menge und $\phi:A\to A$, so folgt unter anderem zusätzlich $\texttt{rf0}q\phi:\mathbb{N}\to A$.

#309. Aus $q\notin\mathsf{ran}\,x$ und x injektiv folgt die Injetivität von $\{(p,q)\}\cup x$. Aus $f:D\to B$ und $p\notin D$ - p muss keine Menge sein - und q Menge folgt $\{(p,q)\}\cup f:\{p\}\cup D\to\{q\}\cup B$. Ist $f:D\to B$ injektiv und gilt $p\notin D$ - p muss keine Menge sein - und ist die Menge q nicht in B, so ist $\{(p,q)\}\cup f:\{p\}\cup D\to\{q\}\cup B$ injektiv. Ist $f:D\to B$ bijektiv und sind $p\notin D$ und $q\notin B$ und sind p,q Mengen, so ist $\{(p,q)\}\cup f:\{p\}\cup D\to\{q\}\cup B$ bijektiv.

#310. Es gibt auch nicht-leere Mengen x mit unteren M_Schranken u und oberen M_Schranken o, für die $\neg(u\_M\_o)$ gilt. Jedes M_Infimum von 0 ist ein M_Maximum von $\mathsf{dom}\,M$. Jedes M_Supremum von 0 ist ein M_Minimum von $\mathsf{ran}\,M$. Einge All-Quantor-Aussagen über Infima/Suprema und reflexive Klassen werden individualisiert.

#311. Sind f,g Funktionen und gilt $\mathsf{311.0}(x,f,g)\,(p)=g(p,f(p))$ für alle $p\in\mathsf{dom}\,\mathsf{311.0}(x,f,g)$, und $\mathsf{311.0}(x,f,g)$ ist eine Funktion. Falls $f:\mathcal{U}\setminus\{0\}\to\mathcal{U}$

und $x \subseteq \mathcal{P}(v)$, so gilt $\mathtt{311.0}(x, \{.\} \circ f, \mathsf{stm}) : x \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(v)$ und für $p \in x \setminus \{0\}$ ist $\mathtt{311.0}(x, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})(p) = p \setminus f(p)$.

#312. Die Frage, ob jede Unmenge eine unendliche TeilMenge hat, bleibt bis auf Weiteres unbeantwortet. Damit steht zwar fest, dass für endliche x die Klasse der unendlichen TeilMengen von x leer ist, ob aus $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0$ auch die Endlichkeit von x folgt, bleibt offen. Ist x eine unendliche Menge, so gibt es Funktionen Ω, Ψ mit $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$, $\Psi(0) = x$, $\Psi(1+n) = \Psi(n) \setminus \{\Omega(\Psi(n))\}$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei $\Omega(\alpha) \subseteq \alpha$ für jede nichtleere TeilKlasse von x gilt.

#313. Ist x eine unendliche *Menge*, so gibt es eine injektive Funktion $\Omega : \mathbb{N} \to x$. Der Beweis beruht auf dem AuswahlAxiom.

#314. Ohne Verwendung des AuswahlAxioms wird gezeigt, dass es zu jeder Teilmenge q von $\mathbb{S}$ Funktionen $\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{S})$ und $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$ gibt, so dass $\Omega(0) = q$ und $\Psi(0) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q$ und $\Psi(\alpha) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\alpha))$, $\alpha \in \mathbb{N}$, wobei für $\alpha \in \mathbb{N}$ die Menge $\Omega(1 + \alpha)$ aus $\Omega(\alpha)$ durch Wegnahme von $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\alpha))$ entsteht. Die Konstruktion analoger Funktionen gelingt für $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}$ an Stelle von $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$.

#315. Die "Potenz-Funktionen" $\uparrow x$ werden für $x \in \mathbb{Z}$ - genauer für $x = n, -n$, $n \in \mathbb{N}$ - durch eine rekursive Parameter-Definition in die Essays eingebracht und mit dem $\uparrow$**Axiom** versehen. Danach ist $\uparrow x$ - im Speziellen für $x \notin \mathbb{Z}$ - stets eine Klasse und in der "Index-Stelle" gilt die allgemeine Ersetzungsregel $(x = y) \Rightarrow (\uparrow x = \uparrow y)$. Über die Klassen $\uparrow x$, $x \notin \mathbb{Z}$, wird gegenwärtig nichts Weiteres ausgesagt. Ein entsprechendes $\mathcal{U}_x$**Axiom** wird für die Terme $\mathcal{U}_x$ nachgereicht. $\mathcal{U}_x$ ist stets eine Klasse und es gilt $(x = y) \Rightarrow (\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y)$. Über $\mathcal{U}_x$ für $x \notin \mathbb{N}$ wird zum jetzigen Zeitpunkt ebenfalls nicht Weiteres ausgesagt. Interessanter Weise gilt $(x \downharpoonleft y) = x \circ \mathsf{id}_y$.

#316. Ist $\square$ eine Algebra in A und sind f, g Funktionen, so gilt stets $(f.\square.g)(q) = f(q)\_\square\_g(q)$. Unabhängig davon ob x, y Zahlen sind oder nicht gilt $\mathsf{i}\cdot(x\cdot y) = (\mathsf{i}\cdot x)\cdot y = x\cdot(\mathsf{i}\cdot y)$. An Stelle von $E[x \times y]$ kann $x\ {}_{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$ geschrieben werden. Für $E[\{p\} \times x]$ wird die Kurzform $pE_{\mathtt{in}}x$ eingeführt. In Weiterführung von <u>$\mathtt{RECH}$-**Notation**</u> wird unter anderem $p\mathsf{M}_{\mathtt{in}}x = p\cdot_{\mathtt{in}}x$ gesetzt. Möglicher Weise von besonderem Interesse sind $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{R}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{S}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{T}$. Es gilt $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C} = \mathbb{C}$ und $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{B} = \mathbb{B}$ und $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

#317. Die Funktion $\uparrow 2$ bildet $\mathbb{T}$ auf $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ ab. $\uparrow 2$ ist auf $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ injektiv.

#318. qudr ist die Einschränkung von $\uparrow 2$ auf $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$. qudr ist eine Bijektion. Die Wurzelfunktion ist $\sqrt{.}$. Per definitionem gilt $\sqrt{.} = \mathsf{qudr}^{-1}$. Auch $\sqrt{.}$ ist eine Bijektion. Es gilt $\mathsf{dom}\,(\sqrt{.}) = \mathsf{ran}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$. Unter anderem gelten für alle x mit $0 \leq x$ die Gleichungen $\sqrt{x \cdot x} = x$ und $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$.

#319. Falls $y \in \mathbb{T}$, so ist für die Gleichung $x \uparrow 2 = y$ eine komplette Lösungstheorie verfügbar. Im speziellen Fall $y \leq 0$ ergibt sich aus $x \uparrow 2 = y$ die Alternative $(x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y})$.

#320. E ist genau dann streng M_isoton/M_antition auf z, wenn E auf z $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _isoton/$\overset{\textbf{ir}}{M}$ _antition ist. Interessanter Weise folgt aus der strengen Isotonie/Antitonie nicht ohne Weiteres die Isotonie/Antitonie. Ist z eine M_Kette und ist E streng M_isoton/M_antiton auf z - hier muss E keine Funktion sein -, so ist E injektiv auf z. Beim Übergang von M zu M^{-1} bleiben (strenge) Istonie/Antitonie erhalten. Dies beruht unter anderem auf der Gleichung

$$\overbrace{M^{-1}}^{\textbf{ir}} = \left(\overset{\textbf{ir}}{M}\right)^{-1}.$$

#321. Die Betragsfunktion ist $|.| = \sqrt{} \circ \mathsf{ab2}$. Die Gleichung $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$ ist nicht immer verfügbar. Die vertrauten $\leq$ _Terme $-|x| \leq x \leq |x|$ gelten genau für $x \in \mathbb{S}$. Es gilt $|x| \in \mathbb{S}$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{B}$.

#322. Falls f eine injektive Funktion ist, die streng M_isoton auf der M_Kette E mit antiSymmetrischem M ist, dann folgt aus $x, y \in E$ mit $f(x)$_ $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _$f(y)$ die "Urbild-'Gleichung" x_ $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _y. Ein entsprechendes Resultat gilt für injektive Funktionen f, die streng M_antiton auf der M_Kette E mit antiSymmetrischem M sind.

#323. Ist f eine auf $E \subseteq \mathbb{S}$ streng $\leq$ _isotone, injektive Funktion, so folgt aus $x, y \in E$ und $f(x) < f(y)$ die $<$ _Aussage $x < y$. Aus $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ folgt $0 \leq x < y$. Aus $0 \leq x \uparrow 2 < y \uparrow 2$ folgt $0 \leq |x| < |y|$.

#324. Für $x, y \in \mathbb{R}$ oder $x, y \in \mathbb{S}$ gilt $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$.

#325. Die Dreiecks-Ungleichung$|.|$ gilt in ihrer klassischen Form $|x+y| \leq |x|+|y|$ genau dann, wenn $x + y \in \mathbb{B}$.

#326. Die Dreiecks-Ungleichung*$|.|$ garantiert unter anderem $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$. Die Ungleichung $||x| - |y|| \leq |x - y|$ gilt genau dann, wenn $x, y \in \mathbb{B}$ und $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

#327. Ohne Bezug zu Funktionen oder zu speziellen Argumenten werden limes inferior, limes superior und limes durch die Betrachtung von focus inferior, focus superior und focus vorbereitet. Jedes M_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [E]$ ist ein M_focus inferior von E und jedes M_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [E]$ ist ein M_focus superior von E. Ist M antiSymmetrisch, so ist etwa $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ eine Funktion, die jedem $E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}} = \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$ den wegen der AntiSymmetrie von M eindeutigen M_Focus $\overset{M}{\mathsf{foc}}\ (E)$ zuordnet.

#328. E ist genau dann eine Filter-Basis, wenn $0 \neq E$ und es zu allen $\alpha, \beta \in E$ eine Menge $0 \neq \Omega \in E$ gibt, so dass $\Omega \subseteq \alpha, \beta$. Ist M transitiv, ist E eine Filter-Basis, ist p ein M_foxus inferior von E und ist q ein M_focus superior von E, so folgt p_M_q.

#329. Eine Klasse p ist genau dann ein (M, E)gw (inferirior/superior) von x, wenn p ein M_focus (inferior/superior) von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ ist. Mit dieser Begriffsbildung bewegt sich das LW in Richtung von limiten, also von Grenzwerten. Diesem Aspekt ist die Abkürzung "gw" geschuldet. Es wird ähnlich wie in **#327** vorgegangen.

#330. Ist M (Stark,Total) Vollständig, so ergeben sich einfache, hinreichende Bedingungen für das Vorhandensein von (M, E)gw (inferior/superior). Im Speziellen hat für Total Vollständige M jede Klasse x einen (M, E)gw inferior/superior. Ist $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ eine Filter-Basis und ist M transitiv, so gilt p_M_q für jeden (M, E)gw inferior p von x und jeden (M, E)gw superior q von x.

#331. Falls E eine Menge ist, so ist $\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ der sse_focus inferior von E. E hat genau dann einen sse_focus superior, wenn $0 \neq E$ und in diesem Fall ist der sse_focus superior von E gleich $\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

#332. Wegen $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ hat jede Menge einen (sse, E)gw inferior. Die Aussage $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \mathcal{U}$ gilt genau für $0 \neq E$, so dass im Fall $0 \neq E$ - E muss hier keine Menge sein - jede Menge einen (sse, E)gw superior hat. Wegen $\overset{\mathsf{sse},0}{\mathsf{gwsup}} = \overset{\mathsf{sse},0}{\mathsf{egwsup}} = 0$ gibt es im Fall $E = 0$ keine Menge, die einen (sse, E)gw superior hat.

#333. Ist $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge, ist M antiSymmetrisch und Total Vollständig, so ist $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ der M_focus inferior von E und $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist der M_focus superior von E.

#334. Ist $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge, ist M antiSymmetrisch und Total Vollständig, so ist $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ der (M, E)gw inferior von x und $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist der (M, E)gw superior von x.

#335. Die Klasse aller Mengen, die "punktierte E-Umgebungen von p" sind, bilden $E^{\mathsf{upkt}}p = \{\lambda \setminus \{p\} : p \in \lambda \in E\}$. Eine Klasse q ist genau dann (M, E)limes inferior von x in p, wenn q ein $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von x ist. Eine ähnliche Begriffs-Bildung kennzeichnet Klassen, die (M, E)limes superior von x in p sind. Zur Unterscheidung später zu besprechender "topologischer Limites" wird hier von "limites ordinati" gesprochen. Dabei ist eine Klasse genau dann ein (M, E)limes ordinatus von x in p, wenn sie ein $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von x ist.

#336. In Erweiterung der Untersuchungen von **#266** wird ein zeitdiskretes Modell zur Generation und dem Abbau biologischer Entitäten mit P, $1 \leq P \in \mathbb{N}$, möglicherweise verschiedenen Lebensdauern hergeleitet und diskutiert.

#337. R ist genau dann **ana1** von q, x, wenn R eine Funktion mit Definitions-Bereich aus $\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ mit $R(0) = \{(0, q)\}$ ist und in rekursiver Weise für alle $n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$ die Gleichung $R(1+n) = \mathsf{337.0}(R(n), x)$ gilt. Der Klassen-Term $\mathsf{337.0}(x, y)$ ist etwas verwickelt definiert und zielt darauf ab, jede endliche Menge von Zahlen addieren zu können - auch wenn dieses Ansinnen noch nicht direkt sichtbar ist. Die Klasse $\mathtt{rf1}qx$ ist die Vereigung aller Mengen, die **ana1** von q, x sind. $\mathtt{rf1}qx$ ist ebenfalls **ana1** von q, x und somit ist $\mathtt{rf1}qx$ die inklusions-größte derartige Klasse. Ist x eine Menge, so ist $\mathtt{rf1}qx$ auf $\mathbb{N}$ definiert.

#338 Ist R **ana1** von q, x und ist $n \in \mathsf{dom}\, R$, so gilt $n \in \mathbb{N}$ und $\mathsf{dom}\,(R(n))$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$. Wegen $(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$ für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ ergibt sich für derartige n, m die Gleichung $(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) = 0$.

#339 Ist R **ana1** von q, x, so ist $R(0) = \{(0, q)\}$ klarer Weise eine Funktion. Bei $R(1)$, $1 \in \mathsf{dom}\, R$, liegen die Dinge nicht ganz so einfach. Immerhin ist in diesem Fall $R(1)$ eine Funktion, wenn x eine Funktion ist.

#340 Ist R ist **ana1** von q, x, und gilt $2 \in \mathsf{dom}\, R$, so wird $R(2)$ auf die Funktions-Eigenschaft hin untersucht. Die Betrachtungen beginnen sich bald auf $x = \Box$ Algebra in A zu konzentrieren. Ist in diesem Kontext $R(2)$ eine Funktion, so muss für alle $\alpha, \beta \in A$ die Aussage $\alpha{\_}\Box{\_}(\beta{\_}\Box{\_}q) = \beta{\_}\Box{\_}(\alpha{\_}\Box{\_}q)$ gelten - und dies ist umgekehrt auch hinreichend für die Funktions-Eigenschaft von $R(2)$. Es werden Zusammenhänge mit Kommutativität und Assoziativität von $\Box$ hergestellt. Dabei ist q ist $\Box$neutral auf A interessant.

#341 Ist $\Box$ eine Algebra in A, ist R **ana1** von $q, \Box$ und gilt überdies $q \in A$, so gelten für jedes $n \in \mathsf{dom}\, R$ die Aussagen $R(n) \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$, $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$ und $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$. Im Speziellen besteht hier der Definitions-Bereich von $R(n)$ genau aus allen n-elementigen Teilmengen von A.

#342 Ist f eine Funktion und ist $\Box$ eine Algebra in A, so ist $\mathsf{337.0}(f, \Box)$ eine Funktion, wenn $f, \Box$ Eigenschaften aufweisen, die in späterer Folge bei der Untersuchung von Klassen, die **ana1** von $q, \Box$ sind, unter anderem durch Kommutativität und Assoziativität von $\Box$ garantiert sind. Gilt $p \notin E$ mit $p, f(E) \in A$ und ist $\mathsf{337.0}(f, \Box)$ eine Funktion, so folgt $\mathsf{337.0}(f, \Box)\,(\{p\} \cup E) = p{\_}\Box{\_}f(E)$.

KLT: Klassische Lagrange-Funktionen mit s Freiheitsgraden.
$\dot{c}$. $\ddot{c}$. $c^\bullet$. $c^{\bullet\bullet}$.
$p^{\mathbf{on}}D$.
$\vec{0}$.
$(\mathtt{e}j)$.
$\mathtt{t}$, $\mathtt{x}$, $\mathtt{v}$.

Ersterstellung: 21/11/13 **Letzte Änderung: 03/02/15**

Notationen 1. Die konstante Funktion auf einer Menge D mit Wert p ist

$$p^{\mathbf{on}}D = \{(\omega, p) : \omega \in D\}.$$

Notationen 2. Sei $1 \le s \in \mathbb{N}$, sei $B \subseteq \mathbb{R}^s$ - also etwa $B = \mathbb{R}^s$ - und sei I ein echtes, reelles Intervall. Die klassischen Grenzwert-Definitionen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $t \in I$ von Funktionen $c : I \to B$ - hier und im Folgenden kommt die Konvention $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ zum Einsatz - wird als bekannt voraus gesetzt. $\mathsf{C}(I : B)$ die Menge aller stetigen Funktionen $c : I \to B$ und für $1 \le k \in \mathbb{N}$ ist $\mathsf{C}^k(I : B)$, die Menge aller $k-$fach stetig differenzierbaren Funktionen $c : I \to B$. Es gilt die Konventionn $\mathsf{C}^0(I : B) = \mathsf{C}(I : B)$. Die Ableitung einer *differenzierbaren* Funktion $c : I \to B$ - also etwa von $c \in \mathsf{C}^1(I : B)$ - ist $\dot{c}$ und wird gelegentlich zwecks besserer Lesbarkeit $c^\bullet$ geschrieben. Im Fall $c \in \mathsf{C}^1(I : B)$ gilt klarer Weise $\dot{c} \in \mathsf{C}(I : \mathbb{R}^s)$. Die zweite Ableitung einer *zweimal differenzierbaren* Funktion $c : I \to B$ - also etwa von $c \in \mathsf{C}^2(I : B)$ - ist $\ddot{c}$ und wird gelegentlich zwecks besserer Lesbarkeit $c^{\bullet\bullet}$ geschrieben. Für $c \in \mathsf{C}^2(I : B)$ gilt offenbar $\dot{c} \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R}^s)$ und $\ddot{c} \in \mathsf{C}(I : \mathbb{R}^s)$. $\mathsf{C}^\infty(I : B)$ ist die Menge aller Funktionen $c : I \to B$, die beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Notationen 3. Sei weiterhin $1 \le s \in \mathbb{N}$ und sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \le m \in \mathbb{N}$, also etwa $B = \mathbb{R}^m$. Im Rahmen der KLT werden Funktionen $f : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to B$ mit $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ =offene, nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^{1+2s}$ betrachtet. Dabei werden die $1 + 2s$ Koordinaten der Elemente von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ in drei Gruppen zusammengefasst. Die erste Koordinate ξ_1 von $\xi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ ist die

Zeitkoordinate

und wird mit "t" bezeichnet. Die nächsten s Koordinaten $\xi_2, \dots, \xi_{1+s}$ von ξ heissen

Ortskoordinaten

und werden mit "x" bezeichnet. Die letzten s Koordinaten $\xi_{2+s}, \dots, \xi_{1+2s}$ von ξ sind die

Geschwindigkeitskoordinaten

und werden mit "v" bezeichnet. Es gilt also

$$t = \xi_1$$

und

$$x_j = \xi_{1+j}, \quad v_j = \xi_{1+s+j}, \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Anstelle von $f(\xi)$ wird ab sofort $f(t, x, v)$ geschrieben.Die klassischen Grenzwert-Definitionen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit derartiger Funktionen f werden als bekannt voraus gesetzt. Die Menge aller stetigen Funktionen $f : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to B$ ist $\mathsf{C}(\boldsymbol{\mathcal{D}} : B) = \mathsf{C}^0(\boldsymbol{\mathcal{D}} : B)$. Die Menge aller $k-$fach stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to B$ ist $\mathsf{C}^k(\boldsymbol{\mathcal{D}} : B)$ und die Menge $\mathsf{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{D}} : B)$ ist die Menge aller beliebig oft stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to B$. Jede Komponenten-Funktion $f_j : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq s$, von $f \in \mathsf{C}^1(\boldsymbol{\mathcal{D}} : B)$ hat insgesamt $1+2s$ partielle Ableitungen, nämlich $\partial_\iota f_j \in \mathsf{C}(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^m)$, $1 \leq \iota \leq 1+2s$. Es empfiehlt sich gelegentlich diese partiellen Ableitungen ebenfalls zu speziellen Gruppen zusammen zu fassen. Die partielle Ableitung von f_j, $1 \leq j \leq m$, nach der Zeitkoordinate t wird gelegentlich als $\partial_{\mathtt{t}} f_j$ bezeichnet - es gilt also $\partial_{\mathtt{t}} f_j = \partial_1 f$ -, die partiellen Ableitungen von f_j nach den Ortskoordinaten werden gelegentlich zu einer Vektorfunktion $\nabla_{\mathtt{x}} f_j = (\partial_{x_1} f_j, \ldots, \partial_{x_s} f_j)$ zusammengefasst - es gilt also $\partial_{x_i} f_j = \partial_{1+i} f_j$, $1 = 1, \ldots, s$ - und ähnlich soll bei den partielle Ableitungen von f_j nach den Geschwindigkeitskoordinaten $v_1, \ldots, v_s$ die Vektorfunktion $\nabla_{\mathtt{v}} f_j = (\partial_{v_1} f_j, \ldots, \partial_{v_s} f_j)$ betrachtet werden - es gilt also $\partial_{v_i} f_j = \partial_{1+s+i} f_j$, $1 \leq i \leq s$ -, so dass unter leichtem Missbrauch der Notation die Gleichung

$$\nabla f_j = (\partial_{\mathtt{t}} f_j, \nabla_{\mathtt{x}} f_j, \nabla_{\mathtt{v}} f_j),$$

gilt. Wird weiterhin von $f \in \mathsf{C}^1(\boldsymbol{\mathcal{D}} : B)$ ausgegangen, so sind für $j = 1, \ldots, s$ die Aussagen

$$\partial_{\mathtt{t}} f_j \in \mathsf{C}(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}),$$

$$\nabla_{\mathtt{x}} f_j \in \mathsf{C}(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^s), \quad \nabla_{\mathtt{v}} f_j \in \mathsf{C}(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^s),$$

leicht verifizierbar. Im Fall $m = 1$ ist die komponentenweise Betrachtung von f obsolet.

Im Zentrum der KLT stehen klassische Lagrange-Funktionen mit s Freiheitsgraden. Lagrange-Funktionen werden einem gegebenen physikalischen System nach hier nicht weiter diskutierten Regeln zugeordnet. Aus den Lagrange-Funktionen werden korrespondierende Bewegeunggleichungen hergeleitet. Die Analysis möglicher oder tatsächlicher Lösungen dieser Bewegungsgleichungen liefert Resultate, die als Aussagen über das zu Grunde liegende System interpretiert werden. Um eine allzu aufwändige Diskussion von Definitions-Bereichen zu vermeiden soll hier die Einschränkung $(L \downharpoonright \boldsymbol{\mathcal{D}})$ *einer Klasse* L *- üblicherweise: einer reellwertigen Funktion mehrerer reelleer Veränderlicher - auf eine Menge* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *betrachtet werden. Es gilt bekanntlich* $(L \downharpoonright \boldsymbol{\mathcal{D}}) = L \cap (\boldsymbol{\mathcal{D}} \times \mathcal{U}) = \{(\lambda, \mu) \in L : \lambda \in \boldsymbol{\mathcal{D}}\}$.

L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $\boldsymbol{\mathcal{D}}$

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq \boldsymbol{\mathcal{D}}$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{1+2s}$.
3. $(L \downharpoonright \boldsymbol{\mathcal{D}}) \in \mathsf{C}^1(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R})$.
4. $\nabla_{\mathtt{v}}\,(L \downharpoonright \boldsymbol{\mathcal{D}}) \in \mathsf{C}^1(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^s)$.

Notationen 4. Besteht im Kontext kein Zweifel über die aktuelle Lagrange-Funktion L mit s Freiheitsgraden auf $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, so wird der Nullvektor

$$\overbrace{(0,\ldots,0)}^{s \text{ Koordinaten}} \quad ,$$

gleich $\vec{0}$ gesetzt. Somit ist $\vec{0}^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}}$ die konstante Funktion auf $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ mit Wert $\vec{0}$. Der $j$te Einheitsvektor, $j = 1,\ldots,s$, im $\mathbb{R}^s$ wird mit $(\mathtt{e}j)$ bezeichnet. Es gilt also

$$(\mathtt{e}j)_i = \delta_{j|i} = \text{Kronecker-Delta}, \quad j,i = 1,\ldots,s.$$

Die konstante Funktion auf $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ mit Wert $(\mathtt{e}j)$, $j = 1,\ldots,s$, ist $(\mathtt{e}j)^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Notationen 5. Es bestehe weiterhin kein Zweifel über die aktuelle Lagrange-Funktion L mit s Freiheitsgraden auf $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, Die Projektion auf die erste Koordinate von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ wird mit

$$\mathtt{t} : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}, \quad \mathtt{t}(t,x,v) = t,$$

bezeichnet. $\mathtt{t}[\boldsymbol{\mathcal{D}}]$ ist der

Zeitbereich von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Die Projektion von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ auf die zweite bis $(1+s)$te Koordinate von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ wird mit

$$\mathtt{x} : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^s, \quad \mathtt{x}(t,x,v) = x,$$

bezeichnet. $\mathtt{x}[\boldsymbol{\mathcal{D}}]$ ist der

Ortsraum von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$,

Die Projektion von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ auf die $(2+s)$te bis $(1+2s)$te Koordinate wird mit

$$\mathtt{v} : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^s, \quad \mathtt{v}(t,x,v) = v,$$

bezeichnet. $\mathtt{v}[\boldsymbol{\mathcal{D}}]$ ist der

Geschwindigkeitsraum von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Klarer Weise gilt

$$\mathtt{t} \in \mathsf{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R})$$

und

$$\mathtt{x}, \mathtt{v} \in \mathsf{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^s),$$

mit

$$\partial_{\mathtt{t}}\mathtt{t} = 1^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}}, \quad \partial_{\mathtt{t}}\mathtt{x} = \partial_{\mathtt{t}}\mathtt{v} = \vec{0}^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}},$$

und für $j = 1,\ldots,s$ gilt

$$\partial_{x_j}\mathtt{t} = 0^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}}, \quad \partial_{x_j}\mathtt{x} = (\mathtt{e}j)^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}}, \quad \partial_{x_j}\mathtt{v} = \vec{0}^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}},$$
$$\partial_{v_j}\mathtt{t} = 0^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}}, \quad \partial_{v_j}\mathtt{x} = \vec{0}^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}}, \quad \partial_{v_j}\mathtt{v} = (\mathtt{e}j)^{\mathbf{on}}\boldsymbol{\mathcal{D}}.$$

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: g^*c.

Ersterstellung: 24/11/13 **Letzte Änderung: 03/02/15**

Wie in **#249** *seien* $1 \leq s \in \mathbb{N}$ *und* $0 \neq \boldsymbol{\mathcal{D}}$ *eine offene Teilmenge des* $\mathbb{R}^{1+2s}$. *Für eine Kurve* $c \in \mathsf{C}^1(I : \mathbb{R}^s)$, I *echtes, reelles Intervall, sei* g^*c *definiert als*

$$g^*c = \{(\lambda, g(\lambda, c(\lambda), \dot{c}(\lambda))) : \lambda \in I\}.$$

Offensichtlich ist g^*c *eine Funktion, möglicher Weise*$= 0$. *Am häufigsten tritt die Situation*

$$(t, c(t), \dot{c}(t)) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}, \quad t \in I,$$

mit $(g \downharpoonleft \boldsymbol{\mathcal{D}})$ *=Einschränkung von* g *auf* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *ist eine Funktion von* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *in* $\mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, *auf. Hier gilt dann*

$$g^*c : I \to \mathbb{R}^m,$$

so dass es sich bei g^*c *um eine Kurve im* $\mathbb{R}^m$ *handelt. Falls zusätzlich für ein* $k \in \mathbb{N}$ *die Ausagen* $(g \downharpoonleft \boldsymbol{\mathcal{D}}) \in \mathsf{C}^k(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^m)$ *und* $c \in \mathsf{C}^{1+k}(I : \mathbb{R}^s)$ *gelten, dann folgt sogar*

$$g^*c \in \mathsf{C}^k(I : \mathbb{R}^m).$$

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Reelles Intervall. Echtes reelles Intervall.

Ersterstellung: 25/11/13 **Letzte Änderung: 27/11/14**

Die Bezeichnung "echtes reelles Intervall" ist möglicher Weise kein allgemein verbreiteter Begriff. Im Hinblick auf die Vorarbeiten des LWs können $\leq$ _Intervalle als bekannt voraus gesetzt werden. Da $\leq$ eine Relation in $\mathbb{S}$ ist und $\mathbb{R} \subset \mathbb{S}$ gilt, sind die reellen Intervalle - bei denen es sich natürlich um Teilmengen von $\mathbb{R}$ handelt - nicht mit den $\leq$ _Intervallen identisch. Präziser: jedes reelles Intervall ist ein $\leq$ _Intervall, aber nicht jedes $\leq$ _Intervall ist ein reelles Intervall. Reelle Intervalle sind genau die $\leq$ _Intervalle, die Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

I reelles Intervall

genau dann, wenn gilt:

1. I ist $\leq$ _Intervall.

2. $I \subseteq \mathbb{R}$.

Offenbar sind die reellen Intervalle genau die konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Unter den reellen Intervallen gibt es einelementige Mengen - etwa das reelle Intervall $[1|1]$ - und die leere Menge - etwa $]0|0[$. Derartige Intervalle werden nur in Ausnahmenfällen betrachtet. Von eigentlichem Interesse sind alle anderen reellen Intervalle, die als "echte" reelle Intervalle bezeichnet werden:

I echtes reelles Intervall

genau dann, wenn gilt:

1. I reelles Intervall.

2. Es gibt $s, t \in I$ mit $s \neq t$.

Offenbar sind die echten reelle Intervalle die mindestens zwei-elementigen reellen Intervalle und das sind genau die reellen Intervalle, die unendlich viele Elemente haben.

KLT: $\boldsymbol{\mathcal{D}}$*-Kurve.* $\Delta_{\texttt{elg}}(c, (L \downharpoonleft \boldsymbol{\mathcal{D}}))$.

Ersterstellung: 25/11/13 **Letzte Änderung: 03/02/15**

Notationen 1. Im Folgenden wird das Euklidische Skalarprodukt für $u, v \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, mit der Notation

$$\langle\, u \mid v \,\rangle_m = u_1 \cdot v_1 + \ldots + u_m \cdot v_m,$$

wobei $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$ und $+$ die Addition und $\cdot$ die Multiplikation ist, versehen. Besteht im jeweiligen Kontext kein Zweifel über $s =$Anzahl der Freiheitsgrade der aktuellen Lagrange-Funktion, so wird

$$\langle\, u \mid v \,\rangle = \langle\, u \mid v \,\rangle_s$$

gesetzt.

Im Rahmen der KLT sind interpretationsgemäß die Zustände des durch $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}$ *dargestellten Systems spezielle* s*-dimensionale Kurven. Diese Kurven sollen klassischer Weise - mindestens - zweimal stetig differenzierbar sein und sollen "überall in die Lagrange-Funktion* $(L \downharpoonleft \boldsymbol{\mathcal{D}})$ *eingesetzt" werden können. Diese Mindestanforderungen werden in der folgenden Begriffsbildung mathematisch exakt formuliert. Die Beschränkung auf echte reelle Intervalle als Defnitions-Bereiche ist dem traditionellen Kurvenbegriff geschuldet:*

$$c \text{ ist eine } \boldsymbol{\mathcal{D}}\text{−Kurve}$$

genau dann, wenn gilt:

1. $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall.

2. $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$.

3. Für alle $t \in \mathsf{dom}\, c$ gilt $(t, c(t), \dot{c}(t)) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Mit einfachen Hilfsmittel der Mengenlehre und der Analysis können vorliegende Aussagen bewiesen werden.

Es gelte:

$\rightarrow$) c ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$−Kurve.

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, c = J$.

Dann folgt:

a) $L^* c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$.

b) $(\partial_{\mathtt{t}} L)^* c \in \mathsf{C}(J : \mathbb{R})$.

c) $(\nabla_{\mathtt{x}} L)^* c \in \mathsf{C}(J : \mathbb{R}^s)$.

d) $(\nabla_{\mathtt{v}} L)^* c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}^s)$.

e) $(L^* c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} L)^* c + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* c \mid \dot{c}\,\rangle + \langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* c \mid \ddot{c}\,\rangle$.

f) $(L^* c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} L)^* c + \langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* c \mid \dot{c}\,\rangle^\bullet - \langle\, (((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* c)^\bullet - (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* c) \mid \dot{c}\,\rangle$

In Gleichung `f)` *tritt zum ersten Mal der Term*

$$\Delta_{\mathtt{elg}}(c, L) = ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* c)^\bullet - (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* c,$$

auf. Im Rahmen der KLT sind nur jene $\boldsymbol{\mathcal{D}}$*-Kurven mögliche Zustände des zu Grunde liegenden Systems, wenn* $\Delta_{\mathtt{elg}}(c, L)$ *konstant*$= 0$ *wird, so dass in gewissem Sinn* $\Delta_{\mathtt{elg}}(c, L)$ *die Abweichung von c von möglichen L-Zuständen angibt. Besteht im Kontext kein Zweifel über die aktuelle Lagrange-Funktion, so wird*

$$(\Delta_{\mathtt{elg}}\, c) = \Delta_{\mathtt{elg}}(c, L),$$

verwendet.

Ohne allzu viel Aufwand ergeben sich die vorliegenden Erkenntnisse.

Es gelte:

$\rightarrow$) c ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$−Kurve.

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, c = J$.

Dann folgt:

a) $(\Delta_{\mathtt{elg}}\, c) \in \mathsf{C}(J : \mathbb{R}^s)$.

b) $(L^* c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} L)^* c + \langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* c \mid \dot{c}\,\rangle^\bullet - \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}\, c) \mid \dot{c}\,\rangle$.

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: q ist WirkungsStationär.
q löst `(ELG)`.
Euler-Lagrange-Gleichungen.

Ersterstellung: 27/11/13 **Letzte Änderung: 03/02/15**

Notation. Falls $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, so wird der Abschluss von E bezüglich der Euklidischen Standard-Topologie mit $\overline{E}$ und das Innere von E bezüglich der selben Topologie mit E° bezeichnet. Ist $\phi : J \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, eine Kurve im $\mathbb{R}^m$ - also ist J ein echtes reelles Intervall und ist ϕ stetig - so ist der "Träger $\mathsf{spt}\phi$ von ϕ" gleich

$$\mathsf{spt}\phi = \overline{\{\omega \in J : 0 \neq \phi(\omega)\}}.$$

Im Rahmen der KLT werden bevorzugt jene $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurven betrachtet, die mögliche Bewegungen des zu Grunde liegenden Systems repräsentieren. Klarer Weise kommen hierfür nur bestimmte $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurven in Frage. In geradezu axiomatischer Weise wird die Forderung erhoben, dass nur "WirkungsStationär" e Kurven mögliche Bewegungen darstellen.

q ist WirkungsStationär

genau dann, wenn gilt:

1) q ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve.

2) Aus "$\phi \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$" und "$\mathsf{spt}\phi \subseteq (\mathsf{dom}\, q)^\circ$" und "$\mathsf{spt}\phi$ kompakt" folgt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathsf{dom}\, q} (L^*(q + \epsilon\phi) - L^*q) : \epsilon = 0.$$

Bemerkung. Da es sich bei q um eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve handelt, sind sowohl $\mathsf{dom}\, q$ als auch $(\mathsf{dom}\, q)^\circ$ echte reelle Intervalle. Der Begriff "kompakt" bezieht sich - natürlich - auf die Euklidische Topologie von $\mathbb{R}$. Unter den getroffenen Voraussetzungen an ϕ gibt es reelle Zahlen a, b mit $a < b$ und $\mathsf{spt}\phi \subseteq \,]a|b[\, \subseteq [a|b] \subseteq (\mathsf{dom}\, q)^\circ \subseteq \mathsf{dom}\, q$. Hieraus folgt mit einfachen Kompaktheitsargumenten der reellen Analysis, dass es ein - klarer Weise von $q, \phi, \boldsymbol{\mathcal{D}}$ abhängiges - positives $\overline{\epsilon}$ gibt, so dass $q + \epsilon\phi$ eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve für alle ϵ mit $|\epsilon| \leq \overline{\epsilon}$ ist. Im Speziellen handelt es sich für diese ϵ bei $L^*(q + \epsilon\phi)$ um eine stetige reelle Funktion. Wegen $L^*(q + \epsilon\phi) = L^*q$ auf $(\mathsf{dom}\, q) \setminus (\mathsf{spt}\phi)$ und $\mathsf{spt}\phi \subseteq [a|b]$ gilt für alle $0 \neq |\epsilon| \leq \overline{\epsilon}$,

$$\int_{\mathsf{dom}\, q} (L^*(q + \epsilon\phi) - L^*q) : \epsilon = \int_{[a|b]} (L^*(q + \epsilon\phi) - L^*q) : \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Für praktische Zwecke ist die Definition von "WirkungsStationär" wenig hilfreich. Wie sich bald herausstellt, führt die Ausführung des Grenzwerts $\epsilon \to 0$ auf die "Euler-Lagrange-Gleichungen", die, wenn kein Zweifel über die zu Grunde liegende Lagrange-Funktion besteht, mit "`(ELG)`*" angesprochen werden.*

$$q \text{ löst } \texttt{(ELG)}$$

genau dann, wenn gilt:

1) q ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve.

2) $((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet = (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$.

Bemerkung. Da es sich bei q um eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve handelt, gelten mit $J = \mathsf{dom}\, q$ die bereits an anderer Stelle fest gestellten Aussagen $(\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q \in \mathsf{C}(J : \mathbb{R}^s)$ und $(\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}^s)$. Also ist die Gleichung "$((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet = (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$" äquivalent zu

$$((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet(t) = ((\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q)\,(t), \quad t \in J,$$

so dass die Ableitung von $(\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q$ punktweise für alle $t \in J$ gleich $(\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$ ist. Offenbar handelt es sich bei $((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet = (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$ um ein System von s algebraischen Gleichung *oder* um ein System von s DifferentialGleichungen erster Ordnung in q *oder* um ein System von s DifferentialGleichungen zweiter Ordnung in q - und gelegentlich treten komponentenweise Kombinationen hiervon auf, so dass mitunter mit differential-algebraischen Systemen oder mit singulären DifferentialGleichungs-Systemen zu rechnen ist. In vielen Fällen treten die Komponenten der zweiten Ableitung von q auf, gelegentlich aber nicht alle.

Die Aussagen `i)`, `ii)` sind äquivalent:

`i)` q ist WirkungsStationär.

`ii)` q löst `(ELG)`.

Beweis. $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ Aus "q ist WirkungsStationär" folgt, dass q eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve ist. Sei $J = \mathsf{dom}\, q$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a|b] \subseteq J^\circ$ und sei $\phi \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^s)$ mit $\mathsf{spt}\phi \subseteq [a|b]$. Dann fällt es nicht allzu schwer, mit Hilfe von üblichen Kompaktheitsargumenten und dem Satz von Lebesgue die Aussage

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_J (L^*(q+\epsilon\phi) - L^*q) : \epsilon = \int_{[a|b]} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q \mid \phi \,\rangle_s + \left\langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \mid \dot{\phi} \,\right\rangle_s,$$

herzuleiten, woraus wegen

$$\left\langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \mid \dot{\phi} \,\right\rangle_s = (\langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \mid \phi \,\rangle_s)^\bullet - \langle\, ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet \mid \phi \,\rangle_s,$$

unter Ausnützung von $\langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \mid \phi \,\rangle_s \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$, von $\phi(a) = \phi(b) = 0$ und unter Einsatz der Tatsache, dass es sich bei q um eine WirkungsStationäre Kurve handelt, die Gleichung

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_J (L^*(q+\epsilon\phi) - L^*q) : \epsilon = \int_{[a|b]} \langle\, ((\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q - ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet \mid \phi \,\rangle_s = 0,$$

folgt. Diese Gleichung gilt nun "durch Beweglich-Machen von ϕ" für alle $\phi \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^s)$ mit $\mathsf{spt}\phi \subseteq [a|b]$, so dass die stetige Funktion $((\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q - ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet$ auf $[a|b]$ punktweise gleich Null sein muss.
Diese Erkenntnis gilt aber - nun durch "Beweglich-Machen von $[a|b]$" - nicht nur für das vorab gewählte Intervall $[a|b]$, sondern für jedes kompakte TeilIntervall von J°. Also $((\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q - ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet = 0$ auf J°, woraus neuerlich wegen der Stetigkeit von $((\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q - ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet$ die Gleichung $((\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q - ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet = 0$ auf dem gesamten Intervall J folgt. Hieraus ergibt sich

$$((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^\bullet = (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q.$$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ Aus der Voraussetzung "q löst `(ELG)`" folgt, dass es sich bei q um eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve handelt. Sei $J = \mathsf{dom}\, q$. Sei $\phi \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^s)$ mit $\mathsf{spt}\phi \subseteq J^\circ$ und $\mathsf{spt}\phi$ kompakt. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\mathsf{spt}\phi \subseteq]a|b[$ und $[a|b] \subseteq J^\circ$. Mit Hilfe von üblichen Kompaktheitsargumenten und dem Satz von Lebesgue ergibt sich

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_J (L^*(q+\epsilon\phi) - L^*q) : \epsilon = \int_{[a|b]} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q \mid \phi \,\rangle_s + \left\langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \mid \dot{\phi} \,\right\rangle_s,$$

woraus wegen

$$\left\langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \mid \dot{\phi} \,\right\rangle_s = (\langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \mid \phi \,\rangle_s)^{\bullet} - \langle\, ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^{\bullet} \mid \phi \,\rangle_s\,,$$

unter Ausnützung von $\langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q \mid \phi \,\rangle_s \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und von $\phi(a) = \phi(b) = 0$ die Gleichung

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_J (L^*(q + \epsilon\phi) - L^* q) : \epsilon = \int_{[a|b]} \langle\, ((\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q - ((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^{\bullet} \mid \phi \,\rangle_s\,,$$

folgt, woraus dank der Voraussetzung $((\nabla_{\mathtt{v}} L)^* q)^{\bullet} = (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$ auf J, also auch auf $[a|b]$, die Gleichung

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_J (L^*(q + \epsilon\phi) - L^* q) : \epsilon = 0,$$

erhalten wird. $\square$

Wenn die konstant$= 0$ *Funktion auf* E *mit* zo_E *bezeichnet wird, folgt ohne viel Weiteres ein Kriterium für Lösungen von* `ELG`.

> Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` sind äquivalent:
>
> `i)` q ist WirkungsStationär.
>
> `ii)` q löst `(ELG)`.
>
> `iii)` q ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve und $(\Delta_{\mathtt{elg}}\ q) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$.

Beweis. Die Beweise von $\boxed{\boxed{\mathtt{i)} \Rightarrow \mathtt{ii)}}}$ und $\boxed{\boxed{\mathtt{ii)} \Rightarrow \mathtt{i)}}}$ liegen bereits vor.

$\boxed{\boxed{\mathtt{ii)} \Rightarrow \mathtt{iii)}}}$ q ist als Lösung von `(ELG)` eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve mit $((\nabla_{\mathsf{v}} L)^* q)^\bullet = (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$ und beide Terme dieser Gleichung haben den Definitions-Bereich $\mathsf{dom}\, q$. Hieraus folgt $((\nabla_{\mathsf{v}} L)^* q)^\bullet - (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q = 0$ auf $\mathsf{dom}\, q$. Per definitionem gilt $(\Delta_{\mathtt{elg}}\ q) = ((\nabla_{\mathsf{v}} L)^* q)^\bullet - (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$.

$\boxed{\boxed{\mathtt{iii)} \Rightarrow \mathtt{ii)}}}$ Aus $(\Delta_{\mathtt{elg}}\ q) = ((\nabla_{\mathsf{v}} L)^* q)^\bullet - (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$ ergibt sich die Gleichung $((\nabla_{\mathsf{v}} L)^* q)^\bullet - (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$. q ist eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve. Also sind die Definitions-Bereiche von $((\nabla_{\mathsf{v}} L)^* q)^\bullet$ und von $(\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$ gleich $\mathsf{dom}\, q$. Somit $((\nabla_{\mathsf{v}} L)^* q)^\bullet = (\nabla_{\mathtt{x}} L)^* q$.

$\square$

Mit Hilfe von **#252** *wird gezeigt, dass* $(L^*q)^\bullet$ *für Lösungen von* `(ELG)` *besonders einfache Gestalt annimmt.*

Es gelte:

$\rightarrow)$ q löst `(ELG)`.

Dann folgt
$$(L^*q)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}}L)^*q + \langle\, (\nabla_{\mathtt{v}}L)^*q \mid \dot{q}\,\rangle^\bullet\,.$$

Beweis. q ist eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve. Somit gilt gemäß **#252**,

$$(L^*q)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}}L)^*q + \langle\, (\nabla_{\mathtt{v}}L)^*q \mid \dot{q}\,\rangle^\bullet - \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}\, q) \mid \dot{q}\,\rangle\,,$$

wobei die Definitions-Bereich aller hier auftretenden Terme gleich $\mathsf{dom}\,q$ sind. Da q eine Lösung von `(ELG)` ist gilt $(\Delta_{\mathtt{elg}}\, q) = \vec{0}_{\mathsf{dom}\,q}$. Also

$$\langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}\, q \mid \dot{q}\,\rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.$$

Es folgt
$$(L^*q)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}}L)^*q + \langle\, (\nabla_{\mathtt{v}}L)^*q \mid \dot{q}\,\rangle^\bullet\,.$$

□

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Kraftfeld $\mathtt{K}$. Impulsfeld $\mathtt{P}$. Änderungsrate $\mathtt{P}^*c$.

Ersterstellung: 29/11/13 **Letzte Änderung: 04/02/15**

Nun werden Kraft- und Impulsfeld in die KLT eingebracht.

$\mathtt{K}$ ist das Kraftfeld

genau dann, wenn

$$\mathtt{K} = \nabla_{\mathtt{x}}\,(L \downharpoonleft \boldsymbol{\mathcal{D}})\,.$$

Bemerkung. Klarer Weise hängt das Kraftfeld von L und von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ab. Das heißt, daß es kein "Kraftfeld an sich" gibt, sondern dass sich jede Lagrange-Funktion L via $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ihr eigenes Kraftfeld generiert. Die Abhängigkeit von L und von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ wird bei der Notation "$\mathtt{K}$" nicht berücksichtigt, weil im *Kontext* die zu Grunde liegende Lagrange-Funktion L und $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ fest gelegt sind. Werden in anderem Kontext mehrere Lagrange-Funktionen oder "mehrere $\boldsymbol{\mathcal{D}}$'s" betrachtet, so muss dann die entsprechende Abhängigkeit notiert werden.

Auf den Beweis des folgenden Satzes kann getrost verzichtet werden.

a) $\mathtt{K} \in \mathsf{C}(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^s)$.

b) Aus c ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve und $\mathsf{dom}\, c = J$ folgt

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(J : \mathbb{R}^s).$$

Bemerkung. Da $\mathtt{K}^*c$ nach Voraussetzung möglicher Weise "nur stetig" und nicht differenzierbar ist, wird auf eine Diskussion der Änderungsrate von $\mathtt{K}^*c$ bis auf Weiteres verzichtet.

$$\mathtt{P} \text{ ist das Impusfeld}$$

genau dann, wenn

$$\mathtt{P} = \nabla_{\mathtt{v}} (L \downharpoonleft \boldsymbol{\mathcal{D}}) \,.$$

Bemerkung. Klarer Weise hängt das Impulsfeld von L und von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ab, so dass die bei der Definition des Kraftfelds notierte Bemerkung sinngemäß auch für $\mathtt{P}$ gilt. Entsprechend der Definitionen von $\mathtt{K}, \mathtt{P}$ gilt für jede $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve c die Gleichung

$$(\Delta_{\mathtt{elg}}\, c) = (\mathtt{P}^* c)^{\bullet} - \mathtt{K}^* c.$$

Auf den Beweis des folgenden Satzes wird verzichtet.

a) $\mathtt{P} \in \mathsf{C}^1(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^s)$.

b) Aus c ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve und $\mathsf{dom}\, c = J$ folgt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = \mathtt{K}^* c + (\Delta_{\mathtt{elg}} c).$$

c) Aus s ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve und $\mathsf{dom}\, c = J$ folgt

$$\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle_s \,, \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \ddot{c} \,\rangle_s \,, \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle_s \in \mathsf{C}(J : \mathbb{R}),$$

und

$$\langle\, \mathtt{P}^* c \mid \dot{c} \,\rangle_s \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}),$$

und

$$\langle\, \mathtt{P}^* c \mid \dot{c} \,\rangle_s^\bullet = \langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle_s + \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \ddot{c} \,\rangle_s + \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle_s \,.$$

Da es sich bei $\mathtt{P}^*c$ *für* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$*-Kurven* c *um stetig differenzierbare Kurven im* $\mathbb{R}^s$ *handelt, kann die Änderungsrate von* $\mathtt{P}$ *längs derartiger Kurven* c *berechnet werden. Auf den Beweis wird verzichtet.*

Es gelte:

→) c ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve.

→) $i \in \{1, \ldots, s\}$.

→) $\mathtt{P}_i$ ist die i-te Koordinaten-Funktion von $\mathtt{P}$.

Dann folgt

$$(\mathtt{P}_i^* c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} \mathtt{P}_i)^* c + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} \mathtt{P}_i)^* c \mid \dot{c} \,\rangle_s + \langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} \mathtt{P}_i)^* c \mid \ddot{c} \,\rangle_s \,,$$

und

$$(\mathtt{P}_i^* c)^\bullet = \mathtt{K}_i^* c + (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i,$$

und

$$(\mathtt{P}_i^* c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} \mathtt{P}_i)^* c + \langle\, (\nabla_{\mathtt{v}} \mathtt{P}_i)^* c \mid \dot{c} \,\rangle_s^\bullet - \langle\, ((\nabla_{\mathtt{v}} \mathtt{P}_i)^* c)^\bullet - (\nabla_{\mathtt{x}} \mathtt{P}_i)^* c \mid \dot{c} \,\rangle_s \,.$$

Die Aussage `(ELG)` *kann nun in sehr kompakter Weise re-formuliert werden. Der einfache Beweis dieser Aussagen bleibt den Lesern überlassen.*

Die Aussagen `i)`, `ii)` sind äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` q ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve und es gilt

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q.$$

Bemerkung. Die Gleichung $(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q$ besagt, dass die Änderungsrate des mit q transportierten Impulsfeldes gleich dem mit q transportierten Kraftfeldes ist. Dies ist als Zweites Newtonsches Gesetz bekannt. Offenbar gelingt die Transformation von $(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q$ in ein explizites System von DifferentialGleichungen zweiter Ordnung in q, auf jeden Fall, wenn die Matrix $(\partial_{v_j} \mathtt{P}_i)_{j,i=1,\ldots,s}$ - die gleich der Hesse-Matrix bezüglich v von L, also gleich $(\partial_{v_j} \partial_{v_i} L)_{j,i=1,\ldots,s}$ ist - in jedem Punkt $(t, x, v) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ invertiert werden kann. Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig. Präziser gesprochen muss lokale Invertierbarkeit von $(\partial_{v_j} \partial_{v_i} L)_{j,i=1,\ldots,s}$ nur längs q verlangt werden.

Für Lösungen q von `(ELG)` *stellt sich die Änderungsrate von* $\langle\, \mathtt{P}^* q \mid \dot{q}\, \rangle_s$ *mit Hilfe des bisher Gezeigten recht einfach dar.*

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, q = J$.

Dann folgt:

a) $\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}^s)$.

b) $\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q}\, \rangle_s \in \mathsf{C}(J : \mathbb{R})$.

c) $\langle\, \mathtt{P}^* q \mid \dot{q}\, \rangle_s \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$.

d) $\langle\, \mathtt{P}^* q \mid \ddot{q}\, \rangle_s \in \mathsf{C}(J : \mathbb{R})$.

e) $\langle\, \mathtt{P}^* q \mid \dot{q}\, \rangle_s^{\bullet} = \langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{c}\, \rangle_s + \langle\, \mathtt{P}^* q \mid \ddot{c}\, \rangle_s$.

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Energiefeld $\mathtt{E}$. kEnergiefeld $\mathtt{T}$. pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.
Änderungsrate L^*c, $\mathtt{E}^*c$, $\mathtt{T}^*c$, $\mathbf{\Phi}^*c$.

Ersterstellung: 29/11/13 **Letzte Änderung: 04/02/15**

Die hier erscheinenden Definitionen des Energiefeldes, des kEnergiefeldes und des pEnergiefeldes sind für mich weniger direkt aus

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

ableitbar als etwa Kraft- und Impulsfeld. Aus dem entsprechenden Kontext von

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

wird mir nicht klar, ob die dort eingeführten Energien - Gesamtenergie, kinetische Energie, potentielle Energie - nur für "Standard-Lagrange-Funktionen", bei denen die Abhängigkeit von L von v in Form einer symmetrischen Bilinearform vorliegt und hiervon eine Funktion, die von t, x abhängt, abgezogen wird, gedacht ist oder allgemein gültig sein soll. Ich entscheide, dass die durch Abstraktion aus den Darlegungen gefundenen, hier zu spezifizierenden Definitionen allgemein gültig sein sollen. Andererseits bin ich mir nicht sicher, ob dies auf generelle Akzeptanz stößt. So vermeide ich die Begriffe "Gesamtenergie", "kinetische Energie" oder "potentielle Energie" und verwende statt dessen die unverfänglicheren Bezeichnungen "Energie(feld)", "kEnergie(feld)" oder "pEnergie(feld)". Für die angesprochenen "Standard-Lagrange-Funktionen" kann davon ausgegangen werden, dass das hier definierte Energiefeld mit der "Gesamtenergie", das kEnergiefeld mit der "kinetischen Energie" und das pEnergiefeld mit der "potentiellen Energie" übereinstimmt. In den anderen Fällen vermag ich nicht zu entscheiden.

$$\mathtt{E} \text{ ist das Energiefeld}$$

genau dann, wenn gilt

$$\mathtt{E} = \langle\, \mathtt{P} \mid \mathtt{v} \,\rangle_s - L.$$

$$\mathtt{T} \text{ ist das kEnergiefeld}$$

genau dann, wenn gilt

$$\mathtt{T} = \langle\, \mathtt{P} \mid \mathtt{v} \,\rangle_s : 2.$$

$$\mathbf{\Phi} \text{ ist das pEnergiefeld}$$

genau dann, wenn gilt

$$\mathbf{\Phi} = \langle\, \mathtt{P} \mid \mathtt{v} \,\rangle_s : 2 - L.$$

Bemerkung. Klarer Weise hängen $\mathtt{E}, \mathtt{T}, \mathbf{\Phi}$ von L und von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ab. Das heißt, dass es kein Energiefeld, kein kEnergiefeld und kein pEnergiefeld "an sich" gibt, sondern dass sich jede Lagrange-Funktion L via $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ihre eigenen Energiefelder $\mathtt{E}, \mathtt{T}, \mathbf{\Phi}$ generiert. Die Abhängigkeit von L und von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ wird bei der Notation "$\mathtt{E}, \mathtt{T}, \mathbf{\Phi}$" nicht berücksichtigt, so lange die zu Grunde liegende Lagrange-Funktion L und $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ durch den *Kontext* fest gelegt sind. Werden in anderem Kontext mehrere Lagrange-Funktionen oder "meherer $\boldsymbol{\mathcal{D}}$'s" betrachtet, so muss die entsprechende Abhängigkeit notiert werden.

Ohne einen allzu großen Verständnisverlust befürchten zu müssen kann auf den Beweis des folgenden Satzes verzichtet werden:

$\mathtt{E}, \mathtt{T}, \mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1(\boldsymbol{\mathcal{D}} : \mathbb{R})$ und es gilt

$=$	$L, \mathtt{E}$	$L, \mathtt{T}$	$L, \mathbf{\Phi}$	$\mathtt{E}, \mathtt{T}$	$\mathtt{E}, \mathbf{\Phi}$	$\mathtt{T}, \mathbf{\Phi}$
L	$*$	$*$	$*$	$-\mathtt{E} + 2\mathtt{T}$	$\mathtt{E} - 2\mathbf{\Phi}$	$\mathtt{T} - \mathbf{\Phi}$
$\mathtt{E}$	$*$	$-L + 2\mathtt{T}$	$L + 2\mathbf{\Phi}$	$*$	$*$	$\mathtt{T} + \mathbf{\Phi}$
$\mathtt{T}$	$(L + \mathtt{E}) : 2$	$*$	$L + \mathbf{\Phi}$	$*$	$\mathtt{E} - \mathbf{\Phi}$	$*$
$\mathbf{\Phi}$	$(-L + \mathtt{E}) : 2$	$-L + \mathtt{T}$	$*$	$\mathtt{E} - \mathtt{T}$	$*$	$*$

Bemerkung. Hier erscheinen vor allem die Formeln "$L = \mathtt{T} - \mathbf{\Phi}$" und "$\mathtt{E} = \mathtt{T} + \mathbf{\Phi}$" vertraut.

Bei der hier angegebenen Änderungsrate von L^*c, c ist eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve, wird auf **#252** *zurück gegriffen. Alle Resultate ergeben sich mit elementarer Analysis.*

Es gelte:

→) c ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve.

→) $\mathsf{dom}\, c = J$.

Dann folgt:

a) $L^*c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und

$$(L^*c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} L)^* c + \langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s + \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \ddot{c}\,\rangle_s\,,$$

$$(L^*c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} L)^* c + \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s^\bullet - \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle_s\,.$$

b) $\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = -(\partial_{\mathtt{t}} L)^* c + \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle_s\,,$$

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = (-\partial_{\mathtt{t}} L)^* c + \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s^\bullet - \langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s - \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \ddot{c}\,\rangle_s\,.$$

c) $\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \big(\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s + \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \ddot{c}\,\rangle_s + \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle_s\big) : 2,$$

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s^\bullet : 2.$$

d) $\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = {} & -(\partial_{\mathtt{t}} L)^* c \\ & - \big(\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s + \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \ddot{c}\,\rangle_s - \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle_s\big) : 2,\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = (-\partial_{\mathtt{t}} L)^* c + \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s^\bullet : 2 - \langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c}\,\rangle_s - \langle\, \mathtt{P}^* c \mid \ddot{c}\,\rangle_s\,.$$

Ist q nicht nur eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve, sondern löst q sogar `(ELG)`*, so vereinfachen sich die Formeln für die Änderungsraten von* $\mathtt{E}^*q, \mathtt{T}^*q, \boldsymbol{\Phi}^*q$*.*

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, q = J$.

Dann folgt:

`a)` $L^*q \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und

$$(L^*q)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q + \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s + \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \ddot{q}\,\rangle_s\,,$$

$$(L^*q)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q + \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s^\bullet\,.$$

`b)` $\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q,$$

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = (-\partial_{\mathtt{t}} L)^*q + \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s^\bullet - \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s - \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \ddot{q}\,\rangle_s\,.$$

`c)` $\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \big(\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s + \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \ddot{q}\,\rangle_s\big) : 2,$$

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s^\bullet : 2.$$

`d)` $\boldsymbol{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*q)^\bullet = -(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q - \big(\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s + \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \ddot{q}\,\rangle_s\big) : 2,$$

$$(\boldsymbol{\Phi}^*q)^\bullet = (-\partial_{\mathtt{t}} L)^*q + \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s^\bullet : 2 - \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q}\,\rangle_s - \langle\, \mathtt{P}^*q \mid \ddot{q}\,\rangle_s\,.$$

Bemerkung. Hier erscheint die Formel “$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$” am bemerkenswertesten. Die Änderungsrate der mit q transportierten Energie ist gleich der negativen, mit q transportierten zeitlichen Änderung von L. Im Speziellen ergibt sich hieraus für Systeme, deren Lagrange-Funktion “nicht explizit von der Zeit abhängt” - präziser: Systeme mit $\partial_{\mathtt{t}} L = 0$ -, dass die mit q transportierte Energie konstant ist. Die Änderungsrate der mit q transportierten kEnergie ist - stark verkürzend gesprochen - gleich der Hälfte der angreifenden Kraft, skalar mit der Geschwindigkeit multipliziert plus dem halben aktuellen Impuls, skalar mit der Beschleunigung multipliziert. Die Änderungsrate von $\boldsymbol{\Phi}^*q$ ergibt sich als Differenz der Änderungsraten von $\mathtt{E}^*q$ und $\mathtt{T}^*q$.

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: $\mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$.
$\langle\, z \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid w \,\rangle_m - \langle\, z \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid u \,\rangle_m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

Ersterstellung: 29/11/13 **Letzte Änderung: 13/01/15**

Notationen. Sei $1 \leq m \in \mathbb{N}$. Im Folgenden wird die Euklidische Norm für $u \in \mathbb{R}^m$ mit der Notation

$$\|u\|_m = \sqrt{\langle\, u \mid u \,\rangle_m} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_m^2},$$

wobei $u = (u_1, \ldots, u_m)$, versehen. Die Menge aller geordneten, zweidimensionalen Orthonormalsysteme im $\mathbb{R}^m$ wird mit

$$\mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : (\langle\, \lambda \mid \mu \,\rangle_m = 0) \wedge (\|\lambda\|_m = \|\mu\|_m = 1)\},$$

bezeichnet.
Es gilt stets $\mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$.
Es gilt $\mathsf{ONS2}(\mathbb{R}) = \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^1) = 0$.
Für $2 \leq m$ ist $\mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m)$ unendlich.

Sei $1 \leq m \in \mathbb{N}$. Im Folgenden ist für $x, y, u, v \in \mathbb{R}^m$ gelegentlich der Term

$$\langle\, z \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid v \,\rangle_m - \langle\, z \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid u \,\rangle_m = \mathtt{det} \begin{pmatrix} \langle\, z \mid u \,\rangle_m & \langle\, z \mid w \,\rangle_m \\ \langle\, y \mid u \,\rangle_m & \langle\, y \mid v \,\rangle_m \end{pmatrix}.$$

von Interesse. Falls $P_m(u, v)$ die Projektion (bezüglich der Euklidischen Norm im $\mathbb{R}^m$) von $\mathbb{R}^m$ auf $\mathsf{span}\{u, v\}$ ist, so gilt im Spezialfall $f_1, f_2 \in \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m)$ für $z, y \in \mathbb{R}^m$ wegen

$$P_m(f_1, f_2)(z) = \langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot f_1 + \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot f_2,$$
$$P_m(f_1, f_2)(y) = \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m \cdot f_1 + \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m \cdot f_2,$$

die "geometrische Interpretation"

$$\langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m - \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m$$
$$= (f_1, f_2)\text{-orientierter Flächeninhalt des von } P_m(f_1, f_2)(z),\ P_m(f_1, f_2)(y) \text{ in } \mathsf{span}\{f_1, f_2\} \text{ aufgespannten Parallelogramms.}$$

Im Speziellen gilt $\langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m - \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m = 0$ genau dann, wenn $P_m(f_1, f_2)(z)$ und $P_m(f_1, f_2)(y)$ linear abhängig sind.

Hinter dem folgenden Satz verbirgt sich ein allgemeiner "orientierter" Transformationssatz der linearen Algebra. Ein elementarer Beweis wird gegeben.

Es gelte:

→) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

→) $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m)$.

→) $\mathsf{span}\{f_1, f_2\} = \mathsf{span}\{g_1, g_2\}$.

→) $\langle\, g_1 \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, g_2 \mid f_2 \,\rangle_m - \langle\, g_1 \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, g_2 \mid f_1 \,\rangle_m = 1$.

Dann folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m - \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m \\ = \langle\, z \mid g_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid g_2 \,\rangle_m - \langle\, z \mid g_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid g_1 \,\rangle_m .\end{aligned}$$

Beweis. Aus $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m)$ und $\mathsf{span}\{f_1, f_2\} = \mathsf{span}\{g_1, g_2\}$ folgt ohne viel Zutun, dass es $\alpha, \beta \in [\,-\pi|\pi\,[$ mit

$$g_1 = \cos\alpha \cdot f_1 + \sin\alpha \cdot f_2, \quad g_2 = \cos\beta \cdot f_1 + \sin\beta \cdot f_2,$$

geben muss. Die Orthogonalitätsbedingung $\langle\, g_1 \mid g_2 \,\rangle_m = 0$ liefert $\cos(\alpha - \beta) = 0$, woraus wegen $\alpha - \beta \in \,]-2\pi|2\pi[\,$ die Aussage

$$\alpha = \beta + (1 + 2l) \cdot \pi : 2 \quad \text{für ein } l \in \{-2, -1, 0, 1\},$$

liefert. Es ergibt sich

$$\cos\alpha = (-1)^{1+l} \sin\beta, \quad \sin\alpha = (-1)^l \cos\beta,$$

und somit

$$g_1 = (-1)^{1+l} \sin\beta \cdot f_1 + (-1)^l \cos\beta \cdot f_2, \quad g_2 = \cos\beta \cdot f_1 + \sin\beta \cdot f_2.$$

Hieraus ergibt sich via Voraussetzung

$$\begin{aligned}1 = \langle\, g_1 \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, g_2 \mid f_2 \,\rangle_m - \langle\, g_1 \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, g_2 \mid f_1 \,\rangle_m \\ = (-1)^{1+l} \sin^2\beta - (-1)^l \cos^2\beta = (-1)^{1+l},\end{aligned}$$

so dass

$$g_1 = \sin\beta \cdot f_1 - \cos\beta \cdot f_2, \quad g_2 = \cos\beta \cdot f_1 + \sin\beta \cdot f_2.$$

Für $u, v \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{aligned}
&\langle\, z \mid g_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid g_2 \,\rangle_m - \langle\, z \mid g_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid g_1 \,\rangle_m \\
&\quad = \langle\, z \mid \sin\beta \cdot f_1 - \cos\beta \cdot f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid \cos\beta \cdot f_1 + \sin\beta \cdot f_2 \,\rangle_m \\
&\quad - \langle\, z \mid \cos\beta \cdot f_1 + \sin\beta \cdot f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid \sin\beta \cdot f_1 - \cos\beta \cdot f_2 \,\rangle_m \\
&= (\langle\, z \mid \sin\beta \cdot f_1 \,\rangle_m - \langle\, z \mid \cos\beta \cdot f_2 \,\rangle_m) \cdot (\langle\, y \mid \cos\beta \cdot f_1 \,\rangle_m + \langle\, y \mid \sin\beta \cdot f_2 \,\rangle_m) \\
&- (\langle\, z \mid \cos\beta \cdot f_1 \,\rangle_m + \langle\, z \mid \sin\beta \cdot f_2 \,\rangle_m) \cdot (\langle\, y \mid \sin\beta \cdot f_1 \,\rangle_m - \langle\, y \mid \cos\beta \cdot f_2 \,\rangle_m) \\
&\quad = \langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m \cdot (\sin\beta\cos\beta - \cos\beta\sin\beta) \\
&\quad + \langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m \cdot (\sin\beta\sin\beta + \cos\beta\cos\beta) \\
&\quad + \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m \cdot (-\cos\beta\cos\beta - \sin\beta\sin\beta) \\
&\quad + \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m \cdot (-\cos\beta\sin\beta + \sin\beta\cos\beta) \\
&\quad = \langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m \cdot (\sin^2\beta + \cos^2\beta) \\
&\quad + \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m \cdot (-\cos^2\beta - \sin^2\beta) \\
&\quad = \langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m - \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Vorliegender Satz ist ähnlich wie der soeben Bewiesene zu verifizieren.

Es gelte:

→) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

→) $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m)$.

→) $\mathsf{span}\{f_1, f_2\} = \mathsf{span}\{g_1, g_2\}$.

→) $\langle\, g_1 \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, g_2 \mid f_2 \,\rangle_m - \langle\, g_1 \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, g_2 \mid f_1 \,\rangle_m = -1$.

Dann folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
&\langle\, z \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_2 \,\rangle_m - \langle\, z \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid f_1 \,\rangle_m \\
&\qquad = -\big(\ \langle\, z \mid g_1 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid g_2 \,\rangle_m - \langle\, z \mid g_2 \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid g_1 \,\rangle_m\ \big).
\end{aligned}$$

Wesentlich einfacher - mit demnach verzichtbaren Beweis - gelingt der Nachweis des folgenden Satzes.

Es gelte:

$\rightarrow$) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $z, y, u, w \in \mathbb{R}^m$

Dann folgt:

a) $\langle\, z \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid w \,\rangle_m - \langle\, z \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid u \,\rangle_m$
$= -\big(\, \langle\, z \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid u \,\rangle_m - \langle\, z \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid w \,\rangle_m \,\big)$.

b) $\langle\, z \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid w \,\rangle_m - \langle\, z \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid u \,\rangle_m$
$= -\big(\, \langle\, y \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, z \mid w \,\rangle_m - \langle\, y \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, z \mid u \,\rangle_m \,\big)$.

c) $\langle\, z \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid w \,\rangle_m - \langle\, z \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, y \mid u \,\rangle_m$
$= \langle\, y \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, z \mid u \,\rangle_m - \langle\, y \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, z \mid w \,\rangle_m$.

KLT: (u,w)Drehimpulsdichte $\mathtt{I}(u,w)$.
(u,w)Drehmomentdichte $\mathtt{M}(u,w)$.
Änderungsrate von $(\mathtt{I}(u,w))^* c$.

Ersterstellung: 21/12/13 **Letzte Änderung: 04/02/15**

In der Literatur sind "Drehimpuls" und "Drehmoment" dreidimensioale Größen, die Teilchen im Raum zugeordnet werden. Im vorliegenden Essay wird ein anderer Zugang verfolgt, indem koordinatenweise Versionen von "Drehimpuls" und "Drehmoment" für s Freiheitsgrade dargestellt werden. Die Spezialisierung auf dreidimensioale Situationen erfolgt später.

$$\mathtt{I}(u,w) \text{ ist die } (u,w)\text{Drehimpulsdichte}$$

genau dann, wenn gilt

$$\mathtt{I}(u,w) = \langle\, \mathtt{x} \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P} \mid w \,\rangle_s - \langle\, \mathtt{x} \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P} \mid u \,\rangle_s\,.$$

$$\mathtt{M}(u,w) \text{ ist die } (u,w)\text{Drehmomentdichte}$$

genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned}\mathtt{M}(u,w) = \langle\, \mathtt{v} \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P} \mid w \,\rangle_s - \langle\, \mathtt{v} \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P} \mid u \,\rangle_s &\\ + \langle\, \mathtt{x} \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{K} \mid w \,\rangle_s - \langle\, \mathtt{x} \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{K} \mid u \,\rangle_s\,.&\end{aligned}$$

Bemerkung. $\mathtt{I}(u,w)$ und $\mathtt{M}(u,w)$ hängen von L und von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ab. Also gibt es keine Drehimpulsdichte und keine Drehmomentdichte "an sich" . Jede Lagrange-Funktion L und jede Menge $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ generieren eigene, von L und von $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ (und von u,w) abhängende (u,w)Drehimpulsdichten und (u,w)Drehmomentdichten.

Mit einfachen mengetheoretischen und analytischen Methoden sind die folgenden Aussagen leicht zu beweisen. Deswegen wir auf einen Beweis verzichtet.

a) $\mathtt{I}(u,w), \mathtt{M}(u,w)$ Funktion.

b) $\mathsf{dom}\,\mathtt{I}(u,w) = \boldsymbol{\mathcal{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{dom}\,\mathtt{M}(u,w) = \boldsymbol{\mathcal{D}} \quad \Leftrightarrow \quad u, w \in \mathbb{R}^s$.

c) $\mathsf{dom}\,\mathtt{I}(u,w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{dom}\,\mathtt{M}(u,w) = 0$
$\Leftrightarrow \quad (u \notin \mathbb{R}^s) \vee (w \notin \mathbb{R}^s)$.

d) $\mathsf{ran}\,\mathtt{I}(u,w), \mathsf{ran}\,\mathtt{M}(u,w) \subseteq \mathbb{R}$.

e) $\mathtt{I}(u,w)(t,x,v)$
$$= \langle\, x \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid w \,\rangle_s - \langle\, x \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid u \,\rangle_s.$$

f) $\mathtt{M}(u,w)(t,x,v)$
$$\begin{aligned} = \; & \langle\, v \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid w \,\rangle_s - \langle\, v \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid u \,\rangle_s \\ & + \langle\, x \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{K}(t,x,v) \mid w \,\rangle_s - \langle\, x \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{K}(t,x,v) \mid u \,\rangle_s. \end{aligned}$$

Bemerkung. Sind $\mathtt{v}$ und $\mathtt{P}$ auf $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ linear abhängig, so folgt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\langle\, \mathtt{v} \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P} \mid w \,\rangle_s - \langle\, \mathtt{v} \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{P} \mid u \,\rangle_s = 0 \quad \text{auf } \boldsymbol{\mathcal{D}},$$

und $\mathtt{M}$ nimmt die vertrautere Form

$$\mathtt{M}(u,w) = \langle\, \mathtt{x} \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{K}(t,x,v) \mid w \,\rangle_s - \langle\, \mathtt{x} \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, \mathtt{K}(t,x,v) \mid u \,\rangle_s\,,$$

an.

Die Erkenntinisse von **#256** *erlauben es ohne Weiteres den verzichtbaren Nachweis der folgenden drei Sätze zu führen.*

a) $\mathtt{I}(u,w) = -\mathtt{I}(w,u)$.

b) $\mathtt{M}(u,w) = -\mathtt{M}(w,u)$.

Es gelte:

→) $\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\} \in \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^s)$.

→) $\mathsf{span}\{f_1, f_2\} = \mathsf{span}\{g_1, g_2\}$.

→) $\langle\, g_1 \mid f_1 \,\rangle_s \cdot \langle\, g_2 \mid f_2 \,\rangle_s - \langle\, g_1 \mid f_2 \,\rangle_s \cdot \langle\, g_2 \mid f_1 \,\rangle_s = 1$.

Dann folgt:

a) $\mathtt{I}(f_1, f_2) = \mathtt{I}(g_1, g_2)$.

b) $\mathtt{M}(f_1, f_2) = \mathtt{M}(g_1, g_2)$.

Es gelte:

→) $\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\} \in \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^s)$.

→) $\mathsf{span}\{f_1, f_2\} = \mathsf{span}\{g_1, g_2\}$.

→) $\langle\, g_1 \mid f_1 \,\rangle_s \cdot \langle\, g_2 \mid f_2 \,\rangle_s - \langle\, g_1 \mid f_2 \,\rangle_s \cdot \langle\, g_2 \mid f_1 \,\rangle_s = -1$.

Dann folgt:

a) $\mathtt{I}(f_1, f_2) = -\mathtt{I}(g_1, g_2)$.

b) $\mathtt{M}(f_1, f_2) = -\mathtt{M}(g_1, g_2)$.

Mit einfachem, verzichtbarem Beweis wird die Änderungsrate von $(\mathtt{I}(u,w))^*c$ *- hier sind* $u,w \in \mathbb{R}^s$ *und* c *ist eine* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$*-Kurve - ermittelt. Das Resultat wird ohne Weiteres auf Lösungen* q *von* `(ELG)` *spezialisiert. Eine Untersuchung der Änderungsrate von* $\mathtt{M}(u,w)$ *erübrigt sich wegen der nicht garantierten Differenzierbarkeit von* $\mathtt{M}(u,w)$*.*

`a)` Aus "c ist $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve" und "$\mathsf{dom}\, c = J$" und "$u,w \in \mathbb{R}^s$" folgt

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(J:\mathbb{R}), \quad \mathtt{M}(u,w)^*c \in \mathsf{C}(J:\mathbb{R})$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = {} & \mathtt{M}(u,w)^*c \\ & + \langle\, c \mid u \,\rangle_s \cdot \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid w \,\rangle_s - \langle\, c \mid w \,\rangle_s \cdot \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid u \,\rangle_s .\end{aligned}$$

`b)` Aus "q löst `(ELG)`" und "$\mathsf{dom}\, q = J$" und "$u,w \in \mathbb{R}^s$" folgt

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(J:\mathbb{R}), \quad \mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(J:\mathbb{R})$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

Bemerkung. Falls q Lösung von `(ELG)` ist und falls $u,w \in \mathbb{R}^s$, dann ist via `b)` die Änderungsrate der mit q transportierten (u,w)Drehimpulsdichte gleich der mit q transportierten (u,w)Drehmomentdichte.

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

Mengenlehre: E-Schnitt von x. $(E \;\mathsf{sv}\; x)$.
Einschränkung von x auf E. … $(x \downharpoonleft E)$.
x_{fkt}.
$E\cup$Verschiebung von x. $x(E \cup .)$.
$E\cap$Verschiebung von x. … $x(E \cap .)$.

Ersterstellung: 30/11/13 **Letzte Änderung: 19/05/14**

258-1. Es werden hier x-Schnitte von y vorgestellt. Die Begriffsbildung zielt auf "Funktionen mehrer Veränderlicher" ab, bei denen "gewisse Variable des Definitions-Bereichs fest gehalten werden" und "andere Variable des Definitions-Bereichs variiert werden". Die genaueren Zusammenhänge, insbesondere beim Umgang mit Funktionen aus ${}^n\mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, werden später erläutert. Nunmehrige Definition liefert gelegentlich Ungewöhnliches. So gilt für $n < m \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\, f$ und f Funktion das geordnete Paar $(m, f(m))$ im n-Schnitt von f enthalten.

258-1(Definition)

1) $(E \;\mathsf{sv}\; x)$

$$= 258.0(E, x) = \{(\lambda, \mu) : (E \subseteq \lambda) \wedge ((\lambda, \mu) \in x)\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (E \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi)))\}.$$

2) "**$\mathfrak{C}$ ist E-Schnitt von x**" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = (E \;\mathsf{sv}\; x).$$

258-2. In der Aufwärmrunde für den Umgang mit $(E_{\mathtt{sv}}\,x)$ wird Erwartetes präsentiert.

258-2(Satz)

a) $(E_{\mathtt{sv}}\,x)$ *ist E-Schnitt von x.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ist E-Schnitt von x" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **258-2** a)
Aus "$(E_{\mathtt{sv}}\,x) = (E_{\mathtt{sv}}\,x)$"
folgt via **258-1(Def)**: $(E_{\mathtt{sv}}\,x)$ ist E-Schnitt von x.

b) VS gleich $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ist E-Schnitt von x.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}\ldots$ ist E-Schnitt von $x\ldots$"
folgt via **258-1(Def)**: $\mathfrak{C} = (E_{\mathtt{sv}}\,x)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\ldots\mathfrak{D}$ ist E-Schnitt von x"
folgt via **258-1(Def)**: $\mathfrak{D} = (E_{\mathtt{sv}}\,x)$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

258-3. Nun geht es um das "Element-Sein" im E-Schnitt von x.

258-3(Satz)

a) *Aus "$p \in (E \;{}_{\mathtt{sv}}\; x)$" folgt "$\exists \Omega, \Phi : (E \subseteq \Omega) \wedge (p = (\Omega, \Phi) \in x)$".*

b) *"$(p, q) \in (E \;{}_{\mathtt{sv}}\; x)$" genau dann, wenn "$E \subseteq p$" und "$(p, q) \in x$".*

Beweis **258-3**

$\{(\lambda, \mu) : (E \subseteq \lambda) \wedge ((\lambda, \mu) \in x)\}$ **258-1(Def)**

---

a) VS gleich $p \in (E \;{}_{\mathtt{sv}}\; x)$.

1: Via **258-1(Def)** gilt: $(E \;{}_{\mathtt{sv}}\; x) = \{(\lambda, \mu) : (E \subseteq \lambda) \wedge ((\lambda, \mu) \in x)\}$.

2: Aus VS gleich "$p \in (E \;{}_{\mathtt{sv}}\; x)$" und
aus 1
folgt: $p \in \{(\lambda, \mu) : (E \subseteq \lambda) \wedge ((\lambda, \mu) \in x)\}$.

3: Aus 2"$p \in \{(\lambda, \mu) : (E \subseteq \lambda) \wedge ((\lambda, \mu) \in x)\}$"
folgt via **258-1(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : (E \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$.

4: Aus 3
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (E \subseteq \Omega) \wedge (p = (\Omega, \Phi) \in x)$.

Beweis **258-3** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(p, q) \in (E \;{}_{\texttt{sv}}\; x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in (E \;{}_{\texttt{sv}}\; x)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in (E \;{}_{\texttt{sv}}\; x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega, \Phi : (E \subseteq \Omega) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Phi) \in x).$$

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots (p, q) = (\Omega, \Phi) \in x$"
folgt: $\boxed{(p, q) \in x}$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (p, q) = (\Omega, \Phi) \ldots$" und
aus `1.1`"(p, q) Menge"
folgt via **IGP**: $p = \Omega$.

`3:` Aus `2.2`"$p = \Omega$" und
aus `1.2`"$\ldots E \subseteq \Omega \ldots$"
folgt: $\boxed{E \subseteq p}$

Beweis **258-3** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E \subseteq p) \wedge ((p, q) \in x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in x$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$.

`1.3:` Via **258-1(Def)** gilt:
$$(E \,_{\mathtt{sv}}\, x) = \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (E \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi)))\}.$$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq p \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega = p \ldots$"
folgt: $E \subseteq \Omega$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, q)$.

`3.1:` Aus `2.2`
folgt: $(p, q) = (\Omega, \Phi)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$(\Omega, \Phi) = (p, q)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in x$"
folgt: $(\Omega, \Phi) \in x$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `2.1`"$E \subseteq \Omega$",
aus `3.2`"$(\Omega, \Phi) \in x$",
aus `3.1`"$(p, q) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `1.1`"(p, q) Menge"
folgt: $(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (E \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (E \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi)))\}$" und
aus `1.3`
folgt: $(p, q) \in (E \,_{\mathtt{sv}}\, x)$.

□

258-4. Nach umständlichen Vorbereitungen kann nun der E-Schnitt von x genauer unter die Lupe genommen werden.

258-4(Satz)

a) $(E \mathbin{\mathtt{sv}} x) \subseteq x$.

b) $\mathsf{dom}\,(E \mathbin{\mathtt{sv}} x) \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

c) $\mathsf{ran}\,(E \mathbin{\mathtt{sv}} x) \subseteq \mathsf{ran}\,x$.

d) $(E \mathbin{\mathtt{sv}} x)$ *Relation.*

Beweis **258-4** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)$.
`1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)$" folgt via **258-3**:	$\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi) \in x$.
`2:` Aus `1` folgt:	$\alpha \in x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(E_{\texttt{sv}}\, x) \subseteq x$.

`bc)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(E_{\texttt{sv}}\, x) \subseteq x$.

`2.b):` Aus `1` "$(E_{\texttt{sv}}\, x) \subseteq x$" folgt via **7-10**: $\mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x) \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2.c):` Aus `1` "$(E_{\texttt{sv}}\, x) \subseteq x$" folgt via **7-10**: $\mathsf{ran}\,(E_{\texttt{sv}}\, x) \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)$.
Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)$" folgt via **258-3**:	$\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $(E_{\texttt{sv}}\, x)$ Relation.

$\square$

258-5. Hier wird das "Element-Sein" in $\mathsf{dom}\,(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$, $\mathsf{ran}\,(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$ diskutiert.

258-5(Satz)

a) *"$p \in \mathsf{dom}\,(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$" genau dann, wenn "$E \subseteq p \in \mathsf{dom}\,x$".*

b) *Aus "$p \in \mathsf{ran}\,(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$" folgt "$\exists\Omega : (E \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, p) \in x)$".*

c) *Aus "$E \subseteq p$" und "$(p, q) \in x$" folgt "$q \in \mathsf{ran}\,(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$".*

Beweis **258-5** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \in \mathsf{dom}\,(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{dom}\,(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (p, \Omega) \in (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$.

2: Aus 1"$\ldots (p, \Omega) \in (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$"
folgt via **258-3**: $(E \subseteq p) \wedge ((p, \Omega) \in x)$.

3.1: Aus 2
folgt: $\boxed{E \subseteq p}$

3.2: Aus 2"$\ldots (p, \Omega) \in x$"
folgt via **7-5**: $\boxed{p \in \mathsf{dom}\,x}$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $E \subseteq p \in \mathsf{dom}\,x$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (p, \Omega) \in x$.

2: Aus VS gleich "$E \subseteq p \ldots$",
aus 1"$\ldots (p, \Omega) \in x$"
folgt via **258-3**: $(p, \Omega) \in (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$.

3: Aus 2"$(p, \Omega) \in (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)$.

<u>Beweis **258-5**</u> `b)` `VS` gleich $p \in \mathsf{ran}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{ran}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x)$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, p) \in (E_{\mathtt{sv}}\,x)$.

`2:` Aus `1`“$\ldots (\Omega, p) \in (E_{\mathtt{sv}}\,x)$”
folgt via **258-3**: $(E \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, p) \in x)$.

`3:` Aus `1`“$\exists \Omega \ldots$” und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (E \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, p) \in x)$.

`c)` `VS` gleich $(E \subseteq p) \wedge ((p, q) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$E \subseteq p \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots (p, q) \in x$”
folgt via **258-3**: $(p, q) \in (E_{\mathtt{sv}}\,x)$.

`2:` Aus `1`“$(p, q) \in (E_{\mathtt{sv}}\,x)$”
folgt via **7-5**: $q \in \mathsf{ran}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x)$.

□

258-6. Der E-Schnitt einer Funktion ist eine Funktion.

258-6(Satz)

Aus “f Funktion” folgt “$(E \mathtt{sv} f)$ Funktion”.

Beweis **258-6**

1: Via **258-4** gilt: $(E \mathtt{sv} f) \subseteq f$.

2: Aus 1 “$(E \mathtt{sv} f) \subseteq f$” und
aus →) “f Funktion”
folgt via **18-36**: $(E \mathtt{sv} f)$ Funktion.

□

258-7. Es gilt $(E_{\texttt{sv}}\, x)\,[y] \subseteq x[y]$ und demnach $x(p) \subseteq (E_{\texttt{sv}}\, x)\,(p)$.

258-7(Satz)

a) $(E_{\texttt{sv}}\, x)\,[y] \subseteq x[y]$.

b) $x(p) \subseteq (E_{\texttt{sv}}\, x)\,(p)$.

Beweis **258-7** a)

1: Via **258-4** gilt: $(E_{\texttt{sv}}\, x) \subseteq x$.

2: Aus 1 "$(E_{\texttt{sv}}\, x) \subseteq x$"
folgt via **8-9**: $(E_{\texttt{sv}}\, x)\,[y] \subseteq x[y]$.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(E_{\texttt{sv}}\, x)\,[\{p\}] \subseteq x[\{p\}]$.

2: Aus 1 "$(E_{\texttt{sv}}\, x)\,[\{p\}] \subseteq x[\{p\}]$"
folgt via **17-6**: $x(p) \subseteq (E_{\texttt{sv}}\, x)\,(p)$.

□

258-8. Für alle $y \subseteq \mathsf{dom}\;(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)$ gilt $(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y] = x[y]$.

258-8(Satz)

Aus "$y \subseteq \mathsf{dom}\;(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)$" *folgt* "$(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y] = x[y]$".

Beweis **258-8** `VS` gleich $y \subseteq \mathsf{dom}\;(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)$.

`Thema1.1` $\alpha \in x[y]$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x[y]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq \mathsf{dom}\;(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathsf{dom}\;(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)$.

`4:` Aus `3`"$\Omega \in \mathsf{dom}\;(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)$"
folgt via **258-4**: $E \subseteq \Omega$.

`5:` Aus `4`"$E \subseteq \Omega$",
aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **258-3**: $(\Omega, \alpha) \in (E\;_{\mathtt{sv}}\;x)$.

`6:` Aus `5`"$(\Omega, \alpha) \in (E\;_{\mathtt{sv}}\;x)$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in y \ldots$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in (E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[y]) \Rightarrow (\alpha \in (E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x[y] \subseteq (E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y]$"

`1.2:` Via **258-7** gilt: $(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y] \subseteq x[y]$.

`2:` Aus `1.2`"$(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y] \subseteq x[y]$" und
aus `A1` gleich "$x[y] \subseteq (E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(E\;_{\mathtt{sv}}\;x)\,[y] = x[y]$.

$\square$

258-9. Hier wird der Zusammenhang zwischen $(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p)$ und $x(p)$ diskutiert.

258-9(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(E_{\mathsf{sv}}\, x)$" *folgt* "$(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) = x(p)$".

b) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\mathsf{sv}}\, x)$" *und* "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt "$(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) \neq x(p)$".

c) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt "$(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}$" *und* "$(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) = x(p)$".

d) *Aus* "$(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) = x(p)$" *folgt* "$(p \in \mathsf{dom}\,(E_{\mathsf{sv}}\, x)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$".

e) *Aus* "$(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) \neq x(p)$"
folgt "$(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}$" *und* "$p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\mathsf{sv}}\, x)$"
und "$p \in \mathsf{dom}\, x$".

Beweis **258-9** `a)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\,(E_{\mathsf{sv}}\, x)$.

1: Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\,(E_{\mathsf{sv}}\, x)$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq \mathsf{dom}\,(E_{\mathsf{sv}}\, x)$.

2: Aus 1"$\{p\} \subseteq \mathsf{dom}\,(E_{\mathsf{sv}}\, x)$"
folgt via **258-8**: $(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,[\{p\}] = x[\{p\}]$.

3: $$(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap (E_{\mathsf{sv}}\, x)\,[\{p\}] \stackrel{2}{=} \bigcap x[\{p\}] \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} x(p).$$

4: Aus 3
folgt: $(E_{\mathsf{sv}}\, x)\,(p) = x(p)$.

<u>Beweis **258-9**</u> `b)` `VS` gleich $(p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x)\ldots$"
folgt via **17-4**: $(E_{\mathtt{sv}}\,x)\,(p) = \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **17-5**: $x(p) \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(E_{\mathtt{sv}}\,x)\,(p) \neq x(p)$.

`c)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x)$.

`1:` Via **258-4** gilt: $\mathsf{dom}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x) \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x) \subseteq \mathsf{dom}\,x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **0-4**: $p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x)$.

`3.1:` Aus `2`"$p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\mathtt{sv}}\,x)$"
folgt via **17-4**: $(E_{\mathtt{sv}}\,x)\,(p) = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **17-4**: $x(p) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $((E_{\mathtt{sv}}\,x)\,(p) = \mathcal{U}) \wedge ((E_{\mathtt{sv}}\,x)\,(p) = x(p))$.

Beweis **258-9** `d)` `VS` gleich $(E_{\texttt{sv}}\, x)\,(p) = x(p)$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x)$.

Aus `1.1.Fall` “$p \in \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x)$”
folgt: $(p \in \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x)$.

`2:` Aus `1.2.Fall` “$p \notin \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x)$”
folgt via **17-4**: $(E_{\texttt{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$(E_{\texttt{sv}}\, x)\,(p) = x(p)$” und
aus `2` “$(E_{\texttt{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}$”
folgt: $x(p) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` “$x(p) = \mathcal{U}$”
folgt via **17-4**: $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(p \in \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(p \in \mathsf{dom}\,(E_{\texttt{sv}}\, x)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

Beweis **258-9** `e)` `VS` gleich $(E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) \neq x(p)$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$p \in \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) = x(p)$.

`3:` Es gilt `2`"$(E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) = x(p)$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots (E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) \neq x(p)$".
Ex falso quodlibet folgt:
$((E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$p \notin \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)$"
folgt via **17-4**: $(E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$(E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$(E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) \neq x(p)$"
folgt: $x(p) \neq \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$x(p) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`5:` Aus `2`"$(E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}$",
aus `1.2.Fall`"$p \notin \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)$" und
aus `4`"$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $((E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$((E_{\mathtt{sv}}\, x)\,(p) = \mathcal{U}) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\ (E_{\mathtt{sv}}\, x)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

□

258-10. Spät aber doch wird für die Einschränkung von x auf E ein eigenes Symbol eingeführt.

258-10(Definition)

$$(x \downharpoonleft E) = x \cap (E \times \mathcal{U}).$$

258-11. Hier wird beinahe Selbstverständliches über $(x \restriction E)$, größtenteils via **ES** fest gestellt.

258-11(Satz)

a) $(x \restriction E)$ *Einschränkung von x auf E.*

b) $\mathsf{dom}\,(x \restriction E) = E \cap \mathsf{dom}\,x$.

c) $\mathsf{ran}\,(x \restriction E) = x[E]$.

d) $(x \restriction E)$ *Relation.*

e) *Aus "x Funktion" folgt "$(x \restriction E)$ Funktion".*

f) *Aus "$p \in \mathsf{dom}\,(x \restriction E)$"*
folgt "$(x \restriction E)\,(p) = x(p)$" und "$p \in \mathsf{dom}\,x$"
und "$(x \restriction E)\,(p), x(p)$ Menge".

g) *Aus "$p \notin \mathsf{dom}\,x$" folgt "$(x \restriction E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}$".*

h) *Aus "$p \in (\mathsf{dom}\,x) \setminus E$"*
folgt "$(x \restriction E)\,(p) \neq x(p)$" und "$(x \restriction E)\,(p) = \mathcal{U}$"
und "$x(p)$ Menge".

i) *Aus "$p \in E$" folgt "$(x \restriction E)\,(p) = x(p)$".*

j) *Aus "$p \in E \setminus \mathsf{dom}\,(x \restriction E)$" folgt "$(x \restriction E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}$".*

k) *Aus "$p \in E \setminus \mathsf{dom}\,x$" folgt "$(x \restriction E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}$".*

Beweis **258-15** a)
Aus **258-10(Def)** "$(x \restriction E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$"
folgt via **15-1(Def)**: $(x \restriction E)$ Einschränkung von x auf E.

b)

1: Aus **258-10(Def)** "$(x \restriction E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$"
folgt via **15-1(Def)**: $(x \restriction E)$ Einschränkung von x auf E.

2: Aus 1 "$(x \restriction E)$ Einschränkung von x auf E"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\,(x \restriction E) = E \cap \mathsf{dom}\,x$.

<u>Beweis **258-11**</u> `c)`

`1:` Aus **258-10(Def)**“$(x \downharpoonright E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1`“$(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E”
folgt via **15-6**: $\mathsf{ran}\ (x \downharpoonright E) = x[E]$.

`d)`

`1:` Aus **258-10(Def)**“$(x \downharpoonright E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1`“$(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E”
folgt via **15-3**: $(x \downharpoonright E)$ Relation.

`e)` `VS` gleich x Funktion.

`1:` Aus **258-10(Def)**“$(x \downharpoonright E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1`“$(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E” und
aus `VS` gleich “x Funktion”
folgt via **18-47**: $(x \downharpoonright E)$ Funktion.

`f)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\ (x \downharpoonright E)$.

`1:` Aus **258-10(Def)**“$(x \downharpoonright E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1`“$(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E” und
aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{dom}\ (x \downharpoonright E)$”
folgt via **ES**:
$$((x \downharpoonright E)\,(p) = x(p)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((x \downharpoonright E)\,(p), x(p) \text{ Menge}).$$

`g)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus **258-10(Def)**“$(x \downharpoonright E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1`“$(x \downharpoonright E)$ Einschränkung von x auf E” und
aus `VS` gleich “$p \notin \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **ES**: $(x \downharpoonright E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **258-11**</u> `h)` `VS` gleich $p \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus E$.

`1:` Aus **258-10(Def)** “$(x \downharpoonleft E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1` “$(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E” und
aus `VS` gleich “$p \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus E$”
folgt via **ES**:
$$((x \downharpoonleft E)\,(p) \neq x(p)) \wedge ((x \downharpoonleft E)\,(p) = \mathcal{U}) \wedge (x(p) \text{ Menge}).$$

`i)` `VS` gleich $p \in E$.

`1:` Aus **258-10(Def)** “$(x \downharpoonleft E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1` “$(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E” und
aus `VS` gleich “$p \in E$”
folgt via **ES**: $(x \downharpoonleft E)\,(p) = x(p)$.

`j)` `VS` gleich $p \in E \setminus \mathsf{dom}\ (x \downharpoonleft E)$.

`1:` Aus **258-10(Def)** “$(x \downharpoonleft E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1` “$(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E” und
aus `VS` gleich “$p \in E \setminus \mathsf{dom}\ (x \downharpoonleft E)$”
folgt via **ES**: $(x \downharpoonleft E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}$.

`k)` `VS` gleich $p \in E \setminus \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus **258-10(Def)** “$(x \downharpoonleft E) = x \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt via **15-1(Def)**: $(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E.

`2:` Aus `1` “$(x \downharpoonleft E)$ Einschränkung von x auf E” und
aus `VS` gleich “$p \in E \setminus \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **ES**: $(x \downharpoonleft E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}$.

$\square$

258-12. Falls f eine Funktion ist, dann nimmt das "Element-Sein" in $\mathsf{ran}\,(x\ {}_{\mathtt{sv}}\ f)$ spezielle Form an.

258-12(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$p \in \mathsf{ran}\,(x\ {}_{\mathtt{sv}}\ f)$"
folgt "$\exists \Omega : (x \subseteq \Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = f(\Omega))$".*

b) *Aus "f Funktion" und "$x \subseteq p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt "$(p, f(p)) \in (x\ {}_{\mathtt{sv}}\ f)$" und "$f(p) \in \mathsf{ran}\,(f\ {}_{\mathtt{sv}}\ x)$".*

<u>Beweis **258-12**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{ran}\,(x \,{}_{\mathtt{sv}}\, f)).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{ran}\,(x \,{}_{\mathtt{sv}}\, f)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, p) \in (x \,{}_{\mathtt{sv}}\, f).$

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, p) \in (x \,{}_{\mathtt{sv}}\, f)$"
folgt via **258-3**: $(x \subseteq \Omega) \wedge ((\Omega, p) \in f)$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, p) \in f$"
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, f.$

`3.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `2`"$\ldots (\Omega, p) \in f$"
folgt via **18-20**: $p = f(\Omega).$

`4:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$x \subseteq \Omega \ldots$",
aus `3.1`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `3.2`"$p = f(\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (x \subseteq \Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = f(\Omega)).$

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (x \subseteq p \in \mathsf{dom}\, f).$

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f.$

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq p \ldots$" und
aus `1`"$(p, f(p)) \in f$"
folgt via **258-3**: $\boxed{(p, f(p)) \in (x \,{}_{\mathtt{sv}}\, f)}$

`3:` Aus `2`"$(p, f(p)) \in (x \,{}_{\mathtt{sv}}\, f)$"
folgt via **7-5**: $\boxed{f(p) \in \mathsf{ran}\,((x \,{}_{\mathtt{sv}}\, f))}$

$\square$

258-13. Nun soll $\mathsf{18.2}(y,x) = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$ in etwas größerer Ausführlichkeit diskutiert werden. Vorbereitend wird ein neuer Term - der bereits in **#18** in allgemeinerer Form erscheint - in die Essays eingebracht.

258-13(Definition)

$$x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}.$$

$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$ **18-4(Def)**

258-14. Bei x_{fkt} handelt es sich unter anderem um eine Funktion. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - f) - g) - d) - e) - h) - i) - j)`:

258-14(Satz)

a) x_{fkt} *Relation.*

b) x_{fkt} *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

d) $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

e) $x_{\mathsf{fkt}} : \mathsf{dom}\,x \to \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

f) $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p)$.

g) $\{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\} = \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

h) $x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

i) $x_{\mathsf{fkt}}[y] = \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

j) $\{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

$\{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$ **18-1(Def)**
$\{x(\lambda) : \lambda \in y\}$ **18-1(Def)**
$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$ **18-4(Def)**
$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$ **18-4(Def)**

Beweis **258-14**

$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$ **18-4(Def)**

`ab)`

`Thema1.1`	$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{\mathsf{fkt}}$.
`2.1:` Aus `Thema1.1` "$(\alpha, \beta) \ldots \in x_{\mathsf{fkt}}$" und aus **258-13(Def)** "$x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$ folgt via **18-6**:	$\beta = x(\alpha)$.
`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\ldots (\alpha, \gamma) \in x_{\mathsf{fkt}}$" und aus **258-13(Def)** "$x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$ folgt via **18-6**:	$\gamma = x(\alpha)$.
`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt:	$\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{\mathsf{fkt}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`1.a):` Aus **258-13(Def)** "$x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **18-17**: x_{fkt} Relation.

`2.b):` Aus `1.a)` "x_{fkt} Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{\mathsf{fkt}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: x_{fkt} Funktion.

<u>Beweis **258-14**</u> `c)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x_{\mathsf{fkt}}$.

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x_{\mathsf{fkt}}$" und
aus **258-13(Def)** "$x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$
folgt via **18-6**: $\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 2 "$\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) \subseteq \mathsf{dom}\, x$"

`Thema1.2` $\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

2: Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus 2 "$\mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 3 "$\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **18-7**: $(\alpha, x(\alpha)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

5: Aus 4 und
aus **258-13(Def)** "$x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$"
folgt: $(\alpha, x(\alpha)) \in x_{\mathsf{fkt}}$.

6: Aus 5 "$(\alpha, x(\alpha)) \in x_{\mathsf{fkt}}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"

...

Beweis **258-14** c) ...

1.3: Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) \subseteq \mathsf{dom}\,x$" und
aus A2 gleich "$\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

f)

1: Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\,x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \in \mathsf{dom}\,x$.

2.1: Via des bereits bewiesenen b) gilt: x_{fkt} Funktion.

2.2: Via des bereits bewiesenen c) gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

3: Aus 1.1.Fall und
aus 2.2
folgt: $p \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

4: Aus 2.1"x_{fkt} Funktion" und
aus 3"$p \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via **18-22**: $(p, x_{\mathsf{fkt}}(p)) \in x_{\mathsf{fkt}}$.

5: Aus 4"$(p, x_{\mathsf{fkt}}(p)) \in x_{\mathsf{fkt}}$"
folgt via **258-13(Def)**: $(p, x_{\mathsf{fkt}}(p)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

6: Aus 5"$(p, x_{\mathsf{fkt}}(p)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **18-6**: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p)$.

1.2.Fall $p \notin \mathsf{dom}\,x$.

2.1: Aus 1.2.Fall"$p \notin \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **17-4**: $x(p) = \mathcal{U}$.

2.2: Via des bereits bewiesenen c) gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

3: Aus 1.2.Fall und
aus 2.2
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

4: Aus 3"$p \notin \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via **17-4**: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = \mathcal{U}$.

5: Aus 2.1 und
aus 4
folgt: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p)$.

<u>Beweis **258-14** `g)`</u>

`Thema1.1` $\alpha \in \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}$"
folgt via **18-2**: $\exists \Omega : (\alpha = x_{\mathsf{fkt}}(\Omega)) \wedge (\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $y \cap \mathsf{dom}\,x = y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$" und
aus `4`
folgt: $\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,x$.

`6:` Aus `5` "$\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **18-3**: $x(\Omega) \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

`7:` Via des bereit bewiesenen `f)` gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) = x(\Omega)$.

`8:` Aus `6` und
aus `8`
folgt: $x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

`9:` Aus `2` "$\ldots \alpha = x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) \ldots$" und
aus `8`
folgt: $\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\} \subseteq \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$"

...

Beweis **258-14** `g)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$"
folgt via **18-2**: $\exists \Omega : (\alpha = x(\Omega)) \wedge (\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\, x)$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $y \cap \mathsf{dom}\, x = y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in y \cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus `4`
folgt: $\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

`6:` Aus `5`"$\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via **18-3**: $x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) \in \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}$.

`7:` Via des bereit bewiesenen `f)` gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) = x(\Omega)$.

`8:` Aus `6` und
aus `8`
folgt: $x(\Omega) \in \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}$.

`9:` Aus `2`"$\ldots \alpha = x(\Omega) \ldots$" und
aus `8`
folgt: $\alpha \in \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{x(\lambda) : \lambda \in y\} \subseteq \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\} \subseteq \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$" und
aus `A2` gleich "$\{x(\lambda) : \lambda \in y\} \subseteq \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\} = \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

<u>Beweis **258-14**</u> `d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: x_{fkt} Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

`2:` Aus `1`“x_{fkt} Funktion”
folgt via **18-31**: $x_{\mathsf{fkt}}[\mathsf{dom}\,x] = \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

`3:` $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}) \stackrel{\mathbf{8-10}}{=} x_{\mathsf{fkt}}[\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})] \stackrel{1.2}{=} x_{\mathsf{fkt}}[\mathsf{dom}\,x] \stackrel{2}{=} \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$
$\stackrel{\mathbf{f)}}{=} \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: x_{fkt} Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

`2:` Aus `1.1`“x_{fkt} Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$”
folgt via **21-2**: $x_{\mathsf{fkt}} : \mathsf{dom}\,x \to \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

`h)`

`1:` $x_{\mathsf{fkt}} \stackrel{\mathbf{258-13(Def)}}{=} \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U}\} \stackrel{\mathbf{18-7}}{=} \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\,x\}$
$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

`i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: x_{fkt} Funktion.

`2:` Aus `1`“x_{fkt} Funktion”
folgt via **18-31**: $x_{\mathsf{fkt}}[y] = \{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\}$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda) : \lambda \in y\} = \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $x_{\mathsf{fkt}}[y] = \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

Beweis **258-14** `j)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\}$"
folgt via **18-5**:
$$\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, x_{\mathsf{fkt}}(\Omega))) \wedge (\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})).$$

3.1: Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) = x(\Omega)$.

3.2: Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

4.1: Aus 3.1 "$x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) = x(\Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, x_{\mathsf{fkt}}(\Omega)) = (\Omega, x(\Omega))$.

4.2: Aus 2 "$\ldots \Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$" und
aus 3.2
folgt: $\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,x$.

5.1: Aus 2 "$\ldots \alpha = (\Omega, x_{\mathsf{fkt}}(\Omega)) \ldots$" und
aus 4.1
folgt: $\alpha = (\Omega, x(\Omega))$.

5.2: Aus 4.2 "$\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **18-7**: $(\Omega, x(\Omega)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\} \subseteq \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$"

...

Beweis **258-14** `j)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$"
folgt via **18-5**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, x(\Omega))) \wedge (\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\, x)$.

`3.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) = x(\Omega)$.

`3.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x$.

`4.1:` Aus `3.1` "$x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) = x(\Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, x_{\mathsf{fkt}}(\Omega)) = (\Omega, x(\Omega))$.

`4.2:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in y \cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus `3.2`
folgt: $\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

`5.1:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, x(\Omega)) \ldots$" und
aus `4.1`
folgt: $\alpha = (\Omega, x_{\mathsf{fkt}}(\Omega))$.

`5.2:` Aus `4.2` "$\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via **18-7**: $(\Omega, x_{\mathsf{fkt}}(\Omega)) \in \{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\}$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\} \subseteq \{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\} \subseteq \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$" und
aus `A2` gleich "$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\} \subseteq \{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\{(\lambda, x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)) : \lambda \in y\} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}.$$

□

258-15. Wie in **#18** teilweise antizipiert gilt Vorliegendes:

258-15(Satz)

a) *“$x_{\mathsf{fkt}} = x$” genau dann, wenn “x Funktion”.*

b) $\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}} = \mathsf{zo}$.

c) *Aus “$y \subseteq z$” folgt “$\{x(\lambda) : \lambda \in y\} \subseteq \{x(\lambda) : \lambda \in z\}$”.*

d) $\{x(\lambda) : \lambda \in y\} = \{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

$\{x(\lambda) : \lambda \in y\}$ **18-1(Def)**

Beweis **258-15** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x_{\mathsf{fkt}} = x$.

1: Via **258-14** gilt: x_{fkt} Funktion.

2: Aus 1 und
aus VS
folgt: x Funktion.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich x Funktion..

1: Aus VS gleich “x Funktion”
folgt via **18-54**: $x = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

2: Via **258-14** gilt: $x_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $x_{\mathsf{fkt}} = x$.

Beweis **258-15** `b)`

`1.1:` Via **258-14** gilt: $\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}} : \mathsf{dom}\,\mathcal{U} \to \{\mathcal{U}(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}.$

`1.2:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{zo} : \mathcal{U} \to \{0\}.$

`2:` Via **7-11** gilt: $\mathsf{dom}\,\mathcal{U} = \mathcal{U}.$

`3:` Aus `1.1` und
aus `2`
folgt: $\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}} : \mathcal{U} \to \{\mathcal{U}(\lambda) : \lambda \in \mathcal{U}\}.$

`Thema4` $\alpha \in \mathcal{U}.$

`5.1:` Aus `Thema4`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`5.2:` Aus `Thema4`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}(\alpha) = 0.$

`6.1:` Aus `5.1`“α Menge”
folgt via **17-7**: $\mathcal{U}(\alpha) = 0.$

`6.2:` Aus `5.2` und
aus **20-1(Def)**“$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$”
folgt: $\mathsf{zo}(\alpha) = 0.$

`7:` Via **258-14** gilt: $\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}}(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha).$

`8:` Aus `7` und
aus `6.1`
folgt: $\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}}(\alpha) = 0.$

`9:` Aus `8` und
aus `6.2`
folgt: $\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}}(\alpha) = \mathsf{zo}(\alpha).$

Ergo `Thema4`: `A1` “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}}(\alpha) = \mathsf{zo}(\alpha))$”

`5:` Aus `3`“$\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}} : \mathcal{U} \to \{\mathcal{U}(\lambda) : \lambda \in \mathcal{U}\}$”,
aus `1.2`“$\mathsf{zo} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}}(\alpha) = \mathsf{zo}(\alpha))$”
folgt via **21-12**: $\mathcal{U}_{\mathsf{fkt}} = \mathsf{zo}.$

<u>Beweis **258-15**</u> `c)` `VS` gleich $y \subseteq z$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$"
folgt via **18-2**: $\exists \Omega : (\alpha = x(\Omega)) \wedge (\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\, x)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in y \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in y, \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 3 "$\Omega \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in z$.

5: Aus 4 "$\Omega \in z$" und
aus 3 "$\Omega \in \ldots \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in z \cap \mathsf{dom}\, x$.

6: Aus 5 "$\Omega \in z \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **18-3**: $x(\Omega) \in \{x(\lambda) : \lambda \in z\}$.

7: Aus 2 "$\ldots \alpha = x(\Omega) \ldots$" und
aus 6
folgt: $\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in z\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in z\}$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{x(\lambda) : \lambda \in y\} \subseteq \{x(\lambda) : \lambda \in z\}$.

<u>Beweis **258-15**</u> `d)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $y \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq y.$

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}.$
>
> `2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\}$”
> folgt via **18-2**: $\exists \Omega : (\alpha = x(\Omega)) \wedge (\Omega \in y \cap \mathsf{dom}\, x).$
>
> `3:` $(y \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{dom}\, x) \cap (y \cap \mathsf{dom}\, x)$
> $\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{dom}\, x) \cap ((\mathsf{dom}\, x) \cap y) \stackrel{\mathbf{2-19}}{=} (\mathsf{dom}\, x) \cap y \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} y \cap \mathsf{dom}\, x.$
>
> `4:` Aus 2“$\ldots \Omega \in y \cap \mathsf{dom}\, x$” und
> aus 3“$(y \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x = y \cap \mathsf{dom}\, x$”
> folgt: $\Omega \in (y \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x.$
>
> `5:` Aus 4“$\Omega \in (y \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x$”
> folgt via **18-3**: $x(\Omega) \in \{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\}.$
>
> `6:` Aus 5 und
> aus 2“$\ldots \alpha = x(\Omega) \ldots$”
> folgt: $\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\}.$

Ergo `Thema1.2`:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | “$\{x(\lambda) : \lambda \in y\} \subseteq \{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\}$”

`2:` Aus `1.1`“$y \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq y$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:

$$\{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\} \subseteq \{x(\lambda) : \lambda \in y\}.$$

`3:` Aus `A1` gleich “$\{x(\lambda) : \lambda \in y\} \subseteq \{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\}$” und
aus 2“$\{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\} \subseteq \{x(\lambda) : \lambda \in y\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\{x(\lambda) : \lambda \in y\} = \{x(\lambda) : \lambda \in y \cap \mathsf{dom}\, x\}.$$

□

258-16. Gelegentlich ist nicht x_{fkt} sondern $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft y)$ von besonderem Interesse.

258-16(Satz)

a) $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)$ *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E) = E \cap \mathsf{dom}\,x$.

c) $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E) = \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$.

d) $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E) : E \cap \mathsf{dom}\,x \to \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$.

e) $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E) = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

f) *Aus* "$p \in E \cap \mathsf{dom}\,x$"
folgt "$(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x(p)$" *und* "$(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p), x(p)$ *Menge*".

g) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\,x$" *folgt* "$(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}$".

h) *Aus* "$p \in (\mathsf{dom}\,x) \setminus y$"
folgt "$(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) \neq x(p)$" *und* "$(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = \mathcal{U}$"
und "$x(p)$ *Menge*".

i) *Aus* "$p \in y$" *folgt* "$(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x(p)$".

j) *Aus* "$p \in y \setminus \mathsf{dom}\,x$" *folgt* "$(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}$".

$\{x(\lambda) : \lambda \in E\}$ **18-1(Def)**
$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ **18-4(Def)**

Beweis **258-16** a)

1: Via **258-14** gilt: x_{fkt} Funktion.

2: Aus 1 "x_{fkt} Funktion"
folgt via **258-11**: $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)$ Funktion.

b)

1: Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E) = E \cap \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

2: Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E) = E \cap \mathsf{dom}\,x$.

<u>Beweis **258-16**</u> `c)`

`1:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=x_{\mathsf{fkt}}[E]$.

`2:` Via **258-14** gilt: x_{fkt} Funktion.

`3:` Aus 2“x_{fkt} Funktion”
folgt via **18-31**: $x_{\mathsf{fkt}}[E]=\{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda):\lambda\in E\}$.

`4.1:` Aus `1` und
aus `3`
folgt: $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=\{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda):\lambda\in E\}$.

`4.2:` Via **258-14** gilt: $\{x_{\mathsf{fkt}}(\lambda):\lambda\in E\}=\{x(\lambda):\lambda\in E\}$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=\{x(\lambda):\lambda\in E\}$.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=E\cap\mathsf{dom}\,x$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=\{x(\lambda):\lambda\in E\}$.

`2:` Aus `1.1`“$(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)$ Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=E\cap\mathsf{dom}\,x$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=\{x(\lambda):\lambda\in E\}$”
folgt via **21-2**: $(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E):E\cap\mathsf{dom}\,x\to\{x(\lambda):\lambda\in E\}$.

`e)`

`1.1:` Via **258-14** gilt: x_{fkt} Funktion.

`1.2:` Via **258-11** gilt: $(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)$ Einschränkung von x_{fkt} auf E.

`2:` Aus `1.1`“x_{fkt} Funktion” und
aus `1.2`“$(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)$ Einschränkung von x_{fkt} auf E”
folgt via **18-47**: $(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=\{(\lambda,x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)):\lambda\in E\}$.

`3:` Via **258-14** gilt: $\{(\lambda,x_{\mathsf{fkt}}(\lambda)):\lambda\in E\}=\{(\lambda,x(\lambda)):\lambda\in E\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(x_{\mathsf{fkt}}\restriction E)=\{(\lambda,x(\lambda)):\lambda\in E\}$.

<u>Beweis **258-16**</u> `f)` `VS` gleich $p \in E \cap \mathsf{dom}\, x.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E) = E \cap \mathsf{dom}\, x.$

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $p \in \mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E).$

`3:` Aus `2`"$p \in \mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)$"
folgt via **258-11**:
$$((x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x_{\mathsf{fkt}}(p)) \wedge ((x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p), x_{\mathsf{fkt}}(p) \text{ Menge}).$$

`4:` Via **258-14** gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p).$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $((x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x(p)) \wedge ((x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p), x(p) \text{ Menge}).$

`g)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, x.$

`1:` Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x.$

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}).$

`3:` Aus `2`"$p \notin \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via **258-11**: $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x_{\mathsf{fkt}}(p) = \mathcal{U}.$

`4:` Via **258-14** gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p).$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}.$

Beweis **258-16** `h)` `VS` gleich $p \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus E.$

`1:` Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x.$

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $p \in (\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \setminus E.$

`3:` Aus 2"$p \in (\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \setminus E$"
folgt via **258-11**:
$$((x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) \neq x_{\mathsf{fkt}}(p)) \wedge ((x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = \mathcal{U}) \wedge (x_{\mathsf{fkt}}(p) \text{ Menge}).$$

`4:` Via **258-14** gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p).$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $((x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) \neq x(p)) \wedge ((x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = \mathcal{U}) \wedge (x(p) \text{ Menge}).$

`i)` `VS` gleich $p \in E.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt via **258-11**: $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x_{\mathsf{fkt}}(p).$

`2:` Via **258-14** gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p).$

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x(p).$

`j)` `VS` gleich $p \in E \setminus \mathsf{dom}\, x.$

`1:` Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x.$

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $p \in E \setminus \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}).$

`3:` Aus 2"$p \in E \setminus \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via **258-11**: $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x_{\mathsf{fkt}}(p) = \mathcal{U}.$

`4:` Via **258-14** gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(p) = x(p).$

`5:` Aus `3` und
aus `5`
folgt: $(x_{\mathsf{fkt}} \downharpoonleft E)\,(p) = x(p) = \mathcal{U}.$

$\square$

258-17. Gelegentlich ist die Frage ob $(x \,_{\mathtt{sv}}\, y)$ leer oder nicht leer ist von Bedeutung.

258-17(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(x \,_{\mathtt{sv}}\, y) = 0$.

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (x \not\subseteq \alpha)$.

`iii)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \alpha))$.

Beweis **258-17** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $(x \,_{\mathtt{sv}}\, y) = 0$.

`1:` Es gilt: $(\exists \Omega : (x \subseteq \Omega \in \mathsf{dom}\, y) \vee (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (x \not\subseteq \alpha))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists \Omega : (x \subseteq \Omega \in \mathsf{dom}\, y)$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **7-7**: $\exists \Phi : (\Omega, \Phi) \in y$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots x \subseteq \Omega \ldots$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \Phi) \in y$"
folgt via **258-3**: $(\Omega, \Phi) \in (x \,_{\mathtt{sv}}\, y)$.

`4:` Aus 3"$(\Omega, \Phi) \in (x \,_{\mathtt{sv}}\, y)$"
folgt via **0-20**: $0 \neq (x \,_{\mathtt{sv}}\, y)$.

`5:` Es gilt 4"$0 \neq (x \,_{\mathtt{sv}}\, y)$".
Es gilt `VS` gleich "$(x \,_{\mathtt{sv}}\, y) = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (x \not\subseteq \alpha)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (x \not\subseteq \alpha)$.

<u>Beweis **258-17**</u> $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (x \not\subseteq \alpha)$"

`Thema1` $\beta \in \mathsf{dom}\, y$.

`1:` Aus `Thema1` und
aus `VS`
folgt: $x \not\subseteq \beta$.

`2:` Aus `1`"$x \not\subseteq \beta$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \beta)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \beta))$.

Konsequenz: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \alpha))$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \alpha))$.

`Thema1.1` $\beta \in \mathsf{dom}\ (x \ _{\mathsf{sv}}\ y)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in \mathsf{dom}\ (x \ _{\mathsf{sv}}\ y)$"
folgt via **258-5**: $x \subseteq \beta \in \mathsf{dom}\, y$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \beta \in \mathsf{dom}\, y$" und
aus `VS`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \beta)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots (\Omega \in x) \wedge (\Omega \notin \beta)$"
folgt via **0-5**: $x \not\subseteq \beta$.

`5:` Es gilt `4`"$x \not\subseteq \beta$".
Es gilt `2`"$x \subseteq \beta \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $\beta \notin \mathsf{dom}\ (x \ _{\mathsf{sv}}\ y)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\ (x \ _{\mathsf{sv}}\ y)) \Rightarrow (\beta \notin \mathsf{dom}\ (x \ _{\mathsf{sv}}\ y))$.

Konsequenz via **0-19**: `A1` | "$\mathsf{dom}\ (x \ _{\mathsf{sv}}\ y) = 0$"

`1.2:` Via **258-4** gilt: $(x \ _{\mathsf{sv}}\ y)$ Relation.

`2:` Aus `1.2`"$(x \ _{\mathsf{sv}}\ y)$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\ (x \ _{\mathsf{sv}}\ y) = 0$"
folgt via **92-5**: $(x \ _{\mathsf{sv}}\ y) = 0$.

□

258-18. Vorliegendes ist im Umfeld von "$(x \ \mathtt{sv}\ y) = 0$" angesiedelt.

258-18(Satz)

a) *Aus "x Unmenge" folgt "$(x \ \mathtt{sv}\ y) = 0$".*

b) *Aus "$0 \neq (x \ \mathtt{sv}\ y)$" folgt "$x$ Menge".*

Beweis **258-28** a) VS gleich x Unmenge.

Thema1 $\alpha \in (x \ \mathtt{sv}\ y)$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in (x \ \mathtt{sv}\ y)$"
folgt via **258-3**: $\exists \Omega, \Phi : (x \subseteq \Omega) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi) \in y)$.

3: Aus 2 "$\ldots x \subseteq \Omega \ldots$" und
aus VS gleich "x Unmenge"
folgt via **0-7**: Ω Unmenge.

4: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \Phi) \in y$"
folgt via **9-15**: Ω Menge.

5: Es gilt 3 "Ω Unmenge".
Es gilt 4 "Ω Menge".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin (x \ \mathtt{sv}\ y)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \ \mathtt{sv}\ y)) \Rightarrow (\alpha \notin (x \ \mathtt{sv}\ y))$.

Konsequenz via **0-19**: $(x \ \mathtt{sv}\ y) = 0$.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(x \text{ Unmenge}) \Rightarrow ((x \ \mathtt{sv}\ y) = 0)$.

2: Aus 1
folgt: $(0 \neq (x \ \mathtt{sv}\ y)) \Rightarrow (x \text{ Menge})$.

□

258-19. Nun wird $(x \,{}_{\mathtt{sv}}\, y)$ für $x = 0$ oder $x = \mathcal{U}$ oder $y = 0$ oder $y = \mathcal{U}$ untersucht.

258-19(Satz)

a) $(0 \,{}_{\mathtt{sv}}\, y) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

b) $(\mathcal{U} \,{}_{\mathtt{sv}}\, y) = 0$.

c) $(x \,{}_{\mathtt{sv}}\, 0) = 0$.

d) $(x \,{}_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U}) = [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U}$.

e) *"$(x \,{}_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U}) = 0$" genau dann, wenn "$[x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle = 0$" genau dann, wenn "x Unmenge".*

f) *"$0 \neq (x \,{}_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U})$" genau dann, wenn "$0 \neq [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle$" genau dann, wenn "x Menge".*

g) $(0 \,{}_{\mathtt{sv}}\, 0) = 0$.

h) $(0 \,{}_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

i) $(\mathcal{U} \,{}_{\mathtt{sv}}\, 0) = 0$.

j) $(\mathcal{U} \,{}_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U}) = 0$.

Beweis **258-19**

---

sse-Notation.

---

a)

Thema1.1	$\alpha \in (0\ {}_{\mathtt{sv}}\ y)$.
2: Aus Thema1"$\alpha \in (0\ {}_{\mathtt{sv}}\ y)$" folgt via **258-3**:	$\exists \Omega, \Phi : (\alpha = (\Omega, \Phi) \in y)$.
3: Aus 2"$\ldots (\Omega, \Phi) \in y$" folgt via **9-15**:	Ω, Φ Menge.
4: Aus 3"Ω, Φ Menge" folgt via **6-8**:	$(\Omega, \Phi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.
5: Aus 2"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$" und aus 4 folgt:	$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.
6: Aus 2"$\ldots \alpha \ldots \in y$" und aus 5"$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" folgt via **2-2**:	$\alpha \in y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Ergo Thema11.1: $\forall \alpha : (\alpha \in (0\ {}_{\mathtt{sv}}\ y)) \Rightarrow (\alpha \in y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$(0\ {}_{\mathtt{sv}}\ y) \subseteq y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$"

...

<u>Beweis **258-19**</u> `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in y, \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“$\alpha \in \ldots \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-8**: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

`4.1:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$” und
aus `2`“$\alpha \in y \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Phi) \in y$.

`4.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \Omega$.

`5:` Aus `4.2`“$0 \subseteq \Omega$” und
aus `4.1`“$(\Omega, \Phi) \in y$”
folgt via **258-3**: $(\Omega, \Phi) \in (0 \,_{\texttt{sv}}\, y)$.

`6:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$” und
aus `5`
folgt: $\alpha \in (0 \,_{\texttt{sv}}\, y)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in (0 \,_{\texttt{sv}}\, y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq (0 \,_{\texttt{sv}}\, y)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$(0 \,_{\texttt{sv}}\, y) \subseteq y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$” und
aus `A2` gleich “$y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq (0 \,_{\texttt{sv}}\, y)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(0 \,_{\texttt{sv}}\, y) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`b)`
Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt via **258-18**: $(\mathcal{U} \,_{\texttt{sv}}\, y) = 0$.

`c)`

`1:` Via **258-4** gilt: $(x \,_{\texttt{sv}}\, 0) \subseteq 0$.

`2:` Aus `1`“$(x \,_{\texttt{sv}}\, 0) \subseteq 0$”
folgt via **0-18**: $(x \,_{\texttt{sv}}\, 0) = 0$.

<u>Beweis **258-19**</u> `d)`

`Thema1.1`	$\alpha \in (x \,_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U})$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x \,_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U})$" folgt via **258-3**:	$\exists \Omega, \Phi : (x \subseteq \Omega) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi) \in \mathcal{U}))$.
`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \Phi) \in \mathcal{U}$" folgt via **9-15**:	Ω, Φ Menge.
`4.1:` Aus `3` "$\Omega \ldots$ Menge" und aus `2` "$\ldots x \subseteq \Omega \ldots$" folgt via **61-4**:	$x \mathsf{\ sse\ } \Omega$.
`4.2:` Aus `3` "$\ldots \Phi$ Menge" folgt via **0-22**:	$\Phi \in \mathcal{U}$.
`5:` Aus `4.1` "$x \mathsf{\ sse\ } \Omega$" folgt via **41-25**:	$\Omega \in [x \overset{\mathsf{sse}}{\mid} \cdot\rangle$.
`6:` Aus `5` "$\Omega \in [x \overset{\mathsf{sse}}{\mid} \cdot\rangle$" und aus `4.2` "$\Phi \in \mathcal{U}$" folgt via **6-6**:	$(\Omega, \Phi) \in [x \overset{\mathsf{sse}}{\mid} \cdot\rangle \times \mathcal{U}$.
`7:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$" und aus `6` folgt:	$\alpha \in [x \overset{\mathsf{sse}}{\mid} \cdot\rangle \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \,_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U})) \Rightarrow (\alpha \in [x \overset{\mathsf{sse}}{\mid} \cdot\rangle \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x \,_{\mathtt{sv}}\, \mathcal{U}) \subseteq [x \overset{\mathsf{sse}}{\mid} \cdot\rangle \times \mathcal{U}$"

...

Beweis **258-19** `d)` ...

Thema1.2 $\qquad \alpha \in [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U}.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-5**:

$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle) \wedge (\Phi \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \ldots$"
folgt via **41-5**: $\qquad x \;\mathsf{sse}\; \Omega.$

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Phi \in \mathcal{U} \ldots$"
folgt via **0-22**: $\qquad \Phi$ Menge.

`4:` Aus `3.1`"$x \;\mathsf{sse}\; \Omega$"
folgt via **61-4**: $\qquad (\Omega \text{ Menge}) \wedge (x \subseteq \Omega).$

`5:` Aus `4`"Ω Menge..." und
aus `3.2`"Φ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\qquad (\Omega, \Phi)$ Menge.

`6:` Aus `5`"(Ω, Φ) Menge"
folgt via **0-22**: $\qquad (\Omega, \Phi) \in \mathcal{U}.$

`7:` Aus `4`"$\ldots x \subseteq \Omega$" und
aus `6`"$(\Omega, \Phi) \in \mathcal{U}$"
folgt via **258-3**: $\qquad (\Omega, \Phi) \in (x \;{}_{\mathsf{sv}}\; \mathcal{U}).$

`8:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `7`
folgt: $\qquad \alpha \in (x \;{}_{\mathsf{sv}}\; \mathcal{U}).$

Ergo `Thema1.2`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in (x \;{}_{\mathsf{sv}}\; \mathcal{U})).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A2` "$[x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U} \subseteq (x \;{}_{\mathsf{sv}}\; \mathcal{U})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(x \;{}_{\mathsf{sv}}\; \mathcal{U}) \subseteq [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U}$" und
aus `A2` gleich "$[x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U} \subseteq (x \;{}_{\mathsf{sv}}\; \mathcal{U})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\qquad (x \;{}_{\mathsf{sv}}\; \mathcal{U}) = [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U}.$

Beweis **258-19** `e)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \;_{\mathsf{sv}}\, \mathcal{U}) = 0.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(x \;_{\mathsf{sv}}\, \mathcal{U}) = [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U}.$

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $[x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U} = 0.$

`3:` Aus `2`“ $[x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle \times \mathcal{U} = 0$ ”
folgt via **6-13**: $([x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle = 0) \vee (\mathcal{U} = 0).$

`4:` Via **0-18** gilt: $0 \neq \mathcal{U}.$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $[x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle = 0.$

`e)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $[x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle = 0.$

`1:` Es gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge}).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Menge.

`2:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x.$

`3:` Aus `1.1.Fall`“x Menge” und
aus `2`“$x \subseteq x$”
folgt via **61-4**: $x \in [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle.$

`4:` Aus `3`“$x \in [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **0-20**: $0 \neq [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle.$

`5:` Es gilt `4`“$0 \neq [x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle$” .
Es gilt `VS` gleich “ $[x \overset{\mathsf{sse}}{|} \cdot\rangle = 0$ ” .
Ex falso quodlibet folgt. x Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x Unmenge.

`e)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x Unmenge.

Aus `VS` gleich “x Unmenge”
folgt via **258-18**: $(x \;_{\mathsf{sv}}\, \mathcal{U}) = 0.$

<u>Beweis **258-19**</u> `f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:

$$((x \ {}_{\texttt{sv}}\ \mathcal{U}) = 0) \Leftrightarrow ([x \overset{\texttt{sse}}{|} \cdot\rangle = 0) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge}).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(0 \neq (x \ {}_{\texttt{sv}}\ \mathcal{U})) \Leftrightarrow (0 \neq [x \overset{\texttt{sse}}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (x \text{ Menge}).$$

`g)`

`1:`

$$(0 \ {}_{\texttt{sv}}\ 0) \overset{\texttt{a)}}{=} 0 \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \overset{\mathbf{2-17}}{=} 0.$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(0 \ {}_{\texttt{sv}}\ 0) = 0.$$

`h)`

`1:`

$$(0 \ {}_{\texttt{sv}}\ \mathcal{U}) \overset{\texttt{a)}}{=} \mathcal{U} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \overset{\mathbf{2-17}}{=} \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(0 \ {}_{\texttt{sv}}\ \mathcal{U}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$$

`i)`
Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\mathcal{U} \ {}_{\texttt{sv}}\ 0) = 0.$

`j)`
Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\mathcal{U} \ {}_{\texttt{sv}}\ \mathcal{U}) = 0.$

$\square$

258-20. Das Auftreten von "$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$" in **258-19** `a)` hat in Bezug auf Relationen (und Funktionen) zumindest vorliegende Konsequenzen.

258-20(Satz)

`a)` *"$(0 \ _{\mathtt{sv}} \ y) = y$" genau dann, wenn "$y$ Relation".*

`b)` *Aus "f Funktion" folgt "$(0 \ _{\mathtt{sv}} \ f) = f$".*

Beweis **258-20** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(0 \ _{\mathtt{sv}} \ y) = y$.

`1:` Via **258-19** gilt: $(0 \ _{\mathtt{sv}} \ y) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $y = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`3:` Aus `2`"$y = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$"
folgt via **158-1**: $y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-1(Def)**: y Relation.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich y Relation.

`1:` Aus `VS` gleich "y Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **158-1**: $y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = y$.

`3:` Via **258-19** gilt: $(0 \ _{\mathtt{sv}} \ y) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(0 \ _{\mathtt{sv}} \ y) = y$.

`b)` `VS` gleich f Funktion.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`2:` Aus `1`"f Relation"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(0 \ _{\mathtt{sv}} \ f) = f$.

□

258-21. Nachdem durch etliche Vorbemerkungen der Weg zur Definition von "$x(E\cup.)$" geebnet ist, wird dieser Weg nun - in Anbetracht des Umfangs dieses Essays - zügig beschritten.

258-21(Definition)

1) $x(E\cup.)$

$$= \mathsf{258.1}(x,y) = \{(\lambda,\mu):(E\cup\lambda,\mu)\in x\}$$

$$= \{\omega:(\exists\Omega,\Phi:((E\cup\Omega,\Phi)\in x)\wedge(\omega=(\Omega,\Phi)))\}.$$

2) "**$\mathfrak{C}$ ist $E\cup$Verschiebung von x**" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C}=x(E\cup.).$$

258-22. In der Aufwärmrunde für den Umgang mit $x(E\cup .)$ wird Erwartetes präsentiert.

258-22(Satz)

`a)` *$x(E\cup .)$ ist $E\cup$Verschiebung von x.*

`b)` *Aus "$\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ ist $E\cup$Verschiebung von x" folgt "$\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$".*

Beweis **258-22** `a)`

Aus "$x(E\cup .)=x(E\cup .)$"

folgt via **258-21(Def)**: $x(E\cup .)$ ist $E\cup$Verschiebung von x.

`b)`

`VS` gleich $\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ ist $E\cup$Verschiebung von x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}\ldots$ ist $E\cup$Verschiebung von x"
folgt via **258-21(Def)**: $\mathfrak{C}=x(E\cup .)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ ist $E\cup$Verschiebung von x"
folgt via **258-21(Def)**: $\mathfrak{D}=x(E\cup .)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$.

□

258-23. Nun geht es um das "Element-Sein" in der $E\cup$Verschiebung von x.

258-23(Satz)

a) *Aus* "$p \in x(E\cup .)$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : ((E\cup\Omega, \Phi) \in x) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$".

b) "$(p, q) \in x(E\cup .)$" *genau dann, wenn* "$(x\cup p, q) \in x$".

Beweis **258-23**

$\{(\lambda, \mu) : (E\cup\lambda, \mu) \in x\}$ **258-21(Def)**

a) VS gleich $p \in x(E\cup .)$.

1: Via **258-21(Def)** gilt: $x(E\cup .) = \{(\lambda, \mu) : (E\cup\lambda, \mu) \in x\}$.

2: Aus VS gleich "$p \in x(E\cup .)$" und aus 1 folgt: $p \in \{(\lambda, \mu) : (E\cup\lambda, \mu) \in x\}$.

3: Aus 2"$p \in \{(\lambda, \mu) : (E\cup\lambda, \mu) \in x\}$" folgt via **258-21(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : ((E\cup\Omega, \Phi) \in x) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$.

4: Aus 3 folgt: $\exists \Omega, \Phi : ((E\cup\Omega, \Phi) \in x) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$.

<u>Beweis **258-23**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(p, q) \in x(E \cup .)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in x(E \cup .)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in x(E \cup .)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega, \Phi : ((E \cup \Omega, \Phi) \in x) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Phi)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p, q) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `1.1`"(p, q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Phi)$.

`3.1:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $x \cup p = E \cup \Omega$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots q = \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E \cup \Omega, q) = (E \cup \Omega, \Phi)$.

`4.1:` Aus `3.1`"$x \cup p = E \cup \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x \cup p, q) = (E \cup \Omega, q)$.

`4.2:` Aus `1.2`"$\ldots (E \cup \Omega, \Phi) \in x \ldots$" und
aus `3.2`
folgt: $(E \cup \Omega, q) \in x$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(x \cup p, q) \in x$.

<u>Beweis **258-23**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \cup p, q) \in x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x \cup p, q) \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: $(x \cup p, q)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x \cup p, q) \in x$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$.

`1.3:` Via **258-21(Def)** gilt:
$$x(E \cup .) = \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : ((E \cup \Omega, \Phi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi)))\}.$$

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, q)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$(x \cup p, q)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $x \cup p, q$ Menge.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = p \ldots$"
folgt: $E \cup \Omega = x \cup p$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $(p, q) = (\Omega, \Phi)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$x \cup p \ldots$ Menge"
folgt via **213-3**: p Menge.

`3.3:` Aus `2.3`"$E \cup \Omega = x \cup p$" und
aus `1.2`"$\ldots \Phi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E \cup \Omega, \Phi) = (x \cup p, q)$.

`4.1:` Aus `3.2`"p Menge" und
aus `2.2`"$\ldots q$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`4.2:` Aus `3.3`"$(E \cup \Omega, \Phi) = (x \cup p, q)$" und
aus `VS` gleich "$(x \cup p, q) \in x$"
folgt: $(E \cup \Omega, \Phi) \in x$.

...

<u>Beweis **258-23**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \cup p, q) \in x$.

...

`5:` Aus `1.2`“ $\exists \Omega, \Phi \ldots$ ” ,
aus `4.2`“ $(E \cup \Omega, \Phi) \in x$ ” ,
aus `3.1`“ $(p, q) = (\Omega, \Phi)$ ” und
aus `4.1`“ (p, q) Menge ”
folgt:
$$(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : ((E \cup \Omega, \Phi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi)))\}.$$

`6:` Aus `5` und
aus `1.3`
folgt: $(p, q) \in x(E \cup .)$.

$\square$

258-24. Vorliegender Satz zielt auf das "Element-Sein" in $\mathsf{dom}\,(x(E\cup .))$ und in $\mathsf{ran}\,(x(E\cup .))$ ab.

258-24(Satz)

a) *"$p\in\mathsf{dom}\,(x(E\cup .))$" genau dann, wenn "$E\cup p\in\mathsf{dom}\,x$".*

b) *Aus "$p\in\mathsf{ran}\,(x(E\cup .))$" folgt "$\exists\Omega:(E\cup\Omega,p)\in x$".*

c) *Aus "$(E\cup p,q)\in x$" folgt "$(p\in\mathsf{dom}\,(x(E\cup .))\wedge(q\in\mathsf{ran}\,(x(E\cup .)))$".*

<u>Beweis **258-24**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\,(x(E \cup .))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\,(x(E \cup .)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in x(E \cup .)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (p, \Omega) \in x(E \cup .)$"
folgt via **258-23**: $(E \cup p, \Omega) \in x$.

`3:` Aus `2`"$(E \cup p, \Omega) \in x$"
folgt via **7-5**: $E \cup p \in \mathsf{dom}\, x$.

`a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $E \cup p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \cup p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (E \cup p, \Omega) \in x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (E \cup p, \Omega) \in x$"
folgt via **258-23**: $(p, \Omega) \in x(E \cup .)$.

`3:` Aus `2`"$(p, \Omega) \in x(E \cup .)$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(x(E \cup .))$.

`b)` `VS` gleich $p \in \mathsf{ran}\,(x(E \cup .))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{ran}\,(x(E \cup .))$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, p) \in x(E \cup .)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, p) \in x(E \cup .)$"
folgt via **258-23**: $(E \cup \Omega, p) \in x$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"$(E \cup \Omega, p) \in x$"
folgt: $\exists \Omega : (E \cup \Omega, p) \in x$.

`c)` `VS` gleich $(E \cup p, q) \in x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(E \cup p, q) \in x$"
folgt via **258-23**: $(p, q) \in x(E \cup .)$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \in x(E \cup .)$"
folgt via **7-5**: $(p \in \mathsf{dom}\,(x(E \cup .))) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(x(E \cup .)))$.

$\square$

258-25. $x(E\cup.)$ ist eine Relation. Auch werden $\mathsf{dom}\,(x(E\cup.))$ und $\mathsf{ran}\,(x(E\cup.))$ diskutiert.

258-25(Satz)

a) $E\cup_{\mathtt{in}}\mathsf{dom}\,(x(E\cup.))\subseteq\mathsf{dom}\,x$.

b) $\mathsf{ran}\,(x(E\cup.))\subseteq\mathsf{ran}\,x$.

c) $x(E\cup.)$ *Relation.*

Beweis **258-25** a)

$\boxed{\mathtt{Thema1}}$ $\alpha\in E\cup_{\mathtt{in}}\mathsf{dom}\,(x(E\cup.))$.

2: Aus Thema1 "$\alpha\in E\cup_{\mathtt{in}}\mathsf{dom}\,(x(E\cup.))$"
folgt via **220-5**:
$$\exists\Omega:(\Omega\in\mathsf{dom}\,(x(E\cup.)))\wedge(\alpha=E\cup\Omega).$$

3: Aus 2 "$\ldots\Omega\in\mathsf{dom}\,(x(E\cup.))\ldots$"
folgt via **258-24**: $E\cup\Omega\in\mathsf{dom}\,x$.

4: aus 2 "$\ldots\alpha=E\cup\Omega$" und
aus 3
folgt: $\alpha\in\mathsf{dom}\,x$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha:(\alpha\in E\cup_{\mathtt{in}}\mathsf{dom}\,(x(E\cup.)))\Rightarrow(\alpha\in\mathsf{dom}\,x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E\cup_{\mathtt{in}}\mathsf{dom}\,(x(E\cup.))\subseteq\mathsf{dom}\,x$.

<u>Beweis **258-25**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x(E \cup .))$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x(E \cup .))$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x(E \cup .)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x(E \cup .)$"
folgt via **258-23**: $(E \cup \Omega, \alpha) \in x$.

`4:` Aus `3` "$(E \cup \Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x(E \cup .))) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(x(E \cup .)) \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x(E \cup .)$.

Aus `Thema1` "$\alpha \in x(E \cup .)$"
folgt via **258-23**: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x(E \cup .)) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $x(E \cup .)$ Relation.

$\square$

258-26. Ist f eine Funktion, so ist auch $f(E\cup .)$ eine Funktion.

258-26(Satz)

Aus "f Funktion" folgt "$f(E\cup .)$ Funktion".

Beweis **258-26** `VS` gleich f Funktion.

`1.1:` Via **258-25** gilt: `A1` "$f(E\cup .)$ Relation"

`Thema1.2` $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in f(E\cup .)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$(\alpha,\beta)\ldots\in f(E\cup .)$"
folgt via **258-23**: $(x\cup\alpha,\beta)\in f$.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\ldots(\alpha,\gamma)\in f(E\cup .)$"
folgt via **258-23**: $(x\cup\alpha,\gamma)\in f$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion",
aus `2.1` "$(x\cup\alpha,\beta)\in f$" und
aus `2.2` "$(x\cup\alpha,\gamma)\in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in f(E\cup .))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$f(E\cup .)$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in f(E\cup .))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $f(E\cup .)$ Funktion.

□

258-27. Als Intermezzo wird "$x \cup_{\mathtt{in}} \{p\} = \{x \cup p\}$" bewiesen.

258-27(Satz)

$$x \cup_{\mathtt{in}} \{p\} = \{x \cup p\}.$$

Beweis **258-27**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x \cup_{\mathtt{in}} \{p\}$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x \cup_{\mathtt{in}} \{p\}$"
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge (\alpha = x \cup \Omega)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

4: Aus 3 "$\Omega = p$" und
aus 2 "$\ldots \alpha = x \cup \Omega$"
folgt: $\alpha = x \cup p$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup_{\mathtt{in}} \{p\}) \Rightarrow (\alpha = x \cup p)$.

Konsequenz via **1-10**: `A1` | "$x \cup_{\mathtt{in}} \{p\} \subseteq \{x \cup p\}$"

...

Beweis **258-27** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{x \cup p\}$.

`2`: Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{x \cup p\}$"
folgt via **1-6**: $(\alpha = x \cup p) \wedge (x \cup p \text{ Menge})$.

`3`: Aus `2` "$\ldots x \cup p$ Menge"
folgt via **213-3**: x, p Menge.

`4`: Aus `3` "$\ldots p$ Menge"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`5`: Aus `3` "$x \ldots$ Menge" und
aus `4` "$p \in \{p\}$"
folgt via **220-5**: $x \cup p \in x \cup_{\texttt{in}} \{p\}$.

`6`: Aus `2` "$\alpha = x \cup p \ldots$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in x \cup_{\texttt{in}} \{p\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x \cup p\}) \Rightarrow (\alpha \in x \cup_{\texttt{in}} \{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{x \cup p\} \subseteq x \cup_{\texttt{in}} \{p\}$"

`1.3`: Aus `A1` gleich "$x \cup_{\texttt{in}} \{p\} \subseteq \{x \cup p\}$" und
aus `A2` gleich "$\{x \cup p\} \subseteq x \cup_{\texttt{in}} \{p\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cup_{\texttt{in}} \{p\} = \{x \cup p\}$.

$\square$

258-28. Nun wird unter anderem eine Brücke von $x(E\cup.)$ zu $(E\ _{\mathtt{sv}}\ x)$ und zu y geschlagen.

<u>258-28(Satz)</u>

a) *“$(p,q)\in x(E\cup.)$” genau dann, wenn “$(E\cup p,q)\in(E\ _{\mathtt{sv}}\ x)$”.*

b) $x(E\cup.)[y]=(E\ _{\mathtt{sv}}\ x)\,[E\cup_{\mathtt{in}}y]$.

c) $x(E\cup.)[y]\subseteq x[E\cup_{\mathtt{in}}y]$.

d) $x(E\cup.)(p)=(E\ _{\mathtt{sv}}\ x)\,(E\cup p)$.

e) $x(E\cup p)\subseteq x(E\cup.)(p)$.

<u>Beweis **258-28**</u> a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(p,q)\in x(E\cup.)$.

1: Aus VS gleich “$(p,q)\in x(E\cup.)$”
folgt via **258-23**: $(E\cup p,q)\in x$.

2: Via **2-7** gilt: $E\subseteq E\cup p$.

3: Aus 2.2“$E\subseteq E\cup p$” und
aus 1“$(E\cup p,q)\in x$”
folgt via **258-3**: $(E\cup p,q)\in(E\ _{\mathtt{sv}}\ x)$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(E\cup p,q)\in(E\ _{\mathtt{sv}}\ x)$.

1: Aus VS gleich “$(E\cup p,q)\in(E\ _{\mathtt{sv}}\ x)$”
folgt via **258-3**: $(E\cup p,q)\in x$.

2: Aus 1“$(E\cup p,q)\in x$”
folgt via **258-23**: $(p,q)\in x(E\cup.)$.

<u>Beweis **258-28**</u> `b)`

`Thema1.1` $\alpha \in x(E \cup .)[y]$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x(E \cup .)[y]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x(E \cup .))$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x(E \cup .)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(E \cup \Omega, \alpha) \in (E \;_{\mathtt{sv}}\; x)$.

`4:` Aus `3` "$(E \cup \Omega, \alpha) \in (E \;_{\mathtt{sv}}\; x)$"
folgt via **9-15**: $E \cup \Omega$ Menge.

`5:` Aus `4` "$E \cup \Omega$ Menge"
folgt via **213-3**: E Menge.

`6:` Aus `5` "E Menge" und
aus `2` "$\ldots \Omega \in y \ldots$"
folgt via **220-5**: $E \cup \Omega \in E \cup_{\mathtt{in}} y$.

`7:` Aus `3` "$(E \cup \Omega, \alpha) \in (E \;_{\mathtt{sv}}\; x)$" und
aus `6` "$E \cup \Omega \in E \cup_{\mathtt{in}} y$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in (E \;_{\mathtt{sv}}\; x)\,[E \cup_{\mathtt{in}} y]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x(E \cup .)[y]) \Rightarrow (\alpha \in (E \;_{\mathtt{sv}}\; x)\,[E \cup_{\mathtt{in}} y])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x(E \cup .)[y] \subseteq (E \;_{\mathtt{sv}}\; x)\,[E \cup_{\mathtt{in}} y]$"

...

<u>Beweis **258-28**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\qquad \alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} y]$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} y]$"
folgt via **8-7**: $\quad \exists \Omega : (\Omega \in E \cup_{\texttt{in}} y) \wedge ((\Omega, \alpha) \in (E_{\texttt{sv}}\, x))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \cup_{\texttt{in}} y \ldots$"
folgt via **220-5**: $\quad \exists \Phi : (\Phi \in y) \wedge (\Omega = E \cup \Phi)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Omega = E \cup \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $\quad (\Omega, \alpha) = (E \cup \Phi, \alpha)$.

`5:` Aus `4` und
aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in (E_{\texttt{sv}}\, x)$"
folgt: $\quad (E \cup \Phi, \alpha) \in (E_{\texttt{sv}}\, x)$.

`6:` Aus `5`"$(E \cup \Phi, \alpha) \in (E_{\texttt{sv}}\, x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\quad (\Phi, \alpha) \in x(E \cup .)$.

`7:` Aus `6`"$(\Phi, \alpha) \in x(E \cup .)$" und
aus `3`"$\ldots \Phi \in y \ldots$"
folgt via **8-8**: $\quad \alpha \in x(E \cup .)[y]$.

Ergo `Thema1.2`: $\quad \forall \alpha : (\alpha \in (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} y]) \Rightarrow (\alpha \in x(E \cup .)[y])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\quad \boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}(E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} y] \subseteq x(E \cup .)[y]\text{"}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$x(E \cup .)[y] \subseteq (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} y]$" und
aus `A2` gleich "$(E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} y] \subseteq x(E \cup .)[y]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\quad x(E \cup .)[y] = (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} y]$.

<u>Beweis **258-28**</u> `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $x(E\cup .)[y] = (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,[E\cup_{\mathtt{in}}\,y]$.

`2:` Via **258-7** gilt: $(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,[E\cup_{\mathtt{in}}\,y] \subseteq x[E\cup_{\mathtt{in}}\,y]$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $x(E\cup .)[y] \subseteq x[E\cup_{\mathtt{in}}\,y]$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $x(E\cup .)[\{p\}] = (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,[x\cup_{\mathtt{in}}\,\{p\}]$.

`2:` Via **258-27** gilt: $x\cup_{\mathtt{in}}\,\{p\} = \{E\cup p\}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $x(E\cup .)[\{p\}] = (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,[\{E\cup p\}]$.

`4:` $(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,(E\cup p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,[\{E\cup p\}] \stackrel{3}{=} \bigcap x(E\cup .)[\{p\}] \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} x(E\cup .)(p)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,(E\cup p) = x(E\cup .)(p)$.

`e)`

`1:` Via **258-7** gilt: $x(E\cup p) \subseteq (E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,(E\cup p)$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(E_{\,\mathtt{sv}}\,x)\,(E\cup p) = x(E\cup .)(p)$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $x(E\cup p) \subseteq x(E\cup .)(p)$.

$\square$

258-29. Hier wird der Zusammenhang zwischen $x(E\cup .)(p)$ und $x(E\cup p)$ diskutiert.

258-29(Satz)

a) *Aus* "$E\cup p\in \mathsf{dom}\, x$"
folgt "$x(E\cup .)(p), x(E\cup p)$ *Menge*" *und* "$x(E\cup .)(p)=x(E\cup p)$".

b) *Aus* "$E\cup p\notin \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$x(E\cup .)(p)=x(E\cup p)=\mathcal{U}$".

c) $x(E\cup .)(p)=x(E\cup p)$.

<u>Beweis **258-29**</u> `a)` `VS` gleich $E \cup p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1.1:` Via **258-28** gilt: $x(E \cup .)[\{p\}] = (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} \{p\}]$.

> `Thema1.2` $\alpha \in E \cup_{\texttt{in}} \{p\}$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in E \cup_{\texttt{in}} \{p\}$”
> folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge (\alpha = E \cup \Omega)$.
>
> `3:` Aus 2“$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$”
> folgt via **1-6**: $\Omega = p$.
>
> `4:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \cup p \in \mathsf{dom}\, x$” und
> aus 3
> folgt: $E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, x$.
>
> `5:` Via **2-7** gilt: $E \subseteq E \cup \Omega$.
>
> `6:` Aus 5“$E \subseteq E \cup \Omega$” und
> aus 4“$E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, x$”
> folgt via **258-5**: $E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, (E_{\texttt{sv}}\, x)$.
>
> `7:` Aus 2“$\ldots \alpha = E \cup \Omega$” und
> aus 4
> folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\, (E_{\texttt{sv}}\, x)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \cup_{\texttt{in}} \{p\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, (E_{\texttt{sv}}\, x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \cup_{\texttt{in}} \{p\} \subseteq \mathsf{dom}\, (E_{\texttt{sv}}\, x)$.

Konsequenz via **258-8**: `A1` | “$(E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} \{p\}] = x[E \cup_{\texttt{in}} \{p\}]$”

`1.3:` $x(E \cup .)(p) \overset{\textbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap x(E \cup .)[\{p\}] \overset{1.1}{=} \bigcap (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} \{p\}]$.

`1.4:` $x(E \cup p) \overset{\textbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap x[\{E \cup p\}] \overset{\textbf{258-27}}{=} \bigcap x[E \cup_{\texttt{in}} \{p\}] \overset{\texttt{A1}}{=} \bigcap (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} \{p\}]$.

`2:` Aus `1.3`“$x(E \cup .)(p) = \ldots = \bigcap (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} \{p\}]$” und
aus `1.4`“$x(E \cup p) = \ldots = \bigcap (E_{\texttt{sv}}\, x)\,[E \cup_{\texttt{in}} \{p\}]$”
folgt: $x(E \cup .)(p) = x(E \cup p)$.

<u>Beweis **258-29**</u> `b)` `VS` gleich $E \cup p \notin \mathsf{dom}\, x.$

`1.1:` Via **258-24** gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,(x(E \cup .))) \Leftrightarrow (E \cup p \in \mathsf{dom}\, x).$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \cup p \notin \mathsf{dom}\, x$"

folgt via **17-4**: $\boxed{x(E \cup p) = \mathcal{U}}$

`2:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$E \cup p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\,(x(E \cup .)).$

`3:` Aus `2`"$p \notin \mathsf{dom}\,(x(E \cup .))$"
folgt via **17-4**: $x(E \cup .)(p) = \mathcal{U}.$

`4:` Aus `1.2` und
aus `4`

folgt: $\boxed{x(E \cup .)(p) = x(E \cup p)}$

`c)`

`1:` Es gilt: $(E \cup p \in \mathsf{dom}\, x) \vee (E \cup x \notin \mathsf{dom}\, x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \cup p \in \mathsf{dom}\, x.$

Aus `1.1.Fall`"$E \cup p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x(E \cup .)(p) = x(E \cup p).$

`1.2.Fall` $E \cup p \notin \mathsf{dom}\, x.$

Aus `1.2.Fall`"$E \cup p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x(E \cup .)(p) = x(E \cup p).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x(E \cup .)(p) = x(E \cup p).$

□

258-30. Nun wird Einiges über $y(E \cup .)$ für Funktionen y ausgesagt.

258-30(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$p \in f(E \cup .)$"*
folgt "$\exists \Omega : (E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = (\Omega, f(E \cup \Omega)))$".

b) *Aus "f Funktion" und "$(p, q) \in f(E \cup .)$"*
folgt "$E \cup p \in \mathsf{dom}\, f$" und "$q = f(E \cup p)$".

c) *Aus "f Funktion" und "$E \cup p \in \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$(p, f(E \cup p)) \in f(E \cup .)$".

Beweis **258-30** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in f(E \cup .))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p \in f(E \cup .)$"
folgt via **258-23**: $\exists \Omega, \Phi : ((E \cup \Omega, \Phi) \in f) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$.

2.1: Aus 1"$\ldots (E \cup \Omega, \Phi) \in f \ldots$"
folgt via **7-5**: $E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

2.2: Aus VS gleich "f Funktion…" und
aus 1"$\ldots (E \cup \Omega, \Phi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Phi = f(E \cup \Omega)$.

3: Aus 2"$\Phi = f(E \cup \Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, f(E \cup \Omega))$.

4: Aus 1"$\ldots p = (\Omega, \Phi)$" und
aus 3
folgt: $p = (\Omega, f(E \cup \Omega))$.

5: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2.1"$E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus 4"$p = (\Omega, f(E \cup \Omega))$"
folgt:
$$\exists \Omega : (E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = (\Omega, f(E \cup \Omega))).$$

<u>Beweis **258-30**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in f(E \cup .))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in f(E \cup .)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in f(E \cup .)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega : (E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge ((p,q) = (\Omega, f(E \cup \Omega))).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega, f(E \cup \Omega))$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = f(E \cup \Omega))$.

`3.1:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt: $\boxed{E \cup p \in \mathsf{dom}\, f}$

`3.2:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `2`"$\ldots q = f(E \cup \Omega)$"
folgt: $\boxed{q = f(E \cup p)}$

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \cup p \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \cup p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(E \cup p, f(E \cup p)) \in f$.

`2:` Aus `1`"$(E \cup p, f(E \cup p)) \in f$"
folgt via **258-23**: $(p, f(E \cup p)) \in f(E \cup .)$.

□

258-31. Hier werden die Elemente von $\mathsf{ran}\,(f(E\cup .))$, f Funktion, beschrieben.

258-31(Satz)

a) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p\in\mathsf{ran}\,(f(E\cup .))$"
folgt "$\exists\Omega:(E\cup\Omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(p=f(E\cup\Omega))$".

b) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$E\cup p\in\mathsf{dom}\,f$"
folgt "$f(E\cup p)\in\mathsf{ran}\,(f(E\cup .))$".

<u>Beweis **258-31**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{ran}\,(f(E \cup .)))$.

`1:` Aus `VS` gleich “f Funktion…”
folgt via **258-26**: $f(E \cup .)$ Funktion.

`2:` Aus `1`“$f(E \cup .)$ Funktion” und
aus `VS` gleich “…$p \in \mathsf{ran}\,(f(E \cup .))$”
folgt via **18-24**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(f(E \cup .))) \wedge (p = f(E \cup .)(\Omega))$.

`3.1:` Aus `2`“…$\Omega \in \mathsf{dom}\,(f(E \cup .))$…”
folgt via **258-24**: $E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`3.2:` Via **258-29** gilt: $f(E \cup .)(\Omega) = f(E \cup \Omega)$.

`4:` Aus `3.2` und
aus `2`“…$p = f(E \cup .)(\Omega)$”
folgt: $p = f(E \cup \Omega)$.

`5:` Aus `2`“$\exists \Omega$…”,
aus `3.1`“$E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus `4`“$p = f(E \cup \Omega)$”
folgt: $\exists \Omega : (E \cup \Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = f(E \cup \Omega))$.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \cup p \in \mathsf{dom}\, f$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “f Funktion…”
folgt via **258-26**: $f(E \cup .)$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich “…$E \cup p \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **258-24**: $p \in \mathsf{dom}\,(f(E \cup .))$.

`2:` Aus `1.1`“$f(E \cup .)$ Funktion” und
aus `1.2`“$p \in \mathsf{dom}\,(f(E \cup .))$”
folgt via **18-22**: $f(E \cup .)(p) \in \mathsf{ran}\,(f(E \cup .))$.

`3:` Via **258-29** gilt: $f(E \cup .)(p) = f(E \cup p)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $f(E \cup p) \in \mathsf{ran}\,(f(E \cup .))$.

□

258-32. Nun gibt es ein Intermezzo über so selbstverständlich erscheinende Aussagen, dass es wundert, diese nicht bereits an früherer Stelle bewiesen zu haben.

258-32(Satz)

a) *"$x \cup (y \setminus x) = y$" genau dann, wenn "$x \subseteq y$".*

b) $0 \neq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Beweis **258-32** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x \cup (y \setminus x) = y$.

1: Via **5-22** gilt: $x \cup (y \setminus x) = x \cup y$.

2: Aus 1
und aus VS
folgt: $x \cup y = y$.

3: Aus 2"$x \cup y = y$"
folgt via **2-10**: $x \subseteq y$.

$\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x \subseteq y$.

1: Aus VS gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **2-10**: $x \cup y = y$.

2: Via **5-22** gilt: $x \cup (y \setminus x) = x \cup y$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $x \cup (y \setminus x) = y$.

b)

1: Via **7-23** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ Unmenge.

2: Aus 1"$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **0-17**: $0 \neq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

□

258-33. Mitunter ist es nützlich ein Kriterium für "$x(E \cup .) = 0$" zu haben.

258-33(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x(E \cup .) = 0$.

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (E \not\subseteq \alpha)$.

`iii)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin \alpha))$.

<u>Beweis **258-33**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x(E \cup .) = 0.$

`1:` Es gilt: $(\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (E \subseteq \Omega)) \vee (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (E \not\subseteq \alpha)).$

wfFallunterscheidung

`1.1.Fall` $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (E \subseteq \Omega).$

`2.1:` Aus `1.1.Fall` "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **7-7**: $\exists \Phi : (\Omega, \Phi) \in x.$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \Omega$"
folgt: $\exists \Psi : \Psi = \Omega \setminus E.$

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \Omega$"
folgt via **258-32**: $E \cup (\Omega \setminus E) = \Omega.$

`3:` Aus `2.2` "$\ldots \Psi = \Omega \setminus E$" und
aus `2.3`
folgt: $E \cup \Psi = \Omega.$

`4:` Aus `3` "$E \cup \Psi = \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E \cup \Psi, \Phi) = (\Omega, \Phi).$

`5:` Aus `4` und
aus `2.1` "$\ldots (\Omega, \Phi) \in x$"
folgt: $(E \cup \Psi, \Phi) \in x.$

`6:` Aus `5` "$(E \cup \Psi, \Phi) \in x$"
folgt via **258-23**: $(\Psi, \Phi) \in x(E \cup .).$

`7:` Aus `6` "$(\Psi, \Phi) \in x(E \cup .)$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x(E \cup .).$

`8:` Es gilt `7` "$0 \neq x(E \cup .)$".
Es gilt `VS` gleich "$x(E \cup .) = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (E \not\subseteq \alpha).$

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (E \not\subseteq \alpha).$

Beweis **258-33** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ VS gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (E \not\subseteq \alpha)$.
Aus VS gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (E \not\subseteq \alpha)$"
folgt via **258-17**: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin \alpha))$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin \alpha))$.

1: Es gilt: $(x(E \cup .) = 0) \vee (0 \neq x(E \cup .))$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $0 \neq x(E \cup .)$.

2: Aus 1.1.Fall "$0 \neq x(E \cup .)$"
folgt via **0-20**: $\exists\Phi : \Phi \in x(E \cup .)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Phi \in x(E \cup .)$"
folgt via **258-23**: $\exists\Psi, \Gamma : ((E \cup \Psi, \Gamma) \in x) \wedge (\Phi = (\Psi, \Gamma))$.

4: Aus 3 "$\ldots (E \cup \Psi, \Gamma) \in x \ldots$"
folgt via **7-5**: $E \cup \Psi \in \mathsf{dom}\, x$.

5: Aus 4 und
aus VS
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin E \cup \Psi)$.

6: Aus 5 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cup \Psi$.

7: Es gilt 5 "$\ldots \Omega \notin E \cup \Psi$".
Es gilt 6 "$\Omega \in E \cup \Psi$".
Ex falso quodlibet folgt: $x(E \cup .) = 0$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x(E \cup .) = 0$.

□

258-34. Falls E eine Unmenge ist, dann ist $x(E \cup .) = 0$.

258-34(Satz)

`a)` *Aus “E Unmenge” folgt “$x(E \cup .) = 0$”.*

`b)` *Aus “$0 \neq x(E \cup .)$” folgt “E Menge”.*

Beweis **258-34** `a)` `VS` gleich E Unmenge.

`Thema1` $\alpha \in x(E \cup .)$.

`2:` Aus `Thema1` “$\alpha \in x(E \cup .)$”
folgt via **258-23**: $\exists \Omega, \Phi : (E \cup \Omega, \Phi) \in x$.

`3:` Aus `2` “$\ldots (E \cup \Omega, \Phi) \in x$”
folgt via **9-15**: $E \cup \Omega$ Menge.

`4:` Aus `3` “$E \cup \Omega$ Menge”
folgt via **213-3**: E Menge.

`5:` Es gilt `4` “E Menge”.
Es gilt `VS` gleich “E Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x(E \cup .)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x(E \cup .)) \Rightarrow (\alpha \notin x(E \cup .))$.

Konsequenz via **0-19**: $x(E \cup .) = 0$.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(E \text{ Unmenge}) \Rightarrow (x(E \cup .) = 0)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(0 \neq x(E \cup .)) \Rightarrow (E \text{ Menge})$.

□

258-35. Hier wird $x(E \cup .)$ für $E = 0$ oder $E = \mathcal{U}$ oder $x = 0$ oder $x = \mathcal{U}$ untersucht.

258-35(Satz)

a) $x(0 \cup .) = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

b) $x(\mathcal{U} \cup .) = 0$.

c) $0(E \cup .) = 0$.

d) *"$\mathcal{U}(E \cup .) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" genau dann, wenn "E Menge".*

e) *"$\mathcal{U}(E \cup .) = 0$" genau dann, wenn "E Unmenge".*

f) $0(0 \cup .) = 0$.

g) $0(\mathcal{U} \cup .) = 0$.

h) $\mathcal{U}(0 \cup .) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

i) $\mathcal{U}(\mathcal{U} \cup .) = 0$.

$\{\omega : E \cap \omega = 0\}$ **258-53(Def)**

Beweis **258-55** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x(0\cup.)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x(0\cup.)$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x(0\cup.)$”
folgt via **258-23**:
$$\exists\Omega,\Phi : ((0\cup\Omega,\Phi) \in x) \wedge (\alpha = (\Omega,\Phi)).$$

`3.1:` Aus `2.2`“$\ldots\alpha = (\Omega,\Phi)$” und
aus `2.1`
folgt: (Ω,Φ) Menge.

`3.2:` Via **2-17** gilt: $0\cup\Omega = \Omega$.

`4.1:` Aus `3.1`“(Ω,Φ) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: Ω,Φ Menge.

`4.2:` Aus `3.2`“$0\cup\Omega = \Omega$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(0\cup\Omega,\Phi) = (\Omega,\Phi)$.

`5.1:` Aus `4.1`“Ω,Φ Menge”
folgt via **6-8**: $(\Omega,\Phi) \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

`5.2:` Aus `2.2`“$\ldots(0\cup\Omega,\Phi) \in x\ldots$” und
aus `4.2`
folgt: $(\Omega,\Phi) \in x$.

`6.1:` Aus `2.2`“$\ldots\alpha = (\Omega,\Phi)$” und
aus `5.1`
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

`6.2:` Aus `2.2`“$\ldots\alpha = (\Omega,\Phi)$” und
aus `5.2`
folgt: $\alpha \in x$.

`7:` Aus `6.2`“$\alpha \in x$” und
aus `6.1`“$\alpha \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U})$.

...

...

Beweis **258-35** `a)` ...

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x(0 \cup .)) \Rightarrow (\alpha \in x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x(0 \cup .) \subseteq x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$"

`Thema1.2` $\alpha \in x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x, \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \ldots \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `2`"$\alpha \in x \ldots$"
folgt: $(\Omega, \Phi) \in x$.

`4.2:` Via **2-17** gilt: $0 \cup \Omega = \Omega$.

`5:` Aus `4.2`"$0 \cup \Omega = \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(0 \cup \Omega, \Phi) = (\Omega, \Phi)$.

`6:` Aus `5` und
aus `4.1`
folgt: $(0 \cup \Omega, \Phi) \in x$.

`7:` Aus `6`"$(0 \cup \Omega, \Phi) \in x$"
folgt via **258-23**: $(\Omega, \Phi) \in x(0 \cup .)$.

`8:` Aus `3`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `7`
folgt: $\alpha \in x(0 \cup .)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \Rightarrow (\alpha \in x(0 \cup .))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq x(0 \cup .)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$x(0 \cup .) \subseteq x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$" und
aus `A2` gleich "$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq x(0 \cup .)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x(0 \cup .) = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Beweis **258-35** b)
Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **258-34**: $x(\mathcal{U}\cup.)=0$.

c)

1.1: Via **258-25** gilt: $\mathsf{ran}\,(0(E\cup.))\subseteq\mathsf{ran}\,0$.

1.2: Via **258-25** gilt: $0(E\cup.)$ Relation.

2: Aus **7-11**"$\mathsf{ran}\,0=0$" und
aus 1.1
folgt: $\mathsf{ran}\,(0(E\cup.))\subseteq 0$.

3: Aus 2"$\mathsf{ran}\,(0(E\cup.))\subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\mathsf{ran}\,(0(E\cup.))=0$.

4: Aus 1.2"$0(E\cup.)$ Relation" und
aus 3"$\mathsf{ran}\,(0(E\cup.))=0$"
folgt via **92-5**: $0(E\cup.)=0$.

d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathcal{U}(E\cup.)=\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

1: Es gilt: $(E \text{ Menge})\vee(E \text{ Unmenge})$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall E Unmenge.

2: Aus 1.1.Fall"E Unmenge"
folgt via **258-34**: $\mathcal{U}(E\cup.)=0$.

3: Via **258-32** gilt: $0\neq\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $\mathcal{U}(E\cup.)\neq\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

5: Es gilt 4"$\mathcal{U}(E\cup.)\neq\mathcal{U}\times\mathcal{U}$".
Es gilt VS gleich "$\mathcal{U}(E\cup.)=\mathcal{U}\times\mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: E Menge.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: E Menge.

<u>Beweis **258-35**</u> `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich E Menge.

`1.1:` Via **258-25** gilt: $\mathcal{U}(E\cup .)$ Relation.

`2:` Aus `1.1`"$\mathcal{U}(E\cup .)$ Relation"
folgt via **10-1(Def)**: `A1` | "$\mathcal{U}(E\cup .) \subseteq \mathcal{U}\times\mathcal{U}$"

`Thema1.2` $\alpha \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}$"
folgt via **6-8**: $\exists\Omega,\Phi : (\Omega,\Phi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega,\Phi))$.

`3:` Aus `VS` gleich "E Menge" und
aus `2`"$\ldots\Omega\ldots$ Menge$\ldots$"
folgt via **213-3**: $E\cup\Omega$ Menge.

`4:` Aus `3`"$E\cup\Omega$ Menge" und
aus `2`"$\ldots\Phi$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E\cup\Omega,\Phi)$ Menge.

`5:` Aus `4`"$(E\cup\Omega,\Phi)$ Menge"
folgt via **0-22**: $(E\cup\Omega,\Phi)\in\mathcal{U}$.

`6:` Aus `5`"$(E\cup\Omega,\Phi)\in\mathcal{U}$"
folgt via **258-23**: $(\Omega,\Phi)\in\mathcal{U}(E\cup .)$.

`7:` Aus `2`"$\ldots\alpha = (\Omega,\Phi)$" und
aus `6`
folgt: $\alpha\in\mathcal{U}(E\cup .)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\alpha : (\alpha\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha\in\mathcal{U}(E\cup .))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\mathcal{U}\times\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}(E\cup .)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathcal{U}(E\cup .) \subseteq \mathcal{U}\times\mathcal{U}$" und
aus `A2` gleich "$\mathcal{U}\times\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}(E\cup .)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{U}(E\cup .) = \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

<u>Beweis **258-35**</u> `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathcal{U}(E\cup.)=0.$

`1:` Es gilt: $(E \text{ Menge}) \vee (E \text{ Unmenge}).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` E Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "E Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathcal{U}(E\cup.)=\mathcal{U}\times\mathcal{U}.$

`3:` Via **258-32** gilt: $0\neq\mathcal{U}\times\mathcal{U}.$

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $0\neq\mathcal{U}(E\cup.).$

`5:` Es gilt `5`"$0\neq\mathcal{U}(E\cup.)$" .
Es gilt `VS` gleich "$\mathcal{U}(E\cup.)=0$" .
Ex falso quodlibet folgt: E Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: E Unmenge.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich E Unmenge.
Aus `VS` gleich "E Unmenge"
folgt via **258-34**: $\mathcal{U}(E\cup.)=0.$

`f)`
Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $0(0\cup.)=0.$

`g)`
Via des bereits bewiesenen `c)` gilt. $0(\mathcal{U}\cup.)=0.$

`h)`
Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathcal{U}(0\cup.)=\mathcal{U}\times\mathcal{U}.$

`i)`
Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathcal{U}(\mathcal{U}\cup.)=0.$

□

258-36. x ist genau dann eine Relation, wenn $x(0 \cup .) = x$ gilt. Im Speziellen ist $f(0 \cup .) = f$ für jede Funktion f.

258-36(Satz)

a) *“$x(0 \cup .) = x$” genau dann, wenn “x Relation”.*

b) *Aus “f Funktion” folgt “$f(0 \cup .) = f$”.*

Beweis **258-36** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x(0 \cup .) = x$.

1: Via **258-35** gilt: $x(0 \cup .) = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

2: Aus VS und
aus 1
folgt: $x = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

3: Aus 2“$x = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$”
folgt via **10-3**: x Relation.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich x Relation.

1: Aus VS gleich “x Relation”
folgt via **10-3**: $x = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

2: Via **258-35** gilt: $x(0 \cup .) = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $x(0 \cup .) = x$.

b) VS gleich f Funktion.

1: Aus VS gleich “f Funktion”
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

2: Aus 1“f Relation”
folgt via des bereits bewiesenen a): $f(0 \cup .) = f$.

□

258-37. Da die $E\cup$Verschiebung von x mit einem eigenen Symbol versehen ist, erscheint es sinnvoll, auch der bereits in **#16** definierten $E\cap$Verschiebung von x ein eigenes Symbol zu geben. Vorbereitend wird die entsprechende Definition gegeben.

258-37(Definition)

$$x(E\cap .) = \{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}.$$

$\{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$ **16-1(Def)**

258-38. Nun wird Erwartetes bewiesen.

258-38(Satz)

$x(E\cap.)$ ist $E\cap$Verschiebung von x.

Beweis **258-38**

$\{(\lambda,\mu):(E\cap\lambda,\mu)\in x\}$ **16-1(Def)**

1: Via **258-37(Def)**
gilt: $x(E\cap.)=\{(\lambda,\mu):(E\cap\lambda,\mu)\in x\}$.

2: Aus 1"$x(E\cap.)=\{(\lambda,\mu):(E\cap\lambda,\mu)\in x\}$"
folgt via **16-1(Def)**: $x(E\cap.)$ ist $E\cap$Verschiebung von x.

258-39. Hier werden einige Resultate über $E\cap$Verschiebungen von x, die aus **#16** bekannt sind, mit Hilfe des neuen Terms $x(E\cap .)$ formuliert.

258-39(Satz)

a) $x(E\cap .)$ *Relation.*

b) *Aus* "$p\in x(E\cap .)$"
folgt "$\exists\Omega,\Phi:(\Omega,\Phi$ *Menge*$)\wedge((E\cap\Omega,\Phi)\in x)\wedge(p=(\Omega,\Phi))$".

c) "$(p,q)\in x(E\cap .)$"
genau dann, wenn "p *Menge*" *und* "$(E\cap p,q)\in x$".

d) $\mathsf{dom}\,(x(E\cap .))=\{\omega:E\cap\omega\in\mathsf{dom}\,x\}$.

e) $\mathsf{ran}\,(x(E\cap .))=x[\mathcal{P}(E)]$.

f) *Aus* "$\mathsf{dom}\,x=\mathcal{P}(y)$" *und* "$E\subseteq y$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(x(E\cap .))=\mathcal{U}$".

g) *Aus* "$\mathsf{dom}\,x=\mathcal{P}(y)$" *und* "$E\subseteq y$" *folgt* "$x(E\cap .)$ *Unmenge*".

$\{\omega:E\cap\omega\in x\}$ **16-1(Def)**

Beweis **258-39** a)

1: Via **258-38** gilt: $x(E\cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x.

2: Aus 1"$x(E\cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x"
folgt via **16-5**: $x(E\cap .)$ Relation.

b) VS gleich $p\in x(E\cap .)$.

1: Via **258-38** gilt: $x(E\cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x.

2: Aus VS gleich "$p\in x(E\cap .)$" und
aus 1"$x(E\cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x"
folgt via **16-3**: $\exists\Omega,\Phi:(\Omega,\Phi$ Menge$)\wedge((E\cap\Omega,\Phi)\in x)\wedge(p=(\Omega,\Phi))$.

c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(p,q)\in x(E\cap .)$.

1: Via **258-38** gilt: $x(E\cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x.

2: Aus 1"$x(E\cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x" und
aus VS gleich "$(p,q)\in x(E\cap .)$"
folgt via **16-4**: $(p$ Menge$)\wedge(E\cap p,q)\in x)$.

Beweis **258-39** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge ((E \cap p, q) \in x)$.

`1:` Via **258-38** gilt: $x(E \cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x.

`2:` Aus `1` "$x(E \cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x" und
aus `VS` gleich "$(p \text{ Menge}) \wedge ((E \cap p, q) \in x)$"
folgt via **16-4**: $(p, q) \in x(E \cap .)$.

`de)`

`1:` Via **258-38** gilt: $x(E \cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x.

`2.d):` Aus `1` "$x(E \cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x"
folgt via **16-5**: $\mathsf{dom}\,(x(E \cap .)) = \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$.

`2.e):` Aus `1` "$x(E \cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x"
folgt via **16-5**: $\mathsf{ran}\,(x(E \cap .)) = x[\mathcal{P}(E)]$.

`fg)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\, x = \mathcal{P}(y)) \wedge (E \subseteq y)$.

`1:` Via **258-38** gilt: $x(E \cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x.

`2.f):` Aus `1` "$x(E \cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x" und
aus `VS` gleich "$(\mathsf{dom}\, x = \mathcal{P}(y)) \wedge (E \subseteq y)$"
folgt via **16-7**: $\mathsf{dom}\,(x(E \cap .)) = \mathcal{U}$.

`2.g):` Aus `1` "$x(E \cap .)$ ist $E\cap$Verschiebung von x" und
aus `VS` gleich "$(\mathsf{dom}\, x = \mathcal{P}(y)) \wedge (E \subseteq y)$"
folgt via **16-7**: $x(E \cap .)$ Unmenge.

□

x_{c1}. x_{c2}.
$x\,(E|a.)$. $\mathfrak{C}$ ist $(E|a.)$-partielle Relation von x.
$\{.\}\circ x_{\mathsf{c1}}$.
$x(E\cup.)(0)=x(E)$.
$\mathsf{cp}\,x$. $\mathfrak{C}$ cartesisches Produkt von x.
$\bigcup$Axiom.
$x\,(E|p.|a.)$.

Ersterstellung: 30/11/13 **Letzte Änderung: 28/05/14**

259-1. Die in **#258** vorgestellte E-partielle Relation von x wird im Folgenden bevorzugt auf Klassen x mit $\mathsf{dom}\,x\subseteq{}^DB$ angewendet. Dabei spielen Klassen E, deren Definitions-Bereich bis auf einen Punkt mit D übereinstimmen eine besondere Rolle. Zur Vorbereitung der Untersuchung von $x(E\cup.)$ in diesen Fällen werden die Klassen x_{c1} und x_{c2} in die Essays eingeführt.

259-1(Definition)

1) $x_{\mathsf{c1}}=\mathsf{259.0}(x)=\{(\lambda,(x,\lambda)):\lambda\in\mathcal{U}\}$
$=\{\omega:(\exists\Omega:\omega=(\Omega,(x,\Omega)))\}$.

2) $x_{\mathsf{c2}}=\mathsf{259.1}(x)=\{(\lambda,(\lambda,x)):\lambda\in\mathcal{U}\}$
$=\{\omega:(\exists\Omega:\omega=(\Omega,(\Omega,x)))\}$.

259-2. Nun wird das "Element-Sein" in $x_{\mathsf{c1}}, x_{\mathsf{c2}}$ thematisiert.

259-2(Satz)

a) *Aus* "$p\in x_{\mathsf{c1}}$"
folgt "x *Menge*" *und* "$\exists\Omega:(\Omega\ \textit{Menge})\wedge(p=(\Omega,(x,\Omega)))$".

b) *Aus* "$(p,q)\in x_{\mathsf{c1}}$" *folgt* "x *Menge*" *und* "$q=(x,p)$".

c) *Aus* "$(p,(q,r))\in x_{\mathsf{c1}}$" *folgt* "$x$ *Menge*" *und* "$q=x$" *und* "$r=p$".

d) *Aus* "x,p *Menge*" *folgt* "$(p,(x,p))\in x_{\mathsf{c1}}$".

e) *Aus* "$p\in x_{\mathsf{c2}}$"
folgt "x *Menge*" *und* "$\exists\Omega:(\Omega\ \textit{Menge})\wedge(p=(\Omega,(\Omega,x)))$".

f) *Aus* "$(p,q)\in x_{\mathsf{c2}}$" *folgt* "x *Menge*" *und* "$q=(p,x)$".

g) *Aus* "$(p,(q,r))\in x_{\mathsf{c2}}$" *folgt* "$x$ *Menge*" *und* "$q=p$" *und* "$r=x$".

h) *Aus* "x,p *Menge*" *folgt* "$(p,(p,x))\in x_{\mathsf{c2}}$".

<u>Beweis</u> **259-2** `a)` `VS` gleich $p \in x_{\mathtt{c1}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via **259-1(Def)**: $\exists \Omega : p = (\Omega, (x, \Omega))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots p = (\Omega, (x, \Omega))$" und
aus `1.1`
folgt: $(\Omega, (x, \Omega))$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, (x, \Omega))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega, (x, \Omega)$ Menge.

`4:` Aus `3`"$\ldots (x, \Omega)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\Omega \ldots$ Menge" und
aus `1.2`"$\ldots p = (\Omega, (x, \Omega))$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (p = (\Omega, (x, \Omega)))}$

<u>Beweis</u> **259-2** `b)` `VS` gleich $(p,q)\in x_{\mathtt{c1}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(x \text{ Menge})\wedge(\exists\Omega:(p,q)=(\Omega,(x,\Omega))).$$

`2.1:` Aus `1.2`
folgt: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots(p,q)=(\Omega,(x,\Omega))$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p=\Omega)\wedge(q=(x,\Omega))$.

`3:` Aus `2.2`"$p=\Omega\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x,p)=(x,\Omega)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.2`"$\ldots q=(x,\Omega)$"
folgt: $\boxed{q=(x,p)}$

<u>Beweis **259-2**</u> `c)` `VS` gleich $(p,(q,r)) \in x_{\mathtt{c1}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,(q,r)) \in x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(p,(q,r))$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,(q,r)) \in x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(x \text{ Menge}) \wedge ((q,r) = (x,p))$.

`2.1:` Aus `1.2`
folgt: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.1`"$(p,(q,r))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (q,r) Menge.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots (q,r) = (x,p)$" und
aus `2.2`"(q,r) Menge"
folgt via **IGP**: $(q = x) \wedge (r = p)$.

`4.1:` Aus `3`
folgt: $\boxed{q = x}$

`4.2:` Aus `3`
folgt: $\boxed{r = p}$

<u>Beweis</u> **259-2** `d)` `VS` gleich x, p Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x, p Menge"
folgt: $\exists\Omega : p = \Omega$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x, p Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (x, p) Menge.

`2:` Aus `1.1`"$\ldots p = \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, p) = (x, \Omega)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge" und
aus `1.2`"(x, p) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, (x, p))$ Menge.

`3.2:` Aus `1.1`"$\ldots p = \Omega$" und
aus `2`"$(x, p) = (x, \Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, (x, p)) = (\Omega, (x, \Omega))$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `3.2`"$(p, (x, p)) = (\Omega, (x, \Omega))$" und
aus `3.1`"$(p, (x, p))$ Menge"
folgt via **259-1(Def)**: $(p, (x, p)) \in x_{\mathtt{c1}}$.

<u>Beweis</u> **259-2** `e)` `VS` gleich $p \in x_{\mathtt{c2}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x_{\mathtt{c2}}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x_{\mathtt{c2}}$"
folgt via **259-1(Def)**: $\exists \Omega : p = (\Omega, (\Omega, x))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots p = (\Omega, (\Omega, x))$" und
aus `1.1`
folgt: $(\Omega, (\Omega, x))$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, (\Omega, x))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega, (\Omega, x)$ Menge.

`4:` Aus `3`"$\ldots (\Omega, x)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\Omega \ldots$ Menge" und
aus `1.2`"$\ldots p = (\Omega, (\Omega, x))$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (p = (\Omega, (\Omega, x)))}$

<u>Beweis</u> **259-2** `f)` `VS` gleich $(p,q)\in x_{\mathsf{c2}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(p,q)\in x_{\mathsf{c2}}$”
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(p,q)\in x_{\mathsf{c2}}$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (p,q) = (\Omega, (\Omega, x))).$$

`2.1:` Aus `1.2`
folgt: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2`“$\ldots (p,q) = (\Omega, (\Omega, x))$” und
aus `1.1`“(p,q) Menge”
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = (\Omega, x))$.

`3:` Aus `2.2`“$p = \Omega \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,x) = (\Omega, x)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.2`“$\ldots q = (\Omega, x)$”
folgt: $\boxed{q = (p,x)}$

<u>Beweis **259-2**</u> `g)` `VS` gleich $(p,(q,r)) \in x_{\mathtt{c2}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,(q,r)) \in x_{\mathtt{c2}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(p,(q,r))$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,(q,r)) \in x_{\mathtt{c2}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`:
$(x \text{ Menge}) \wedge ((q,r) = (p,x))$.

`2.1:` Aus `1.2`
folgt: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.1`"$(p,(q,r))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (q,r) Menge.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots (q,r) = (p,x)$" und
aus `2.2`"(q,r) Menge"
folgt via **IGP**: $(q = p) \wedge (r = x)$.

`4.1:` Aus `3`
folgt: $\boxed{q = p}$

`4.2:` Aus `3`
folgt: $\boxed{r = x}$

<u>Beweis **259-2**</u> `h)` `VS` gleich x, p Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x, p Menge"
folgt: $\exists \Omega : p = \Omega$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x, p Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, x) Menge.

`2:` Aus `1.1`"$\ldots p = \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, x) = (\Omega, x)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge" und
aus `1.2`"(p, x) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, (p, x))$ Menge.

`3.2:` Aus `1.1`"$\ldots p = \Omega$" und
aus `2`"$(p, x) = (\Omega, x)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, (p, x)) = (\Omega, (\Omega, x))$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.2`"$(p, (p, x)) = (\Omega, (\Omega, x))$" und
aus `3.1`"$(p, (p, x))$ Menge"
folgt via **259-1(Def)**: $(p, (p, x)) \in x_{\mathsf{c2}}$.

$\square$

259-3. Hier werden Relations-Eigenschaften von $x_{\mathsf{c1}}, x_{\mathsf{c2}}$ untersucht.

259-3(Satz)

a) *"*$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = \mathcal{U}$*" genau dann, wenn "*$x$ *Menge".*

b) *"*$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = 0$*" genau dann, wenn "*$x$ *Unmenge".*

c) $\mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c1}} = \{x\} \times \mathcal{U}$.

d) *"*$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = \mathcal{U}$*" genau dann, wenn "*$x$ *Menge".*

e) *"*$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = 0$*" genau dann, wenn "*$x$ *Unmenge".*

f) $\mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}} = \mathcal{U} \times \{x\}$.

g) $x_{\mathsf{c1}}, x_{\mathsf{c2}}$ *Relation.*

h) $x_{\mathsf{c1}}, x_{\mathsf{c2}}$ *Funktion.*

i) *"*$x_{\mathsf{c1}} = 0$*" genau dann, wenn "*$x_{\mathsf{c2}} = 0$*"*
genau dann, wenn "x *Unmenge".*

j) *"*$0 \neq x_{\mathsf{c1}}$*" genau dann, wenn "*$0 \neq x_{\mathsf{c2}}$*"*
genau dann, wenn "x *Menge".*

k) *Aus "*x, p *Menge" folgt "*$x_{\mathsf{c1}}(p) = (x, p)$*" und "*$x_{\mathsf{c2}}(p) = (p, x)$*".*

l) *Aus "*$(x \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge})$*"*
folgt "$x_{\mathsf{c1}}(p) = \mathcal{U}$*" und "*$x_{\mathsf{c2}}(p) = \mathcal{U}$*".*

Beweis **259-3** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = \mathcal{U}$.

1: Es gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge})$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall x Unmenge.

2: Aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = \mathcal{U}$" und aus **0-18**"$0 \in \mathcal{U}$" folgt: $0 \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}}$.

3: Aus 2"$0 \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}}$" folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (0, \Omega) \in x_{\mathsf{c1}}$.

4: Aus 3"$\ldots (0, \Omega) \in x_{\mathsf{c1}}$" folgt via **259-2**: x Menge.

Ende **wfFallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: x Menge.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich x Menge.

Thema1 $\alpha \in \mathcal{U}$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in \mathcal{U}$" folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

3: Aus VS gleich "x Menge" und aus 2"α Menge" folgt via **259-2**: $(\alpha, (x, \alpha)) \in x_{\mathsf{c1}}$.

4: Aus 3"$(\alpha, (x, \alpha)) \in x_{\mathsf{c1}}$" folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}})$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = \mathcal{U}$.

Beweis **259-3** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = 0$.

`1:` Es gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = \mathcal{U}$.

`3:` Aus **0-18** "$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = 0$"
folgt: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} \neq \mathcal{U}$.

`4:` Es gilt `3` "$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} \neq \mathcal{U}$".
Es gilt `2` "$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = \mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: x Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x Unmenge.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich x Unmenge.

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}}$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x_{\mathsf{c1}}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x_{\mathsf{c1}}$"
folgt via **259-2**: x Menge.

`4:` Es gilt `3` "x Menge".
Es gilt `VS` gleich "x Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}}) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}})$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = 0$.

<u>Beweis **259-3**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$		$\alpha \in \mathrm{ran}\, x_{\mathsf{c1}}$.
`2:`	Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathrm{ran}\, x_{\mathsf{c1}}$" folgt via **7-7**:	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x_{\mathsf{c1}}$.
`3.1:`	Aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x_{\mathsf{c1}}$" folgt via **ElementAxiom**:	(Ω, α) Menge.
`3.2:`	Aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x_{\mathsf{c1}}$" folgt via **259-2**:	$(x \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (x, \Omega))$.
`4.1:`	Aus `3.1`"(Ω, α) Menge" folgt via **PaarAxiom I**:	Ω Menge.
`4.2:`	Aus `3.2`"x Menge…" folgt via **1-3**:	$x \in \{x\}$.
`5:`	Aus `4.1`"Ω Menge" folgt via **0-19**:	$\Omega \in \mathcal{U}$.
`6:`	Aus `4.2`"$x \in \{x\}$" und aus `5`"$\Omega \in \mathcal{U}$" folgt via **6-6**:	$(x, \Omega) \in \{x\} \times \mathcal{U}$.
`7:`	Aus `3.2`"$\ldots \alpha = (x, \Omega)$" und aus `6` folgt:	$\alpha \in \{x\} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathrm{ran}\, x_{\mathsf{c1}}) \Rightarrow (\alpha \in \{x\} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\mathrm{ran}\, x_{\mathsf{c1}} \subseteq \{x\} \times \mathcal{U}\text{”}}$

…

Beweis **259-3** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{x\} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{x\} \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-5**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in \{x\}) \wedge (\Phi \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$$

`3.1:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \{x\} \ldots$”
folgt via **1-6**: $\Omega = x$ Menge.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Phi \in \mathcal{U} \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Φ Menge.

`4.1:` Aus `3.1`“$\Omega = x \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (x, \Phi)$.

`4.2:` Aus `3.1`“$\ldots x$ Menge” und
aus `3.2`“Φ Menge”
folgt via **259-2**: $(\Phi, (x, \Phi)) \in x_{\mathsf{c1}}$.

`5.1:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$” und
aus `4.1`
folgt: $\alpha = (x, \Phi)$.

`5.2:` Aus `4.2`“$(\Phi, (x, \Phi)) \in x_{\mathsf{c1}}$”
folgt via **7-5**: $(x, \Phi) \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c1}}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c1}}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x\} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c1}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{x\} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c1}}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c1}} \subseteq \{x\} \times \mathcal{U}$” und
aus `A2` gleich “$\{x\} \times \mathcal{U} \subseteq \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c1}}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c1}} = \{x\} \times \mathcal{U}$.

Beweis **259-3** d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = \mathcal{U}$.

1: Es gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge})$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall x Unmenge.

2: Aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = \mathcal{U}$" und aus **0-18** "$0 \in \mathcal{U}$" folgt: $0 \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}}$.

3: Aus 2 "$0 \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}}$" folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (0, \Omega) \in x_{\mathsf{c2}}$.

4: Aus 3 "$\ldots (0, \Omega) \in x_{\mathsf{c2}}$" folgt via **259-2**: x Menge.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: x Menge.

d) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich x Menge.

Thema1 $\alpha \in \mathcal{U}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathcal{U}$" folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

3: Aus VS gleich "x Menge" und aus 2 "α Menge" folgt via **259-2**: $(\alpha, (\alpha, x)) \in x_{\mathsf{c2}}$.

4: Aus 3 "$(\alpha, (\alpha, x)) \in x_{\mathsf{c2}}$" folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}})$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = \mathcal{U}$.

Beweis **259-3** e) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\qquad \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = 0.$

1: Es gilt: $\qquad (x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge}).$

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $\qquad x$ Menge.

2: Aus 1.1.Fall“x Menge”
folgt via des bereits bewiesenen d): $\qquad \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = \mathcal{U}.$

3: Aus **0-18**“$0 \neq \mathcal{U}$” und
aus VS gleich “$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = 0$”
folgt: $\qquad \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} \neq \mathcal{U}.$

4: Es gilt 3“$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} \neq \mathcal{U}$”.
Es gilt 2“$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = \mathcal{U}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad x$ Unmenge.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\qquad x$ Unmenge.

e) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\qquad x$ Unmenge.

Thema1 $\qquad \alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}}.$

2: Aus Thema1“$\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}}$”
folgt via **7-7**: $\qquad \exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x_{\mathsf{c2}}.$

3: Aus 2“$\ldots (\alpha, \Omega) \in x_{\mathsf{c2}}$”
folgt via **259-2**: $\qquad x$ Menge.

4: Es gilt 3“x Menge”.
Es gilt VS gleich “x Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad \alpha \notin \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}}.$

Ergo Thema1: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}}) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}}).$

Konsequenz via **0-19**: $\qquad \mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = 0.$

<u>Beweis</u> **259-3** `f)`

`Thema1.1`		$\alpha \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}}$.
`2:`	Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}}$” folgt via **7-7**:	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x_{\mathsf{c2}}$.
`3.1:`	Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x_{\mathsf{c2}}$” folgt via **ElementAxiom**:	(Ω, α) Menge.
`3.2:`	Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x_{\mathsf{c2}}$” folgt via **259-2**:	$(x \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, x))$.
`4.1:`	Aus `3.1`“(Ω, α) Menge” folgt via **PaarAxiom I**:	Ω Menge.
`4.2:`	Aus `3.2`“x Menge...” folgt via **1-3**:	$x \in \{x\}$.
`5:`	Aus `4.1`“Ω Menge” folgt via **0-19**:	$\Omega \in \mathcal{U}$.
`6:`	Aus `5`“$\Omega \in \mathcal{U}$” und aus `4.2`“$x \in \{x\}$” folgt via **6-6**:	$(\Omega, x) \in \mathcal{U} \times \{x\}$.
`7:`	Aus `3.2`“$\ldots \alpha = (\Omega, x)$” und aus `6` folgt:	$\alpha \in \mathcal{U} \times \{x\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \{x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}} \subseteq \mathcal{U} \times \{x\}$”

...

Beweis **259-3** `f)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \mathcal{U} \times \{x\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathcal{U} \times \{x\}$”
folgt via **6-5**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in \mathcal{U}) \wedge (\Phi \in \{x\}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$$

`3.1:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathcal{U} \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Phi \in \{x\} \ldots$”
folgt via **1-6**: $\Phi = x$ Menge.

`4.1:` Aus `3.2`“$\ldots x$ Menge” und
aus `3.1`“Ω Menge”
folgt via **259-2**: $(\Omega, (\Omega, x)) \in x_{\mathsf{c1}}$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\Phi = x \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, x)$.

`5.1:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$” und
aus `4.2`
folgt: $\alpha = (\Omega, x)$.

`5.2:` Aus `4.1`“$(\Omega, (\Omega, x)) \in x_{\mathsf{c2}}$”
folgt via **7-5**: $(\Omega, x) \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \times \{x\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\mathcal{U} \times \{x\} \subseteq \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}}$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}} \subseteq \mathcal{U} \times \{x\}$” und
aus `A2` gleich “$\mathcal{U} \times \{x\} \subseteq \mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\, x_{\mathsf{c2}} = \mathcal{U} \times \{x\}$.

<u>Beweis</u> **259-3** `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x_{\mathtt{c1}}$.

`2:` Aus `1.1` "$\alpha \in x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via **259-2**: $\exists \Omega : \alpha = (\Omega, (x, \Omega))$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, (x, \Omega))$"
folgt: $\exists \Phi : \Phi = (x, \Omega)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots \Phi = (x, \Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, (x, \Omega))$.

`5:` Aus `4` und
aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, (x, \Omega))$"
folgt: $\alpha = (\Omega, \Phi)$.

`6:` Aus `2` "$\ldots \exists \Omega \ldots$",
aus `3` "$\exists \Phi \ldots$" und
aus `5` "$\alpha = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x_{\mathtt{c1}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\boxed{x_{\mathtt{c1}} \text{ Relation}}$

...

<u>Beweis</u> **<u>259-3</u>** `g)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in x_{\mathsf{c2}}$.

`2:` Aus `1.1`“$\alpha \in x_{\mathsf{c2}}$”
folgt via **259-2**: $\exists \Omega : \alpha = (\Omega, (\Omega, x))$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, (\Omega, x))$”
folgt: $\exists \Phi : \Phi = (\Omega, x)$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Phi = (\Omega, x)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, (\Omega, x))$.

`5:` Aus `4` und
aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, (\Omega, x))$”
folgt: $\alpha = (\Omega, \Phi)$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \exists \Omega \ldots$”,
aus `3`“$\exists \Phi \ldots$” und
aus `5`“$\alpha = (\Omega, \Phi)$”
folgt: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x_{\mathsf{c2}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\boxed{x_{\mathsf{c2}} \text{ Relation}}$

<u>Beweis **259-3** `h)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{c1}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$(\alpha, \beta) \ldots \in x_{c1}$"
folgt via **259-2**: $\beta = (x, \alpha)$.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\ldots (\alpha, \gamma) \in x_{c1}$"
folgt via **259-2**: $\gamma = (x, \alpha)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{c1}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{c2}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$(\alpha, \beta) \ldots \in x_{c2}$"
folgt via **259-2**: $\beta = (\alpha, x)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \gamma) \in x_{c2}$"
folgt via **259-2**: $\gamma = (\alpha, x)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{c2}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: x_{c1}, x_{c2} Relation.

`2.1:` Aus `1.3` "$x_{c1} \ldots$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{c1}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{x_{c1} \text{ Funktion}}$

`2.2:` Aus `1.3` "$\ldots x_{c2}$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in x_{c2}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{x_{c2} \text{ Funktion}}$

<u>Beweis **259-3**</u> `i)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x_{\mathsf{c1}} = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich “$x_{\mathsf{c1}} = 0$” und
aus **7-11**“$\mathsf{dom}\, 0 = 0$”
folgt: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = 0.$

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = 0$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: x Unmenge.

`3:` Aus `2`“x Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = 0.$

`4:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: x_{c2} Relation.

`5:` Aus `4`“x_{c2} Relation” und
aus `3`“$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = 0$”
folgt via **92-5**: $x_{\mathsf{c2}} = 0.$

`i)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x_{\mathsf{c2}} = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich “$x_{\mathsf{c2}} = 0$” und
aus **7-11**“$\mathsf{dom}\, 0 = 0$”
folgt: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = 0.$

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c2}} = 0$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: x Unmenge.

`i)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich “x Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = 0.$

`2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: x_{c1} Relation.

`3:` Aus `2`“x_{c1} Relation” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, x_{\mathsf{c1}} = 0$”
folgt via **92-5**: $x_{\mathsf{c1}} = 0.$

`j)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt:
$$(x_{\mathsf{c1}} = 0) \Leftrightarrow (x_{\mathsf{c2}} = 0) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge}).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(0 \neq x_{\mathsf{c1}}) \Leftrightarrow (0 \neq x_{\mathsf{c2}}) \Leftrightarrow (x \text{ Menge}).$$

<u>Beweis **259-3**</u> `k)` `VS` gleich x, p Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x, p Menge"
folgt via **259-2**: $(p, (x, p)) \in x_{\mathsf{c1}}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x, p Menge"
folgt via **259-2**: $(p, (p, x)) \in x_{\mathsf{c2}}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $x_{\mathsf{c1}}, x_{\mathsf{c2}}$ Funktion.

`3.1:` Aus `2`"$x_{\mathsf{c1}} \ldots$ Funktion" und
aus `1.1`"$(p, (x, p)) \in x_{\mathsf{c1}}$"
folgt via **18-20**: $\boxed{x_{\mathsf{c1}}(p) = (x, p)}$

`3.2:` Aus `2`"$\ldots x_{\mathsf{c2}}$ Funktion" und
aus `1.2`"$(p, (p, x)) \in x_{\mathsf{c2}}$"
folgt via **18-20**: $\boxed{x_{\mathsf{c2}}(p) = (p, x)}$

<u>Beweis **259-3**</u> `l)` `VS` gleich $(x \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Unmenge.

`2.1:` Aus `1.1.Fall` “x Unmenge” folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $x_{c1} = 0$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall` “x Unmenge” folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $x_{c2} = 0$.

`3.1:` $x_{c1}(p) \stackrel{2.1}{=} 0(p) \stackrel{\mathbf{17-7}}{=} \mathcal{U}$.

`3.2:` $x_{c2}(p) \stackrel{2.2}{=} 0(p) \stackrel{\mathbf{17-7}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1` “$x_{c1}(p) = \ldots = \mathcal{U}$” und aus `3s.2` “$x_{c2}(p) = \ldots = \mathcal{U}$” folgt: $(x_{c1}(p) = \mathcal{U}) \wedge (x_{c2}(p) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` “p Unmenge” folgt via **17-3**: $x_{c1}(p) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` “p Unmenge” folgt via **17-3**: $x_{c2}(p) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt: $(x_{c1}(p) = \mathcal{U}) \wedge (x_{c2}(p) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(x_{c1}(p) = \mathcal{U}) \wedge (x_{c2}(p) = \mathcal{U}).$$

$\square$

259-4. Interessanter Weise sind die vorliegenden Resultate über $x \circ y$, wenn $x = 0$ oder $y = 0$, bislang noch nicht bewiesen worden. Die Beweis-Reihenfolge ist `d) - b) - c) - a) - efg)`:

259-4(Satz)

`a)` $0 \circ 0 = 0$.

`b)` $x \circ 0 = 0$.

`c)` $0 \circ y = 0$.

`d)` $x \circ y = ((x \circ y)^{-1})^{-1} = (y^{-1} \circ x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} \circ (y^{-1})^{-1}$.

`e)` $\mathcal{U} \circ 0 = 0$.

`f)` $0 \circ \mathcal{U} = 0$.

`g)` $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Beweis **259-4** `d)`

`1:` Aus **14-8**“$x \circ y$ Relation”

folgt via **13-3**: $\boxed{x \circ y = ((x \circ y)^{-1})^{-1}}$

`2:` Via **14-8** gilt: $\boxed{((x \circ y)^{-1})^{-1} = (y^{-1} \circ x^{-1})^{-1}}$

`3:` Via **14-8** gilt: $\boxed{(y^{-1} \circ x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} \circ (y^{-1})^{-1}}$

Beweis **259-4** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x \circ 0.$

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in x \circ 0$"
folgt via **14-3**:
$$\exists \Omega, \Psi, \Phi : ((\Omega, \Psi) \in 0) \wedge ((\Psi, \Phi) \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$$

`3:` Es gilt `2` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$(\Omega, \Psi) \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x \circ 0.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \circ 0) \Rightarrow (\alpha \notin x \circ 0).$

Konsequenz via **0-19**: $x \circ 0 = 0.$

`c)`

`1:` $0 \circ y \stackrel{\texttt{d)}}{=} (y^{-1} \circ 0^{-1})^{-1} \stackrel{\mathbf{11-10}}{=} (y^{-1} \circ 0)^{-1} \stackrel{\texttt{b)}}{=} 0^{-1} \stackrel{\mathbf{11-10}}{=} 0.$

`2:` Aus `1`
folgt: $0 \circ y = 0.$

`a)`
Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $0 \circ 0 = 0.$

`e)`
Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathcal{U} \circ 0 = 0.$

`f)`
Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $0 \circ \mathcal{U} = 0.$

<u>Beweis **259-4**</u> `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`3.1:` Aus `2`“$\ldots \Omega \ldots \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Phi \in \mathcal{U} \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Φ Menge.

`4.1:` Aus `3.1`“Ω Menge” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, 0)$ Menge.

`4.2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge” und
aus `3.2`“Φ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(0, \Phi)$ Menge.

`5.1:` Aus `4.1`“$(\Omega, 0)$ Menge”
folgt via **0-22**: $(\Omega, 0) \in \mathcal{U}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$(0, \Phi)$ Menge”
folgt via **0-22**: $(0, \Phi) \in \mathcal{U}$.

`6:` Aus `5.1`“$(\Omega, 0) \in \mathcal{U}$” und
aus `5.2`“$(0, \Phi) \in \mathcal{U}$”
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in \mathcal{U} \circ \mathcal{U}$.

`7:` Aus `6` und
aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$”
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \circ \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \circ \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \circ \mathcal{U}$”

...

Beweis **259-4** `g)` ...

`1.2:` Via **14-8** gilt: $\mathcal{U}\circ\mathcal{U}$ Relation.

`2:` Aus `1.2`"$\mathcal{U}\circ\mathcal{U}$ Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}\times\mathcal{U}$" und
aus `A1` gleich "$\mathcal{U}\times\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}\circ\mathcal{U}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{U}\circ\mathcal{U}=\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

$\square$

259-5. Hier wird die $(E|a)$-1-partielle Relation von x definiert, die vorwiegend für Klassen x mit Definitions-Bereich $\subseteq {}^D B$ aum Einsatz kommt.

259-5(Definition)

1) $x\,(E|a.) = \mathsf{259.2}(a,x,E) = \{(\lambda,\mu) : (\{(a,\lambda)\},\mu) \in x(E \cup .)\}$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : ((\{(a,\Omega)\},\Phi) \in x(E \cup .)) \wedge (\omega = (\Omega,\Phi)))\}.$$

2) "**$\mathfrak{C}$ ist $(E|a.)$-partielle Relation von x**" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = x\,(E|a.)\,.$$

259-6. Hier wird unter anderem das "Element-Sein" in $x\,(E|a.)$ diskutiert.

259-6(Satz)

a) *$x\,(E|a.)$ ist $(E|a.)$-partielle Relation von x.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ist $(E|a.)$-partielle Relation von x" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.*

c) *Aus "$p \in x\,(E|a.)$"*
folgt "$\exists \Omega, \Phi : ((\{(a,\Omega)\}, \Phi) \in x(E \cup .)) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$".

d) *Aus "$p \in x\,(E|a.)$"*
folgt "$\exists \Omega, \Phi : ((\{(a,\Omega)\} \cup E, \Phi) \in x) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$".

e) *"$(b,c) \in x\,(E|a.)$"*
genau dann, wenn "b Menge" und "$(\{(a,b)\}, c) \in x(E \cup .)$".

f) *"$(b,c) \in x\,(E|a.)$" genau dann, wenn*
"b Menge" und "$(\{(a,b)\} \cup E, c) \in x$".

Beweis **259-6** a)

Aus "$x\,(E|a.) = x\,(E|a.)$"
folgt via **259-5(Def)**: $x\,(E|a.)$ ist $(E|a.)$-partielle Relation von x.

b) VS gleich $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ist $(E|a.)$-partielle Relation von x.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C} \ldots$ ist $(E|a.)$-partielle Relation von x"
folgt via **259-5(Def)**: $\mathfrak{C} = x\,(E|a.)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ ist $(E|a.)$-partielle Relation von x"
folgt via **259-5(Def)**: $\mathfrak{D} = x\,(E|a.)$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

c) VS gleich $p \in x\,(E|a.)$.
Aus VS gleich "$p \in x\,(E|a.)$"
folgt via **259-5(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : ((\{(a,,\Omega)\}, \Phi) \in x(E \cup .)) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$.

<u>Beweis **259-6**</u> `d)` `VS` gleich $p \in x\,(E|a.)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x\,(E|a.)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$\exists \Omega, \Phi : ((\{(a,\Omega)\}, \Phi) \in x(E \cup .)) \wedge (p = (\Omega, \Phi)).$$

`2:` Aus `1`"$\ldots (\{(a,\Omega)\}, \Phi) \in x(E \cup .) \ldots$"
folgt via **258-23**: $(E \cup \{(a,\Omega)\}, \Phi) \in x$.

`3:` Via **KG**$\cup$ gilt: $E \cup \{(a,\Omega)\} = \{(a,\Omega)\} \cup E$.

`4:` Aus `3`"$E \cup \{(a,\Omega)\} = \{(a,\Omega)\} \cup E$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E \cup \{(a,\Omega)\}, \Phi) = (\{(a,\Omega)\} \cup E, \Phi)$.

`5:` Aus `4` und
aus `2`
folgt: $(\{(a,\Omega)\} \cup E, \Phi) \in x$.

`6:` Aus `1`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `5`"$(\{(a,\Omega)\} \cup E, \Phi) \in x$" und
aus `1`"$\ldots p = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : ((\{(a,\Omega)\} \cup E, \Phi) \in x) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$.

<u>Beweis **259-6**</u> `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(b,c) \in x\,(E|a.)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(b,c) \in x\,(E|a.)$"
folgt via **ElementAxiom**: (b,c) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(b,c) \in x\,(E|a.)$"
folgt via **9-15**: $\boxed{b \text{ Menge}}$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(b,c) \in x\,(E|a.)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Phi : ((\{(a,\Omega)\},\Phi) \in x(E \cup .)) \wedge ((b,c) = (\Omega,\Phi))$.

`2:` Aus `1.3`"$\ldots (b,c) = (\Omega,\Phi)$" und
aus `1.1`"(b,c) Menge"
folgt via **IGP**: $(b = \Omega) \wedge (c = \Phi)$.

`3:` Aus `2`"$b = \Omega \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(a,b) = (a,\Omega)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\{(a,b)\} = \{(a,\Omega)\}$.

`5:` Aus `4`"$\{(a,b)\} = \{(a,\Omega)\}$" und
aus `2`"$\ldots c = \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{(a,b)\},q) = (\{(a,\Omega)\},\Phi)$.

`6:` Aus `5` und
aus `1.3`"$\ldots (\{(a,\Omega)\},\Phi) \in x(E \cup .) \ldots$"
folgt: $\boxed{(\{(a,b)\},c) \in x(E \cup .)}$

Beweis **259-6** `e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(b \text{ Menge}) \wedge ((\{(a,b)\},c) \in x(E \cup .))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (\{(a,b)\},c) \in x(E \cup .)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = b) \wedge (\Phi = c)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (\{(a,b)\},c) \in x(E \cup .)$"
folgt via **9-15**: c Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = b \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(a,\Omega) = (a,b)$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = b \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Phi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega,\Phi) = (a,b)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "b Menge$\ldots$" und
aus `1.2`"c Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (b,c) Menge.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\{(a,\Omega)\} = \{(a,b)\}$.

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $(b,c) = (\Omega,\Phi)$.

`4:` Aus `3.1`"$\{(a,\Omega)\} = \{(a,b)\}$" und
aus `1.1`"$\ldots \Phi = c$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{(a,\Omega)\},\Phi) = (\{(a,b)\},c)$.

`5:` Aus `4` und
aus `VS` gleich "$\ldots (\{(a,g)\},c) \in x(E \cup .)$"
folgt: $(\{(a,\Omega)\},\Phi) \in x(E \cup .)$.

`6:` Aus `1.1`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `5`"$(\{(a,\Omega)\},\Phi) \in x(E \cup .)$",
aus `3.2`"$(b,c) = (\Omega,\Phi)$" und
aus `2.3`"(p,q) Menge"
folgt via **259-5(Def)**: $(b,c) \in x\,(E|a.)$.

Beweis **259-6** `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(b, c) \in x\,(E|a.)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(b, c) \in x\,(E|a.)$"

folgt via **9-15**: $\boxed{b \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(b, c) \in x\,(E|a.)$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(\{(a, b)\}, c) \in x(E \cup .)$.

`2:` Aus `1.2`"$(\{(a, b)\}, c) \in x(E \cup .)$"
folgt via **258-23**: $(E \cup \{(a, b)\}, c) \in x$.

`3:` Via **KG**$\cup$ gilt: $\{(a, b)\} \cup E = E \cup \{(a, b)\}$.

`4:` Aus `3`"$\{(a, b)\} \cup E = E \cup \{(a, b)\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{(a, b)\} \cup E, c) = (E \cup \{(a, b)\}, c)$.

`5:` Aus `4` und
aus `2`

folgt: $\boxed{(\{(a, b)\} \cup E, c) \in x}$

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(b \text{ Menge}) \wedge ((\{(a, b)\} \cup E, c) \in x)$.

`1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $E \cup \{(a, b)\} = \{(a, b)\} \cup E$.

`2:` Aus `1`"$E \cup \{(a, b)\} = \{(a, b)\} \cup E$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E \cup \{(a, b)\}, c) = (\{(a, b)\} \cup E, c)$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS` gleich "$\ldots (\{(a, b)\} \cup E, c) \in x$" folgt: $(E \cup \{(a, b)\}, c) \in x$.

`4:` Aus `3`"$(E \cup \{(a, b)\}, c) \in x$"
folgt via **258-23**: $(\{(a, b)\}, c) \in x(E \cup .)$.

`5:` Aus `VS` gleich "p Menge$\ldots$" und
aus `4`"$(\{(a, b)\}, c) \in x(E \cup .)$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(b, c) \in x\,(E|a.)$.

$\square$

259-7. Hier werden $\mathsf{dom}\, x\,(E|a.)$ und $\mathsf{ran}\, x\,(E|a.)$ diskutiert.

259-7(Satz)

a) *"$b \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$" genau dann, wenn*
"b Menge" und "$\{(a,b)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x$".

b) *Aus "$c \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$"*
folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ Menge$) \wedge ((\{(a,\Omega)\} \cup E, c) \in x)$".

c) $\mathsf{ran}\,(x\,(E|a.)) \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

d) *Aus "q Menge" und "$(\{(a,b)\} \cup E, c) \in x$" folgt "$c \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$".*

Beweis **259-7** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $b \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

1.1: Aus VS gleich "$b \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$"
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{b \text{ Menge}}$

1.2: Aus VS gleich "$b \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (b,\Omega) \in x\,(E|a.)$.

2: Aus 1.2"$\ldots (b,\Omega) \in x\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $(\{(a,b)\} \cup E, \Omega) \in x$.

3: Aus 2"$(\{(a,b)\} \cup E, \Omega) \in x$"
folgt via **7-5**: $\boxed{\{(a,b)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x}$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(b \text{ Menge}) \wedge (\{(a,b)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots \{(a,b)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\{(a,b)\} \cup E, \Omega) \in x$.

2: Aus VS gleich "p Menge$\ldots$" und
aus 1"$\ldots (\{(a,b)\} \cup E, \Omega) \in x$"
folgt via **259-6**: $(b,\Omega) \in x\,(E|a.)$.

3: Aus 2"$(b,\Omega) \in x\,(E|a.)$"
folgt via **7-5**: $b \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

Beweis **259-7** `b)` `VS` gleich $c \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$c \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, c) \in x\,(E|a.)$.

`2:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, c) \in x\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $(\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\{(a, \Omega)\} \cup E, c) \in x)$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`"$(\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\{(a, \Omega)\} \cup E, c) \in x)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\{(a, \Omega)\} \cup E, c) \in x)$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega : (\{(a, \Omega)\} \cup E, \alpha) \in x$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (\{(a, \Omega)\} \cup E, \alpha) \in x$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(x\,(E|a.)) \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`d)` `VS` gleich $(b \text{ Menge}) \wedge ((\{(a, b)\} \cup E, c) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "b Menge…" und
aus `VS` gleich "$\ldots (\{(a, b)\} \cup E, c) \in x$"
folgt via **259-6**: $(b, c) \in x\,(E|a.)$.

`2:` Aus `1`"$(b, c) \in x\,(E|a.)$"
folgt via **7-5**: $c \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$.

□

259-8. $y\,(E|a.)$ ist eine Relation und falls f eine Funktion ist, so ist auch $f\,(E|a.)$ eine Funktion.

259-8(Satz)

a) $y\,(E|a.)$ *Relation.*

b) *Aus* "f *Funktion*" *folgt* "$f\,(E|a.)$ *Funktion*".

Beweis **259-8** a)

Thema1 $\alpha \in y\,(E|a.)$.

Aus Thema1 "$\alpha \in y\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in y\,(E|a.)) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.
Konsequenz via **10-3**: $y\,(E|a.)$ Relation.

b) VS gleich f Funktion.

Thema1.1 $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in f\,(E|a.)$.

2.1: Aus Thema1.1 "$(\alpha, \beta) \ldots \in f\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $(\{(a, \alpha)\} \cup E, \beta) \in f$.

2.2: Aus Thema1.1 "$\ldots (\alpha, \gamma) \in f\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $(\{(a, \alpha)\} \cup E, \gamma) \in f$.

3: Aus VS gleich "f Funktion",
aus 2.1 "$(\{(a, \alpha)\} \cup E, \beta) \in f$" und
aus 2.2 "$(\{(a, \alpha)\} \cup E, \gamma) \in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $\beta = \gamma$.

Ergo Thema1.1: A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in f\,(E|a.)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

1.2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $f\,(E|a.)$ Relation.

2: Aus 1.2 "$f\,(E|a.)$ Relation" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in f\,(E|a.)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $f\,(E|a.)$ Funktion.

$\square$

259-9. Nun wird $x(E \cup .)[y]$ besprochen.

259-9(Satz)

a) *Aus* “$q \in x(E \cup .)[y]$” *folgt* “$\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((E \cup \Omega, q) \in x)$”.

b) *Aus* “$p \in y$” *und* “$(E \cup p, q) \in x$” *folgt* “$q \in x(E \cup .)[y]$”.

Beweis **259-9** a) VS gleich $q \in x(E \cup .)[y]$.

1: Aus VS gleich “$q \in x(E \cup .)[y]$”
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, q) \in x(E \cup .))$.

2: Aus 1“$\ldots (\Omega, q) \in x(E \cup .)$”
folgt via **258-23**: $(E \cup \Omega, q) \in x$.

3: Aus 1“$\exists \Omega : \Omega \in y \ldots$” und
aus 2“$(E \cup \Omega, q) \in x$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((E \cup \Omega, q) \in x)$.

b) VS gleich $(p \in y) \wedge ((E \cup p, q) \in x)$.

1: Aus VS gleich “$\ldots (E \cup p, q) \in x$”
folgt via **258-23**: $(p, q) \in x(E \cup .)$.

2: Aus 1“$(p, q) \in x(E \cup .)$” und
aus VS gleich “$p \in y \ldots$”
folgt via **8-8**: $q \in x(E \cup .)[y]$.

□

259-10. Nun wird ein Kriterium für $q \in x(E \cup .)[\{p\}]$ formuliert.

259-10(Satz)

"$q \in x(E \cup .)[\{p\}]$" genau dann, wenn "$(E \cup p, q) \in x$".

Beweis **259-10** $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $E(x \cup .)[\{p\}]$.

`1`: Aus `VS` gleich "$q \in x(E \cup .)[\{p\}]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge ((\Omega, q) \in x(E \cup .))$.

`2`: Aus `1`"$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`3`: Aus `2`"$\Omega = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, q) = (p, q)$.

`4`: Aus `3` und
aus `1`"$\ldots (\Omega, q) \in x(E \cup .)$"
folgt: $(p, q) \in x(E \cup .)$.

`5`: Aus `4`"$(p, q) \in x(E \cup .)$"
folgt via **258-23**: $(E \cup p, q) \in x$.

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E \cup p, q) \in x$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$(E \cup p, q) \in x$"
folgt via **9-15**: $E \cup p$ Menge.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$(E \cup p, q) \in x$"
folgt via **258-23**: $(p, q) \in x(E \cup .)$.

`2`: Aus `1.1`"$E \cup p$ Menge"
folgt via **213-3**: p Menge.

`3`: Aus `3`"p Menge"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`4`: Aus `1.2`"$(p, q) \in x(E \cup .)$" und
aus `3`"$p \in \{p\}$"
folgt via **8-8**: $q \in x(E \cup .)[\{p\}]$.

$\square$

259-11. Hier wird das "Element-Sein" in $x\,(E|a.)\,[y]$ diskutiert.

259-11(Satz)

a) *Aus* "$c \in x\,(E|a.)\,[y]$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((\{(a, \Omega)\} \cup E, c) \in x)$".

b) *Aus* "$b \in y$" *und* "$(\{(a, b)\} \cup E, c) \in x$" *folgt* "$c \in x\,(E|a.)\,[y]$".

Beweis **259-11** a) VS gleich $c \in x\,(E|a.)\,[y]$.

1: Aus VS gleich "$c \in x\,(E|a.)\,[y]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, c) \in x\,(E|a.))$.

2: Aus 1"$\ldots (\Omega, c) \in x\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $(\{(a, \Omega)\} \cup E, c) \in x$.

3: Aus 1"$\exists \Omega : (\Omega \in y) \ldots$" und
aus 2"$(\{(a, \Omega)\} \cup E, c) \in x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((\{(a, \Omega)\} \cup E, c) \in x)$.

b) VS gleich $(b \in y) \wedge ((\{(a, b)\} \cup E, c) \in x)$.

1: Aus VS gleich "$b \in y \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: b Menge.

2: Aus 1"b Menge" und
aus VS gleich "$\ldots ((\{(a, b)\} \cup E, c) \in x)$"
folgt via **259-6**: $(b, c) \in x\,(E|a.)$.

3: Aus 2"$(b, c) \in x\,(E|a.)$" und
aus VS gleich "$b \in y \ldots$"
folgt via **8-8**: $c \in x\,(E|a.)\,[y]$.

□

259-12. Für jede Menge p gilt die Aussage $c \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]$ genau dann, wenn $(\{(a,p)\} \cup E, c) \in x$.

259-12(Satz)

"$c \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]$" *genau dann, wenn* "p *Menge*" *und* "$(\{(a,p)\} \cup E, c) \in x$".

Beweis **259-12** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $c \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]$.

1: Aus VS gleich "$c \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge ((\Omega, c) \in x\,(E|a.))$.

2.1: Aus 1"$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Omega = p$ Menge.

2.2: Aus 1"$\ldots (\Omega, c) \in x\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $(\{(a,\Omega)\} \cup E, c) \in x$.

3.1: Aus 2.1
folgt: $\boxed{p \text{ Menge}}$

3.2: Aus 2.1"$\Omega = p \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(a,\Omega) = (a,p)$.

4: Aus 3.2 und
aus 2.2
folgt: $\boxed{(\{(a,p)\} \cup E, c) \in x}$

$\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p \text{ Menge}) \wedge ((\{(a,p)\} \cup E, c) \in x)$.

1.1: Aus VS gleich "p Menge..."
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

1.2: Aus VS gleich "p Menge..." und
aus VS gleich "$\ldots (\{(a,p)\} \cup E, c) \in x$"
folgt via **259-6**: $(p,c) \in x\,(E|a.)$.

2: Aus 2"$(p,c) \in x\,(E|a.)$" und
aus 1.1"$p \in \{p\}$"
folgt via **8-8**: $c \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]$.

$\square$

259-13. Unter anderem kann in nahe liegender und Einiges vereinfachender Weise **17-6** verallgemeinert werden.

259-13(Satz)

a) *Aus "p Unmenge" folgt "$x[\{p\}] = 0$".*

b) *Aus "$x[\{p\}] \subseteq y[\{q\}]$" folgt "$y(q) \subseteq x(p)$".*

c) *Aus "$x[\{p\}] = y[\{q\}]$" folgt "$x(p) = y(q)$".*

Beweis **259-13** a) VS gleich p Unmenge.

1: Aus VS gleich "p Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0.$

2: $x[\{p\}] \stackrel{1}{=} x[0] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0.$

3: Aus 2
folgt: $x[\{p\}] = 0.$

b) VS gleich $x[\{p\}] \subseteq y[\{q\}].$

1: Aus VS gleich "$x[\{p\}] \subseteq y[\{q\}]$"
folgt via **1-15**: $\bigcap y[\{q\}] \subseteq \bigcap x[\{p\}].$

2: $y(q) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap y[\{q\}] \stackrel{1}{\subseteq} \bigcap x[\{p\}] \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} x(p).$

3: Aus 2
folgt: $y(q) \subseteq x(p).$

c) VS gleich $x[\{p\}] = y[\{q\}].$

1: $x(p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap x[\{p\}] \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \bigcap y[\{q\}] \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} y(q).$

2: Aus 1
folgt: $x(p) = y(q).$

□

259-14. Es soll noch Einiges über $x\,(E|a.)\,(p)$ ausgesagt werden.

259-14(Satz)

a) $x\,(E|a.)\,[\{p\}] \subseteq x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$.

b) *Aus* "p *Menge*" *folgt* "$x\,(E|a.)\,[\{p\}] = x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$".

c) $x(\{(a,p)\} \cup E) \subseteq x\,(E|a.)\,(p)$.

d) *Aus* "p *Menge*" *folgt* "$x\,(E|a.)\,(p) = x(\{(a,p)\} \cup E)$".

e) *Aus* "$\{(a,p)\} \cup E \notin \mathsf{dom}\,x$" *folgt* "$x\,(E|a.)\,(p) = x(\{(a,p)\} \cup E) = \mathcal{U}$".

f) *Aus* "p *Unmenge*" *und* "$\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x$" *folgt* "$x\,(E|a.)\,(p) = \mathcal{U}$" *und* "$x(\{(a,p)\} \cup x)$ *Menge*" *und* "$x\,(E|a.)\,(p) \neq x(\{(a,p)\} \cup E)$".

g) *Aus* "$x\,(E|a.)\,(p) = x(\{(a,p)\} \cup E)$" *folgt* "$p$ *Menge*" *oder* "$\{(a,p)\} \cup E \notin \mathsf{dom}\,x$".

h) *Aus* "$x\,(E|a.)\,(p) \neq x(\{(a,p)\} \cup E)$" *folgt* "$p$ *Unmenge*" *und* "$\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x$".

Beweis **259-14** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]]$"
folgt via **259-12**: $(\{(a,p)\} \cup E, \alpha) \in x$.

`3:` Aus `2` "$(\{(a,p)\} \cup E, \alpha) \in x$"
folgt via **9-15**: $\{(a,p)\} \cup E$ Menge.

`4:` Aus `3` "$\{(a,p)\} \cup E$ Menge"
folgt via **1-3**: $\{(a,p) \cup E \in \{\{(a,p)\} \cup E\}$.

`5:` Aus `2` "$(\{(a,p) \cup E\}, \alpha) \in x$" und
aus `4` "$\{(a,p)\} \cup E \in \{\{(a,p)\} \cup E\}$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in x[\{\{(a,p)\} \cup E\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x\,(E|a.)\,[\{p\}] \subseteq x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$.

`b)` `VS` gleich p Menge.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$"
folgt via **9-15**: $(\{(a,p)\} \cup E, \alpha) \in x$.

`3:` Aus `VS` gleich "p Menge…" und
aus `2` "$(\{(a,p)\} \cup E, \alpha) \in x$"
folgt via **259-12**: $\alpha \in x\,(E|a.)\,[\{p\}]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]) \Rightarrow (\alpha \in x\,(E|a.)\,[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}x[\{\{(a,p)\} \cup E\}] \subseteq x\,(E|a.)\,[\{p\}]\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x\,(E|a.)\,[\{p\}] \subseteq x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$.

`2:` Aus `1.2` "$x\,(E|a.)\,[\{p\}] \subseteq x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$" und
aus `A1` gleich "$x[\{\{(a,p)\} \cup E\}] \subseteq x\,(E|a.)\,[\{p\}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x\,(E|a.)\,[\{p\}] = x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$.

<u>Beweis **259-14**</u> `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x\,(E|a.)\,[\{p\}] \subseteq x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$.

`2:` Aus `1`“$x\,(E|a.)\,[\{p\}] \subseteq x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$”
folgt via **259-13**: $x(\{(a,p)\} \cup E) \subseteq x\,(E|a.)\,(p)$.

`d)` `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich “p Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x\,(E|a.)\,[\{p\}] = x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$.

`2:` Aus `1`“$x\,(E|a.)\,[\{p\}] = x[\{\{(a,p)\} \cup E\}]$”
folgt via **259-13**: $x\,(E|a.)\,(p) = x(\{(a,p)\} \cup E)$.

`e)` `VS` gleich $\{(a,p)\} \cup E \notin \mathsf{dom}\,x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\{(a,p)\} \cup E \notin \mathsf{dom}\,x$”
folgt via **17-4**: $\boxed{x(\{(a,p)\} \cup E) = \mathcal{U}}$

`1.2:` Via **259-7** gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)))$
$\Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \wedge (\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x))$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1.2`
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

`3:` Aus `2`“$p \notin \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$”
folgt via **17-4**: $x\,(E|a.)\,(p) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.1`
folgt: $\boxed{x\,(E|a.)\,(p) = x(\{(a,p)\} \cup E)}$

<u>Beweis **259-14**</u> `f)` `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \wedge (\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x$"

folgt via **17-5**: $\boxed{x(\{(a,p)\} \cup E) \text{ Menge}}$

`1.2:` Via **259-7** gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)))$
$\Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \wedge (\{(a,p) \cap E = 0) \wedge (\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x))$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1.2`
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

`3:` Aus `2`"$p \notin \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$"

folgt via **17-4**: $\boxed{x\,(E|a.)\,(p) = \mathcal{U}}$

`4:` Aus `1.2`"$x(\{(a,p)\} \cup E)$ Menge"
folgt via **0-17**: $x(\{(a,p)\} \cup E) \neq \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4` und
aus `3`

folgt: $\boxed{x\,(E|a.)\,(p) \neq x(\{(a,p)\} \cup E)}$

`g)` `VS` gleich $x\,(E|a.)\,(p) = x(\{(a,p) \cup E)$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt:
$((p \text{ Unmenge}) \wedge (\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x))$
$\Rightarrow (x\,(E|a.)\,(p) \neq x(\{(a,p)\} \cup E))$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $(p \text{ Menge}) \vee (\{(a,p)\} \cup E \notin \mathsf{dom}\, x)$.

<u>Beweis **259-14**</u> `h)` `VS` gleich $x\,(E|a.)\,(p) \neq x(\{(a,p)\} \cup E)$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: p Menge
$\Rightarrow (x\,(E|a.)\,(p) = x(\{(a,p)\} \cup E))$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $(\{(a,p)\} \cup E \notin \mathsf{dom}\,x)$
$\Rightarrow (x\,(E|a.)\,(p) = x(\{(a,p)\} \cup E))$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS`
folgt: $\boxed{p \text{ Unmenge}}$

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS`
folgt: $\boxed{\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x}$

□

259-15. Hier wird $f\,(E|a.)$ für eine Funktion f untersucht.

259-15(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$p \in f\,(E|a.)$" folgt*
"$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f)$
$\wedge (p = (\Omega, f(\{(a,\Omega)\} \cup E)))$".

b) *Aus "f Funktion" und "$(p,q) \in f\,(E|a.)$"*
folgt "p Menge" und "$q = f(\{(a,p)\} \cup E)$".

c) *Aus "f Funktion" und "p Menge" und "$\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$(p, f(\{(a,p)\} \cup E)) \in f\,(E|a.)$".

d) *Aus "f Funktion" und "$p \in \mathsf{ran}\,(f\,(E|a.))$"*
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f)$
$\wedge (p = f(\{(a,\Omega)\} \cup E))$".

e) *Aus "f Funktion" und "q Menge" und "$\{(a,q)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$f(\{(a,q)\} \cup E) \in \mathsf{ran}\, f\,(E|a.)$".

<u>Beweis **259-15**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in f\,(E|a.))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in f\,(E|a.)$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in f\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $\exists \Omega, \Phi : ((\{(a, \Omega)\} \cup E, \Phi) \in f) \wedge (p = (\Omega, \Phi))$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots p = (\Omega, \Phi)$" und
aus `1.1`
folgt: (Ω, Φ) Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (\{(a, \Omega)\} \cup E, \Phi) \in f \ldots$"
folgt via **7-5**: $\{(a, \Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots (\{(a, \Omega)\} \cup E, \Phi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Phi = f(\{(a, p)\} \cup E)$.

`3.1:` Aus `2.1`"(Ω, Φ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`3.2:` Aus `2.3`"$\Phi = f(\{(a, p)\} \cup E)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, f(\{(a, \Omega)\} \cup E))$.

`4:` Aus `1.2`"$\ldots p = (\Omega, \Phi)$" und
aus `3.2`
folgt: $p = (\Omega, f(\{(a, \Omega)\} \cup E))$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.1`"Ω Menge",
aus `2.2`"$\{(a, \Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `4`"$p = (\Omega, f(\{(a, \Omega)\} \cup E))$"
folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\{(a, \Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = (\Omega, f(\{(a, \Omega)\} \cup E))).$$

<u>Beweis **259-15**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in f\,(E|a.))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in f\,(E|a.)$"
folgt via **259-6**: $(p \text{ Menge}) \wedge ((\{(a,p)\} \cup E, q) \in f)$.

`2.1:` Aus `1`

folgt: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Fuktion…" und
aus `1`"$\ldots (\{(a,p)\} \cup E, q) \in f$"

folgt via **18-20**: $\boxed{q = f(\{(a,p)\} \cup E)}$

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\{(a,p)\} \cup E, f(\{(a,p)\} \cup E)) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge…" und
aus `1`"$(\{(a,p)\} \cup E, f(\{(a,p)\} \cup E)) \in f$"
folgt via **259-6**: $(p, f(\{(a,p)\} \cup E)) \in f\,(E|a.)$.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{ran}\,(f\,(E|a.)))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{ran}\,(f\,(E|a.))$"
folgt via **259-7**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\{(a,\Omega)\} \cup E, p) \in f)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots (\{(a,\Omega)\} \cup E, p) \in f$"
folgt via **7-5** $\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1`"$\ldots (\{(a,\Omega)\} \cup E, p) \in f$"
folgt via **18-20**: $p = f(\{(a,\Omega)\} \cup E)$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega : \Omega$ Menge…",
aus `2.1`"$\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `2.2`"$p = f(\{(a,\Omega)\} \cup E)$"
folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = f(\{(a,\Omega)\} \cup E)).$$

<u>Beweis</u> **259-15** `e)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (\{(a,q)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "…$\{(a,q)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-20**: $(\{(a,q)\} \cup E, f(\{(a,q)\} \cup E)) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "…q Menge…" und
aus `1`"$(\{(a,q)\} \cup E, f(\{(a,q)\} \cup E)) \in f$"
folgt via **259-7**: $f(\{(a,q)\} \cup E) \in \mathsf{ran}\,(f\,(E|a.))$.

$\square$

259-16. Es folgt ein auch an sich interessantes Iintermezzo.

259-16(Satz)

Aus "f Funktion" folgt "$f[\{p\}] = \{f(p)\}$".

Beweis **259-16** $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich f Funktion.

`Thema1.1` $\alpha \in f[\{p\}]$

`2.1`: Aus `VS` gleich "$\alpha \in f[\{p\}]$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2`: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in f[\{p\}]$"
folgt via **9-15**: $(p, \alpha) \in f$.

`3.1`: Aus `2.1`"α Menge"
folgt via **1-3**: $\alpha \in \{\alpha\}$.

`3.2`: Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `2.2`"$(p, \alpha) \in f$"
folgt via **18-20**: $\alpha = f(p)$.

`4`: Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\alpha \in \{f(p)\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in \{f(p)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$f[\{p\}] \subseteq \{f(p)\}$"

...

<u>Beweis **259-16**</u>

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{f(p)\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{f(p)\}$”
folgt via **1-6**: $(\alpha = f(p)) \wedge (f(p)$ Menge$)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots f(p)$ Menge”
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.1:` Aus `3`“$p \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`4.2:` Aus `VS` gleich “f Funktion” und
aus `3`“$p \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`5:` Aus `4.1`“p Menge”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`6:` Aus `4.2`“$(p, f(p)) \in f$” und
aus `5`“$p \in \{p\}$”
folgt via **8-8**: $f(p) \in f[\{p\}]$.

`7:` Aus `2`“$\alpha = f(p) \ldots$” und
aus `6`
folgt: $\alpha \in f[\{p\}]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{f(p)\}) \Rightarrow (\alpha \in f[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{f(p)\} \subseteq f[\{p\}]\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$f[\{p\}] \subseteq \{f(p)\}$” und
aus `A2` gleich “$\{f(p)\} \subseteq f[\{p\}]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f[\{p\}] = \{f(p)\}$.

$\square$

259-17. Nun geht es um $f(x \cup .)[E]$ für Funktionen f.

259-17(Satz)

a) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$q \in f(x \cup .)[E]$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (q = f(x \cup \Omega))$".

b) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in E$" *und* "$x \cup p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt "$f(x \cup p) \in f(x \cup .)[E]$".

c) *Aus* "f *Funktion*" *folgt* "$f(x \cup .)[\{p\}] = \{f(x \cup p)\}$".

<u>Beweis **259-17**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in f(x \cup .)[E])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in f(x \cup .)[E]$"
folgt via **259-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((x \cup \Omega, q) \in f)$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1` "…$(x \cup \Omega, q) \in f$"
folgt via **18-20**: $q = f(x \cup \Omega)$.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega : \Omega \in E \ldots$" und
aus `2` "$q = f(x \cup \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (q = f(x \cup \Omega))$.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in E) \wedge (x \cup p \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "…$x \cup p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (x \cup p, \Omega) \in f$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "…$p \in E$…" und
aus `1` "…$(x \cup p, \Omega) \in f$"
folgt via **259-9**: $\Omega \in f(x \cup .)[E]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1` "…$(x \cup p, \Omega) \in f$"
folgt via **18-20**: $\Omega = f(x \cup p)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $f(x \cup p) \in f(x \cup .)[E]$.

`c)` `VS` gleich f Funktion.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **258-26**: $f(x \cup .)$ Funktion.

`2:` Aus `1` "$f(x \cup .)$ Funktion"
folgt via **259-16**: $f(x \cup .)[\{p\}] = \{f(x \cup .)(p)\}$.

`3:` Via **258-29** gilt: $f(x \cup .)(p) = f(x \cup p)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $f(x \cup .)[\{p\}] = \{f(x \cup p)\}$.

□

259-18. Falls f eine Funktion ist stehen vorliegende Aussagen über $f\,(E|a.)\,[y]$ aur Verfügung.

259-18(Satz)

a) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$q \in f\,(E|a.)\,[y]$" *folgt*
"$\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (q = f(\{(a,\Omega)\} \cup E))$".

b) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in y$" *und* "$\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt "$f(\{(a,p)\} \cup E) \in f\,(E|a.)\,[y]$".

c) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$q \in f\,(E|a.)\,[\{p\}]$"
folgt "p *Menge*" *und* "$q = f(\{(a,p)\} \cup E)$".

d) *Aus* "f *Funktion*" *und* "p *Menge*" *und* "$\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt "$f(\{(a,p)\} \cup E) \in f\,(E|a.)\,[\{p\}]$".

<u>Beweis **259-18**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in f\,(E|a.)\,[y])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in f\,(E|a.)\,[y]$"
folgt via **259-11**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((\{(a,\Omega)\} \cup E, q) \in f)$.

`2.1:` Aus `1` "$\ldots (\{(a,\Omega)\} \cup E, q) \in f$"
folgt via **7-5**: $\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1` "$(\{(a,\Omega)\} \cup E, q) \in f$"
folgt via **18-20**: $p = f(\{(a,\Omega)\} \cup E)$.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega : \Omega \in y \ldots$",
aus `2.1` "$\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `2.2` "$p = f(\{(a,\Omega)\} \cup E)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\{(a,\Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (q = f(\{(a,\Omega)\} \cup E))$.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in y) \wedge (\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\{(a,p)\} \cup E, f(\{(a,p)\} \cup E)) \in f$.

`2:` aus `VS` gleich "$\ldots p \in y \ldots$" und
aus `1` "$(\{(a,p)\} \cup E, f(\{(a,p)\} \cup E)) \in f$"
folgt via **259-11**: $f(\{(a,p)\} \cup E) \in f\,(E|a.)\,[y]$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in f\,(E|a.)\,[\{p\}])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in f\,(E|a.)\,[\{p\}]$"
folgt via **259-12**: $(\{(a,p)\} \cup E, q) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1` "$(\{(a,p)\} \cup E, q) \in f$"
folgt via **18-20**: $q = f(\{(a,p)\} \cup E)$.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (\{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{(a,p)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\{(a,p)\} \cup E, f(\{(a,p)\} \cup E)) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge…" und
aus `1` "$(\{(a,p)\} \cup E, f(\{(a,p)\} \cup E)) \in f$"
folgt via **259-12**: $f(\{(a,p)\} \cup E) \in f\,(E|a.)\,[\{p\}]$.

□

259-19. Das folgende Kriterium entstammt einer früheren Version dieses Essays. Da es ansprechend ist wird es beibehalten.

259-19(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(p,\{(x,p)\})\in\{.\}\circ x_{\mathtt{c1}}$.

`ii)` x,p *Menge.*

Beweis **259-18** $\boxed{\boxed{\texttt{i)}\Rightarrow\texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(p,\{(x,p)\})\in\{.\}\circ x_{\mathtt{c1}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,\{(x,p)\})\in\{.\}\circ x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via **9-15**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,\{(x,p)\})\in\{.\}\circ x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via **14-4**: $\exists\Omega:((p,\Omega)\in x_{\mathtt{c1}})\wedge((\Omega,\{(x,p)\})\in\{.\})$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots(p,\Omega)\in x_{\mathtt{c1}}\ldots$"
folgt via **259-2**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)}\Rightarrow\texttt{i)}}}$ `VS` gleich x,p Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x,p Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (x,p) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x,p Menge"
folgt via **259-2**: $(p,(x,p))\in x_{\mathtt{c1}}$.

`2:` Aus `1.1`"(x,p) Menge"
folgt via **0-22**: $(x,p)\in\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$(x,p)\in\mathcal{U}$"
folgt via **27-10**: $((x,p),\{(x,p)\})\in\{.\}_{\mathcal{U}}$.

`4:` Aus `3` und
aus **27-8(Def)**"$\{.\}=\{.\}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $((x,p),\{(x,p)\})\in\{.\}$.

`5:` Aus `1.2`"$(p,(x,p))\in x_{\mathtt{c1}}$" und
aus `4`"$((x,p),\{(x,p)\})\in\{.\}$"
folgt via **14-5**: $(p,\{(x,p)\})\in\{.\}\circ x_{\mathtt{c1}}$.

□

259-20. Auch dieses Resultat entstammt einer früheren Version des vorliegenden Essays.

<u>**259-20(Satz)**</u>

a) *Aus "x, p Menge" folgt "$(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] = \{\{(x, p)\}\}$".*

b) *Aus "x Unmenge"*
folgt "$(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] = 0$" und "$\{\{(x, p)\}\} = \{0\}$"
und "$(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] \neq \{\{(x, p)\}\}$".

c) *Aus "p Unmenge"*
folgt "$(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] = 0$" und "$\{\{(x, p)\}\} = \{0\}$"
und "$(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] \neq \{\{(x, p)\}\}$".

<u>Beweis **259-20**</u> `a)` `VS` gleich x, p Menge.

1: Aus `VS` gleich "x, p Menge"
folgt via **259-19**: $(p, \{(x, p)\}) \in \{.\} \circ x_{\mathtt{c1}}$.

2: Via **27-11** gilt: $\{.\}_{\mathcal{U}}$ Funktion.

3: Aus 2"$\{.\}_{\mathcal{U}}$ Funktion" und
aus **259-3**"$x_{\mathtt{c1}}$ Funktion"
folgt via **18-46**: $\{.\}_{\mathcal{U}} \circ x_{\mathtt{c1}}$ Funktion.

4: Aus 3 und
aus **27-8(Def)**"$\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}}$ Funktion.

5: Aus 4"$\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}}$ Funktion" und
aus 1"$(p, \{(x, p)\}) \in \{.\} \circ x_{\mathtt{c1}}$"
folgt via **18-20**: $\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}}[\{p\}] = \{\{(x, p)\}\}$.

<u>Beweis **259-20**</u> `b) VS` gleich x Unmenge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Unmenge"
folgt via **259-3**: $x_{\mathtt{c1}} = 0.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Unmenge"
folgt via **6-2**: (x, p) Unmenge.

`2.1:` $$(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] \stackrel{1.1}{=} (\{.\} \circ 0)[\{p\}] \stackrel{\mathbf{259-4}}{=} 0[\{p\}] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0.$$

`2.2:` Aus `1.2`"(x, p) Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{(x, p)\} = 0.$

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] = 0}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\boxed{\{\{(x, p)\}\} = \{0\}}$

`4:` Aus `3.1`,
aus `3.2` und
aus **1-5**"$0 \neq \{0\}$"
folgt: $\boxed{(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] \neq \{\{(x, p)\}\}}$

<u>Beweis **259-20**</u> `c)` `VS` gleich p Unmenge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "p Unmenge"
folgt via **6-2**: (x, p) Unmenge.

`2.1:` $(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] \stackrel{1.1}{=} (\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[0] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0.$

`2.2:` Aus `1.2`"(x, p) Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{(x, p)\} = 0.$

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] = 0}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\boxed{\{\{(x, p)\}\} = \{0\}}$

`4:` Aus `3.1`,
aus `3.2` und
aus **1-5**"$0 \neq \{0\}$"
folgt: $\boxed{(\{.\} \circ x_{\mathtt{c1}})[\{p\}] \neq \{\{(x, p)\}\}}$

$\square$

259-21. Hier wird $y(x\cup.)(0)$ thematisiert.

259-21(Satz)

$$y(x\cup.)(0)=y(x).$$

Beweis **259-21**

`1.1:` Via **258-29** gilt: $y(x\cup.)(0)=y(x\cup 0).$

`1.2:` Via **2-17** gilt: $x\cup 0=x.$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $y(x\cup.)(0)=y(x).$

□

259-22. Auch vorliegendes Resultat ist im Folgenden hilfreich.

<u>**259-22(Satz)**</u>

`a)` *Aus* “$x = y$” *folgt* “$x \subseteq y$” *und* “$y \subseteq x$”.

`b)` “$x = y$” *genau dann, wenn* “$x \subseteq y \subseteq x$” *genau dann, wenn* “$y \subseteq x \subseteq y$”.

<u>Beweis</u> **259-22** `a)` `VS` gleich $x = y$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2.1:` Aus `1` und aus `VS` folgt: $\boxed{x \subseteq y}$

`2.2:` Aus `1` und aus `VS` folgt: $\boxed{y \subseteq x}$

`b)` `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x = y$.

Aus `VS` gleich “$x = y$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$.

`b)` `ii) ⇒ iii)` `VS` gleich $x \subseteq y \subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq y \subseteq x$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y$.

`2:` Aus `1`
folgt: $y = x$.

`3:` Aus `2`“$y = x$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(y \subseteq x) \wedge (x \subseteq y)$.

`b)` `iii) ⇒ i)` `VS` gleich $y \subseteq x \subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich “$y \subseteq x \subseteq y$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y = x$.

□

259-23. Im Folgenden wird $r\,(x|z.)$ für Relationen r betrachtet, deren Definition-Bereich eine TeilKlasse eines "cartesischen Produkts" ist. Dies ist Grund genug, "cartesische Produkte" in die Essays einzubringen. Bemerkenswerter Weise muss in vorliegender Definition die Klasse x weder eine Funktion noch eine Relation sein.

259-23(Definition)

1) $\mathsf{cp}\,x = 259.3(x)$

$$= \{\omega : (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega = \mathsf{dom}\,x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,x) \Rightarrow (\omega(\alpha) \in x(\alpha)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **cartesisches Produkt von** x" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = \mathsf{cp}\,x.$$

259-24 Unter anderem ist $\mathtt{cp}\,x$ das cartesische Produkt von x.

259-24(Satz)

a) $\mathtt{cp}\,x$ *cartesisches Produkt von* x.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *cartesisches Produkt von* x" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

Beweis **259-24** a)

Aus "$\mathtt{cp}\,x = \mathtt{cp}\,x$"
folgt via **259-23(Def)**: $\mathtt{cp}\,x$ cartesisches Produkt von x.

b) VS gleich $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ cartesisches Produkt von x.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}\ldots$ cartesisches Produkt von x"
folgt via **259-23(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathtt{cp}\,x$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ cartesisches Produkt von x"
folgt via **259-23(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathtt{cp}\,x$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

259-25. Für die Elemente von $\mathsf{cp}\,x$ gilt Vorliegendes.

259-25(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{cp}\,x$" *folgt* "$p : \mathsf{dom}\,x \to \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$".

b) *Aus* "$p \in \mathsf{cp}\,f$" *und* "f *Funktion*" *folgt* "$p : \mathsf{dom}\,f \to \bigcup \mathsf{ran}\,f$".

c) *Aus* "$p \in \mathsf{cp}\,f$" *und* "$f : D \to B$" *folgt* "$p : D \to \bigcup B$".

<u>Beweis **259-25**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \mathsf{cp}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{cp}\, x$”
folgt via **259-23(Def)**: $(p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\alpha) \in x(\alpha)))$.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\beta \in \mathsf{ran}\, p$.

`3:` Aus `1`“p Funktion...” und
aus `Thema2.1`“$\beta \in \mathsf{ran}\, p$”
folgt via **18-24**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, p) \wedge (\beta = p(\Omega))$.

`4:` Aus `3`“...$\Omega \in \mathsf{dom}\, p$...” und
aus `1`“...$\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, x$...”
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`5:` Aus `4`“$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$” und
aus `1`“...$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\alpha) \in x(\alpha))$”
folgt: $p(\Omega) \in x(\Omega)$.

`6.1:` Via **258-14** gilt: x_{fkt} Funktion.

`6.2:` Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x$.

`6.3:` Via **258-14** gilt: $x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) = x(\Omega)$.

`7.1:` Aus `4` und
aus `6.2`
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

`7.2:` Aus `5` und
aus `6.3`
folgt: $p(\Omega) \in x_{\mathsf{fkt}}(\Omega)$.

`8:` Aus `6.1`“x_{fkt} Funktion” und
aus `7.1`“$\Omega \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$”
folgt via **18-22**: $x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) \in \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

`9:` Aus `7.2`“$p(\Omega) \in x_{\mathsf{fkt}}(\Omega)$” und
aus `8`“$x_{\mathsf{fkt}}(\Omega) \in \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$”
folgt via **1-12**: $p(\Omega) \in \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

`10:` Aus `3`“...$\beta = p(\Omega)$” und
aus `9`
folgt: $\beta \in \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

...

Beweis **259-25** `a)` `VS` gleich $p \in \mathsf{cp}\, x$.

...

Ergo `Thema2.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\, p) \Rightarrow (\beta \in \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{ran}\, p \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})\text{”}}$

`2.2:` Aus `1`“p Funktion. . . ”,
aus `1`“. . . $\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, x$ . . . ” und
aus `A1` gleich “$\mathsf{ran}\, p \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$”
folgt via **21-1(Def)**: $p : \mathsf{dom}\, x \to \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$.

`b)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{cp}\, f) \wedge (f \text{ Funktion})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{cp}\, f$ . . . ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p : \mathsf{dom}\, f \to \bigcup \mathsf{ran}\,(f_{\mathsf{fkt}})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “. . . f Funktion”
folgt via **258-15**: $f_{\mathsf{fkt}} = f$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $p : \mathsf{dom}\, f \to \bigcup \mathsf{ran}\, f$.

`c)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{cp}\, f) \wedge (f : D \to B)$.

`1:` Aus `VS` gleich “. . . $f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{cp}\, f$ . . . ” und
aus `1`“f Funktion. . . ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p : \mathsf{dom}\, f \to \bigcup \mathsf{ran}\, f$.

`2.2:` Aus `1`“. . . $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$”
folgt via **1-15**: $\bigcup \mathsf{ran}\, f \subseteq \bigcup B$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `1`“. . . $\mathsf{dom}\, f = D$ . . . ”
folgt: $p : D \to \bigcup \mathsf{ran}\, f$.

`4:` Aus `3`“$p : D \to \bigcup \mathsf{ran}\, f$” und
aus `2.2`“$\bigcup \mathsf{ran}\, f \subseteq \bigcup B$”
folgt via **21-5**: $p : D \to \bigcup B$.

□

259-26. Nun soll unter anderem $\mathsf{cp}\, x = 0$ und $0 \neq \mathsf{cp}\, x$ thematisiert werden.

259-26(Satz)

a) $\mathsf{cp}\, 0 = \{0\}$.

b) *Aus* "$x(p) = 0$" *folgt* "$\mathsf{cp}\, x = 0$".

c) *Aus* "$\mathsf{dom}\, x$ *Unmenge*" *folgt* "$\mathsf{cp}\, x = 0$".

d) *Aus* "$0 \neq \mathsf{cp}\, x$" *folgt*
"$\mathsf{dom}\, x$ *Menge*" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha))$".

e) **(AC)** *Aus* "$\mathsf{dom}\, x$ *Menge*" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha))$"
folgt "$0 \neq \mathsf{cp}\, x$".

f) $\mathsf{cp}\, \mathcal{U} = 0$.

Beweis **259-26** a)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{cp}\, 0$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathsf{cp}\, 0$"
folgt via **259-23(Def)**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathsf{dom}\, 0)$.

3.1: Aus 2 "α Funktion..."
folgt via **18-18(Def)**: α Relation.

3.2: Aus 2 "$\ldots \mathsf{dom}\, \alpha = \mathsf{dom}\, 0$" und
aus **7-11** "$\mathsf{dom}\, 0 = 0$"
folgt: $\mathsf{dom}\, \alpha = 0$.

4: Aus 3.1 "α Relation" und
aus 3.2 "$\mathsf{dom}\, \alpha = 0$"
folgt via **92-5**: $\alpha = 0$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{cp}\, 0) \Rightarrow (\alpha = 0)$.

Konsequenz via **1-10**: A1 | "$\mathsf{cp}\, 0 \subseteq \{0\}$"

...

<u>Beweis **259-26**</u> `a)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\beta \in \mathsf{dom}\, 0.$
`2:` Aus `Thema1.2`“$\beta \in \mathsf{dom}\, 0$” und aus **7-11**“$\mathsf{dom}\, 0 = 0$” folgt:	$\beta \in 0.$
`3:` Es gilt `2`“$\beta \in 0$” . Via **0-19** gilt “$\beta \notin 0$” . Ex falso quodlibet folgt:	$0(\beta) \in 0(\beta).$

Ergo `Thema1.2`: `A2` | “$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, 0) \Rightarrow (0(\beta) \in 0(\beta))$”

`2:` Aus **18-51**“0 Funktion” ,
aus “$\mathsf{dom}\, 0 = \mathsf{dom}\, 0$” ,
aus `A2` gleich “$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, 0) \Rightarrow (0(\beta) \in 0(\beta))$” und
aus 0$\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt via **259-23(Def)**: $0 \in \mathsf{cp}\, 0.$

`3:` Aus `2`“$0 \in \mathsf{cp}\, 0$”
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq \mathsf{cp}\, 0.$

`4:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{cp}\, 0 \subseteq \{0\}$” und
aus `3`“$\{0\} \subseteq \mathsf{cp}\, 0$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{cp}\, 0 = \{0\}.$

<u>Beweis **259-26**</u> `b)` `VS` gleich $x(p) = 0.$

`1:` Es gilt: $(0 \neq \mathsf{cp}\ x) \vee (\mathsf{cp}\ x = 0).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \mathsf{cp}\ x.$

`2:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq \mathsf{cp}\ x$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{cp}\ x.$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathsf{cp}\ x$”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in x(\alpha)).$

`4:` Aus `VS` gleich “$x(p) = 0$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt: $x(p)$ Menge.

`5:` Aus `4`“$x(p)$ Menge”
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, x.$

`6:` Aus `5` und
aus `3`
folgt: $\Omega(p) \in x(p).$

`7:` Aus `6` und
aus `VS`
folgt: $\Omega(p) \in 0.$

`8:` Es gilt `7`“$\Omega(p) \in 0$” .
Via **0-19** gilt “$\Omega(p) \notin 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{cp}\ x = 0.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{cp}\ x = 0.$

Beweis **259-26** `c)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, x$ Unmenge.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{cp}\ x$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{cp}\ x$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{cp}\ x$”
folgt via **259-23(Def)**: (α Funktion) $\wedge$ ($\mathsf{dom}\, \alpha = \mathsf{dom}\, x$).

`3:` Aus `2.2`“$\ldots \mathsf{dom}\, \alpha = \mathsf{dom}\, x$” und
aus `VS`
folgt: $\mathsf{dom}\, \alpha$ Unmenge.

`4:` Aus `2.2`“α Funktion...” und
aus `3`“$\mathsf{dom}\, \alpha$ Unmenge”
folgt via **26-4**: α Unmenge.

`5:` Es gilt `4`“α Unmenge”.
Es gilt `2.1`“α Menge”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{cp}\ x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{cp}\ x) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{cp}\ x)$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{cp}\ x = 0$.

<u>Beweis **259-26**</u> `d)` `VS` gleich $0 \neq \mathsf{cp}\, x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{cp}\, x$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{cp}\, x.$

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{cp}\, x$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{cp}\, x$"
folgt via **259-23(Def)**: $(\mathsf{dom}\, \Omega = \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\Omega(\beta) \in x(\beta))).$

`3:` Aus `2.1`"Ω Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\, \Omega$ Menge.

`4:` Aus `3` und
aus `2.2`"$\mathsf{dom}\, \Omega = \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\, x \text{ Menge}}$

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\, x.$

`6:` Aus `Thema5`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus `2.2`"$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\Omega(\beta) \in x(\beta))$"
folgt: $\Omega(\alpha) \in x(\alpha).$

`7:` Aus `6`"$\Omega(\alpha) \in x(\alpha)$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x(\alpha).$

Ergo `Thema5`: $\boxed{\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha))}$

<u>Beweis **259-26**</u> `e)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\, x \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha)))$.

`1.1:` Via **258-14** gilt: x_{fkt} Funktion.

`1.2:` Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha))$"
folgt:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha)).$$

`3:` Via **258-14** gilt: $\forall \beta : x_{\mathsf{fkt}}(\beta) = x(\beta)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \Rightarrow (0 \neq x_{\mathsf{fkt}}(\alpha))$.

`5:` Aus `1.1`"x_{fkt} Funktion" und
aus `4`"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \Rightarrow (0 \neq x_{\mathsf{fkt}}(\alpha))$"
folgt via **AuswahlAxiom**: $\exists \Omega : (\Omega : \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) \to \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$
$\wedge (\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in x_{\mathsf{fkt}}(\gamma)))$.

`6.1:` Aus `5`"$\ldots \Omega : \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) \to \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}) \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\Omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \Omega = \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$.

`6.2:` Aus `5`"$\ldots \forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in x_{\mathsf{fkt}}(\gamma))$" und
aus `1.2`
folgt:
$$\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in x_{\mathsf{fkt}}(\gamma)).$$

`7.1:` Aus `6.1`"$\ldots \mathsf{dom}\, \Omega = \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$" und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\, \Omega = \mathsf{dom}\, x$.

`7.2:` Aus `6.2` und
aus `3`
folgt:
$$\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in x(\gamma)).$$

`8:` Aus `7.1` und
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, x$ Menge$\ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\, \Omega$ Menge.

`9:` Aus `6.1`"Ω Funktion$\ldots$" und
aus `8`"$\mathsf{dom}\, \Omega$ Menge"
folgt via **26-3**: Ω Menge.

$\ldots$

<u>Beweis **259-26**</u> `e)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\, x \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha)))$.

...

`10:` Aus `6.1`"Ω Funktion. . . ",
aus `7.1`"$\mathsf{dom}\, \Omega = \mathsf{dom}\, x$",
aus `7.2`"$\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in x(\gamma))$" und
aus `9`"Ω Menge"
folgt via **259-23(Def)**: $\Omega \in \mathsf{cp}\, x$.

`11:` Aus `11`"$\Omega \in \mathsf{cp}\, x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{cp}\, x$.

`f)`

`1:` Aus **7-11**"$\mathsf{dom}\, \mathcal{U} = \mathcal{U}$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: $\mathsf{dom}\, \mathcal{U}$ Unmenge.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\, \mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{cp}\, \mathcal{U} = 0$.

$\square$

259-27. Vorliegendes Resultat wurde bereits im Beweis von **259-26** verwendet. Die Aussage erklärt auch, warum es bei der Betrachtung cartesischer Produkte $\mathsf{cp}\,x$ genügt, sich auf Funktionen x zu beschränken.

259-27(Satz)

$$\mathsf{cp}\,x = \mathsf{cp}\,x_{\mathsf{fkt}}.$$

Beweis **259-27**

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{cp}\,x$.

`2.1:` Aus `Thema1`"1.1" $\alpha \in \mathsf{cp}\,x$
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{cp}\,x$"
folgt via **259-23(Def)**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathsf{dom}\,x)$
$\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,x) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in x(\beta))$.

`3:` Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\,x$.

`4:` Aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$
$\wedge(\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,x_{\mathsf{fkt}}) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in x(\beta)))$.

`5:` Via **258-14** gilt: $\forall\gamma : x_{\mathsf{fkt}}(\gamma) = x(\gamma)$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$
$\wedge(\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,x_{\mathsf{fkt}}) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in x_{\mathsf{fkt}}(\beta)))$.

`7:` Aus `6`"$(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$
$\wedge(\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,x_{\mathsf{fkt}}) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in x_{\mathsf{fkt}}(\beta)))$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt via **259-23(Def)**: $\alpha \in \mathsf{cp}\,x_{\mathsf{fkt}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{cp}\,x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{cp}\,x_{\mathsf{fkt}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{cp}\,x \subseteq \mathsf{cp}\,x_{\mathsf{fkt}}$"

...

Beweis **259-27** . . .

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}}$.

`2.1:` Aus `Thema1`"1.2" $\alpha \in \mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}}$
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}}$"
folgt via **259-23(Def)**:
$$(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}}))$$
$$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}})) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in x_{\mathsf{fkt}}(\beta)).$$

`3:` Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in x_{\mathsf{fkt}}(\beta)))$.

`5:` Via **258-14** gilt: $\forall \gamma : x_{\mathsf{fkt}}(\gamma) = x(\gamma)$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in x(\beta)))$.

`7:` Aus `6`"$(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in x(\beta)))$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt via **259-23(Def)**: $\alpha \in \mathsf{cp}\ x$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{cp}\ x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}} \subseteq \mathsf{cp}\ x\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{cp}\ x \subseteq \mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}}$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}} \subseteq \mathsf{cp}\ x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{cp}\ x = \mathsf{cp}\ x_{\mathsf{fkt}}$.

□

259-28. Es wird bald gezeigt, dass $\texttt{cp}\ x$ stets eine Menge ist. Dazu bedarf es zweier Vorbereitungen.

259-28(Satz)

a) *Aus* "$f : D \to B$" *folgt* "$f \subseteq D \times B$".

b) $\mathsf{cp}\ x \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$.

<u>Beweis **259-28**</u> a) VS gleich $f : D \to B$.

1: Aus VS gleich "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

2.1: Aus VS gleich "f Funktion…"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

2.2: Aus 1"…$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **6-7**: $(\mathsf{dom}\, f) \times (\mathsf{ran}\, f) \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \times B$.

3.1: Aus 2.1"f Relation"
folgt via **10-4**: $f \subseteq \mathsf{dom}\, f \times \mathsf{ran}\, f$.

3.2: Aus 1"…$\mathsf{dom}\, f = D$…" und
aus 2.2
folgt: $(\mathsf{dom}\, f) \times (\mathsf{ran}\, f) \subseteq D \times B$.

4: Aus 3.1"$f \subseteq \mathsf{dom}\, f \times \mathsf{ran}\, f$" und
aus 3.2"$\mathsf{dom}\, f \times \mathsf{ran}\, f \subseteq D \times B$"
folgt via **0-6**: $f \subseteq D \times B$.

b)

Thema1 $\alpha \in \mathsf{cp}\, x$.

2: Aus VS gleich "$\alpha \in \mathsf{cp}\, x$"
folgt via **259-25**: $\alpha : \mathsf{dom}\, x \to \bigcup \mathsf{ran}\, (x_{\mathsf{fkt}})$.

3: Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\, ()_{\mathsf{fkt}} x = \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $\alpha : \mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}}) \to \bigcup \mathsf{ran}\, (x_{\mathsf{fkt}})$.

5: Aus 4"$\alpha : \mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}}) \to \bigcup \mathsf{ran}\, (x_{\mathsf{fkt}})$"
folgt via des bereits bewiesenen a):
$\alpha \subseteq (\mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\, (x_{\mathsf{fkt}})$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{cp}\, x) \Rightarrow (\alpha \subseteq (\mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\, (x_{\mathsf{fkt}}))$.

Konsequenz via **0-29**: $\mathsf{cp}\, x \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\, (x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\, (x_{\mathsf{fkt}}))$.

□

$\bigcup$Axiom Das $\bigcup$Axiom garantiert, dass durch "Vereinigungs-Bildung" niemals aus einer Menge eine Unmenge generiert werden kann.

$\bigcup$Axiom

Aus "x Menge" folgt "$\bigcup x$ Menge".

259-29. Mit Hilfe des $\bigcup$**Axiom**s zeigt sich, dass $\mathtt{cp}\ x$ stets eine Menge ist.

259-29(Satz)

$\mathtt{cp}\ x$ *Menge.*

Beweis **259-29**

1: Es gilt: $(\mathsf{dom}\, x \text{ Menge}) \vee (\mathsf{dom}\, x \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{dom}\, x$ Menge.

2: Via **258-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}}) = \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus `1.1.Fall` und aus 2 folgt: $\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge.

4: Via **258-14** gilt: x_{fkt} Funktion.

5: Aus 4"x_{fkt} Funktion" und aus 3"$\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge" folgt via **26-3**: x_{fkt} Menge.

6: Aus 5"x_{fkt} Menge" folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge.

7: Aus 6"$\mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge" folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge.

8: Aus 3"$\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge" und aus 7"$\bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge" folgt via **binär-cartesisches Axiom**: $(\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge.

9.1: Via **259-28** gilt: $\mathsf{cp}\, x \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$.

9.2: Aus 8"$(\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}})$ Menge" folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}((\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$ Menge.

10: Aus 9"$\mathsf{cp}\, x \subseteq \mathcal{P}((\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$" und aus 8"$\mathcal{P}((\mathsf{dom}\,(x_{\mathsf{fkt}})) \times \bigcup \mathsf{ran}\,(x_{\mathsf{fkt}}))$ Menge" folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{cp}\, x$ Menge.

`1.2.Fall` $\mathsf{dom}\, x$ Unmenge.

2: Aus `1.2.Fall`"$\mathsf{dom}\, x$ Unmenge" folgt via **259-26**: $\mathsf{cp}\, x = 0$.

3: Aus 2"$\mathsf{cp}\, x = 0$" und aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" folgt: $\mathsf{cp}\, x$ Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{cp}\, x$ Menge.

□

259-30. Hier wird $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_D$ diskutiert.

<u>**259-30(Satz)**</u>

a) $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_0 = \{0\}$.

b) *Aus* "$D = 0$" *folgt* "$\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_D = \{0\}$".

c) *Aus* "$0 \neq D$" *folgt* "$\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_D = 0$".

d) $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo} = 0$.

<u>Beweis **259-30**</u> a)

1: Via **20-5** gilt: $\mathsf{zo}_0 = 0.$

2: $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_0 \stackrel{1}{=} \mathsf{cp}\ 0 \stackrel{\mathbf{259-26}}{=} \{0\}.$

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_0 = \{0\}.$

b) VS gleich $D = 0.$

1: $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_D \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_0 \stackrel{\mathtt{a)}}{=} \{0\}.$

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_D = \{0\}.$

c) VS gleich $0 \neq D.$

1: Aus VS gleich "$0 \neq D$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in D.$

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in D$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_D(\Omega) = 0.$

3: Aus 2"$\mathsf{zo}_D(\Omega) = 0$"
folgt via **259-26**: $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_D = 0.$

d)

1: Via **0-18** gilt: $0 \neq \mathcal{U}.$

2: Aus 1"$0 \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen c): $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo}_{\mathcal{U}} = 0.$

3: Aus 2
und aus **20-1(Def)**"$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $\mathsf{cp}\ \mathsf{zo} = 0.$

$\square$

259-31. Nun wird $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D$ diskutiert.

259-31(Satz)

a) $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_0 = \{0\}$.

b) *Aus* "$D = 0$" *folgt* "$\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D = \{0\}$".

c) *Aus* "$0 \in D$" *folgt* "$\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D = 0$".

d) $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_{\{0\}} = 0$.

e) **(AC)** *Aus* "$0 \notin D$ *Menge*" *folgt* "$0 \neq \mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D$".

f) *Aus* "D *Unmenge*" *folgt* "$\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D = 0$".

g) $\mathsf{cp}\ \mathsf{id} = 0$.

Beweis **259-31** a)

1: Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_0 = 0$.

2: $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_0 \stackrel{1}{=} \mathsf{cp}\ 0 \stackrel{\mathbf{259-26}}{=} \{0\}$.

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_0 = \{0\}$.

b) VS gleich $D = 0$.

1: $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D \stackrel{\text{VS}}{=} \mathsf{cp}\ \mathsf{id}_0 \stackrel{\text{a)}}{=} \{0\}$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D = \{0\}$.

c) VS gleich $0 \in D$.

1: Aus VS gleich "$0 \in D$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_D(0) = 0$.

2: Aus 1 "$\mathsf{id}_D(0) = 0$"
folgt via **259-26**: $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D = 0$.

d)

Aus **1-5** "$0 \in \{0\}$"
folgt via des bereits bewiesenen c): $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_{\{0\}} = 0$.

Beweis **259-31** `e)` `VS` gleich $0 \notin D$ Menge.

`1:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D) = D$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots D$ Menge"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)$ Menge

> `Thema3.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)$.
>
> `4:` Aus `Thema3.1` und
> aus `1`
> folgt: $\alpha \in D$.
>
> `5.1:` Aus `4`"$\alpha \in D$" und
> aus `VS` gleich "$0 \notin D \ldots$"
> folgt via **0-1**: $\alpha \neq 0$.
>
> `5.2:` Aus `4`"$\alpha \in D$"
> folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_D(\alpha) = \alpha$.
>
> `6:` Aus `5.1` und
> aus `5.2`
> folgt: $0 \neq \mathsf{id}_D(\alpha)$.

Ergo `Thema3.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)) \Rightarrow (0 \neq \mathsf{id}_D(\alpha))$"

`3.2:` Aus `2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)$ Menge" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)) \Rightarrow (0 \neq \mathsf{id}_D(\alpha))$"
folgt via **259-26(AC)**: $0 \neq \mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D$.

`f)` `VS` gleich D Unmenge.

`1:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D) = D$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)$ Unmenge.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)$ Unmenge"
folgt via **259-26**: $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D = 0$.

<u>Beweis **259-31**</u> `g)`

`1:` Aus 0$\mathcal{U}$**Axiom**“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_{\mathcal{U}} = 0.$

`2:` Aus `1`“$\mathsf{cp}\ \mathsf{id}_{\mathcal{U}} = 0$” und
aus **20-7(Def)**“$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$”
folgt: $\mathsf{cp}\ \mathsf{id} = 0.$

$\square$

259-32(AC). Hier wird eine interessante Folgerung aus **259-31(AC)** gezogen.

259-32(AC)(Satz)

Aus "$0 \notin D$ *Menge*" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega : D \to \bigcup D) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha))$".

Beweis **259-32(AC)**

1: Aus →) "$0 \notin D$ Menge"
folgt via **259-31(AC)**: $0 \neq \mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D$.

2: Via **21-13** gilt: $\mathsf{id}_D : D \to D$.

3: Aus 1 "$0 \neq \mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D$.

4.1: Aus 3 "$\ldots \Omega \in \mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D$"
folgt via **259-23(Def)**: $\forall \alpha : (\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \in \mathsf{id}_D(\beta))$.

4.2: Aus 3 "$\ldots \Omega \in \mathsf{cp}\ \mathsf{id}_D$" und
aus 2 "$\mathsf{id}_D : D \to D$"
folgt via **259-25**: $\Omega : D \to \bigcup D$.

`Thema5.1` $\alpha \in D$.

6: Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D) = D$.

7: Aus `Thema5.1` und
aus 6
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)$.

8: Aus 7 und
aus 4.1
folgt: $\Omega(\alpha) \in \mathsf{id}_D(\alpha)$.

9: Aus `Thema5.1` "$\alpha \in D$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_D(\alpha) = \alpha$.

10: Aus 8 und
aus 9
folgt: $\Omega(\alpha) \in \alpha$.

Ergo `Thema5.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)$"

5.2: Aus 3 "$\exists \Omega \ldots$",
aus 4.2 "$\Omega : D \to \bigcup D$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega : D \to \bigcup D) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha))$.

□

259-33. Nun soll $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D$ diskutiert werden.

259-33(Satz)

a) $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}0 = \{0\}$.

b) $\texttt{cp}\ 0^{\mathbf{on}}0 = \{0\}$.

c) $\texttt{cp}\ \mathcal{U}^{\mathbf{on}}0 = \{0\}$.

d) *Aus* "$D = 0$" *folgt* "$\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = \{0\}$".

e) *Aus* "$0 \neq D$" *folgt* "$\texttt{cp}\ 0^{\mathbf{on}}D = 0$".

f) $\texttt{cp}\ 0^{\mathbf{on}}\mathcal{U} = 0$.

g) *Aus* "*c Unmenge*" *folgt* "$\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = \{0\}$".

h) $\texttt{cp}\ \mathcal{U}^{\mathbf{on}}D = \{0\}$.

i) $\texttt{cp}\ \mathcal{U}^{\mathbf{on}}\mathcal{U} = \{0\}$.

j) *Aus* "*c Menge*" *und* "*D Unmenge*" *folgt* "$\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = 0$".

k) *Aus* "*c Menge*" *folgt* $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c$.

Beweis **259-33** a)

1: Aus "$0 = 0$"
folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}}0 = 0$.

2: Aus 1 und
aus **259-26** "$\texttt{cp}\ 0 = \{0\}$"
folgt: $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}0 = \{0\}$.

b)

Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\texttt{cp}\ 0^{\mathbf{on}}0 = \{0\}$.

c)

Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\texttt{cp}\ \mathcal{U}^{\mathbf{on}}0 = \{0\}$.

<u>Beweis **259-33**</u> `d)` `VS` gleich $D=0$.

`1:` $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D \stackrel{\texttt{VS}}{=} \texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}0 \stackrel{\texttt{a)}}{=} \{0\}$.

`2:` Aus `1` folgt: $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = \{0\}$.

`e)` `VS` gleich $0 \neq D$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq D$" folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in D$.

`2:` Aus `1`"$\Omega \in D$" und aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" folgt via **214-4**: $0^{\mathbf{on}}D(\Omega) = 0$.

`3:` Aus `2`"$0^{\mathbf{on}}D(\Omega) = 0$" folgt via **259-26**: $\texttt{cp}\ 0^{\mathbf{on}}D = 0$.

`f)`

Aus **0-18**"$0 \neq \mathcal{U}$" folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $0^{\mathbf{on}}\mathcal{U} = 0$.

`g)` `VS` gleich c Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "c Unmenge" folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}}D = 0$.

`2:` Aus **259-26**"$\texttt{cp}\ 0 = \{0\}$" und aus `1` folgt: $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = \{0\}$.

`h)`

Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"$\mathcal{U}$ Unmenge" folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\texttt{cp}\ \mathcal{U}^{\mathbf{on}}D = \{0\}$.

`i)`

Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $\texttt{cp}\ \mathcal{U}^{\mathbf{on}}\mathcal{U} = \{0\}$.

<u>Beweis **259-33**</u> `j)` `VS` gleich $(c \text{ Menge}) \wedge (D \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(c \text{ Menge}) \wedge (D \text{ Unmenge})$"
folgt via **214-5**: $c^{\mathbf{on}}D$ Unmenge.

`2:` Via **214-4** gilt: $c^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$c^{\mathbf{on}}D$ Funktion" und
aus `1`"$c^{\mathbf{on}}D$ Unmenge"
folgt via **26-4**: $\mathsf{dom}\, c^{\mathbf{on}}D$ Unmenge.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{dom}\, c^{\mathbf{on}}D$ Unmenge"
folgt via **259-26**: $\mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = 0$.

`k)` `VS` gleich c Menge.

`Thema1.1` $\alpha \in \mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "c Menge"
folgt via **214-4**: $c^{\mathbf{on}}D : D \to \{c\}$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D$" und
aus `2.2`"$c^{\mathbf{on}}D : D \to \{c\}$"
folgt via **259-25**: $\alpha : D \to \bigcup\{c\}$.

`4:` Via **1-14** gilt: $\bigcup\{c\} \subseteq c$.

`5:` aus `3`"$\alpha : D \to \bigcup\{c\}$" und
aus `4`"$\bigcup\{c\} \subseteq c$"
folgt via **21-5**: $\alpha : D \to c$.

`6:` Aus `2.1`"α Menge" und
aus `5`"$\alpha : D \to c$"
folgt via **212-5**: $\alpha \in {}^{D}c$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D) \Rightarrow (\alpha \in {}^{D}c)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D \subseteq {}^{D}c$"

...

Beweis **259-33** `k)` `VS` gleich c Menge.

...

`Thema1.2` $\alpha \in {}^{D}c$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in {}^{D}c$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in {}^{D}c$"
folgt via **212-5**: $\alpha : D \to c$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\alpha : D \to c$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = D)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\alpha : D \to c$"
folgt via **21-4**: $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (\alpha(\beta) \in c)$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "c Menge"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\, c^{\mathbf{on}}D = D$.

`3.4:` Aus `VS` gleich "c Menge"
folgt via **214-4**: $\forall \gamma : (\gamma \in D) \Rightarrow (c^{\mathbf{on}}D(\gamma) = c)$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\ldots \mathsf{dom}\,\alpha = D$" und
aus `3.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,\alpha = \mathsf{dom}\, c^{\mathbf{on}}D$.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `3.4`
folgt: $\forall \delta : (\delta \in D) \Rightarrow (\alpha(\delta) \in c^{\mathbf{on}}D(\delta))$.

`5:` Aus `3.1`"α Funktion..." ,
aus `4.1`"$\mathsf{dom}\,\alpha = \mathsf{dom}\, c^{\mathbf{on}}D$" ,
aus `4.2`"$\forall \delta : (\delta \in D) \Rightarrow (\alpha(\delta) \in c^{\mathbf{on}}D(\delta))$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt via **259-23(Def)**: $\alpha \in \mathsf{cp}\, c^{\mathbf{on}}D$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in {}^{D}c) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{cp}\, c^{\mathbf{on}}D))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "${}^{D}c \subseteq \mathsf{cp}\, c^{\mathbf{on}}D$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{cp}\, c^{\mathbf{on}}D \subseteq {}^{D}c$" und
aus `A2` gleich "${}^{D}c \subseteq \mathsf{cp}\, c^{\mathbf{on}}D$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{cp}\, c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c$.

$\square$

259-34. In einigen Fällen ist $\mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D$ gleich ${}^{D}c$, in anderen Fällen sind diese Terme ungleich.

259-34(Satz)

a) *"$\mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c$" genau dann, wenn "$c$ Menge" oder "$D = 0$".*

b) *"$\mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D \neq {}^{D}c$" genau dann, wenn "$(c$ Unmenge$) \wedge (0 \neq D)$".*

Beweis **259-34** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c$.

1: Es gilt: $(c \text{ Menge}) \vee (D = 0) \vee ((c \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq D))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall c Menge.

1.2.Fall $D = 0$.

...

Beweis **259-34** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(c \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq D).$

2.1: Aus 1.3.Fall“c Unmenge...”
folgt via **259-33**: $\texttt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = \{0\}.$

2.2: Es gilt: $(D \text{ Menge}) \vee (D \text{ Unmenge}).$

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` D Menge.

3: Aus 1.3.Fall“$\ldots 0 \neq D$”,
aus 2.2.1.Fall“D Menge” und
aus 1.3.Fall“c Unmenge...”
folgt via **219-1**: ${}^{D}c$ Unmenge.

4: Aus 2.1 und
aus VS
folgt: ${}^{D}c = \{0\}.$

5: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{0\}$ Menge.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: ${}^{D}c$ Menge.

7: Es gilt 6“${}^{D}c$ Menge”.
Es gilt 3“${}^{D}c$ Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: $D = 0.$

...

...

<u>Beweis **259-34**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\qquad \mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\qquad (c \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq D).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.2.Fall` $\qquad D \text{ Unmenge}.$

`3:` Aus `2.2.2.Fall`“D Unmenge”
folgt via **212-5**: $\qquad {}^{D}c = 0.$

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $\qquad \mathtt{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = 0.$

`5:` Aus `4` und
aus `2.1`
folgt: $\qquad 0 = \{0\}.$

`6:` Es gilt `5`“$0 = \{0\}$”.
Via **1-5** gilt “$0 \neq \{0\}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad D = 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\qquad D = 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\qquad (c \text{ Menge}) \vee (D = 0).$

Beweis **259-34** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(c \text{ Menge}) \vee (D = 0)$.

1: Nach VS gilt: $(c \text{ Menge}) \vee (D = 0)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall c Menge.

Aus 1.1.Fall "c Menge"
folgt via **259-33**: $\mathsf{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c$.

1.2.Fall $D = 0$.

2.1: Aus 1.2.Fall "$D = 0$"
folgt via **259-33**: $\mathsf{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = \{0\}$.

2.2: ${}^{D}c \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} {}^{0}c \stackrel{\textbf{212-8}}{=} \{0\}$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2 "${}^{D}c = \ldots = \{0\}$"
folgt: $\mathsf{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\mathsf{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c$.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt:
$(\mathsf{cp}\ c^{\mathbf{on}}D = {}^{D}c) \Leftrightarrow ((c \text{ Menge}) \vee (D = 0))$.

2: Aus 1
folgt: $(\mathsf{cp}\ c^{\mathbf{on}}D \neq {}^{D}c) \Leftrightarrow ((c \text{ Unmenge}) \wedge (0 \neq D))$.

□

259-35. Nun soll $\mathtt{cp}\,(D \times B)$ diskutiert werden.

<u>**259-35(Satz)**</u>

a) $0_{\mathsf{fkt}} = 0$.

b) *Aus* “$D = 0$” *folgt* “$(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = 0$”.

c) *Aus* “$B = 0$” *folgt* “$(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = 0$”.

d) *Aus* “$p \in D$” *folgt* “$(D \times B)[\{p\}] = B$”.

e) *Aus* “$p \in D$” *folgt* “$(D \times B)(p) = \bigcap B$”.

f) *Aus* “$p \notin D$” *folgt* “$(D \times B)[\{p\}] = 0$”.

g) *Aus* “$p \notin D$” *folgt* “$(D \times B)(p) = \mathcal{U}$”.

h) $(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D$.

i) “$\mathtt{cp}\,(D \times B) = {}^{D}(\bigcap B)$” *genau dann, wenn* “$0 \neq B$” *oder* “$D = 0$”.

<u>Beweis **259-35**</u>

$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in y\}$ **18-4(Def)**

a)

Aus **18-51**“0 Funktion”
folgt via **258-15**: $0_{\mathsf{fkt}} = 0$.

b) VS gleich $D = 0$.

1: Aus VS gleich “$D = 0$”
folgt via **6-13**: $D \times B = 0$.

2: $(D \times B)_{\mathsf{fkt}} \stackrel{1}{=} 0_{\mathsf{fkt}} \stackrel{\text{a)}}{=} 0$.

3: Aus 2
folgt: $(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = 0$.

<u>Beweis **259-35**</u> `c)` `VS` gleich $B = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich “$B = 0$”
folgt via **6-13**: $D \times B = 0$.

`2:` $(D \times B)_{\mathsf{fkt}} \stackrel{1}{=} 0_{\mathsf{fkt}} \stackrel{\mathsf{a)}}{=} 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = 0$.

`d)` `VS` gleich $p \in D$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in D$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2:` Aus `1`“p Menge”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$p \in D$” und
aus `2`“$p \in \{p\}$”
folgt via **2-2**: $p \in D \cap \{p\}$.

`4:` Aus `3`“$p \in D \cap \{p\}$”
folgt via **0-20**: $0 \neq D \cap \{p\}$.

`5:` Aus `4`“$0 \neq D \cap \{p\}$”
folgt via **9-23**: $(D \times B)[\{p\}] = B$.

`e)` `VS` gleich $p \in D$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in D$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(D \times B)[\{p\}] = B$.

`2:` $(D \times B)(p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap (D \times B)[\{p\}] \stackrel{1}{=} \bigcap B$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(D \times B)(p) = \bigcap B$.

<u>Beweis **259-35**</u> `f)` `VS` gleich $p \notin D$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in (D \times B)[\{p\}]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (D \times B)[\{p\}]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in D \times B)$.

`3.1:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`3.2:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in D \times B$"
folgt via **6-6**: $\Omega \in D$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $p \in D$.

`5:` Es gilt `4` "$p \in D$".
Es gilt `VS` gleich "$p \notin D$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin (D \times B)[\{p\}]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (D \times B)[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \notin (D \times B)[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-19**: $(D \times B)[\{p\}] = 0$.

`g)` `VS` gleich $p \notin D$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \notin D$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $(D \times B)[\{p\}] = 0$.

`2:` $$(D \times B)(p) \stackrel{\textbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap (D \times B)[\{p\}] \stackrel{\textbf{1}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\textbf{1-14}}{=} \mathcal{U}.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $(D \times B)(p) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **259-35**</u> `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (D \times B)_{\mathsf{fkt}}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (D \times B)_{\mathsf{fkt}}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Via **258-13(Def)** gilt:
$$(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, (D \times B)(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,(D \times B)\}.$$

`3:` Aus `Thema1.1` und
aus `2.2`
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, (D \times B)(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,(D \times B)\}$.

`4:` Aus `3` "$\alpha \in \{(\lambda, (D \times B)(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,(D \times B)\}$"
folgt via **18-8**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(D \times B)) \wedge (\alpha = (\Omega, (D \times B)(\Omega))).$$

`5.1:` Aus `4` "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(D \times B) \ldots$"
folgt via **7-7**: $\exists \Phi : (\Omega, \Phi) \in D \times B$.

`5.2:` Aus `4` "$\ldots \alpha = (\Omega, (D \times B)(\Omega))$" und
aus `2.1`
folgt: $(\Omega, (D \times B)(\Omega))$ Menge.

`6.1:` Aus `5.1` "$\ldots (\Omega, \Phi) \in D \times B$"
folgt via **6-6**: $\Omega \in D$.

`6.2:` Aus `5.2` "$(\Omega, (D \times B)(\Omega))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(D \times B)(\Omega)$ Menge.

`7:` Aus `6.1` "$\Omega \in D$"
folgt via des bereits bewiesen `e)`: $(D \times B)(\Omega) = \bigcap B$.

...

...

Beweis **259-35** `h)`...

`Thema1.1` $\alpha \in (D \times B)_{\mathsf{fkt}}$.

...

`8.1`: Aus `7` und
aus `6.2`
folgt: $\bigcap B$ Menge.

`8.2`: Aus `7`"$(D \times B)(\Omega) = \bigcap B$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, (D \times B)(\Omega)) = (\Omega, \bigcap B)$.

`9.1`: Aus `4`"$\ldots \alpha = (\Omega, (D \times B)(\Omega))$" und
aus `8.2`
folgt: $\alpha = (\Omega, \bigcap B)$.

`9.2`: Aus `6.1`"$\Omega \in D$" und
aus `8.1`"$\bigcap B$ Menge"
folgt via **214-2**: $(\Omega, \bigcap B) \in (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D$.

`10`: Aus `9.1` und
aus `9.2`
folgt: $\alpha \in (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (D \times B)_{\mathsf{fkt}}) \Rightarrow (\alpha \in (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(D \times B)_{\mathsf{fkt}} \subseteq (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D$"

Beweis **259-35** `h)`...

`Thema1.2` $\alpha \in (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D$"
folgt via **214-2**: $(\bigcap B \text{ Menge}) \wedge (0 \neq D)$
$\wedge(\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = (\Omega, \bigcap B))).$

`3.1:` Aus 2"$\bigcap B$ Menge..."
folgt via **1-17**: $0 \neq B.$

`3.2:` Aus 2"$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(D \times B)(\Omega) = \bigcap B.$

`4.1:` Aus `3.1`"$0 \neq B$"
folgt via **0-20**: $\exists \Phi : \Phi \in B.$

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $\bigcap B = (D \times B)(\Omega).$

`5:` Aus 2"$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus `4.1`"$\ldots \Phi \in B$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Phi) \in D \times B.$

`6:` Aus 5"$(\Omega, \Phi) \in D \times B$"
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(D \times B).$

`7:` Aus 6"$\Omega \in ((D \times B)) \cap (\mathsf{dom}\,(D \times B))$" und
aus `4.2`"$\bigcap B = (D \times B)(\Omega)$"
folgt via **18-9**:
$(\Omega, \bigcap B) \in \{(\lambda, (D \times B)(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,(D \times B)\}.$

`8:` Via **258-13(Def)** gilt:
$(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = \{(\lambda, (D \times B)(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,(D \times B)\}.$

...

...

Beweis **259-35** `h)`...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D.$

...

`9:` Aus 7 und
aus 8
folgt: $(\Omega, \bigcap B) \in (D \times B)_{\mathsf{fkt}}.$

`10:` Aus 2"... $\alpha = (\Omega, \bigcap B)$" und
aus 9
folgt: $\alpha \in (D \times B)_{\mathsf{fkt}}.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D) \Rightarrow (\alpha \in (D \times B)_{\mathsf{fkt}}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}(\bigcap B)^{\mathbf{on}} D \subseteq (D \times B)_{\mathsf{fkt}}\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$(D \times B)_{\mathsf{fkt}} \subseteq (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D$" und
aus `A2` gleich "$(\bigcap B)^{\mathbf{on}} D \subseteq (D \times B)_{\mathsf{fkt}}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D.$

`i)`

`1:` Via **259-27** gilt: $\texttt{cp}\,(D \times B) = \texttt{cp}\,((D \times B)_{\mathsf{fkt}}).$

`2:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $(D \times B)_{\mathsf{fkt}} = (\bigcap B)^{\mathbf{on}} D.$

`3:` Aus 1 und
aus 2
folgt: $\texttt{cp}\,(D \times B) = \texttt{cp}\,(\bigcap B)^{\mathbf{on}} D.$

`4:` Via **259-34** gilt: $(\texttt{cp}\,(\bigcap B)^{\mathbf{on}} D = {}^{D}\bigcap B) \Leftrightarrow ((\bigcap B \text{ Menge}) \vee (D = 0)).$

`5:` Via **1-17** gilt: $(\bigcap B \text{ Menge}) \Leftrightarrow (0 \neq B).$

`6:` Aus 4 und
aus 5
folgt: $(\texttt{cp}\,(\bigcap B)^{\mathbf{on}} D = {}^{D}\bigcap B) \Leftrightarrow ((0 \neq B) \vee (D = 0)).$

`7:` Aus 6 und
aus 3
folgt: $(\texttt{cp}\,(D \times B) = {}^{D}\bigcap B) \Leftrightarrow ((0 \neq B) \vee (D = 0)).$

□

259-36. Scheinbar aus der Reihe wird nun die nach 0 vielleicht einfachste Funktion $\{(p,q)\}$ diskutiert.

<u>259-36(Satz)</u>

a) *Aus* "$r \in \{(p,q)\}$" *folgt* "$r = (p,q)$ *Menge*".

b) "$(r,s) \in \{(p,q)\}$"
genau dann, wenn "$(r = p) \wedge (s = q) \wedge (r, s$ *Menge*$)$".

c) "$(r,s) \in \{(p,q)\}$"
genau dann, wenn "$(r = p) \wedge (s = q) \wedge (p, q$ *Menge*$)$".

d) "$(p,q) \in \{(p,q)\}$" *genau dann, wenn* "p, q *Menge*".

e) "$0 \neq \{(p,q)\}$" *genau dann, wenn* "p, q *Menge*".

f) "$\{(p,q)\} = 0$" *genau dann, wenn* "$(p$ *Unmenge*$) \vee (q$ *Unmenge*$)$".

g) $\{(p,q)\}$ *Relation.*

h) $\{(p,q)\}$ *Funktion.*

i) $\{(p,q)\}$ *injektiv.*

j) $\mathsf{dom}(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$.

k) $\mathsf{ran}(\{(p,q)\}) \subseteq \{q\}$.

l) "$0 \neq \mathsf{dom}(\{(p,q)\})$" *genau dann, wenn* "$0 \neq \mathsf{ran}(\{(p,q)\})$"
genau dann, wenn "p, q *Menge*".

m) "$\mathsf{dom}(\{(p,q)\}) = 0$" *genau dann, wenn* "$\mathsf{ran}(\{(p,q)\}) = 0$"
genau dann, wenn "$(p$ *Unmenge*$) \vee (q$ *Unmenge*$)$".

n) "$\mathsf{dom}(\{(p,q)\}) = \{p\}$" *genau dann, wenn*
"p, q *Menge*" *oder* "p *Unmenge*".

o) "$\mathsf{ran}(\{(p,q)\}) = \{q\}$" *genau dann, wenn*
"p, q *Menge*" *oder* "q *Unmenge*".

p) "$(\mathsf{dom}(\{(p,q)\}) = \{p\}) \wedge (\mathsf{ran}(\{(p,q)\}) = \{q\})$" *genau dann, wenn*
"$(p, q$ *Menge*$) \vee (p, q$ *Unmenge*$)$".

<u>Beweis **259-36**</u> `a)` `VS` gleich $r \in \{(p,q)\}$.

Aus `VS` gleich "$r \in \{(p,q)\}$"
folgt via **1-6**: $r = (p,q)$ Menge.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(r,s) \in \{(p,q)\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(r,s) \in \{(p,q)\}$"
folgt via **1-6**: $((r,s) = (p,q)) \wedge (r, s$ Menge$)$.

`2.1:` Aus `1`"$(r,s) = (p,q) \ldots$" und
aus `1`"$\ldots r, s$ Menge"
folgt via **IGP**: $\boxed{(r = p) \wedge (s = q)}$

`2.2:` Aus `1`
folgt: $\boxed{r, s \text{ Menge}}$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(r = p) \wedge (s = q) \wedge (r, s$ Menge$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$r = p \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots s = q \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(r,s) = (p,q)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots r, s$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (r,s) Menge.

`2:` Aus `1.2`"(r,s) Menge" und
aus `1.1`"$(r,s) = (p,q)$"
folgt via **1-6**: $(r,s) \in \{(p,q)\}$.

<u>Beweis **259-36**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(r,s)\in\{(p,q)\}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(r,s)\in\{(p,q)\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(r=p)\wedge(s=q)\wedge(r,s \text{ Menge})$.

`2.1:` Aus `1`
folgt: $\boxed{(r=p)\wedge(q=s)}$

`2.2:` Aus `1`“$r=p\ldots$” und
aus `1`“$\ldots r\ldots$ Menge”
folgt: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`2.3:` Aus `1`“$\ldots s=q\ldots$” und
aus `1`“$\ldots s$ Menge”
folgt: $\boxed{q \text{ Menge}}$

`c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(r=p)\wedge(s=q)\wedge(p,q \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$r=p\ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p\ldots$ Menge”
folgt: r Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots s=q\ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots q$ Menge”
folgt: s Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “$(r=p)\wedge(s=q)\ldots$”,
aus `1.1`“r Menge” und
aus `1.2`“s Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(r,s)\in\{(p,q)\}$.

`d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(p,q)\in\{(p,q)\}$.
Aus `VS` gleich “$(p,q)\in\{(p,q)\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: p,q Menge.

`d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich p,q Menge.
Aus “$p=p$”,
aus “$q=q$” und
aus `VS` gleich “p,q Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(p,q)\in\{(p,q)\}$.

<u>Beweis **259-36**</u> `e)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $0 \neq sgppq.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{(p,q)\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{(p,q)\}.$

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \{(p,q)\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: (p,q) Menge.

`3:` Aus `2`"(p,q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: p,q Menge.

`e)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich p,q Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p,q Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(p,q) \in \{(p,q)\}.$

`2:` Aus `1`"$(p,q) \in \{(p,q)\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{(p,q)\}.$

`f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $(0 \neq \{(p,q)\}) \Leftrightarrow (p,q \text{ Menge}).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\{(p,q)\} = 0) \Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})).$

<u>Beweis **259-36**</u> `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \{(p,q)\}$.
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \{(p,q)\}$” folgt via **1-6**:	$\alpha = (p,q)$ Menge.
`3:` Aus `2`“$\ldots (p,q)$ Menge” folgt via **PaarAxiom I**:	p, q Menge.
`4:` Aus `3`“p, q Menge” folgt via **6-8**:	$(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.
`5:` Aus `2`“$\alpha = (p,q) \ldots$” und aus `4` folgt:	$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(p,q)\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{(p,q)\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: $\{(p,q)\}$ Relation.

`h)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \{(p,q)\}$.
`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \{(p,q)\}$” folgt via des bereits bewiesenen `b)`:	$\beta = q$.
`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \{(p,q)\}$” folgt via des bereits bewiesenen `b)`:	$\gamma = q$.
`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt:	$\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \{(p,q)\}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\{(p,q)\}$ Relation.

`2:` Aus `1.2`“$\{(p,q)\}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \{(p,q)\}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18**: $\{(p,q)\}$ Funktion.

Beweis **259-36** `i)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \{(p, q)\}$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$(\alpha, \beta) \ldots \in \{(p, q)\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\alpha = p$.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\ldots (\gamma, \beta) \in \{(p, q)\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\gamma = p$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \{(p, q)\}) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: $\{(p, q)\}$ injektiv.

`j)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(p, q)\})$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(p, q)\})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \{(p, q)\}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \{(p, q)\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\alpha = p$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(p, q)\})) \Rightarrow (\alpha = p)$.

Konsequenz via **1-10**: $\mathsf{dom}\,(\{(p, q)\}) \subseteq \{p\}$.

Beweis **259-36** `k)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

2: Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \{(p,q)\}$.

3: Aus 2“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \{(p,q)\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\alpha = q$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})) \Rightarrow (\alpha = q)$.

Konsequenz via **1-10**: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{q\}$.

`l)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.
Aus `VS` gleich “$0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$”
folgt via **7-7**: $0 \neq \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

`l)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

1: Aus `VS` gleich “$0 \neq \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

2: Aus 1“$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$”
folgt via **7-7**: $\exists \Phi : (\Phi, \Omega) \in \{(p,q)\}$.

3: Aus 2“$\ldots (\Phi, \Omega) \in \{(p,q)\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: p, q Menge.

`l)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich p, q Menge.

1: Aus `VS` gleich “p, q Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

2: Aus 1“$(p,q) \in \{(p,q)\}$”
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

3: Aus 2“$p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \ldots$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

Beweis **259-36** `m)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `l)` gilt:
$$(0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \Leftrightarrow (0 \neq \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})) \Leftrightarrow (p,q \text{ Menge}).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$(\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = 0) \Leftrightarrow (\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) = 0) \Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})).$$

`n)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = \{p\}$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "p Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`4:` Aus `3` "$0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$"
folgt via des bereits bewiesenen `l)`: p,q Menge.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(p,q \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

Beweis **259-36** `n)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` p, q Menge.

`1:` Aus `0.1.Fall` "p, q Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(p, q) \in \{(p, q)\}$.

`2:` Aus `1` "$(p, q) \in \{(p, q)\}$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}(\{(p, q)\})$.

`3:` Aus `2` "$p \in \mathsf{dom}(\{(p, q)\})$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq \mathsf{dom}(\{(p, q)\})$.

`4:` Via des bereits bewiesenen `j)` gilt: $\mathsf{dom}(\{(p, q)\}) \subseteq \{p\}$.

`5:` aus `4` "$\mathsf{dom}(\{(p, q)\}) \subseteq \{p\}$" und
aus `3` "$\{p\} \subseteq \mathsf{dom}(\{(p, q)\})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}(\{(p, q)\}) = \{p\}$.

`0.2.Fall` p Unmenge.

`1:` Aus `0.2.Fall` "p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `m)`: $\mathsf{dom}(\{(p, q)\}) = 0$.

`2:` Aus `0.2.Fall` "p Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\mathsf{dom}(\{(p, q)\}) = \{p\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{dom}(\{(p, q)\}) = \{p\}$.

<u>Beweis **259-36**</u> `o)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\quad \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) = \{q\}$.

`1:` Es gilt: $\quad (q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\quad q$ Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "q Menge"
folgt via **1-3**: $\quad 0 \neq \{q\}$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $\quad 0 \neq \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

`4:` Aus `3` "$0 \neq \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$"
folgt via des bereits bewiesenen `l)`: $\quad p, q$ Menge.

`1.2.Fall` $\quad q$ Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(p, q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge}).$$

Beweis **259-36** `o)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` p, q Menge.

`1:` Aus `0.1.Fall` "p, q Menge" folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(p, q) \in \{(p, q)\}$.

`2:` Aus `1` "$(p, q) \in \{(p, q)\}$" folgt via **7-5**: $q \in \mathsf{ran}\,(\{(p, q)\})$.

`3:` Aus `2` "$q \in \mathsf{ran}\,(\{(p, q)\})$" folgt via **1-8**: $\{q\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\{(p, q)\})$.

`4:` Via des bereits bewiesenen `j)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(p, q)\}) \subseteq \{q\}$.

`5:` aus `4` "$\mathsf{ran}\,(\{(p, q)\}) \subseteq \{q\}$" und aus `3` "$\{q\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\{(p, q)\})$" folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\{(p, q)\}) = \{q\}$.

`0.2.Fall` q Unmenge.

`1:` Aus `0.2.Fall` "q Unmenge" folgt via des bereits bewiesenen `m)`: $\mathsf{ran}\,(\{(p, q)\}) = 0$.

`2:` Aus `0.2.Fall` "q Unmenge" folgt via **1-4**: $\{q\} = 0$.

`3:` Aus `1` und aus `2` folgt: $\mathsf{ran}\,(\{(p, q)\}) = \{q\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(p, q)\}) = \{q\}$.

`p)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `n)` gilt:
$$(\mathsf{dom}\,(\{(p, q)\}) = \{p\}) \Leftrightarrow ((p, q \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `o)` gilt:
$$(\mathsf{ran}\,(\{(p, q)\}) = \{q\}) \Leftrightarrow ((p, q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})).$$

`2:` Aus `1.1` und aus `1.2` folgt:
$$((\mathsf{dom}\,(\{(p, q)\}) = \{p\}) \wedge (\mathsf{ran}\,(\{(p, q)\}) = \{q\})) \Leftrightarrow ((p, q \text{ Menge}) \vee (p, q \text{ Unmenge})).$$

$\square$

259-37. Mit Hilfe von **259-36** ergeben sich ohne allzu viel Mühe vorliegende, ergänzende Aussagen über $\{(p,q)\}$.

<u>**259-37(Satz)**</u>

a) *"$\{(p,q)\} : \{p\} \to \{q\}$"*
genau dann, wenn "$(p,q$ Menge$) \vee (p$ Unmenge$)$".

b) *"$\{(p,q)\} : \{p\} \to \{q\}$ bijektiv"*
genau dann, wenn "$(p,q$ Menge$) \vee (p,q$ Unmenge$)$".

c) *"$\{(p,q)\}(p) = q$" genau dann, wenn "$(p,q$ Menge$) \vee (q = \mathcal{U})$".*

d) *"$\{(p,q)\}(x) = q$"*
genau dann, wenn "$(x = p) \wedge (p,q$ Menge$)$" oder "$q = \mathcal{U}$".

e) $\{(p,q)\}^{-1} = \{(q,p)\}$.

f) *"$p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$" genau dann, wenn "$q \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$"*
genau dann, wenn "p,q Menge".

<u>Beweis **259-37**</u> a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\{(\cdot\!:, \{\})\}p\} \to \{q\}$.

1: Aus VS gleich "$\{(\cdot\!:, \{\})\}p\} \to \{q\}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = \{p\}$.

2: Aus 1 "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = \{p\}$"
folgt via **259-36**: $(p,q$ Menge$) \vee (p$ Unmenge$)$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p,q$ Menge$) \vee (p$ Unmenge$)$.

1: Aus VS gleich "$(p,q$ Menge$) \vee (p$ Unmenge$)$"
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = \{p\}$.

2.1: Via **259-36** gilt: $\{(p,q)\}$ Funktion.

2.2: Via **259-36** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{q\}$.

3: Aus 2.1 "$\{(p,q)\}$ Funktion",
aus 1 "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = \{p\}$" und
aus 2.2 "$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{q\}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\{(p,q)\} : \{p\} \to \{q\}$.

<u>Beweis **259-37**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\{(p,q)\}:\{p\}\to\{q\}$ bijektiv.

`1:` Aus `VS` gleich "$\{(p,q)\}:\{p\}\to\{q\}$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $(\{(p,q)\}:\{p\}\to\{q\})\wedge(\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})=\{q\})$.

`2:` Aus `1`"$\{(p,q)\}:\{p\}\to\{q\}\ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})=\{p\}$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})=\{p\}$" und
aus `1`"$\ldots\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})=\{q\}$"
folgt via **259-36**: $(p,q$ Menge$)\vee(p,q$ Unmenge$)$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(p,q$ Menge$)\vee(p,q$ Unmenge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p,q$ Menge$)\vee(p,q$ Unmenge$)$"
folgt via **259-36**: $(\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})=\{p\})\wedge(\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})=\{q\})$.

`2.1:` Via **259-36** gilt: $\{(p,q)\}$ Funktion.

`2.2:` Via **259-36** gilt: $\{(p,q)\}$ injektiv.

`3:` Aus `2.1`"$\{(p,q)\}$ Funktion",
aus `1`"$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})=\{p\}$" und
aus `1`"$\ldots\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})=\{q\}$"
folgt via **21-2**: $\{(p,q)\}:\{p\}\to\{q\}$.

`4:` Aus `3`"$\{(p,q)\}:\{p\}\to\{q\}$",
aus `1`"$\ldots\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})=\{q\}$" und
aus `2.2`"$\{(p,q)\}$ injektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $\{(p,q)\}:\{p\}\to\{q\}$ bijektiv.

Beweis **259-37** `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\{(p,q)\}(p) = q$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \vee (p \notin \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`3:` Aus 2“$0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$”
folgt via **259-36**: p, q Menge.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$p \notin \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$”
folgt via **17-4**: $\{(p,q)\}(p) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2 und
aus `VS`
folgt: $q = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p, q \text{ Menge}) \vee (q = \mathcal{U})$.

Beweis **259-37** `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \vee (q = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` p, q Menge.

`1:` Aus `0.1.Fall` “p, q Menge”
folgt via **259-36**: $(p, q) \in \{(p, q)\}$.

`2:` Via **259-36** gilt: $\{(p, q)\}$ Funktion.

`3:` Aus `2` “$\{(p, q)\}$ Funktion” und
aus `1` “$(p, q) \in \{(p, q)\}$”
folgt via **18-20**: $q = \{(p, q)\}(p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\{(p, q)\}(p) = q$.

`0.2.Fall` $q = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `0.2.Fall` “$q = \mathcal{U}$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** “$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt: q Unmenge.

`3:` Aus `2` “q Unmenge”
folgt via **259-36**: $\{(p, q)\} = 0$.

`4:` $\{(p, q)\}(p) \stackrel{3}{=} 0(p) \stackrel{\mathbf{17\text{-}7}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\texttt{0.2.Fall}}{=} q$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\{(p, q)\}(p) = q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{(p, q)\}(p) = q$.

Beweis **259-37** d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\{(p,q)\}(x) = q$.

1: Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall q Menge.

2: Aus VS und aus 1.1.Fall folgt: $\{(p,q)\}(x)$ Menge.

3: Aus 2 "$\{(p,q)\}(x)$ Menge" folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

4.1: Aus 3 "$x \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$" folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

4.2: Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$.

5.1: Aus 4.1 "$0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$" folgt via **259-36**: p, q Menge.

5.2: Aus 3 "$x \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$" und aus 4.2 "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$" folgt via **0-6**: $x \in \{p\}$.

6: Aus 5.2 "$x \in \{p\}$" folgt via **1-3**: $x = p$.

7: Aus 6 und aus 5.1 folgt: $(x = p) \wedge (p, q \text{ Menge})$.

1.2.Fall q Unmenge.

2: Aus 1.2.Fall und aus VS folgt: $\{(p,q)\}(x)$ Unmenge.

3: Aus 2 "$\{(p,q)\}(x)$ Unmenge" folgt via **17-4**: $\{(p,q)\}(x) = \mathcal{U}$.

4: Aus 3 und aus VS folgt: $q = \mathcal{U}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$((x = p) \wedge (p, q \text{ Menge})) \vee (q = \mathcal{U}).$$

Beweis **259-37** d) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $((x = p) \wedge (p, q \text{ Menge})) \vee (q = \mathcal{U})$.

Fallunterscheidung

0.1.Fall $(x = p) \wedge (p, q \text{ Menge})$.

1: Aus 0.1.Fall "$\ldots p, q$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen c): $\{(p, q)\}(p) = q$.

2: Aus 0.1.Fall "$x = p \ldots$" und
aus 1
folgt: $\{(p, q)\}(x) = q$.

0.2.Fall $q = \mathcal{U}$.

1: Aus 0.2.Fall "$q = \mathcal{U}$" und
aus 0$\mathcal{U}$**Axiom** "$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: q Unmenge.

2: Aus 1 "q Unmenge"
folgt via **259-36**: $\{(p, q)\} = 0$.

3: $\{(p, q)\}(x) \stackrel{2}{=} 0(x) \stackrel{\mathbf{17\text{-}7}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\text{0.2.Fall}}{=} q$.

4: Aus 3
folgt: $\{(p, q)\}(x) = q$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{(p, q)\}(x) = q$.

<u>Beweis **259-37**</u> `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{(p,q)\}^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{(p,q)\}^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Phi : (\alpha = (\Omega, \Phi)) \wedge ((\Phi, \Omega) \in \{(p,q)\})$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Phi, \Omega) \in \{(p,q)\}$"
folgt via **259-36**: $(\Phi = p) \wedge (\Omega = q) \wedge (\Omega, \Phi$ Menge$)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots \Omega = q \ldots$",
aus `3` "$\Phi = p \ldots$",
aus `3` "$\ldots \Omega \ldots$ Menge" und
aus `3` "$\ldots \Phi$ Menge"
folgt via **259-36**: $(\Omega, \Phi) \in \{(q,p)\}$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \{(q,p)\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(p,q)\}^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \{(q,p)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{(p,q)\}^{-1} \subseteq \{(q,p)\}$

<u>Beweis **259-37**</u> `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{(q,p)\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{(q,p)\}$"
folgt via **259-36**: $\alpha = (q,p)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$\ldots (q,p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: q,p Menge.

`4:` Aus `3`"$\ldots p$ Menge" und
aus `3`"$q \ldots$ Menge"
folgt via **259-36**: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

`5:` Aus `4`"$(p,q) \in \{(p,q)\}$"
folgt via **11-4**: $(q,p) \in \{(p,q)\}^{-1}$.

`6:` Aus `2`"$\alpha = (q,p)\ldots$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \{(p,q)\}^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(q,p)\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(p,q)\}^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\{(q,p)\} \subseteq \{(p,q)\}^{-1}\text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{(p,q)\}^{-1} \subseteq \{(q,p)\}$" und
aus `A2` gleich "$\{(q,p)\} \subseteq \{(p,q)\}^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{(p,q)\}^{-1} = \{(q,p)\}$.

<u>Beweis **259-37**</u> `f)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$"
folgt via **259-36**: p, q Menge.

`3:` Aus `2`"p, q Menge"
folgt via **259-36**: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

`4:` Aus `3`"$(p,q) \in \{(p,q)\}$"
folgt via **7-5**: $q \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

`f)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \{(p,q)\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{(p,q)\}$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq \{(p,q)\}$"
folgt via **259-36**: p, q Menge.

`f)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich p, q Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **259-36**: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

`2:` Aus `1`"$(p,q) \in \{(p,q)\}$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

□

259-38 Abgesehen von einem vorbereitenden Resultate soll hier $\{(p,q)\}\cup x$ thematisiert werden.

259-38(Satz)

a) *Aus* “$p\in\mathsf{dom}\,f$” *und* “$f, f\cup x$ *Funktion*” *folgt* “$(f\cup x)(p)=f(p)$”.

b) *Aus* “$\{(p,q)\}\cup x$ *Funktion*” *und* “p,q *Menge*” *folgt* “$(\{(p,q)\}\cup x)(p)=q$”.

c) *Aus* “$\{(p,q)\}\cup x : D\to B$” *und* “p,q *Menge*” *folgt* “$(\{(p,q)\}\cup x)(p)=q$”.

Beweis **259-38** a) VS gleich $(p\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f, f\cup x \text{ Funktion})$.

1: Aus VS gleich “$\ldots f\ldots$ Funktion” und
aus VS gleich “$p\in\mathsf{dom}\,f\ldots$”
folgt via **18-22**: $(p,f(p))\in f$.

2: Via **2-7** gilt: $f\subseteq f\cup x$.

3: Aus 2“$(p,f(p))\in f$” und
aus 2“$f\subseteq f\cup x$”
folgt via **0-6**: $(p,f(p))\in f\cup x$.

4: Aus VS gleich “$\ldots f\cup x$ Funktion” und
aus 3“$(p,f(p))\in f\cup x$”
folgt via **18-20**: $f(p)=(f\cup x)(p)$.

5: Aus 4
folgt: $(f\cup x)(p)=f(p)$.

<u>Beweis **259-38**</u> `b)` `VS` gleich $(\{(p,q)\} \cup x \text{ Funktion}) \wedge (p, q \text{ Menge})$.

`1.1:` Via **259-36** gilt: $\{(p,q)\}$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p, q$ Menge"
folgt via **259-37**: $p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p, q$ Menge"
folgt via **259-37**: $\{(p,q)\}(p) = q$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$",
aus `1.1`"$\{(p,q)\}$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$\{(p,q)\} \cup x$ Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\{(p,q)\} \cup x)(p) = \{(p,q)\}(p)$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.3`
folgt: $(\{(p,q)\} \cup x)(p) = q$.

`c)` `VS` gleich $(\{(p,q)\} \cup x : D \to B) \wedge (p, q \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\{(p,q)\} \cup x : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\{(p,q)\} \cup x$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\{(p,q)\} \cup x$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots p, q$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\{(p,q)\} \cup x)(p) = q$.

$\square$

259-39. Aus $p \in \mathsf{cp}\ x$ und $q \in \mathsf{dom}\, x$ folgt $p(q) \in x(q)$. Interessanter Weise muss hier x keine Funktion sein. $x = f : D \to B$ wird speziell untersucht..

259-39(Satz)

a) *"$p \in \mathsf{cp}\ x$" genau dann, wenn "p Menge" und "p Funktion" und "$\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, x$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\alpha) \in x(\alpha))$".*

b) *Aus "$p \in \mathsf{cp}\ x$" und "$q \in \mathsf{dom}\, x$" folgt "$p(q) \in x(q)$".*

c) *Aus "$p \in \mathsf{cp}\ f$" und "$f : D \to B$" folgt "p Menge" und "p Funktion" und "$\mathsf{dom}\, p = D$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha))$".*

d) *Aus "$f : D \to B$" und "p Menge" und "p Funktion" und "$\mathsf{dom}\, p = D$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha))$" folgt "$p \in \mathsf{cp}\ f$".*

e) *Aus "$p \in \mathsf{cp}\ f$" und "$f : D \to B$" und "$q \in D$" folgt "$p(q) \in f(q)$".*

Beweis **259-39** a)

Via **259-23(Def)** gilt: $(p \in \mathsf{cp}\ x)$

$$\Leftrightarrow (p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\alpha) \in x(\alpha))).$$

b) VS gleich $(p \in \mathsf{cp}\ x) \wedge (q \in \mathsf{dom}\, x)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{cp}\ x \ldots$" folgt via **259-23(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\alpha) \in x(\alpha))$.

2: Aus VS gleich "$\ldots q \in \mathsf{dom}\, x$" und aus 1 folgt: $p(q) \in x(q)$.

<u>Beweis **259-39**</u> `c)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{cp}\, f) \wedge (f : D \to B)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{cp}\, f \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, f)$$
$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha))).$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2.1:` Aus `1.1`
folgt: $\boxed{(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion})}$

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots (\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$" und aus `1.2`
folgt: $\boxed{(\mathsf{dom}\, p = D) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))}$

`d)` `VS` gleich

$$(f : D \to B) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = D)$$
$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha))).$$

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = D)$
$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$" und
aus `1`
folgt:

$$(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, f)$$
$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha))).$$

`3:` Aus `2`"$(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, f)$
$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in \mathsf{cp}\, f$.

<u>Beweis **259-39**</u> `e)` `VS` gleich $(p \in \mathtt{cp}\ f) \wedge (f : D \to B) \wedge (q \in D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in D$" und
aus `1`
folgt: $q \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathtt{cp}\ f \ldots$" und
aus `2`"$q \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p(q) \in f(q)$.

□

259-40. Falls $f: D \to B$, p, q Menge und $\{(p,q)\} \cup x \in \mathtt{cp}\ f$, dann $p \in D$ und $q \in f(p)$.

259-40(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $f: D \to B$.

$\rightarrow)$ p, q *Menge.*

$\rightarrow)$ $\{(p,q)\} \cup x \in \mathtt{cp}\ f$.

Dann folgt:

a) $p \in D$.

b) $q \in f(p)$.

<u>Beweis **259-40**</u>

1.1: Aus →) “p, q Menge”
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = \{p\}$.

1.2: Aus →) “$\{(p,q)\} \cup x \in \mathtt{cp}\, f$” und
aus →) “$f : D \to B$”
folgt via **259-25**: $\{(p,q)\} \cup x : D \to \bigcup B$.

2.1: Aus 1.2 “$\{(p,q)\} \cup x : D \to \bigcup B$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) = D$.

2.2: Aus 1.2 “$\{(p,q)\} \cup x : D \to \bigcup B$” und
aus →) “p, q Menge”
folgt via **259-38**: $(\{(p,q)\} \cup x)(p) = q$.

3: $\{p\} \stackrel{1.1}{=} \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \stackrel{\mathbf{2-7}}{\subseteq} \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{dom}\, x \stackrel{\mathbf{7-16}}{=} \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) \stackrel{2.1}{=} D$.

4.a): Aus VS gleich “$p \ldots$ Menge” und
aus 3 “$\{p\} \ldots \subseteq \ldots D$”
folgt via **213-2**: $p \in D$.

5: Aus →) “$\{(p,q)\} \cup x \in \mathtt{cp}\, f$”,
aus →) “$f : D \to B$” und
aus 4.a) “$p \in D$”
folgt via **259-39**: $(\{(p,q)\} \cup x)(p) \in f(p)$.

6.b): Aus 5 und
aus 2.2
folgt: $q \in f(p)$.

□

259-41. Unter plausiblen Voraussetzungen an x, f, a gilt $\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) \subseteq f(a)$.

259-41(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{cp}\ f$.

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow\!)$ *a Menge.*

Dann folgt "$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) \subseteq f(a)$".

Beweis **259-41**

`Thema1` $\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

2: Aus `Thema1` "$\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$"
folgt via **259-7**: $(\beta \text{ Menge}) \wedge (\{(a,\beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x)$.

3: Aus 2 "$\ldots \{(a,\beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{cp}\ f$"
folgt via **0-6**: $\{(a,\beta)\} \cup E \in \mathsf{cp}\ f$.

4: Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$",
aus $\rightarrow\!)$ "a Menge",
aus 2 "β Menge…" und
aus 3 "$\{(a,\beta)\} \cup E \in \mathsf{cp}\ f$"
folgt via **259-40**: $\beta \in f(a)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))) \Rightarrow (\beta \in f(a))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) \subseteq f(a)$.

□

259-42. Vorliegendes Intermezzo ist nicht nur hilfreich sondern auch ansprechend.

259-42(Satz)

a) *Aus* "$(\mathsf{dom}\,x)\cap(\mathsf{dom}\,y)=0$" *und* "$p\in\mathsf{dom}\,x$" *folgt* "$(x\cup y)[\{p\}]=x[\{p\}]$" *und* "$(x\cup y)(p)=x(p)$".

b) *Aus* "$(\mathsf{dom}\,x)\cap(\mathsf{dom}\,y)=0$" *und* "$p\in\mathsf{dom}\,y$" *folgt* "$(x\cup y)[\{p\}]=y[\{p\}]$" *und* "$(x\cup y)(p)=y(p)$".

<u>Beweis **259-42**</u> `a)` `VS` gleich $((\mathsf{dom}\,x)\cap(\mathsf{dom}\,y)=0)\wedge(p\in\mathsf{dom}\,x)$.

`1:` Via **2-7** gilt: $x\subseteq x\cup y$.

`2.1:` Aus `1`"$x\subseteq x\cup y$"
folgt via **8-9**: $x[\{p\}]\subseteq(x\cup y)[\{p\}]$.

`Thema2.2` $\alpha\in(x\cup y)[\{p\}]$.

`3:` Es gilt: $(\alpha\in x[\{p\}])\vee(\alpha\notin x[\{p\}])$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha\notin x[\{p\}]$.

`4:` Via **9-1** gilt: $(x\cup y)[\{p\}]=x[\{p\}]\cup y[\{p\}]$.

`5:` Aus `Thema2.2` und
aus `4`
folgt: $\alpha\in x[\{p\}]\cup y[\{p\}]$.

`6:` Aus `5`"$\alpha\in x[\{p\}]\cup y[\{p\}]$" und
aus `3.1.Fall`"$\alpha\notin x[\{p\}]$"
folgt via **Binäres SchubfachPrinzip**: $\alpha\in y[\{p\}]$.

`7:` Aus `6`"$\alpha\in y[\{p\}]$"
folgt via **9-15**: $(p,\alpha)\in y$.

`8:` Aus `7`"$(p,\alpha)\in y$"
folgt via **7-5**: $p\in\mathsf{dom}\,y$.

`9:` Aus `VS` gleich "$(\mathsf{dom}\,x)\cap(\mathsf{dom}\,y)=0\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p\in\mathsf{dom}\,x$"
folgt via **161-1**: $p\notin\mathsf{dom}\,y$.

`10:` Es gilt `8`"$p\in\mathsf{dom}\,y$".
Es gilt `9`"$p\notin\mathsf{dom}\,y$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha\in x[\{p\}]$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha\in x[\{p\}]$.

Ergo `Thema2.2`: $\forall\alpha:(\alpha\in(x\cup y)[\{p\}])\Rightarrow(\alpha\in x[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x\cup y)[\{p\}]\subseteq x[\{p\}]$"

...

<u>Beweis **259-42**</u> `a)` `VS` gleich $((\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) = 0) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

...

`3:` Aus `A1` gleich "$(x \cup y)[\{p\}] \subseteq x[\{p\}]$" und
aus `2.1`"$x[\{p\}] \subseteq (x \cup y)[\{p\}]$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{(x \cup y)[\{p\}] = x[\{p\}]}$

`4:` Aus `3`"$(x \cup y)[\{p\}] = x[\{p\}]$"

folgt via **259-13**: $\boxed{(x \cup y)(p) = x(p)}$

`b)` `VS` gleich $((\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) = 0) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, y)$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $(\mathsf{dom}\, y) \cap (\mathsf{dom}\, x) = (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) = 0 \ldots$"
folgt: $(\mathsf{dom}\, y) \cap (\mathsf{dom}\, x) = 0$.

`3:` Aus `2`"$(\mathsf{dom}\, y) \cap (\mathsf{dom}\, x) = 0$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$((y \cup x)[\{p\}] = y[\{p\}]) \wedge ((y \cup x)(p) = y(p))$.

`4:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup x = x \cup y$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $((x \cup y)[\{p\}] = y[\{p\}]) \wedge ((x \cup y)(p) = y(p))$.

$\square$

259-43. Hier wird Hinreichendes für $\{(p,q)\} \cup x \in \mathtt{cp}\ f$ bezüglich p, x, q formuliert.

259-43(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow\!)$ $p \in D$.

$\rightarrow\!)$ $q \in f(p)$.

$\rightarrow\!)$ $x \in \mathtt{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

Dann folgt “$\{(p,q)\} \cup x \in \mathtt{cp}\ f$”.

Beweis **259-43**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$“$f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$“$p \in D$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$q \in f(p)$”
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.4:` Aus $\rightarrow\!)$“$x \in \mathtt{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$”
folgt via **259-39**: $(x \text{ Menge}) \wedge (x \text{ Funktion}) \wedge \left(\mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\ \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)\right)$
$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\ \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)) \Rightarrow (x(\alpha) \in \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)(\alpha)))$.

`1.5:` Via **259-36** gilt: $(\{(p,q)\} \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\})$.

`1.6:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\ \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right) = \{p\}^C \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2.1:` Aus `1.2`“p Menge” und
aus `1.3`“q Menge”
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = \{p\}$.

`2.2:` Aus `1.4`“$\ldots \mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\ \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right) \ldots$” und
aus `1.6`
folgt: $\mathsf{dom}\, x = \{p\}^C \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2.3:` Aus `1.1`
folgt: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2.4:` Aus `1.4`“x Menge…”
folgt via **2-28**: $\{(p,q)\} \cup x$ Menge.

…

<u>Beweis **259-43**</u> ...

3.1: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x) \stackrel{\mathbf{7-16}}{=} (\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}))\cup(\mathsf{dom}\,x) \stackrel{2.1}{=} \{p\}\cup\mathsf{dom}\,x$
$\stackrel{2.2}{=} \{p\}\cup(\{p\}^C\cap\mathsf{dom}\,f) \stackrel{\mathbf{DG}\cup}{=} (\{p\}\cup\{p\}^C)\cap(\{p\}\cup\mathsf{dom}\,f)$
$\stackrel{\mathbf{3-6}}{=} \mathcal{U}\cap\mathsf{dom}\,f \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \mathsf{dom}\,f \stackrel{2.3}{=} D.$

3.2: $(\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}))\cap\mathsf{dom}\,x \stackrel{2.1}{=} \{p\}\cap\mathsf{dom}\,x \stackrel{2.2}{=} \{p\}\cap(\{p\}^C\cap\mathsf{dom}\,f)$
$\stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} (\{p\}\cap\{p\}^C)\cap\mathsf{dom}\,f \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} 0\cap\mathsf{dom}\,f \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0.$

4: Aus `1.5` "$\{(p,q)\}$ Funktion... ",
aus `1.4` "... x Funktion... " und
aus `3.2` "$(\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}))\cap\mathsf{dom}\,x=\ldots=0$"
folgt via **18-42**: $\{(p,q)\}\cup x$ Funktion.

`Thema5.1` $\beta\in D.$

6: Es gilt: $(\beta=p)\vee(\beta\neq p).$

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $\beta=p.$

7: Aus `4` "$\{(p,q)\}\cup x$ Funktion",
aus `1.2` "p Menge" und
aus `1.3` "q Menge"
folgt via **259-38**: $(\{(p,q)\}\cup x)(p)=q.$

8: Aus `7` und
aus →) "$q\in f(p)$"
folgt: $(\{(p,q)\}\cup x)(p)\in f(p).$

9: Aus `7` und
aus `6.1.Fall`
folgt: $(\{(p,q)\}\cup x)(\beta)\in f(\beta).$

...

...

Beweis **259-43** ...

Thema5.1 $\beta \in D$.

...

Fallunterscheidung

...

6.2.Fall $\beta \neq p$.

7: Aus Thema5“$\beta \in D$” und
aus 6.2.Fall“$\beta \neq p$”
folgt via **5-15**: $\beta \in D \setminus \{p\}$.

8: $D \setminus \{p\} \overset{5-10}{=} D \cap \{p\}^C \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} \{p\}^C \cap D \overset{2.3}{=} \{p\}^C \cap \mathsf{dom}\, f$
$\overset{1.6}{=} \mathsf{dom}\, \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)$.

9: Aus 7 und
aus 8“$D \setminus \{p\} = \ldots = \mathsf{dom}\, \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)$”
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\, \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)$.

10.1: Aus 9 und
aus 1.4“$\ldots \mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right) \ldots$”
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\, x$.

10.2: Aus 9 und
aus 1.4“$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right))$
$\Rightarrow (x(\alpha) \in \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right))(\alpha)$”
folgt: $x(\beta) \in \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)(\beta)$.

11.1: Aus 3.2“$(\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \cap \mathsf{dom}\, x = \ldots = 0$” und
aus 10.1“$\beta \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **259-42**: $(\{(p,q)\} \cup x)(\beta) = x(\beta)$.

11.2: Aus 9“$\beta \in \mathsf{dom}\, \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)$”
folgt via **258-11**: $\left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)(\beta) = f(\beta)$.

12: Aus 10.2 und
aus 11.1
folgt: $(\{(p,q)\} \cup x)(\beta) \in \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)(\beta)$.

13: Aus 12 und
aus 11.2
folgt: $(\{(p,q)\} \cup x)(\beta) \in f(\beta)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$(\{(p,q)\} \cup x)(\beta) \in f(\beta)$.

...

<u>Beweis</u> **259-43** ...

Ergo `Thema5.1`: | `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow ((\{(p,q)\} \cup x)(\beta) \in f(\beta))$" |

`5.2:` Aus →) "$f : D \to B$",
aus `2.4` "$\{(p,q)\} \cup x$ Menge",
aus `4` "$\{(p,q)\} \cup x$ Funktion",
aus `3.1` "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \ldots = D$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow ((\{(p,q)\} \cup x)(\beta) \in f(\beta))$"
folgt via **259-39**: $\{(p,q)\} \cup x \in \mathtt{cp}\, f$.

□

259-44. Hier wird $g\,(E|a.)$ für $g : \mathsf{cp}\ f \to A$ mit $f : D \to B$ und $E \in \mathsf{cp}\ \big(f \downharpoonright \{a\}^C\big)$ mit $a \in D$ erstmalig unter die Lupe genommen.

<u>**259-44(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrowtail)$ $g : \mathsf{cp}\ f \to A$.

$\rightarrowtail)$ $f : D \to B$.

$\rightarrowtail)$ $a \in D$.

$\rightarrowtail)$ $E \in \mathsf{cp}\ \big(f \downharpoonright \{a\}^C\big)$.

Dann folgt "$g\,(E|a.) : f(a) \to A$".

<u>Beweis **259-44**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrowtail)$ "$g : \mathsf{cp}\ f \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $(g \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, g = \mathsf{cp}\ f) \wedge (\mathsf{ran}\, g \subseteq A)$.

`1.2:` Aus $\rightarrowtail)$ "$a \in D$"
folgt via **ElementAxiom**: a Menge.

> `Thema2.1` $\beta \in f(a)$.
>
> `3.1:` Aus `Thema2.1` "$\beta \in f(a)$"
> folgt via **ElementAxiom**: β Menge.
>
> `3.2:` Aus $\rightarrowtail)$ "$f : D \to B$",
> aus $\rightarrowtail)$ "$a \in D$",
> aus `Thema2.1` "$\beta \in f(a)$" und
> aus $\rightarrowtail)$ "$E \in \mathsf{cp}\ \big(f \downharpoonright \{a\}^C\big)$"
> folgt via **259-43**: $\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{cp}\ f$.
>
> `4:` Aus `3.2` und
> aus `1.1` "$\ldots \mathsf{dom}\, g = \mathsf{cp}\ f \ldots$"
> folgt: $\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, g$.
>
> `5:` Aus `3.1` "β Menge" und
> aus `4` "$\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, g$"
> folgt via **259-7**: $\beta \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|a.))$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \beta : (\beta \in f(a)) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|a.)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$f(a) \subseteq \mathsf{dom}\,(g\,(E|a.))$"

...

<u>Beweis **259-44**</u> ...

`2.2:` Aus `1.1`"... $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{cp}\, f$ ..."
folgt via **259-22**: $\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{cp}\, f$.

`2.3:` Via **259-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(g\,(E|a.)) \subseteq \mathsf{ran}\, g$.

`2.4:` Aus `1.1`"g Funktion..."
folgt via **259-8**: $g\,(E|a.)$ Funktion.

`3.1:` Aus `2.3`"$\mathsf{ran}\,(g\,(E|a.)) \subseteq \mathsf{ran}\, g$" und
aus `1.1`"... $\mathsf{ran}\, g \subseteq A$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(g\,(E|a.)) \subseteq A$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{cp}\, f$",
aus →)"$f : D \to B$" und
aus `1.2`"a Menge"
folgt via **259-41**: $\mathsf{dom}\,(g\,(E|a.)) \subseteq f(a)$.

`4:` Aus `3.2`"$\mathsf{dom}\,(g\,(E|a.)) \subseteq f(a)$" und
aus `A1` gleich "$f(a) \subseteq \mathsf{dom}\,(g\,(E|a.))$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(g\,(E|a.)) = f(a)$.

`5:` Aus `2.4`"$g\,(E|a.)$ Funktion",
aus `4`"$\mathsf{dom}\,(g\,(E|a.)) = f(a)$" und
aus `1.1`"$\mathsf{ran}\,(g\,(E|a.)) \subseteq A$"
folgt via **21-1(Def)**: $g\,(E|a.) : f(a) \to A$.

$\square$

259-45. Für die mit einiger Hartnäckigkeit auftretende Aussage "$p \in \mathtt{cp}\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$" soll hier ein Kriterium angegeben werden.

259-45(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathtt{cp}\left(x \downharpoonleft \{a\}^C\right)$.

`ii)` *"p Menge" und "p Funktion" und* "$\mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$" *und* "$\forall \beta : (a \neq \beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\beta) \in x(\beta))$".

<u>Beweis **259-45**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $p \in \mathsf{cp}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{cp}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$"
folgt via **259-39**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right))$
$\wedge(\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)) \Rightarrow (p(\beta) \in \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)(\beta)))$.

2.1: Aus 1
folgt: $\boxed{(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion})}$

2.2: $\mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right) \overset{\mathbf{258-11}}{=} \{a\}^C \cap \mathsf{dom}\, x \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{dom}\, x) \cap \{a\}^C \overset{\mathbf{5-10}}{=} (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$.

3.1: Aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right) \ldots$" und
aus 2.2"$\mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right) = \ldots = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$"
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}}$

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $a \neq \beta \in \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus Thema3.2"$a \neq \beta \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **5-15**: $\beta \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$.

5: Aus 4 und
aus 2.2"$\mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right) = \ldots = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$"
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$.

6: Aus 5 und
aus 1"$\ldots \forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right))$
$\Rightarrow (p(\gamma) \in \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)(\gamma))$"
folgt: $p(\beta) \in \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)(\beta)$.

7: Aus 5"$\beta \in \mathsf{dom}\ \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$"
folgt via **258-11**: $\left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)(\beta) = x(\beta)$.

8: Aus 6 und
aus 7
folgt: $p(\beta) \in x(\beta)$.

Ergo Thema3.2: $\boxed{\forall \beta : (a \neq \beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\beta) \in x(\beta))}$

Beweis **259-45** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\})$
$\forall \beta : (a \neq \beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\beta) \in x(\beta))$.

1: $\mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right) \stackrel{\mathbf{258-11}}{=} \{a\}^C \cap \mathsf{dom}\, x \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{dom}\, x) \cap \{a\}^C \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\gamma \in \mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$.

2: Aus `Thema2.1` "$\gamma \in \mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right) = \ldots = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$"
folgt: $\gamma \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$.

3: Aus `2` "$\gamma \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$"
folgt via **5-15**: $a \neq \gamma \in \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus `3` und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \beta : (a \neq \beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\beta) \in x(\beta))$"
folgt: $p(\gamma) \in x(\gamma)$.

5: Aus `Thema2.1` "$\gamma \in \mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$"
folgt via **258-11**: $\left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)(\gamma) = x(\gamma)$.

6: Aus `4` und
aus `5`
folgt: $p(\gamma) \in \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)(\gamma)$.

Ergo `Thema2.1`:

`A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)) \Rightarrow (p(\gamma) \in \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)(\gamma))$"

2.2: Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\} \ldots$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right) = \ldots = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{a\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$.

3: Aus `VS` gleich "$(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \ldots$",
aus `2.2` "$\mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)) \Rightarrow (p(\gamma) \in \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)(\gamma))$"
folgt via **259-39**: $p \in \mathsf{cp}\, \left(x \downharpoonright \{a\}^C\right)$.

$\square$

259-46. Im Fall $x = f : D \to B$ nimmt Kriterium **259-45** eine etwas weniger sperrige Form an.

<u>259-46(Satz)</u>

a) *Aus* "$f : D \to B$" *und* "$p \in \mathsf{cp}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$"
folgt "p *Menge*" *und* "p *Funktion*" *und* "$\mathsf{dom}\, p = D \setminus \{a\}$"
und "$\forall \alpha : (a \neq \alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha))$".

b) *Aus* "$f : D \to B$" *und* "p *Menge*" *und* "p *Funktion*"
und "$\mathsf{dom}\, p = D \setminus \{a\}$" *und* "$\forall \alpha : (a \neq \alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha))$
folgt "$p \in \mathsf{cp}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$".

<u>Beweis **259-46**</u> `a)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (p \in \mathsf{cp}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{cp}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$"
folgt via **259-45**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, f) \setminus \{a\})$
$\wedge(\forall \alpha : (a \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = D \setminus \{a\})$
$\wedge(\forall \alpha : (a \neq \alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$.

`b)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = D \setminus \{a\})$
$\wedge(\forall \alpha : (a \neq \alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = D \setminus \{a\})$
$\wedge(\forall \alpha : (a \neq \alpha \in D) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, f) \setminus \{a\})$
$\wedge(\forall \alpha : (a \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$.

`3:` Aus 2"$(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, f) \setminus \{a\})$
$\wedge(\forall \alpha : (a \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p(\alpha) \in f(\alpha)))$"
folgt via **259-45**: $p \in \left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$.

□

259-47. Nun wird jener Term vorgestellt, der vorwiegend bei “parameterisierten Operatoren” zum Tragen kommt.

259-47(Definition)

$$x\,(E|p.|a.) = \mathsf{259.4}(x,p,E,a) \;= \{(\lambda, x\,(\{(p,\lambda)\}\cup E|a.)) : \lambda \in \mathcal{U}\}$$
$$= \{\omega : (\exists\Omega : \omega = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\}\cup E|a.)))\}.$$

259-48. Hier soll der Umgang mit $x\,(E|p.|a.)$ vertrauter werden.

259-48(Satz)

a) *Aus* "$q \in x\,(E|p.|a.)$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)$ *Menge*$)$ $\wedge (q = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)))$".

b) *Aus* "$(q,y) \in x\,(E|p.|a.)$" *folgt* "q *Menge*" *und* "$y = x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$ *Menge*".

c) *Aus* "$q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$ *Menge*" *folgt* "$(q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)) \in x\,(E|p.|a.)$".

Beweis **259-48** `a)` `VS` gleich $q \in x\,(E|p.|a.)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in x\,(E|p.|a.)$"
folgt via **259-47(Def)**: $(q \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : q = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)))$.

`2:` Aus `1`"q Menge..." und
aus `1`"...$q = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))$"
folgt: $(\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)$ Menge.

`4:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)$ Menge" und
aus `1`"...$q = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.) \text{ Menge})$
$\wedge (q = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)))$.

<u>Beweis **259-48**</u> `b)` `VS` gleich $(q,y) \in x\,(E|p.|a.)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(q,y) \in x\,(E|p.|a.)$"
folgt via **ElementAxiom**: (q,y) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(q,y) \in x\,(E|p.)\,a$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega : (q,y) = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (q,y) = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))$" und
aus `1.1`"(q,y) Menge"
folgt via **IGP**: $(q = \Omega) \wedge (y = x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)) \wedge (q, y$ Menge$)$.

`3.1:` Aus `2`
folgt: $\boxed{q \text{ Menge}}$

`3.2:` Aus `2`"$q = \Omega \ldots$" und
aus `2`"$\ldots y = x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.) \ldots$"
folgt: $\boxed{y = x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)}$

`4:` Aus `3.2` und
aus `2`"$\ldots y$ Menge"
folgt: $\boxed{x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.) \text{ Menge}}$

<u>Beweis **259-48**</u> `c)` `VS` gleich $q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$ Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$q \ldots$ Menge”
folgt: $\exists \Omega : \Omega = q.$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.))$ Menge.

`2:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega = q$”
folgt: $x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.) = x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.).$

`3:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega = q$” und
aus `2`“$x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.) = x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)) = (q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)).$

`4:` Aus `3`
folgt: $(q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)) = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)).$

`5:` Aus `1.1`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `4`“$(q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)) = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))$” und
aus `1.2`“$(q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.))$ Menge”
folgt via **259-47(Def)**: $(q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)) \in x\,(E|p.|a.).$

$\square$

259-49. Interessanter Weise kommt in **259-48** der Frage, ob $x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$ eine Menge ist, eine gewisse Bedeutung zu. Grund genug, sich auch mit “Mengen-Eigenschaften” von $x\,(E|a.)$ zu beschäftigen.

259-49(Satz)

a) *Aus* “$E\in\mathsf{dom}\,x$” *und* “a *Unmenge*”
folgt “$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))=\mathcal{U}$” *und* “$x\,(E|a.)$ *Unmenge*”.

b) *Aus* “E *Unmenge*” *folgt* “$x\,(E|a.)=0$” *und* “$x\,(E|a.)$ *Menge*”.

c) *Aus* “$\{(p,q)\}\cup E\in\mathsf{dom}\,x$” *und* “$a$ *Unmenge*”
folgt “$\mathsf{dom}\,(x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.))=\mathcal{U}$”
und “$x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$ *Unmenge*”.

d) *Aus* “E *Unmenge*”
folgt “$x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)=0$” *und* “$x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$ *Menge*”.

Beweis **259-49** `a)` `VS` gleich $(E \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (a \text{ Unmenge})$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots a$ Unmenge”
folgt via **92-3**: (a, β) Unmenge.

`3:` Aus `2.2`“(a, β) Unmenge”
folgt via **1-4**: $\{(a, \beta)\} = 0$.

`4:` $\{(a, \beta)\} \cup E \overset{3}{=} 0 \cup E \overset{\mathbf{2-17}}{=} E$.

`5:` Aus `4`“$\{(a, \beta)\} \cup E = \ldots = E$” und
aus `VS` gleich “$E \in \mathsf{dom}\, x \ldots$”
folgt: $\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x$.

`6:` Aus `2.1`“β Menge” und
aus `5`“$\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **259-7**: $\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)))$.

Konsequenz via **0-19**: `A1` | “$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) = \mathcal{U}$”

`1.2:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) = \mathcal{U}$”

folgt via **7-9**: $\boxed{x\,(E|a.) \text{ Unmenge}}$

Beweis **259-49** `b)` `VS` gleich E Unmenge.

`1.1:` Es gilt: $(0 \neq \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))) \vee (\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) = 0)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`“$0 \neq \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$”
folgt via **259-7**: $\{(a, \Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x$.

`4:` Aus `3`“$\{(a, \Omega)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x$”
folgt via **ElementAxiom**: $\{(a, \Omega)\} \cup E$ Menge.

`5:` Aus `4`“$\{(a, \Omega)\} \cup E$ Menge”
folgt via **213-3**: E Menge.

`6:` Es gilt `5`“E Menge”.
Es gilt `VS` gleich “E Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) = 0$”

`1.2:` Via **259-8** gilt: $x\,(E|a.)$ Relation.

`2:` Aus `1.2`“$x\,(E|a.)$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) = 0$”

folgt via **92-5**: $\boxed{x\,(E|a.) = 0}$

`3:` Aus `2`“$x\,(E|a.) = 0$”

folgt via **94-1**: $\boxed{x\,(E|a.) \text{ Menge}}$

`c)` `VS` gleich $(\{(p, q)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x) \wedge (a \text{ Unmenge})$.
Aus `VS` gleich “$(\{(p, q)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x) \wedge (a \text{ Unmenge})$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(\mathsf{dom}\,(x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)) = \mathcal{U}) \wedge (x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.) \text{ Unmenge}).$$

<u>Beweis **259-49**</u> `d)` `VS` gleich E Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "E Unmenge"
folgt via **2-24**: $\{(p,q)\} \cup E$ Unmenge.

`2:` Aus `1` "$\{(p,q)\} \cup E$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$(x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.) = 0) \wedge (x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.) \text{ Menge}).$$

$\square$

259-50. Die Untersuchung möglicher "Mengen-Eigenschaften" von $x\,(E|a.)$ beruht auf der Verwendung vorliegender Funktion.

259-50(Definition)

$$\mathsf{259.5}(a,E,x) = \{(\lambda,\{(a,\lambda)\}\cup E) : \{(a,\lambda)\}\cup E\in x\}$$

$$= \{\omega : (\exists\Omega : (\{(a,\Omega)\}\cup E\in x)\wedge(\omega = (\Omega,\{(a,\Omega)\}\cup E)))\}.$$

259-51. Zunächst wird das "Element-Sein" in $\mathsf{259.5}(a,E,x)$ diskutiert.

259-51(Satz)

a) *Aus* "$p\in\mathsf{259.5}(a,E,x)$" *folgt* "$p$ *Menge*" *und* "$\exists\Omega:(\{(a,\Omega)\}\cup E\in x)\wedge(p=(\Omega,\{(a,\Omega)\}\cup E))$".

b) *Aus* "$(b,c)\in\mathsf{259.5}(a,E,x)$" *folgt* "$b,c$ *Menge*" *und* "$c=\{(a,b)\}\cup E\in x$".

c) *Aus* "b *Menge*" *und* "$\{(a,b)\}\cup E\in x$" *folgt* "$(b,\{(a,b)\}\cup E)\in\mathsf{259.5}(a,E,x)$".

Beweis **259-51** a) VS gleich $p\in\mathsf{259.5}(a,E,x)$.

Aus VS gleich "$p\in\mathsf{259.5}(a,E,x)$"
folgt via **259-50(Def)**:

$$(p\ \text{Menge})\wedge(\exists\Omega:(\{(a,\Omega)\}\cup E\in x)\wedge(p=(\Omega,\{(a,\Omega)\}\cup E))).$$

b) VS gleich $(b,c)\in\mathsf{259.5}(a,E,x)$.

1.1: Aus VS gleich "$(b,c)\in\mathsf{259.5}(a,E,x)$"
folgt via **9-15**: $\boxed{b,c\ \text{Menge}}$

1.2: Aus VS gleich "$(b,c)\in\mathsf{259.5}(a,E,x)$"
folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\exists\Omega:(\{(a,\Omega)\}\cup E\in x)\wedge((b,c)=(\Omega,\{(a,\Omega)\}\cup E)).$$

2: Aus 1.2"$\ldots(b,c)=(\Omega,\{(a,\Omega)\}\cup E)$" und
aus 1.1"b,c Menge"
folgt via **IGP**:

$$(b=\Omega)\wedge(c=\{(a,\Omega)\}\cup E).$$

3: Aus 2"$b=\Omega\ldots$" und
aus 2"$\ldots c=\{(a,\Omega)\}\cup E$"
folgt: $\boxed{c=\{(a,b)\}\cup E}$

4: Aus 1.2"$\ldots\{(a,\Omega)\}\cup E\in x\ldots$" und
aus 2"$b=\Omega\ldots$"
folgt: $\boxed{\{(a,b)\}\cup E\in x}$

<u>Beweis **259-51**</u> `c)` `VS` gleich $(b \text{ Menge}) \wedge (\{(a,b)\} \cup E \in x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "b Menge..."
folgt: $\exists \Omega : \Omega = b$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \{(a,b)\} \cup E \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: $\{(a,b)\} \cup E$ Menge.

`2.1:` Aus `VS` gleich "b Menge..." und
aus `1.2`"$\{(a,b)\} \cup E$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(b, \{(a,b)\} \cup E)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = b$"
folgt: $\{(a,\Omega)\} \cup E = \{(a,b)\} \cup E$.

`3.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = b$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{(a,b)\} \cup E \in x$"
folgt: $\{(a,\Omega)\} \cup E \in x$.

`3.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = b$" und
aus `2.2`"$\{(a,\Omega)\} \cup E = \{(a,b)\} \cup E$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E) = (b, \{(a,b)\} \cup E)$.

`4:` Aus `3.2`
folgt: $(b, \{(a,b)\} \cup E) = (\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E)$.

`5:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.1`"$\{(a,\Omega)\} \cup E \in x$",
aus `4`"$(b, \{(a,b)\} \cup E) = (\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E)$" und
aus `2.1`"$(b, \{(a,b)\} \cup E)$ Menge"
folgt via **259-50(Def)**: $(b, \{(a,b)\} \cup E) \in 259.5(a,E,x)$.

$\square$

259-52. Die Mengenlehre ist immer wieder für hilfreiche Kleinodien gut.

259-52(Satz)

a) *Aus* "$x \notin y$" *und* "$\{p\} \cup x \in y$" *folgt* "p *Menge*" *und* "$p \notin x$".

b) *Aus* "$x \notin y$" *und* "$\{p\} \cup x \in y$" *und* "$\{p\} \cup x \subseteq \{q\} \cup x$" *folgt* "$p = q$ *Menge*".

c) *Aus* "$x \notin y$" *und* "$\{p\} \cup x \in y$" *und* "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup x$" *folgt* "$p = q$ *Menge*".

Beweis **259-52** `a)` `VS` gleich $(x \notin y) \wedge (\{p\} \cup x \in y)$.

`1.1:` Es gilt: $(p \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Menge})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"p Unmenge" folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`3:` $\{p\} \cup x \stackrel{2}{=} 0 \cup x \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x$.

`4:` Aus `3`"$\{p\} \cup x = \ldots = x$" und aus `VS` gleich "$x \notin y \ldots$" folgt: $\{p\} \cup x \notin y$.

`5:` Es gilt `4`"$\{p\} \cup x \notin y$". Es gilt `VS` gleich "$\ldots \{p\} \cup x \in y$". Ex falso quodlibet folgt: p Menge.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`1.2:` Es gilt: $(p \in x) \vee (p \notin x)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $p \in x$.

`2:` Aus `1.2.1.Fall`"$p \in x$" folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

`3:` Aus `2`"$\{p\} \subseteq x$" folgt via **2-10**: $\{p\} \cup x = x$.

`4:` Aus `3` und aus `VS` gleich "$x \notin y \ldots$" folgt: $\{p\} \cup x \notin y$.

`5:` Es gilt `4`"$\{p\} \cup x \notin y$". Es gilt `VS` gleich "$\ldots \{p\} \cup x \in y$". Ex falso quodlibet folgt: $p \notin x$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{p \notin x}$

<u>Beweis **259-52**</u> `b)` `VS` gleich $(x \notin y) \wedge (\{p\} \cup x \in y) \wedge (\{p\} \cup x \subseteq \{q\} \cup x).$

`1:` Aus `VS` gleich "$(x \notin y) \wedge (\{p\} \cup x \in y) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \notin x).$

`2:` Aus `1`"p Menge…"
folgt via **2-28**: $p \in \{p\} \cup x.$

`3:` Aus `2`"$p \in \{p\} \cup x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \cup x \subseteq \{q\} \cup x$"
folgt via **0-4**: $p \in \{q\} \cup x.$

`4:` Aus `3`"$p \in \{q\} \cup x$" und
aus `1`"$\ldots p \notin x$"
folgt via **161-1**: $p \in \{q\}.$

`5:` Aus `4`"$p \in \{q\}$"
folgt via **1-6**: $p = q$ Menge.

`c)` `VS` gleich $(x \notin y) \wedge (\{p\} \cup x \in y) \wedge (\{p\} \cup x = \{q\} \cup x).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \cup x = \{q\} \cup x$"
folgt via **0-6**: $\{p\} \cup x \subseteq \{q\} \cup x.$

`2:` Aus `VS` gleich "$(x \notin y) \wedge (\{p\} \cup x \in y) \ldots$" und
aus `1`"$\{p\} \cup x \subseteq \{q\} \cup x$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p = q$ Menge.

□

259-53. Ohne allau viel auf $\mathsf{259.5}(a, E, x)$ einaugehen werden hier die im Folgenden interessierenden Eigenschaften dieses KlassenTerms angegeben.

259-53(Satz)

a) $\mathsf{259.5}(a, E, x)$ *Relation.*

b) $\mathsf{259.5}(a, E, x)$ *Funktion.*

c) *"*$b \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{259.5}(a, E, x)\,)$*" genau dann, wenn*
"b Menge" und "$\{(a, b)\} \cup E \in x$*".*

d) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{259.5}(a, E, x)\,) \subseteq x$.

e) *Aus "*$E \notin x$*" folgt "*$\mathsf{259.5}(a, E, x)$ *injektiv".*

f) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{259.5}(a, E, \mathsf{dom}\, x)\,) = \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

Beweis **259-53** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad \beta \in 259.5(a,E,x)\,.$

`2.1:` Aus `Thema1` "$\beta \in 259.5(a,E,x)$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\beta \in 259.5(a,E,x)$"
folgt via **259-50(Def)**: $\exists \Omega : \beta = (\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E)$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots \beta = (\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E)$" und
aus `2.1`
folgt: $(\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E)$ Menge.

`4:` Aus `3` "$(\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E$ Menge.

`5:` Aus `4` "$\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E$ Menge"
folgt via **6-8**: $(\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`6:` Aus `2.2` "$\ldots \beta = (\Omega, \{(a,\Omega)\} \cup E)$" und
aus `5`
folgt: $\beta \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in 259.5(a,E,x)) \Rightarrow (\beta \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $259.5(a,E,x) \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: `A1` | "$259.5(a,E,x)$ Relation"

Beweis **259-53** `b)`

`Thema1.1`	$(\beta,\gamma),(\beta,\delta)\in 259.5(a,E,x)$
`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\beta,\gamma)\ldots\in 259.5(a,E,x)$” folgt via **259-51**:	$\gamma=\{(a,\beta)\}\cup E.$
`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots(\beta,\delta)\in 259.5(a,E,x)$” folgt via **259-51**:	$\delta=\{(a,\beta)\}\cup E.$
`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt:	$\gamma=\delta.$

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall\beta,\gamma,\delta:((\beta,\gamma),(\beta,\delta)\in 259.5(a,E,x))\Rightarrow(\gamma=\delta)$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $259.5(a,E,x)$ Relation.

`2:` Aus `1.2`“$259.5(a,E,x)$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall\beta,\gamma,\delta:((\beta,\gamma),(\beta,\delta)\in 259.5(a,E,x))\Rightarrow(\gamma=\delta)$”
folgt via **18-18(Def)**: $259.5(a,E,x)$ Funktion.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $b\in\mathrm{dom}(259.5(a,E,x))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$b\in\mathrm{dom}(259.5(a,E,x))$”
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{b \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$b\in\mathrm{dom}(259.5(a,E,x))$”
folgt via **7-7**: $\exists\Omega:(b,\Omega)\in 259.5(a,E,x)$.

`2:` Aus `1`“$\ldots(b,\Omega)\in 259.5(a,E,x)$”
folgt via **259-51**: $\boxed{\{(a,b)\}\cup E\in x}$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(b \text{ Menge})\wedge(\{(a,b)\}\cup E\in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(b \text{ Menge})\wedge(\{(a,b)\}\cup E\in x)$”
folgt via **259-51**: $(b,\{(a,b)\}\cup E)\in 259.5(a,E,x)$.

`2:` Aus `1`“$(b,\{(a,b)\}\cup E)\in 259.5(a,E,x)$”
folgt via **7-5**: $b\in\mathrm{dom}(259.5(a,E,x))$.

<u>Beweis **259-53**</u> `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{259.5}(a,E,x)\,).$

`2:` Aus `Thema1`“$\beta \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{259.5}(a,E,x)\,)$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega,\beta) \in \mathsf{259.5}(a,E,x)\,.$

`3:` Aus `2`“$\ldots(\Omega,\beta) \in \mathsf{259.5}(a,E,x)$”
folgt via **259-51**: $\beta = \{(a,\Omega)\} \cup E \in x.$

`4:` Aus `3`
folgt: $\beta \in x.$

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{259.5}(a,E,x)\,)) \Rightarrow (\beta \in x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{259.5}(a,E,x)\,) \subseteq x.$

`e)` `VS` gleich $E \notin x.$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\beta,\gamma),(\delta,\gamma) \in \mathsf{259.5}(a,E,x)\,.$

`2.1:` Aus `Thema1`“$(\beta,\gamma)\ldots \in \mathsf{259.5}(a,E,x)$”
folgt via **259-1**: $\gamma = \{(a,\beta)\} \cup E \in x.$

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots(\delta,\gamma) \in \mathsf{259.5}(a,E,x)$”
folgt via **259-1**: $\gamma = \{(a,\delta)\} \cup E \in x.$

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\{(a,\beta)\} \cup E = \{(a,\delta)\} \cup E.$

`4:` Aus `VS` gleich “$E \notin x$”,
aus `2.1`“$\ldots\{(a,\beta)\} \cup E \in x$” und
aus `3`“$\{(a,\beta)\} \cup E = \{(a,\delta)\} \cup E$”
folgt via **259-52**: $(a,\beta) = (a,\delta)$ Menge.

`5:` Aus `4`“$(a,\beta) = (a,\delta)$ Menge”
folgt via **IGP**: $\beta = \delta.$

Ergo `Thema1`: $\forall \beta,\gamma,\delta : ((\beta,\gamma),(\delta,\gamma) \in \mathsf{259.5}(a,E,x)\,) \Rightarrow (\beta = \delta).$

Konsequenz via **8-1(Def)**: $\mathsf{259.5}(a,E,x)$ injektiv.

Beweis **259-53** `f)`

`Thema1.1` $\beta \in \mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in \mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(\beta \text{ Menge}) \wedge (\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x)$.

`3:` Aus 2 "$(\beta \text{ Menge}) \wedge (\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x)$"
folgt via **259-7**: $\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,)) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,) \subseteq \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$"

`Thema1.2` $\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$"
folgt via **259-7**: $(\beta \text{ Menge}) \wedge (\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x)$.

`3:` Aus 2 "$(\beta \text{ Menge}) \wedge (\{(a, \beta)\} \cup E \in \mathsf{dom}\,x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\beta \in \mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) \subseteq \mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,) \subseteq \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.)) \subseteq \mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\,x)\,) = \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

$\square$

259-54. Falls $E \notin \mathsf{dom}\, x$ Menge, so ist $\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$ Menge. Hieraus folgt Hinreichendes für “$x\,(E|a.)$ Menge” .

> **259-54(Satz)**
>
> a) *Aus* “$E \notin \mathsf{dom}\, x$ *Menge*” *folgt* “$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$ *Menge*”.
>
> b) *Aus* “$E \notin \mathsf{dom}\, x$” *und* “$x$ *Menge*” *folgt* “$x\,(E|a.)$ *Menge*”.
>
> c) *Aus* “$E \notin \mathsf{dom}\, f$ *Menge*” *und* “f *Funktion*” *folgt* “$f\,(E|a.)$ *Menge*”.

Beweis **259-54** a) VS gleich $E \notin \mathsf{dom}\, x$ Menge.

1.1: Aus VS gleich “$E \notin \mathsf{dom}\, x \ldots$”
folgt via **259-53**: $259.5(a, E, \mathsf{dom}\, x)$ injektiv.

1.2: Via **259-53** gilt: $\mathsf{ran}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\, x)) \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

1.3: Via **259-53** gilt: $\mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\, x)) = \mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$.

2: Aus 1.2 “$\mathsf{ran}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\, x)) \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus VS gleich “$\ldots \mathsf{dom}\, x$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{ran}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\, x))$ Menge.

3: Aus 1.1 “$259.5(a, E, \mathsf{dom}\, x)$ injektiv” und
aus 2 “$\mathsf{ran}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\, x))$ Menge”
folgt via **26-1**: $\mathsf{dom}\,(259.5(a, E, \mathsf{dom}\, x))$ Menge.

4: Aus 3 und
aus 1.3
folgt: $\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$ Menge.

<u>Beweis **259-54**</u> `b)` `VS` gleich $(E \notin \mathsf{dom}\, x) \wedge (x \text{ Menge})$..

`1.1:` `VS` gleich "$\ldots x$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\, x, \mathsf{ran}\, x$ Menge.

`1.2:` Via **259-8** gilt: $x\,(E|a.)$ Relation.

`1.3:` Via **259-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(x\,(E|a.)) \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$E \notin \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, x \ldots$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$ Menge.

`2.2:` Aus `1.3`"$\mathsf{ran}\,(x\,(E|a.)) \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$ Menge.

`3:` Aus `1.2`"$x\,(E|a.)$ Relation",
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\,(x\,(E|a.))$ Menge" und
aus `2.2`"$\mathsf{ran}\,(x\,(E|a.))$ Menge"
folgt via **10-5**: $x\,(E|a.)$ Menge.

`c)` `VS` gleich $(E \notin \mathsf{dom}\, f \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, f$ Menge"
folgt via **26-3**: f Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \notin \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `1`"f Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f\,(E|a.)$ Menge.

$\square$

259-55. Nun sollen $\mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$ und $\mathsf{ran}\,(x\,(E|p.|a.))$ diskutiert werden.

259-55(Satz)

a) *"$q \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$"*
genau dann, wenn "$q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$ Menge".

b) *Aus "$y \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|p.|a.))$"*
folgt "$\exists\Omega : (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)$ Menge)
$\wedge(y = x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))$".

c) *Aus "$q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$ Menge"*
folgt "$x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.) \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|p.|a.))$".

<u>Beweis **259-55**</u> `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $q \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (q, \Omega) \in x\,(E|p.|a.)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (q, \Omega) \in x\,(E|p.|a.)$"
folgt via **259-48**: $q, x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)$ Menge.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $p, x\,(\{(p, p)\} \cup E|a.)$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$p, x\,(\{(p, p)\} \cup E|a.)$ Menge"
folgt via **259-48**: $(p, x\,(\{(p, p)\} \cup E|a.)) \in x\,(E|p.|a.)$.

`2:` Aus `1`"$(p, x\,(\{(p, p)\} \cup E|a.)) \in x\,(E|p.|a.)$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$.

`b)` `VS` gleich $y \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|p.|a.))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|p.|a.))$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, y) \in x\,(E|p.|a.)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, y) \in x\,(E|p.|a.)$"
folgt via **259-48**:
$(\Omega, x\,(\{(p, \Omega)\} \cup E|a.)$ Menge$) \wedge (y = x\,(\{(a, \Omega)\} \cup E|a.))$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega, x\,(\{(p, \Omega)\} \cup E|a.)$ Menge$) \wedge (y = x\,(\{(a, \Omega)\} \cup E|a.))$.

`c)` `VS` gleich $q, x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$q, x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)$ Menge"
folgt via **259-48**: $(q, x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)) \in x\,(E|p.|a.)$.

`2:` Aus `1`"$(q, x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)) \in x\,(E|p.|a.)$"
folgt via **7-5**: $x\,(\{(p, q)\} \cup E|a.) \in \mathsf{ran}\,(x\,(E|p.|a.))$.

□

259-56. $x\,(E|p.|a.)$ ist stets eine Funktion.

<u>**259-56(Satz)**</u>

a) $x\,(E|p.|a.)$ *Relation.*

b) $x\,(E|p.|a.)$ *Funktion.*

c) *Aus* "$q \in \mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$"
folgt "$x\,(E|p.|a.)\,(q) = x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$".

d) *Aus* "$q, x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$ *Menge*"
folgt "$x\,(E|p.|a.)\,(q) = x\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$".

<u>Beweis **259-56**</u> a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in x\,(E|p.|a.)$.

2: Aus Thema1"$\beta \in x\,(E|p.|a.)$"
folgt via **259-48**: $\exists \Omega : (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)$ Menge$)$
$\wedge(\beta = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)))$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)$ Menge$\ldots$"
folgt via **6-8**: $(\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

4: Aus 2"$\ldots \beta = (\Omega, x\,(\{(p,\Omega)\} \cup E|a.))\ldots$" und
aus 3
folgt: $\beta \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo Thema1: $\forall \beta : (\beta \in x\,(E|p.|a.)) \Rightarrow (\beta \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x\,(E|p.|a.) \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: $x\,(E|p.|a.)$ Relation.

Beweis **259-56** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$(\beta,\gamma),(\beta,\delta)\in x\,(E\vert p.\vert a.)$.
`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\beta,\gamma)\ldots\in x\,(E\vert p.\vert a.)$” folgt via **259-48**:	$\gamma = x\,(\{(p,\beta)\}\cup E\vert a.)$.
`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots(\beta,\delta)\in x\,(E\vert p.\vert a.)$” folgt via **259-48**:	$\delta = x\,(\{(p,\beta)\}\cup E\vert a.)$.
`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt:	$\gamma=\delta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall\beta,\gamma,\delta;((\beta,\gamma),(\beta,\delta)\in x\,(E|p.|a.))\Rightarrow(\gamma=\delta)$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x\,(E|p.|a.)$ Relation.

`2:` Aus `1.2`“$x\,(E|p.|a.)$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall\beta,\gamma,\delta:((\beta,\gamma),(\beta,\delta)\in x\,(E|p.|a.))\Rightarrow(\gamma=\delta)$”
folgt via **18-18(Def)**: $x\,(E|p.|a.)$ Funktion.

`c)` `VS` gleich $q\in\mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$q\in\mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$”
folgt via **259-55**: $q, x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$ Menge.

`2:` Aus `1`“$q, x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$ Menge”
folgt via **259-48**: $(q, x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.))\in x\,(E|p.|a.)$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $x\,(E|p.|a.)$ Funktion.

`4:` Aus `3`“$x\,(E|p.|a.)$ Funktion” und
aus `2`“$(q, x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.))\in x\,(E|p.|a.)$”
folgt via **18-20**: $x\,(E|p.|a.)\,(p) = x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$.

`d)` `VS` gleich $q, x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich “$q, x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$ Menge”
folgt via **259-55**: $q\in\mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$.

`2:` Aus `1`“$q\in\mathsf{dom}\,(x\,(E|p.|a.))$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x\,(E|p.|a.)\,(q) = x\,(\{(p,q)\}\cup E|a.)$.

$\square$

259-57. Vorliegendes vertieft mit elementaren Argmenten Einsichten in cartesische Produkte.

259-57(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $p \in \mathsf{dom}\, x$.

$\rightarrow$) $p \notin \mathsf{dom}\, y$.

Dann folgt:

a) $y \notin \mathsf{cp}\, x$.

b) $x \notin \mathsf{cp}\, y$.

<u>Beweis **259-57**</u> `a)`

`1:` Es gilt: $(y \in \mathsf{cp}\ x) \vee (y \notin \mathsf{cp}\ x)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathsf{cp}\ x$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$y \in \mathsf{cp}\ x$" folgt via **259-39**: $\mathsf{dom}\, y = \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus →) "$p \in \mathsf{dom}\, x$" und aus →) "$p \notin \mathsf{dom}\, y$" folgt via **0-10**: $\mathsf{dom}\, x \neq \mathsf{dom}\, y$.

`4:` Es gilt 2"$\mathsf{dom}\, y = \mathsf{dom}\, x$". Es gilt 3"$\mathsf{dom}\, x \neq \mathsf{dom}\, y$". Ex falso quodlibet folgt: $y \notin \mathsf{cp}\ x$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y \notin \mathsf{cp}\ x$.

`b)`

`1:` Es gilt: $(x \in \mathsf{cp}\ y) \vee (x \notin \mathsf{cp}\ y)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathsf{cp}\ y$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathsf{cp}\ y$" folgt via **259-39**: $\mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, y$.

`3:` Aus →) "$p \in \mathsf{dom}\, x$" und aus →) "$p \notin \mathsf{dom}\, y$" folgt via **0-10**: $\mathsf{dom}\, x \neq \mathsf{dom}\, y$.

`4:` Es gilt 2"$\mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, y$". Es gilt 3"$\mathsf{dom}\, x \neq \mathsf{dom}\, y$". Ex falso quodlibet folgt: $x \notin \mathsf{cp}\ y$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \notin \mathsf{cp}\ y$.

□

259-58. Hier wird unter anderem Hinreichendes für $\{(z,v)\}\cup x \notin \mathtt{cp}\, y$ bewiesen.

259-58(Satz) *Es gelte:*

→) $u \neq z \in \mathsf{dom}\, y$.

→) $\mathsf{dom}\, x = \{u,z\}^C \cap \mathsf{dom}\, y$.

Dann folgt:

a) $z \notin \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x)$.

b) $\{(u,v)\} \cup x \notin \mathtt{cp}\, y$.

Beweis **259-58** a)

1: Es gilt: $(z \in \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x)) \vee (z \notin \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x))$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $z \in \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x)$.

2: Via **7-16** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x) = (\mathsf{dom}\,(\{(u,v)\})) \cup \mathsf{dom}\,x$.

3: Aus `1.1.Fall` und aus 2 folgt: $z \in (\mathsf{dom}\,(\{(u,v)\})) \cup \mathsf{dom}\,x$.

4: Aus 3"$z \in (\mathsf{dom}\,(\{(u,v)\})) \cup \mathsf{dom}\,x$" folgt via **2-2**: $(z \in \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\})) \vee (z \in \mathsf{dom}\,x)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $z \in \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\})$.

5: Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(u,v)\}) \subseteq \{u\}$.

6: Aus `4.1.Fall`"$z \in \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\})$" und aus 5"$\mathsf{dom}\,(\{(u,v)\}) \subseteq \{u\}$" folgt via **0-4**: $z \in \{u\}$.

7: Aus 6"$z \in \{u\}$" folgt via **1-6**: $z = u$.

8: Es gilt 7"$z = u$". Es gilt $\rightarrow)$"$u \neq z \ldots$". Ex falso quodlibet folgt: $z \notin \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x)$.

...

...

Beweis **259-58** a)

...

$\boxed{\texttt{wfFallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $z \in \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $z \in \mathsf{dom}\,x$.

`5.1`: Aus `4.2.Fall` "$z \in \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **ElementAxiom**: z Menge.

`5.2`: Aus `4.2.Fall` "$z \in \mathsf{dom}\,x$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\,x = \{u,z\}^C \cap \mathsf{dom}\,y$"
folgt: $z \in \{u,z\}^C \cap \mathsf{dom}\,y$.

`6.1`: Aus `5.1` "z Menge"
folgt via **4-9**: $z \in \{u,z\}$.

`6.2`: Aus `5.2` "$z \in \{u,z\}^C \cap \mathsf{dom}\,y$"
folgt via **2-2**: $z \in \{u,z\}^C$.

`7`: Aus `6` "$z \in \{u,z\}^C$"
folgt via **3-2**: $z \notin \{u,z\}$.

`8`: Es gilt `7` "$z \notin \{u,z\}$".
Es gilt `6.1` "$z \in \{u,z\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $z \notin \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$z \notin \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x)$.

$\boxed{\texttt{Ende wfFallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $z \notin \mathsf{dom}\,(\{(u,v)\} \cup x)$.

Beweis **259-58** `b)`

`1.1:` Aus $\rightarrow\rangle$ "$u \neq z \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt: $z \in \mathsf{dom}\, y.$

`1.2:` Aus $\rightarrow\rangle$ "$u \neq z \in \mathsf{dom}\, y$" und
aus $\rightarrow\rangle$ "$\mathsf{dom}\, x = \{u, z\}^C \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $z \notin \mathsf{dom}\,(\{(u, v)\} \cup x).$

`2:` Aus `1.1` "$z \in \mathsf{dom}\, y$" und
aus `1.2` "$z \notin \mathsf{dom}\,(\{(u, v)\} \cup x)$"
folgt via **259-57**: $\{(u, v)\} \cup x \notin \mathsf{cp}\, y.$

$\square$

259-59. Hier soll $g\,(E|p.|a.)$ mit $g : \mathsf{cp}\ f \to A$ und $f : D \to B$ sowie $p, a \in D$ untersucht werden. Die erste Beobachtung ist etwas überraschend.

<u>**259-59(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $g : \mathsf{cp}\ f \to A$.

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow\!)$ $p \neq a \in D$.

$\rightarrow\!)$ $E \in \mathsf{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.)) = \mathcal{U}$.

b) $g\,(E|p.|a.)$ *Unmenge.*

<u>Beweis **259-59**</u> a)

1.1: Aus $\rightarrow\!)$ "$g : \mathsf{cp}\ f \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{cp}\ f$.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

1.3: Via **259-29** gilt: $\mathsf{cp}\ f$ Menge.

1.4: Aus $\rightarrow\!)$ "$E \in \mathsf{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$"
folgt via **259-39**: $\mathsf{dom}\, E = \mathsf{dom}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$.

2.1: Aus $\rightarrow\!)$ "$p \neq a \in D$" und
aus 1.2
folgt: $p \neq a \in \mathsf{dom}\, f$.

2.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$g : \mathsf{cp}\ f \to A$" und
aus 1.3 "$\mathsf{cp}\ f$ Menge"
folgt via **26-5**: g Menge.

2.3: Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right) = \{a, p\}^C \cap \mathsf{dom}\, f$.

...

Beweis **259-59** `a)` ...

`3:` Aus `1.4` und
aus `2.3`
folgt: $\mathsf{dom}\, E = \{p, a\}^C \cap \mathsf{dom}\, f.$

$\boxed{\texttt{Thema4}}$ $\beta \in \mathcal{U}.$

`5.1:` Aus `Thema4`“$\beta \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`5.2:` Aus `2.1`“$p \neq a \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus `3`“$\mathsf{dom}\, E = \{p, a\}^C \cap \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **259-58**: $\{(p, \beta)\} \cup E \notin \mathsf{cp}\ f.$

`6:` Aus `5.2` und
aus `1.1`
folgt: $\{(p, \beta)\} \cup E \notin \mathsf{dom}\, g.$

`7:` Aus `6`“$\{(p, \beta)\} \cup E \notin \mathsf{dom}\, g$” und
aus `2.2`“g Menge”
folgt via **259-54**: $g\,(\{(p, \beta)\} \cup E|a.)$ Menge.

`8:` Aus `5.1`“β Menge” und
aus `7`“ $g\,(\{(p, \beta)\} \cup E|a.)$ Menge”
folgt via **259-55**: $\beta \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.)).$

Ergo `Thema4`: $\forall \beta : (\beta \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.))).$

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.)) = \mathcal{U}.$

`b)`

`1:` Aus →)“$g : \mathsf{cp}\ f \to A$”,
aus →)“$f : D \to B$”,
aus →)“$p \neq a \in D$” und
aus →)“$E \in \mathsf{cp}\ \left(f \restriction \{p, a\}^C\right)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.)) = \mathcal{U}.$

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.)) = \mathcal{U}$”
folgt via **7-9**: $g\,(E|p.|a.)$ Unmenge.

□

259-60. Das vorliegende Ergebnis hilft undurchsichtige Notationen zu vermeiden.

259-60(Satz)

Aus "$(p,q) \in x \in \mathsf{cp}\ y$" *folgt* "$p \in \mathsf{dom}\, y$" *und* "$q \in y(p)$".

Beweis **259-60** `VS` gleich $(p,q) \in x \in \mathsf{cp}\ y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in x \ldots$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathsf{cp}\ y$"
folgt via **259-39**:
$(x \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, y) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (x(\alpha) \in y(\alpha)))$.

`2.1:` Aus `1.2`"x Funktion..." und
aus `VS` gleich "$(p,q) \in x \ldots$"
folgt via **18-20**: $q = x(p)$.

`2.2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, y \ldots$"
folgt: $\boxed{p \in \mathsf{dom}\, y}$

`3:` Aus `2.2`"$p \in \mathsf{dom}\, y$" und
aus `1.2`"$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha) \in y(\alpha)) \ldots$"
folgt: $x(p) \in y(p)$.

`4:` Aus `2.1` und
aus `3`
folgt: $\boxed{q \in y(p)}$

□

259-61. Der überraschend große Definitions-Bereich von $g\,(E|p.|a.)$ in **259-59** erklärt sich auch wegen $g\,(E|p.|a.)\,(p) = g\,(\{(p,p)\} \cup E|a.) = 0$ fþu "viele" Mengen p. Im vorliegenden Satz wird unter den Voraussetzungen von **259-59** Hinreichendes für p angegeben, so dass $g\,(E|p.|a.)\,(p) = 0$.

259-61(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $g : \mathtt{cp}\, f \to A$.

$\rightarrow)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow)$ $p \neq a \in D$.

$\rightarrow)$ $E \in \mathtt{cp}\, \left(f \downharpoonright \{p,a\}^C\right)$.

$\rightarrow)$ q *Menge.*

$\rightarrow)$ $q \notin f(p)$.

Dann folgt "$g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0$".

Beweis **259-61**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "q Menge"
folgt via **0-22**: $q \in \mathcal{U}$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$g : \mathtt{cp}\, f \to A$",
aus $\rightarrow)$ "$f : D \to B$",
aus $\rightarrow)$ "$p \neq a \in D$" und
aus $\rightarrow)$ "$E \in \mathtt{cp}\, \left(f \downharpoonright \{p,a\}^C\right)$"
folgt via **259-59**: $\mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.)) = \mathcal{U}$.

1.3: Aus $\rightarrow)$ "$g : \mathtt{cp}\, f \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, g = \mathtt{cp}\, f$.

2.1: Aus 1.1 "$q \in \mathcal{U}$" und
aus $\rightarrow)$ "$q \notin f(p)$"
folgt via **0-10**: $\mathcal{U} \neq f(p)$.

2.2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.))$.

...

<u>Beweis **259-61**</u> ...

3.1: Aus 2.1“$\mathcal{U} \neq f(p)$”
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

3.2: Aus 2.2“$q \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.))$”
folgt via **259-56**: $g\,(E|p.|a.)\,(q) = g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$.

4: Aus 3.1“$p \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

5: Aus 4“p Menge” und
aus →) “q Menge”
folgt via **259-36**: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

6: Aus 5“$(p,q) \in \{(p,q)\}$”
folgt via **2-2**: $(p,q) \in \{(p,q)\} \cup E$.

7: Es gilt: $(0 \neq g\,(E|p.|a.)\,(q)) \vee (g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0)$.

`wfFallunterscheidung`

`7.1.Fall` $0 \neq g\,(E|p.|a.)\,(q)$.

8: Aus `7.1.Fall` und
aus 3.2
folgt: $0 \neq g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$.

9: Aus 8“$0 \neq g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$.

10: Aus 9“$\ldots \Omega \in g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$”
folgt via **259-6**: $\exists \Phi, \Psi : (\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E), \Psi) \in g$.

11.1: Aus 6“$(p,q) \in \{(p,q)\} \cup E$”
folgt via **2-2**: $(p,q) \in \{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E)$.

11.2: Aus 10“$\ldots (\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E), \Psi) \in g$”
folgt via **7-5**: $\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E) \in \mathsf{dom}\, g$.

12: Aus 11.2 und
aus 1.3
folgt: $\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E) \in \mathsf{cp}\, f$.

13: Aus 11.1“$(p,q) \in \{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E)$” und
aus 12“$\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E) \in \mathsf{cp}\, f$”
folgt via **259-60**: $q \in f(p)$.

14: Es gilt 13“$q \in f(p)$”.
Es gilt →) “$q \notin f(p)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0$.

□

259-62. In **259-61** wird von $p \neq a \in D$ ausgegangen. Dies ist unter anderem für Unmengen p der Fall. Ist p eine Unmenge so gilt in vielen Fällen an Hand vorliegenden Satzes für Mengen a wohl $0 \neq g\,(E|p.|a.)\,(q)$.

<u>**259-62(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $g : \mathtt{cp}\ f \to A$.

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow\!)$ $a \in D$.

$\rightarrow\!)$ p *Unmenge.*

$\rightarrow\!)$ $E \in \mathtt{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$.

$\rightarrow\!)$ q *Menge.*

Dann folgt "$g\,(E|p.|a.)\,(q) = g\,(E|a.) : f(a) \to A$".

<u>Beweis **259-62**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$a \in D$"
folgt via **ElementAxiom**: a Menge.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "p Unmenge"
folgt via **4-12**: $\{p, a\} = \{a\}$.

`1.3:` Aus $\rightarrow\!)$ "p Unmenge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Unmenge.

`1.4:` Aus $\rightarrow\!)$ "q Menge"
folgt via **0-22**: $q \in \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "p Unmenge" und
aus `1.1` "a Menge"
folgt via **0-1**: $p \neq a$.

`2.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$E \in \mathtt{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$" und
aus `1.2`
folgt: $E \in \mathtt{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$.

`2.3:` Aus `1.3` "(p, q) Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{(p, q)\} = 0$.

...

<u>Beweis</u> **259-62** ...

`3.1:` Aus →) “ $g : \mathsf{cp}\, f \to A$ ” ,
aus →) “ $f : D \to B$ ” ,
aus `2.1` “ $p \neq a$ ” ,
aus →) “ $a \in D$ ” und
aus →) “ $E \in \mathsf{cp}\, \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$ ”
folgt via **259-59**: $\mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.)) = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus →) “ $g : \mathsf{cp}\, f \to A$ ” ,
aus →) “ $f : D \to B$ ” ,
aus →) “ $a \in D$ ” und
aus `2.2` “ $E \in \mathsf{cp}\, \left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$ ”

folgt via **259-44**: $\boxed{g\,(E|a.) : f(a) \to A}$

`3.3:` $\{(p, q)\} \cup E \stackrel{2.3}{=} 0 \cup E \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} E$.

`4:` Aus `1.4` und
aus `3.1`
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.))$.

`5:` Aus `4` “ $q \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.))$ ”
folgt via **259-56**: $g\,(E|p.|a.)\,(q) = g\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.3` “ $\{(p, q)\} \cup E = \ldots = E$ ”

folgt: $\boxed{g\,(E|p.|a.)\,(q) = g\,(E|a.)}$

$\square$

259-63. In **259-61** wird von $p \neq a \in D$ ausgegangen. Dies ist unter anderem für Unmengen p der Fall für die oft $0 \neq g\,(E|p.|a.)\,(q)$ zu erwarten ist, siehe **259-61**. Ist hingegen p eine Menge mit $p \notin D$, so gilt für Mengen q stets $g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0$.

259-63(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $g : \mathtt{cp}\ f \to A$.

$\rightarrow)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow)$ $a \in D$.

$\rightarrow)$ p *Menge.*

$\rightarrow)$ $p \notin D$.

$\rightarrow)$ $E \in \mathtt{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$.

$\rightarrow)$ q *Menge.*

Dann folgt "$g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0$".

<u>Beweis **259-63**</u>

1.1: Aus →) "$a \in D$" und
aus →) "$p \notin D$"
folgt via **0-1**: $a \neq p$.

1.2: Aus →) "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

1.3: Aus →) "p Menge" und
aus →) "q Menge"
folgt via **259-36**: $(p, q) \in \{(p, q)\}$.

1.4: Aus →) "q Menge"
folgt via **0-22**: $q \in \mathcal{U}$.

1.5: Aus →) "$g : \mathsf{cp}\, f \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{cp}\, f$.

2.1: Aus →) "$p \notin D$" und
aus 1.2
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\, f$.

2.2: Aus 1.2 "$(p, q) \in \{(p, q)\}$"
folgt via **2-2**: $(p, q) \in \{(p, q)\} \cup E$.

2.3: Aus →) "$g : \mathsf{cp}\, f \to A$",
aus →) "$f : D \to B$",
aus 1.1 "$a \neq p$",
aus →) "$a \in D$" und
asu →) "$E \in \mathsf{cp}\, \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$"
folgt via **259-59**: $\mathsf{dom}\, (g\, (E|p.|a.)) = \mathcal{U}$.

3: Aus 1.4 und
aus 2.3
folgt: $q \in \mathsf{dom}\, (g\, (E|p.|a.))$.

4: Aus 3 "$q \in \mathsf{dom}\, (g\, (E|p.)\, a)$"
folgt via **259-56**: $g\, (E|p.|a.)\, (q) = g\, (\{(p, q)\} \cup E|x.)$.

...

<u>Beweis **259-63**</u> ...

`5:` Es gilt: $(0 \neq g\,(E|p.|a.)\,(q)) \vee (g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0)$.

`wfFallunterscheidung`

`5.1.Fall` $0 \neq g\,(E|p.|a.)\,(q)$.

`6:` Aus `5.1.Fall` und
aus `4`
folgt: $0 \neq g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$.

`7:` Aus `6`“$0 \neq g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$.

`8.1:` Aus `2.2`“$(pqp) \in \{(p,q)\} \cup E$”
folgt via **2-2**: $(p,q) \in \{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E)$.

`8.2:` Aus `7`“$\ldots \Omega \in g\,(\{(p,q)\} \cup E|a.)$”
folgt via **259-6**: $\exists \Phi, \Psi : (\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E), \Psi) \in g$.

`9:` Aus `8.1`“$\ldots (\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E), \Psi) \in g$”
folgt via **7-5**: $\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E) \in \mathsf{dom}\, g$.

`10:` Aus `9` und
aus `1.5`
folgt: $\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E) \in \mathsf{cp}\, f$.

`11:` Aus `8.1`“$(p,q) \in \{(E,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E)$” und
aus `10`“$\{(a,\Phi)\} \cup (\{(p,q)\} \cup E) \in \mathsf{cp}\, f$”
folgt via **259-60**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

`12:` Aus `11` und
aus `1.2`
folgt: $p \in D$.

`13:` Es gilt `12`“$p \in D$”.
Es gilt →)“$p \notin D$”.
Ex falso quodlibet folgt: $g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $g\,(E|p.|a.)\,(q) = 0$.

□

259-64. Es gilt unter anderem sowohl $\big(x \downharpoonleft \{y,z\}^C\big) = \big(\big(x \downharpoonleft \{y\}^C\big) \downharpoonleft \{z\}^C\big)$ als auch $\big(x \downharpoonleft \{y,z\}^C\big) = \big(\big(x \downharpoonleft \{z\}^C\big) \downharpoonleft \{y\}^C\big)$.

259-64(Satz)

a) $\big(x \downharpoonleft \{y,z\}^C\big) = \big(\big(x \downharpoonleft \{y\}^C\big) \downharpoonleft \{z\}^C\big)$.

b) $\big(x \downharpoonleft \{y,z\}^C\big) = \big(\big(x \downharpoonleft \{z\}^C\big) \downharpoonleft \{y\}^C\big)$.

Beweis **259-64** a)

1: $$\big(x \downharpoonleft \{y,z\}^C\big) \overset{\mathbf{258-10(Def)}}{=} x \cap (\{y,z\}^C \times \mathcal{U}) \overset{\mathbf{4-11}}{=} x \cap (((\{y\} \cup \{z\})^C) \times \mathcal{U})$$
$$\overset{\mathbf{DM}\cup\cap}{=} x \cap ((\{y\}^C \cap \{z\}^C) \times \mathcal{U}) \overset{\mathbf{62-1}}{=} x \cap ((\{y\}^C \times \mathcal{U}) \cap (\{z\}^C \times \mathcal{U}))$$
$$\overset{\mathbf{AG}\cap}{=} (x \cap (\{y\}^C \times \mathcal{U})) \cap (\{z\}^C \times \mathcal{U}) \overset{\mathbf{258-10(Def)}}{=} \big(x \downharpoonleft \{y\}^C\big) \cap (\{z\}^C \times \mathcal{U})$$
$$\overset{\mathbf{258-10(Def)}}{=} \big(\big(x \downharpoonleft \{y\}^C\big) \downharpoonleft \{z\}^C\big).$$

2: Aus 1 folgt: $$\big(x \downharpoonleft \{y,z\}^C\big) = \big(\big(x \downharpoonleft \{y\}^C\big) \downharpoonleft \{z\}^C\big).$$

b)

1: $$\big(x \downharpoonleft \{y,z\}^C\big) \overset{\mathbf{4-11}}{=} \big(x \downharpoonleft \{z,y\}^C\big) \overset{\text{a)}}{=} \big(\big(x \downharpoonleft \{z\}^C\big) \downharpoonleft \{y\}^C\big).$$

2: Aus 1 folgt: $$\big(x \downharpoonleft \{y,z\}^C\big) = \big(\big(x \downharpoonleft \{z\}^C\big) \downharpoonleft \{y\}^C\big).$$

□

259-65. In erwarteter Weise steht Vorliegendes zur Verfügung.

259-65(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow\!)$ $a \neq p \in D$.

$\rightarrow\!)$ $q \in f(p)$.

$\rightarrow\!)$ $E \in \mathsf{cp}\ \big(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\big)$.

Dann folgt "$\{(p, q)\} \cup E \in \mathsf{cp}\ \big(f \downharpoonleft \{a\}^C\big)$".

Beweis **259-65**

1.1: Via **259-64** gilt: $\big(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\big) = \big(\big(f \downharpoonleft \{a\}^C\big) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

1.3: Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\ \big(f \downharpoonleft \{a\}^C\big) = \{a\}^C \cap \mathsf{dom}\, f$.

1.4: Via **258-11** gilt: $\mathsf{ran}\ \big(f \downharpoonleft \{a\}^C\big) = f[\{a\}^C]$.

1.5: Aus $\rightarrow\!)$ "$a \neq p \in D$"
folgt via **5-15**: $p \in D \setminus \{a\}$.

2.1: Aus 1.2 "f Funktion…"
folgt via **258-11**: $\big(f \downharpoonleft \{a\}^C\big)$ Funktion.

2.2: Aus 1.2 "…$\mathsf{dom}\, f = D$…" und
aus 1.3
folgt: $\mathsf{dom}\ \big(f \downharpoonleft \{a\}^C\big) = \{a\}^C \cap D$.

2.3: Aus $\rightarrow\!)$ "$E \in \mathsf{cp}\ \big(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\big)$" und
aus 1.1
folgt: $E \in \mathsf{cp}\ \big(\big(f \downharpoonleft \{a\}^C\big) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$.

3: $\mathsf{dom}\ \big(f \downharpoonleft \{a\}^C\big) \overset{2.2}{=} \{a\}^C \cap D \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} D \cap \{a\}^C \overset{\mathbf{5-10}}{=} D \setminus \{a\}$.

…

<u>Beweis</u> **259-65** ...

4.1: Aus 1.5“$p \in D \setminus \{a\}$” und
aus 3“$\mathsf{dom}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right) = \ldots = D \setminus \{a\}$”
folgt: $p \in \mathsf{dom}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$.

4.2: Aus 2.1“$\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$ Funktion”,
aus 3“$\mathsf{dom}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right) = \ldots = D \setminus \{a\}$” und
aus 1.4“$\mathsf{ran}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right) = f[\{a\}^C]$”
folgt via **21-2**: $\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right) : D \setminus \{a\} \to f[\{a\}^C]$.

5: Aus 4.1“$p \in \mathsf{dom}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$”
folgt via **258-11**: $\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)(u) = f(p)$.

6: Aus 5 und
aus →) “$q \in f(p)$”
folgt: $q \in \left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)(p)$.

7: Aus 4.2“$\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right) : D \setminus \{a\} \to f[\{a\}^C]$”,
aus 1.5“$p \in D \setminus \{a\}$”,
aus 6“$q \in \left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)(p)$” und
aus 2.3“$E \in \mathsf{cp}\,\left(\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right) \downharpoonleft \{p\}^C\right)$”
folgt via **259-43**: $\{(p,q)\} \cup E \in \mathsf{cp}\,\left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$.

$\square$

259-66. Hier wird $g\,(E|p.|a.)\,(q)$ unter anderem unter den Voraussetzungen $p \neq a$ mit $p, a \in D$ untersucht. Für $q \in f(p)$ - der Fall $q \notin f(p)$ ist in **259-61** behandelt - gilt in vielen Fällen $0 \neq g\,(E|p.|a.)\,(p)$.

259-66(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $g : \mathtt{cp}\, f \to A$.

$\rightarrow$) $f : D \to B$.

$\rightarrow$) $p, a \in D$.

$\rightarrow$) $p \neq a$.

$\rightarrow$) $E \in \mathtt{cp}\,\left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$.

$\rightarrow$) $q \in f(p)$.

Dann folgt "$g\,(E|p.|a.)\,(q) = g\,(\{(p, q)\} \cup E|a.) : f(a) \to A$".

<u>Beweis **259-66**</u>

1.1: Aus →) “ $f : D \to B$ ” ,
aus →) “ $p \ldots \in D$ ” ,
aus →) “ $p \neq a$ ” ,
aus →) “ $q \in f(p)$ ” und
aus →) “ $E \in \mathsf{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$ ”
folgt via **259-65**: $\{(p, q)\} \cup E \in \mathsf{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$.

1.2: Aus →) “ $g : \mathsf{cp}\ f \to A$ ” ,
aus →) “ $f : D \to B$ ” ,
aus →) “ $p \neq a$ ” ,
aus →) “ $\ldots a \in D$ ” und
aus →) “ $E \in \mathsf{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{p, a\}^C\right)$ ”
folgt via **259-59**: $\mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.)) = \mathcal{U}$.

1.3: Aus →) “ $q \in f(p)$ ”
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

2.1: Aus →) “ $g : \mathsf{cp}\ f \to A$ ” ,
aus →) “ $f : D \to B$ ” ,
aus →) “ $\ldots a \in D$ ” und
aus 1.1 “ $\{(p, q)\} \cup E \in \mathsf{cp}\ \left(f \downharpoonleft \{a\}^C\right)$ ”
folgt via **259-44**: $\boxed{g\,(\{(p, q)\} \cup E|a.) : f(a) \to A}$

2.2: Aus 1.3 “ q Menge ”
folgt via **0-22**: $q \in \mathcal{U}$.

3: Aus 2.2 und
aus 1.2
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.))$.

4: Aus 3 “ $q \in \mathsf{dom}\,(g\,(E|p.|a.))$ ”
folgt via **259-56**: $\boxed{g\,(E|p.|a.)\,(q) = g\,(\{(p, q)\} \cup E|a.)}$

□

- **C. Bandelow**, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1981.
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **H.B. Mann & D.R. Whitney**, *On a test wheter one of two random variables is stochastically larger than the other*, Annals of mathematical statistics 18:50-60(1947).
- **R. Mlitz**, *Analysis 1.2.3*, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.