

Größeneffekt in der Elastizität – Experimentelle, analytische und numerische Untersuchungen

vorgelegt von
Dipl.-Ing.
Christian Liebold
geb. in Berlin

von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
-Dr.-Ing.-

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Utz von Wagner
Gutachter:	Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Jürgen Villain

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 02. April 2015

Berlin 2015

Technische Universität Berlin

Fakultät V, Verkehrs- und Maschinensysteme
Institut für Mechanik
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Skr. MS2
Einsteinufer 5
D-10587 Berlin



Promotionsausschuss

- Vorsitzender:** Prof. Dr.-Ing. Utz von Wagner
Technische Universität Berlin
Institut für Mechanik
Fachgebiet Mechatronische Maschinendynamik
Skr. MS2
Einsteinufer 5
D-10587 Berlin
- Erstgutachter:** Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Institut für Mechanik
Fachgebiet Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Skr. MS2
Einsteinufer 5
D-10587 Berlin
- Zweitgutachter:** Prof. Dr.-Ing. Jürgen Villain
Hochschule Augsburg
Fakultät für Elektrotechnik
Kompetenzzentrum Mechatronik
An der Hochschule 1
D-86161 Augsburg
- Eingereicht am:** 19. Februar 2015

*„Man muss sich durch die kleinen Gedanken, die einen ärgern,
immer wieder hindurchfinden zu den großen Gedanken,
die einen stärken.“*

Dietrich Bonhoeffer

Kontakt

Chroesen@Gmx.de

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin am Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie. Die erzielten Ergebnisse sind im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierten Projekts DFG MU 1752/33-1 erarbeitet worden. Für diese Aufgabe und Förderung sei an dieser Stelle herzlichst gedankt. Ich möchte hier die Chance ergreifen, den Personen zu danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ganz besonders herzlich möchte ich mich vor allem bei meinem Doktorvater, Herrn Prof. Wolfgang H. Müller, bedanken für die intensive, aufrichtige und stets fachkundige Betreuung.

Für die wertvollen Gespräche im Projektverlauf und für die Übernahme des zweiten Gutachtens danke ich herzlich Herrn Prof. Jürgen Villain und Herrn Prof. Utz von Wagner für die Übernahme des Vorsitzes.

Für den fachlichen Gedankenaustausch sei ein großer Dank ausgesprochen an die Herren Prof. Dr. Victor A. Eremeyev, Felix Reich, Emek Abali, Paul Lofink, Benjamin Schmorl, Aaron Lewis und Frau Andjela Vuckovic dos Reis. Für das zur Verfügung stellen von Proben danke ich sehr herzlich Herrn M. Sc. Markus Wöhrmann vom Fraunhofer Institut IZM Berlin, Herrn Dr. Francisco García-Moreno von der TU-Berlin und Herrn Uwe Brand von der Physikalisch Technischen Bundesanstalt PTB Braunschweig.

Ich möchte ebenso allen noch nicht genannten Kollegen und Mitarbeitern des Instituts meinen Dank aussprechen, vor allem: Arion Juritza, Mohamad Sbeiti, Bärbel Minx, Guido Harneit, Christina Völlmecke, Ralf Wille, Anton Köllner, Marco Lisicki, Andreas Lehn und Ronald Koll.

Nicht zuletzt bedanke ich mich liebevoll bei meiner ganzen Familie, insbesondere meiner Freundin und meinem Sohn für das entgegengebrachte Verständnis, die Unterstützung und die Ermutigung.

Berlin, im Dezember 2014

Christian Liebold

Kurzfassung

Eine fortlaufende Miniaturisierung mechanischer Bauteile erfordert verfeinerte Berechnungsmodelle und die Kenntnis darin enthaltener erweiterter Werkstoffparameter. Erreichen äußere Abmaße die Größenordnung der inneren Struktur des Materials, so kann der Einfluss des inneren Aufbaus durch geeignete Homogenisierungsverfahren berücksichtigt werden. Um dabei nicht die Vorteile der Kontinuität der Materie zu verlieren, werden sog. generalisierte Kontinuumsmodelle vorgestellt, die es ermöglichen, analytisch, als auch numerisch fließende Übergänge in der Abhängigkeit der Materialcharakteristika abzubilden. In Experimenten zur Biegesteifigkeit von Balkenstrukturen wird die Methode des Größeneffekts angewendet, wonach ausgewählte Materialkonstanten bei sich ändernden äußeren Abmaßen auf konventioneller Basis gemessen werden. Im Umfeld der linearen Elastizitätstheorie werden in dieser Arbeit die Elastizitäts-, bzw. Strukturmoduln für die Werkstoffe: SU-8 (ein epoxidbasierter negativ-Fotolack), Epoxidharz, einkristallines Silizium, amorphes Siliziumnitrid, verschiedene Aluminiumschäume und künstlich heterogenisiertes Aluminium in jeweils mindesten drei verschiedenen Probengrößen mit unterschiedlicher Balkenhöhe untersucht. Die in Frequenzanalysen und atomkraftmikroskopischen Versuchen teils deutlich auftretenden Größeneffekte im elastischen Bereich werden mit Hilfe erweiterter Kontinuumstheorien (Mikropolartheorie, Momentenspannungstheorie, Dehnungsgradiententheorie und Oberflächenelastizitätstheorie) modelliert und der jeweils höhere Materialparameter extrahiert. Mit Hilfe der Mikro-RAMANSpektroskopie werden die auftretenden Biegedehnungen in der Oberfläche von einkristallinem Silizium bestimmt und die Lasereindringtiefe über die größenabhängigen Messwerte quantifiziert. Die erweiterten Theorien sowie die experimentellen Apparaturen werden in ihrem Wesen besprochen und ihre Details in der Anwendung dargelegt. Im Ergebnis stehen mit der Größe abweichende Biegesteifigkeiten des SU-8s und Epoxidharzes um das 1,6- bzw. 2,1-fache im Vergleich zur konventionellen Theorie.

Abstract

A continual miniaturization of mechanical components requires refined mathematical models and the knowledge of the respective additional material parameters. If the outer dimensions arrive at the size of an internal inhomogeneity of the material, the influence of the internal structure has to be addressed by appropriate homogenization methods. Generalized continuum theories can be used in order not to lose the benefits of continuity of matter. This work will present analytical as well as numerical models, which achieve a smooth transition in the dependence of the material characteristics of different scales. The method of size effect is applied to bending rigidities of beam structures and selected higher order material constants are measured in own experiments at varying outer dimensions. In the context of linear elasticity theory, the elastic modulus of the materials: SU-8, epoxy, silicon, silicon nitride, aluminum foam and aluminum with artificially heterogeneities are investigated using at least three different sample sizes, respectively. The size effect, that significantly occurs in the analysis of flexural frequencies and in bending tests in an atomic force microscope, is modeled by advanced continuum theories (micropolar theory, couple stress theory, strain gradient theory and surface elasticity theory) and higher order material parameters are extracted. Mechanical strains, which occur in the surface of the bend silicon micro-cantilevers were determined with the help of micro-RAMANSpectroscopy and the laser penetration depth was quantified using the size-dependent behavior of the strain values. Higher order theories as well as experimental apparatuses will be discussed and details in their application will be presented. As a result, bending rigidities of SU-8 and epoxy increase by the factor of 1.6 and 2.1, respectively, while beam thicknesses decrease.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung.....	v
Kurzfassung	vii
Abstract	ix
Inhaltsverzeichnis	xi
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Fragestellung	2
1.2 Stand der Forschung	3
1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	7
2 Experimente zum Größeneffekt	9
2.1 Frequenzanalyse (FA)	9
2.1.1 Theoretische Grundlagen der <i>E</i> -Modulbestimmung mittels FA	11
2.1.2 FA an Aluminium mit künstlicher Heterogenität.....	14
2.1.3 FA an Aluminiumschäumen.....	16
2.2 Atomkraftmikroskopie (AFM)	19
2.2.1 Aufbau des laserreflektiven AFMs	20
2.2.2 Kraftkalibrierung der AFM-Nadel	22
2.2.3 Biegeexperimente an SU-8.....	25
2.2.4 Biegeexperimente an Epoxidharz.....	30
2.2.5 Biegeexperimente an Siliziumnitrid.....	34
2.3 Mikro-Ramanspektroskopie (MRS)	37
2.3.1 Aufbau des AFM-integrierten Ramanspektrometers	38
2.3.2 Theoretische Grundlagen der MRS.....	41
2.3.3 Biege- und Dehnungsmessungen an Silizium	47
3 Analytische Größeneffektmodellierung.....	53
3.1 Klassische Kontinuumsmechanik.....	53
3.1.1 Grundlagen der Kinematik	54
3.1.2 Bilanzgleichungen	58
3.1.3 Materialgesetze – Prinzipien der rationalen Mechanik ...	65
3.1.4 Balkenbiegung nach EULER und BERNOULLI	68

3.2	Grundzüge der mikropolaren Theorie (MP)	72
3.2.1	Erweiterung der Freiheitsgrade	74
3.2.2	Bilanzgleichungen der MP-Theorie	75
3.2.3	Zu konstitutiven Gleichungen in der MP-Theorie	81
3.3	Grundzüge der Dehnungsgradiententheorie (DG)	84
3.3.1	Herleitung konstitutiver Abhängigkeiten	85
3.3.2	Erweiterte Kinematik	87
3.3.3	Modifizierte Dehnungsgradiententheorie (MDG)	89
3.3.4	Balkenbiegung mit der MDG-Theorie	91
3.4	Die Momentenspannungstheorie als Sonderfall (MS)	96
3.4.1	Bilanzen in der MS-Theorie	97
3.4.2	Balkenbiegung mit der MS-Theorie	100
3.5	Grundzüge der Oberflächentheorie (OF)	102
3.5.1	Wichtige Größen der OF-Theorie	103
3.5.2	Balkenbiegung mit der OF-Theorie	106
4	Numerische Größeneffektmodellierung	111
4.1	FE-Variationsformulierung der Momentenspannungstheorie	112
4.2	3D-Implementierung der MS-Theorie im FEniCS-Projekt	115
4.3	Untersuchung des numerischen Modells	117
4.4	Vergleich numerischer und analytischer Größeneffektmodellierung	125
5	Auswertung und Diskussion	127
5.1	Numerische Methoden der Koeffizientenanpassung	130
5.2	Bestimmung erweiterter Materialparameter der Frequenzmessungen	132
5.2.1	Aluminium mit künstlicher Heterogenität	132
5.2.2	Aluminiumschäume	134
5.3	Bestimmung erweiterter Materialparameter der AFM- Messungen	135
5.3.1	SU-8 Polymer	136
5.3.2	Epoxidharz	138
5.3.3	Einkristallines Silizium	139
5.3.4	Amorphes Siliziumnitrid	142
5.4	Diskussion der Ergebnisse und Ausblick	143

Anhang	149
Abkürzungsverzeichnis.....	155
Symbolverzeichnis	158
Abbildungsverzeichnis	163
Tabellenverzeichnis	168
Literaturverzeichnis	169

1 Einleitung

Die mechanische Charakterisierung von Werkstoffen ist eminent wichtig beim Entwerfen und Modellieren von mechanischen Bauteilen oder auch bei ihrer Beurteilung, z. B. hinsichtlich ihrer Lebensdauer. In Experimenten konnte gezeigt werden, dass das Verhalten von Werkstoffen auf verschiedenen Größenebenen von den Vorhersagen der klassischen Kontinuumsmechanik abweichen kann. Die einheitliche mechanische Charakterisierung von Materialien auf verschiedenen Größenebenen ist ein ausgesprochenes Ziel der generalisierten Kontinua. „*Is it possible to construct continuum theories that can predict physical phenomena on the atomic, molecular, or nano scales?*” (A. C. ERINGEN, 2009, im Vorwort zu „Mechanics of Generalized Continua“, [61]). Diese Fragestellung beinhaltet einerseits das Aufstellen als auch das Verifizieren neuartiger Kontinuumstheorien, welche benötigt werden, um experimentelle Ergebnisse zu beschreiben, die nicht durch die konventionelle Kontinuumstheorie abgedeckt werden können. Zu beidem, dem Aufstellen und dem Verifizieren erweiterter Theorien, soll mit dieser Arbeit ein Beitrag geleistet werden. Zu den angesprochenen „physikalischen Phänomenen“ zählt beispielsweise der Größeneffekt in der Elastizität und in der Plastizität, die Bildung von Scherbändern, die Spannungsberechnung an Rissspitzen, als auch die Verzweigung der Dispersionsrelationen bei der Wellenausbreitung in Festkörpern (siehe [104]). Viele Experimente aus dem späten 20. Jahrhundert, einige von ihnen werden im Abschnitt 1.2 herausgestellt, belegen diese Phänomene.

Der Begriff *Größeneffekt* bezeichnet ein von der konventionellen Kontinuums- theorie abweichendes mechanisches Verhalten von Körpern unter sich ändernden äußeren Abmaßen, auch wenn diese unter Einhaltung von Ähnlichkeitskenn- werten (wie der CAUCHY-Zahl) skalierten wurden. Historisch belegte Unter- suchungen dazu reichen bis in das 15. Jahrhundert zu LEONARDO DA VINCI zurück, der bereits den Größeneffekt auf die Festigkeit von Seilen diskutierte, welche in seinen Versuchen eine Abhängigkeit von der Seillänge ergaben. Das mechanische Verhalten eines Werkstoffs kann mit charakteristischen Größen der Elastizität sowie der Plastizität beschrieben werden und muss zur Beschreibung des Größeneffekts auf verschiedenen Skalen untersucht werden. Geeignete höhere kontinuumstheoretische Grundlagen wurden in der Mitte des 20. Jahrhunderts vorgestellt, initiiert durch das Werk der Brüder E. und F. COSSERAT (1909) [17] vor nun mehr über einhundert Jahren. Der Anwendungsbereich dieser Theorien

und das Wissen um den Größeneffekt umfasst diverse Größenordnungen. Von der Beschreibung von Mauerwerk (der Größenordnung einiger Meter) [9], [60], [77], über Metallschäume und granulare Werkstoffe, wie z. B. Aluminiumschaum und Beton (in der Größenordnung Zentimeter und Millimeter) [25] und [99], weiter über Polymere und Metalle (der Größenordnung einiger Mikrometer) [52], bis hin zu Halbleitern und besonderen Werkstoffen, wie CNTs (Carbon Nanotubes, in der Größenordnung Mikro- bis Nanometer) [85] und [86] können erweiterte Kontinuumstheorien angewendet werden. Als ein besonders wichtiger Bereich für das Miteinbeziehen des Größeneffekts muss die Mikro- und Nanosystemtechnik herausgestellt werden, da der Entwurf von Bauteilen für mikro- und nanoelektromechanische Systeme (MEMS/NEMS) der besonderen Kenntnis der Materialcharakteristika auf der Mikro- und Nanoskala bedarf, in der nach heutigem Kenntnisstand für diverse Werkstoffe ein Größeneffekt zu vermuten ist.

1.1 Motivation und Fragestellung

Die Kenntnis um erweiterte Kontinuumstheorien wird in der allgemeinen universitären Ausbildung nur randständig vermittelt und findet in der experimentellen Forschung wenig Gewicht. Demgegenüber existiert eine Vielzahl von Veröffentlichungen hinsichtlich rein theoretischer Ausarbeitungen innerhalb diverser höherer Theorien. Es liegen nur sehr wenige experimentelle Daten vor, die auf einen Größeneffekt schließen lassen oder interpretatorisch mit dem Größeneffekt in Verbindung gebracht werden. Die Motivation dieser Arbeit ist darin begründet, durch eigene Experimente die Datensätze zur Quantifizierung des Größeneffekts der Elastizität zu erweitern, verschiedene höhere Kontinuumstheorien in ihrem Wesen zu untersuchen und darzulegen, und für eine einfache ingenieurtechnische Problemstellung der Elastostatik eine analytische sowie numerische Lösung zu erarbeiten. Durch diese Herangehensweise soll eine Basis geschaffen werden, von der aus es ermöglicht werden soll, durch gezielte, geeignete Experimente weitere Indizien für die Anwendbarkeit der jeweiligen höheren Theorie auf verschiedene Materialien, Materialklassen, Größenordnungen oder Verhältnisse zur Mikrostruktur zu erlangen.

Die vorhandene messtechnische Ausrüstung, auf der der eigene experimentelle Teil dieser Arbeit beruht, kann bevorzugt für Experimente in der Elastizität, d. h.

mit reversibler und kleiner Verformung, genutzt werden. Dabei stehen dieser Arbeit drei Apparaturen zur Verfügung. Unter anderem kann eine Frequenzmess-einrichtung zur Aufnahme von Eigenfrequenzen elastischer Biegung, ein laser-reflektives Atomkraftmikroskop (AFM), welches es erlaubt, Kräfte im Bereich weniger Mikronewton (μN) punktgenau zu applizieren und zeitgleich die dortige Verformung in der Kraftwirkungsrichtung zu messen und ein daran ange-schlossenes Mikro-RAMANSpektroskop, mit dem einachsige Dehnungszustände in Halbleitermaterialien mit einer Ortsauflösung von ca. einem Mikrometer gemes-sen werden können, genutzt werden.

Die sich daraus ergebenden Fragestellungen dieser Arbeit sind:

- Lässt sich für ausgewählte Materialien und mit der vorhandenen Messtechnik ein Größeneffekt bestimmen?
- Was sind die in Frage kommenden erweiterten Kontinuumstheorien, woraus genau besteht die Erweiterung und was sind geeignete Vereinfachungen dieser?
- Wie lässt sich ein konkretes Randwertproblem mit den höheren Theorien analytisch oder numerisch lösen?
- Wie kann die Materialparameterbestimmung durchgeführt werden und welche Werte liefert sie für die ausgewählten Materialien?

1.2 Stand der Forschung

Wie in der Einleitung angeklungen ist, berufen sich viele Literaturquellen der Entstehungsgeschichte der generalisierten Kontinua auf das Initialwerk von E. und F. COSSERAT (1909) [17], in dem erstmalig ein polarer Charakter materieller Punkte dargestellt wurde. Erst Jahre später rekapitulierte die Fachwelt diese Idee und verweist auf Fachbeiträge wie die von GÜNTHER (1958) [42] und SCHAEFER (1967) [88]. Die linearisierte COSSERAT-Theorie wurde u. a. geprägt durch ERINGEN ([30], [29], [31], [32] und [33]), TOUPIN (1962) [100], KOITER (1964) [49], MINDLIN und TIERSTEN (1962) [64], MINDLIN (1964) [65], MINDLIN und ESHEL (1968) [66], NOWACKI (1972) [73], um nur einige zu nennen. Es gibt darüber hinaus eine Vielzahl anderer Autoren, die sich mit diesem Themengebiet

beschäftigten. Eine tiefgründigere bibliographische Übersicht der Entstehungsgeschichte generalisierter Kontinuums-theorien ist in einer Arbeit von den Brüdern ALTENBACH & ALTENBACH und EREMEYEV (2010) [2] enthalten.

BECKER und BÜRGER (1975) [6] zufolge seien höhere Kontinuums-theorien physikalisch begründbar mit „einer erhöhten Reichweite der Wechselwirkungskräfte“ und anwendbar auf „Materialien mit körniger oder faseriger Mikrostruktur“. GREVE (2003) [41] führt den EINSTEIN-DE-HAAS Effekt an, um für „para- und ferromagnetische Materialien im Magnetfeld“ den Einfluss intrinsischer Rotationen auf die Bewegung des Gesamtkörpers zu zeigen.

Beim Studium dieser Theorien sind zwei Strömungen ersichtlich. Die Sichtweise der *mikromorphen* Theorie betrachtet allgemein deformierbare materielle Partikel, d. h. eine Art Unterkontinuum zur bestehenden translatorischen Beschreibung. In der allgemeinen *Dehnungsgradiententheorie* hingegen, werden höhere Gradienten des weiterhin translatorischen Kontinuums gebildet, interpretiert und in der Dehnungsenergie gewichtet. Beide Sichtweisen lassen sich argumentativ vereinfachen und in Teilen ineinander überführen (siehe Übersicht, Abbildung 1.1). Eine Reduzierung der mikromorphen-, ist die mikropolare Theorie. Eine Simplifizierung der Dehnungsgradiententheorie ist die modifizierte Dehnungsgradiententheorie.

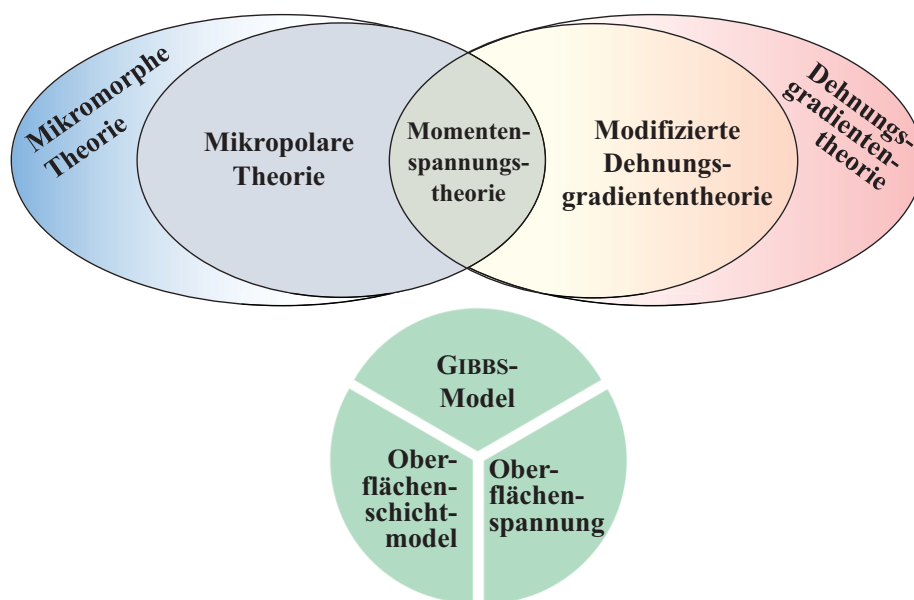


Abbildung 1.1: Hierarchische Übersicht ausgewählter erweiterter Kontinuums-theorien zur Modellierung des Größeneffekts der Elastizität.

Zusätzlich zu den genannten generalisierten Kontinuumstheorien, soll die phänomenologisch motivierte allgemeine Oberflächentheorie hier zum Kreis der *erweiterten Kontinuumstheorien* zählen. Die Mechanik materieller Flächen ist zurückzuführen auf die Werke von u. a. SHUTTLEWORTH (1950) [91], OROWAN (1970) [75] und GURTIN & MURDOCH (1975) [44] und basiert auf dem Grundgedanken, dass das Materialverhalten der den Festkörper umgebenden Oberfläche von dem seines Volumens zu separieren ist.

Neben den hier genannten Theorien existieren weitere kontinuumsmechanische Modelle, die es erlauben, einen Größeneffekt zu beschreiben. Dazu zählen z. B. die *nicht-lokale Kontinuumstheorie* (engl. „non-local continuum theory“) sowie das Modell der *fraktionellen Ortsableitungen* (engl. „fractional calculus“).

Es existieren einige experimentelle Belege zum Größeneffekt, welcher sowohl im plastischen, als auch im elastischen Bereich auftreten kann. Viele dieser Daten zeigen eine starke Ausprägung der Größenabhängigkeit bei der Messung plastischer Koeffizienten (wie z.B. der Bruchspannung oder der Torsionsverfestigung) an Metallen oder Polymeren, [34], [59], [81], [97], [93], [94], [106], [40] oder [43]. So beobachteten FLECK et al. (1994) [34] einen Anstieg der Torsionsverfestigung dünner Kupferdrähte um den Faktor drei, während die Durchmesser der Drähte von 170 μm auf 12 μm verringert wurden. MA et al. (1995) beobachteten einen Anstieg der Härte bei Nanoindentationsprüfungen an monokristallinem Silber um einen Faktor von mehr als zwei, als die Eindringtiefen des Indenters von 2,0 μm auf 0,1 μm verringert wurden. In VILLAIN et al. (2002) [106] und SIMONS et al. (2004 [94], 2006 [93]) ist gezeigt, dass in Zugversuchen an Walzkupfer eine Abnahme der Bruchdehnung von 20 % auf 0,2–0,5 % gemessen werden konnte, als die Dicke der Kupferfolie von 250 μm auf 10 μm abnahm.

Für einen Größeneffekt im elastischen Bereich sind experimentelle Daten rar. Die in dieser Arbeit recherchierten inneren Längenparameter oder erweiterten Materialkoeffizienten sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst. Eine oft verwiesene Quelle ist das Ergebnis der elastostatischen Biegeversuche von CHONG [16] und LAM et al. [52] aus den Jahren 2002 und 2003, die mit einem Nanoindenter an miniaturisierten Balken aus Epoxid eine ca. 2,4-fach erhöhte Biegesteifigkeit nachweisen konnten, wenn die Balkenhöhe von 120 μm auf 20 μm reduziert wird. Ähnliche Abweichungen in den elastischen Biegesteifigkeiten stellten bereits

CUENOT et al. (2000) [18] und MCFARLAND et al. (2005) [62] an Mikrobalken aus Polypropylen fest.

Parameter erweiterter Theorien	Material	Theorie	Messmethode bzw. Modellansatz	Referenz
$\ell=9,4 \mu\text{m}$	Epoxid	MS	Biegung im Nano-indenter mit $\nu=0$ am EULER-BERNOULLI (EB) Balkenmodell	[16] ¹ , [52] ¹
$\ell=17,6 \mu\text{m}$	Epoxid	MS	Biegung mit Querkontraktionskopplung am O'MALLEY-Balkenmodell	[16], [52]
$\ell=3,0 \mu\text{m}$	Kupfer	MDG	Torsion	[110]
$\ell=7,0 \text{ nm}$	Zinkoxid	MDG	Torsion	[96]
$\ell=57,0 \text{ nm}$	Polypyrrole Nanoröhrchen	MDG	Biegung	[18]
$E_b=169 \text{ GPa}$ $E^S=-12,14 \text{ N/m}$	einkristall. Silizium	OF	Biegung	[85] ¹
$E^S=5,8 \text{ N/m}$	Silber	OF	Biegung am AFM	[47] ¹
$E=72,37 \text{ GPa}$ $\ell=9,61 \text{ nm}$	Silber	MS	Biegung ($\nu=0$, EB)	[47] ¹
$\ell=3,2 \text{ nm}$	Einwändige Kohlenstoff Nanoröhrchen (CNT)	DG	Biegung am AFM	[47], [86]
$E=119,5 \text{ GPa}$ $\ell=3,5 \text{ nm}$	CNT	MS	Biegung am AFM ($\nu=0$, EB)	[86] ¹
$\ell=5,7 \text{ nm}$	Mehrwändige Kohlenstoff Nanoröhrchen	DG	Biegung am AFM	[47], [87]
$E=630 \text{ GPa}$ $\ell=1,4 \text{ nm}$	Mehrwändige CNT	MS	Biegung am AFM ($\nu=0$, EB)	[87] ¹
$\ell=9,3 \text{ nm}$	Mehrwändige CNT	DG	Elektrostatische Biegung	[47], [80]
$E=15,0 \text{ GPa}$ $\ell=17,7 \text{ nm}$	Blei	MS	Biegung am AFM ($\nu=0$, EB)	[19] ¹

Tabelle 1.1: Literaturquellen zu experimentellen Daten¹ des Größeneffekts in der Elastizität.

¹ Die Literaturquelle beinhaltet in Teilen experimentelle Daten, mit denen der jeweilige erweiterte Koeffizient, mit den in dieser Arbeit vorgestellten Modellen extrahiert wurde.

Einige Experimentatoren messen eine direkte Größenabhängigkeit des E -Moduls, und zwar beispielsweise an Kohlenstoffnanoröhrchen (CNTs) [18], Silber und Blei [19], Kupfer [110] und Zinkoxid [96], [20]. Tabelle 1.1 ist eine Auflistung recherchierter oder extrahierter höherer Materialparameter der Elastizität.

1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, erweiterte Parameter der linearen, isotropen Elastizität für künstlich heterogenisiertes Aluminium, verschiedene Aluminiumschäume, das Polymer SU-8, Epoxid, einkristallines Silizium und Siliziumnitrid, zu messen. Die jeweilige Messmethode soll erläutert und die theoretischen Herleitungsschritte für die Parameterbestimmung samt ihrer Annahmen detailliert dargelegt werden. An einkristallinem Silizium soll zudem die Auswirkung der Verringerung der äußeren Abmaße auf die Messung von Dehnungen untersucht werden.

Der Aufbau dieser Arbeit gliedert sich in die Bereiche der experimentellen, analytischen und numerischen Untersuchungen. Die experimentellen Techniken umfassen Frequenzanalysen von Biegeschwingungen (Abschnitt 2.1), die Biegung von Mikrobalken im Atomkraftmikroskop (Abschnitt 2.2), als auch die Mikro-RAMANSpektroskopie (Abschnitt 2.3) zur Bestimmung von Dehnungen an geeigneten Probekörpern ausgewählter Materialien. Der analytische Bereich umfasst die Beschreibung der Grundlagen der klassischen und der erweiterten Kontinuums-theorien bis hin zur Auswertung des EULER-BERNOULLISchen Verschiebungsfeldansatzes (EB) für die modifizierte Dehnungsgradiententheorie (Abschnitt 3.3.4), die Momentenspannungstheorie (Abschnitt 3.4.2) und die Oberflächenelastizitätstheorie (Abschnitt 3.5.2). Im Bereich der numerischen Größeneffektmodellierung (Kapitel 4) wird die Variationsformulierung der Momentenspannungstheorie aufgestellt, am konkreten Beispiel rechnergestützt gelöst und die Ergebnisse mit der analytischen Lösung verglichen. Im Kapitel der Auswertung (Kapitel 5) werden nach den Erläuterungen zur numerischen Koeffizientenanpassung die Resultate der Messungen präsentiert und diskutiert.

2 Experimente zum Größeneffekt

In der linearen Elastizitätstheorie isotroper Werkstoffe ist der Elastizitätsmodul eine zentrale charakteristische Größe, die i. A. über alle Skalen hinweg konstant ist und durch standardisierte Messverfahren, wie dem einachsigen Zugversuch, Eigenschwingungsanalysen oder der einfachen Balkenbiegung quantifiziert werden kann. Von einem Größeneffekt kann gesprochen werden, wenn der auf einer konventionellen Theorie basierend gemessene Elastizitätsmodul von den äußeren Abmaßen des Körpers abhängt. Aus diesem Grund konzentrieren sich die folgenden experimentellen Analysen auf die Bestimmung des E -Moduls unter konventioneller Herangehensweise. Zusätzlich dazu werden sensible äußere Abmaße wie die Höhe (in Teilen auch die Länge) eines Biegebalkens sukzessive reduziert, um Ergebnisse verschiedener Größenskalen zu erhalten. Diese Vorgehensweise wurde in LAKES (1995) [51] als eine experimentelle „*Methode des Größeneffekts*“ beschrieben, die es ermöglicht, mit Hilfe einer geeigneten Koeffizientenanpassungsmethode die Materialparameter der erweiterten Theorien zu bestimmen. Im Folgenden werden die experimentellen Messapparaturen, die untersuchten Materialien, die Prozesse der Probenherstellung und die reinen Messergebnisse dargelegt, um für die späteren Auswertungen in den besagten Theoriemodellen im Kapitel 5 zur Verfügung zu stehen.

2.1 Frequenzanalyse (FA)

Im Umfeld der einfachen Elastizitätstheorie kann der E -Modul anhand eines stabförmigen Probenkörpers aus der Kenntnis der Eigenfrequenzen seiner Biegeschwingungen berechnet werden (vgl. Normenwerk: DIN-1048, ASTM C-1259). Der Formalismus und die darin enthaltenen Annahmen dazu sollen im anschließenden Kapitel hergeleitet werden. Um Frequenzen, speziell die erste Eigenfrequenz (Grundschiwingung) einer stabförmigen Probe zu messen, muss diese geeignet gelagert und zum Schwingen angeregt werden. Da die in dieser Arbeit untersuchten Probenlängen im Bereich zwischen 50–800 mm liegen, kann die Lagerung auf handelsüblichen Schaumstoffträgern erfolgen (siehe Abbildung 2.2). Besondere Lagerungs-, Anregungs- und Messpunkte für die Grundschiwingung ergeben sich in den Knotenpunkten der Biegelinie und den Punkten ihrer

größten Amplitude (siehe Abbildung 2.1). Die Anregung erfolgt über das Anschlagen der Probe mittels sog. „Hämmer“. Dies bezeichnet eine, am Ende eines längeren Stabes angebrachte Masse, welche aufgrund verschiedener Materialauswahlen verschiedene Anregungsfrequenzen in den Probenkörper eintragen kann.

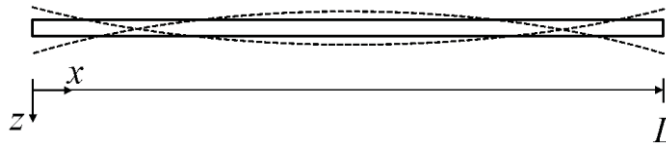


Abbildung 2.1: Darstellung der Biegelinie der Grundschiwingung einer stabförmigen Probe der Länge L .

Die Messaufnahme erfolgt per Mikrofon. D. h., die durch die Anregung des Stabes vom Stab selbst ausgesendete Schallwelle wird nach möglichst kurzer Distanz in ein analoges elektrisches Signal umgewandelt. Dieses Signal wird durch die im Messgerät der Firma Grindosonic[®] von Lemmens N.V., enthaltene Messelektronik analysiert. Innerhalb der ersten Sekunde nach dem Anschlag der Probe zeigt das Gerät einen Frequenzwert an. Dabei filtert die vorhandene Messelektronik nach der stärksten Eigenfrequenz. Zusätzlich zum Grindosonic[®]-Gerät wurde im Messaufbau ein herkömmliches „Audio-Analyzer“-Programm auf einem Rechner parallel hinzugeschaltet, um mit Hilfe der Funktion Fast-Fourier-Transformation (FFT) das betreffende Frequenzspektrum zu überblicken. Im Frequenzspektrum des Messsignals können mehrere Eigenfrequenzen unterschiedlicher Amplitude abgebildet werden, wodurch die Entscheidung zur Auswahl des Anschlags-hammers sowie der ersten Eigenfrequenz besser getroffen werden konnte.

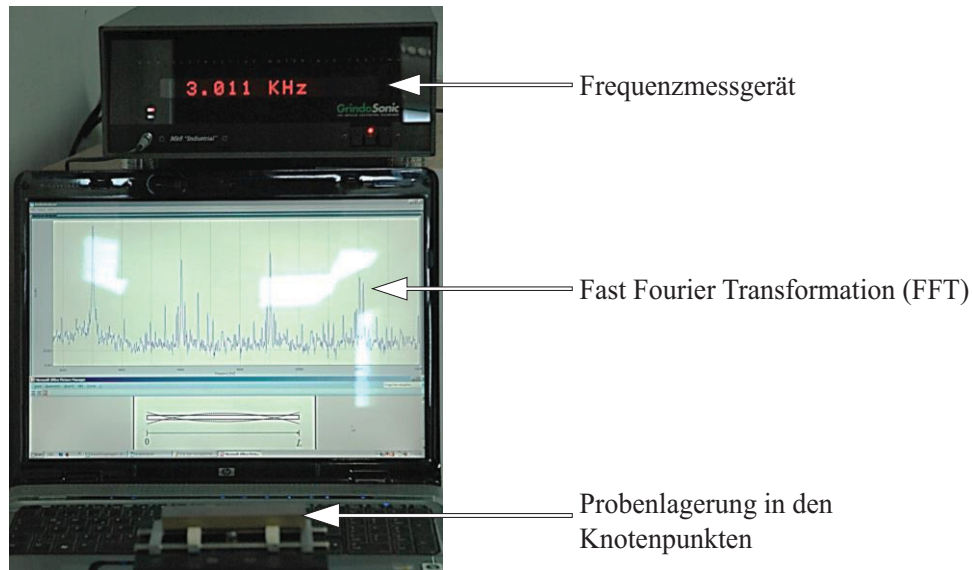


Abbildung 2.2: Darstellung des gesamten Messaufbaus zur Frequenzanalyse.

2.1.1 Theoretische Grundlagen der *E*-Modulbestimmung mittels FA

Dieses Kapitel stellt den skalaren Zusammenhang zwischen der Frequenz der Grundschiwingung einer stabförmigen Probe und dem *E*-Modul des Probenmaterials bereit. Als Ausgangspunkt der Herleitung dient die partielle Biegedifferentialgleichung für Balkenschwingungen nach EULER und BERNOULLI:

$$\ddot{w}(x) + \underbrace{\frac{EI}{\rho A}}_{c^2} w^{IV}(x) = 0, \quad (2.1)$$

worin $w(x)$ die Auslenkung der Biegelinie an der Stelle x in die Richtung z darstellt (vgl. Abbildung 2.1). Deren zeitliche Ableitung soll mit Punkten und deren Ableitung in x -Richtung mit römischen Ziffern (oder bis zur dritten Ableitung mit Strichen) gekennzeichnet werden. E bezeichnet den Elastizitätsmodul, I das Flächenträgheitsmoment, ρ die Dichte und A die Querschnittsfläche des betrachteten Stabes, wobei die eben genannten Größen in c^2 substituiert werden sollen. Eine analytische Lösung kann über das sog. Separationsverfahren nach BERNOULLI: $w(x) = T(t) \cdot X(x)$ herbeigeführt werden (vgl. MÜLLER und FERBER, 2005 [68], S. 330). Damit ergibt sich:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -c^2 \frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = -\omega^2 \quad \Rightarrow \quad X^{IV}(x) - \frac{\omega^2}{c^2} X(x) = 0, \quad (2.2)$$

wobei die eigentliche partielle Differentialgleichung (2.1) zerlegt wird in einen zeitlichen- und einen örtlichen Anteil. Der mathematische Charakter der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.2)₂ (dem örtlichen Anteil) beschreibt eine ungedämpfte Schwingungsgleichung mit ω als Schwingungskonstante. Die allgemeine Lösung samt ihrer nötigen Ableitungen lautet:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_3 \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_4 \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) \\ X'(x) &= -A_1 \sqrt{\frac{\omega}{c}} \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_2 \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_3 \sqrt{\frac{\omega}{c}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_4 \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) \\ X''(x) &= -A_1 \frac{\omega}{c} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) - A_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_3 \frac{\omega}{c} \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_4 \frac{\omega}{c} \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) \\ X'''(x) &= A_1 \sqrt{\frac{\omega}{c}}^3 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) - A_2 \sqrt{\frac{\omega}{c}}^3 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_3 \sqrt{\frac{\omega}{c}}^3 \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_4 \sqrt{\frac{\omega}{c}}^3 \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) \\ X^{IV}(x) &= A_1 \frac{\omega^2}{c^2} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_2 \frac{\omega^2}{c^2} \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_3 \frac{\omega^2}{c^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right) + A_4 \frac{\omega^2}{c^2} \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}}x\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Konstanten $A_1, \dots, A_4$ werden über die vier Randbedingungen: $w''(0, t) = 0$, $w'''(0, t) = 0$, $w''(L, t) = 0$ und $w'''(L, t) = 0$ vollständig eliminiert und es bleibt die sog. Frequenzfunktion im Ergebnis:

$$0 = \cosh \lambda_n - \cos \lambda_n - (\sin \lambda_n + \sinh \lambda_n) \frac{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}, \quad \text{mit } \lambda_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{c}} L. \quad (2.4)$$

Der Index n wird eingeführt, da die erhaltene Funktion aufgrund ihrer trigonometrischen Anteile unendlich viele verschiedene Lösungen hat. Mit Hilfe spezieller Lösungen dieser Gleichung kann bei bekannten Materialparametern und Geometriedaten die spezielle Eigenfrequenz berechnet werden (daher die Begrifflichkeit „Frequenzfunktion“). Kennt man einen der Parameter nicht, dafür aber die Frequenz, so kann man durch leichtes algebraisches Umstellen den unbekannten Parameter erhalten. Die Gleichung (2.4) wird zunächst mittels der Software Mathematica[®] auf numerische Lösungen untersucht, wobei diejenigen λ_n -Werte gefunden werden sollen, die die Gleichung erfüllen (z. B. $\lambda_1 = 4,7300$, $\lambda_2 = 7,8532$, usw.). Zur besseren Veranschaulichung ist die Gleichung (2.4) in der

Abbildung 2.3 über einige λ_n -Werte geplottet, wobei alle Nullstellen Lösungen der Gleichung sind.

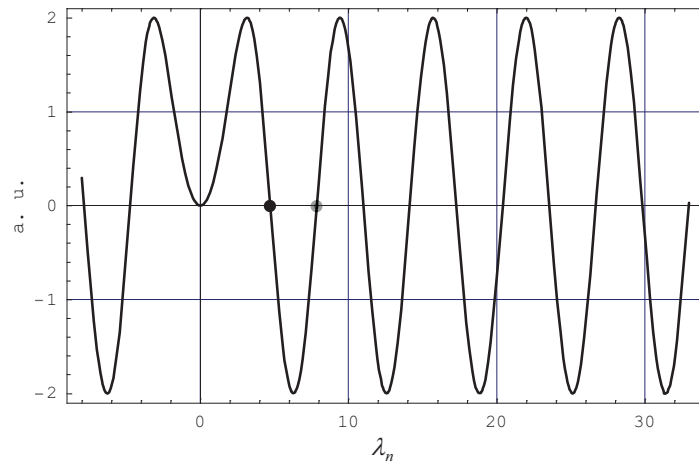


Abbildung 2.3: Plot der Frequenzfunktion über ein erwähltes λ_n -Intervall in willkürlicher Einheit (a. u.).

Drückt man die Kreisfrequenz ω_n mit $2\pi f_n$ aus, wobei f_n die Eigenfrequenzen sind und geht von einem Rechtecksquerschnitt ($I=BH^3/12$ und $A=BH$) aus, wobei B für die Breite und H für die Höhe des Balkens stehen, so erhält man:

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2\pi f_n}{EI}} L \quad \Rightarrow \quad E = \frac{48\pi^2}{\lambda_n^4} \frac{\rho L^4}{H^2} f_n^2. \quad (2.5)$$

Durch gezieltes Messen der Grundschiwingung ist diese Formel vereinfachbar zu:

$$E = 0.94645 \frac{\rho L^4}{H^2} f_1^2. \quad (2.6)$$

Diese Gleichung beruht vollständig auf den Annahmen der EULER-BERNOULLI Biegetheorie, welche ihre Gültigkeit ab einem Längen- zu Höhenverhältnis von $L/H \geq 20$ hat. Unterschreitet man dieses Verhältnis in der Probengeometrie, so erzielt man genauere Ergebnisse unter Anwendung der nächst höheren Balkentheorie, z. B. der Balkentheorie nach TIMOSHENKO (vgl. [89]). Um dennoch die Formel (2.6) über ihre Grenzen hinaus anwenden zu können, ist in den Normenwerken DIN-1048 oder ASTM C-1259 ein Korrekturfaktor hinterlegt,

welcher vom Höhen- zu Längenverhältnis H/L und der Querkontraktionszahl ν abhängig ist. In der Veröffentlichung [83] ist der Korrekturfaktor K mit:

$$K = 1 + 6,585 \left(1 + 0,0752\nu + 0,8109\nu^2 \right) \left(\frac{H}{L} \right)^2 - 0,868 \left(\frac{H}{L} \right)^4 - \left(\frac{8,34(1 + 0,2023\nu + 2,173\nu^2)(H/L)^4}{1 + 6,338(1 + 0,1408\nu + 1,536\nu^2)(H/L)^2} \right). \quad (2.7)$$

angegeben und wird im Folgenden Beachtung finden.

2.1.2 FA an Aluminium mit künstlicher Heterogenität

Um den Einfluss einer inneren Struktur auf die mechanischen Eigenschaften bei sich ändernder Größe zu erfahren, wurden aus drei unterschiedlich dicken Aluminiumstangen sechs verschieden lange Balken gesägt (siehe Tabelle 2.1). Von jeweils zwei gleich langen Balken wurde einer mit durchgängigen Löchern mit der in Abbildung 2.4_b) präzisierten Anordnung versehen (vgl. [10]). Eine EDX-Analyse in den Laboren des Kompetenzzentrums für Mechatronik der Hochschule Augsburg ergab, dass es sich bei dem verwendeten Ausgangsmaterial um die Aluminiumlegierung AlMgSi0,5 mit der Bezeichnung EN AW-6060 mit der Werkstoffnummer 3.3206 handelte, wobei die durchschnittliche prozentuale Verteilung der Bestandteile Aluminium, Magnesium und Silizium bei 0.38 %, 99.14 % und 0.48 % lag.

	Referenzbalken			Lochbalken		
Länge: in mm	123	83,5	46	123	83,5	46
Höhe=Breite: in mm	9,57	6,61	3,48	9,52	6,61	3,37
Dichte: in kg/m ³	2700	2680	2620	1760	1780	1900
Frequenz: in Hz	3208	4760	8190	3091	4822	8615
E-Modul in GPa: (inkl. 4 % Korrektur)	68,35	66,99	66,25	-	-	-
Strukturmodul in GPa: (inkl. 4 % Korrektur)	-	-	-	41,76	45,36	55,39

Tabelle 2.1: Daten zur Untersuchungsreihe der Balken mit künstlicher Heterogenität.

Insgesamt entstanden so drei Balken mit einer künstlichen Heterogenität (siehe Abbildung 2.4_a) und parallel drei Referenzbalken aus dem Vollmaterial Aluminium. Künstlich heterogen bedeutet, dass dem zuvor homogenen Vollmaterial künstlich und in definierter Anordnung Material entnommen (herausgebohrt) wurde. Das auf diese Weise veränderte Material mit innerer Struktur soll später seinerseits als homogenes Material mit den erweiterten Methoden der Kontinuumsmechanik modelliert werden. Der Begriff des *Strukturmoduls* S wird eingeführt, um den des Elastizitätsmoduls E für Materialien mit einer ausgeprägten inneren Struktur zu ersetzen. Der Strukturmodul findet damit Anwendung bei der Beschreibung des elastischen Verhaltens von Strukturwerkstoffen, wie etwa den Metallschäumen oder andersartig künstlich heterogenisierten Werkstoffen. Durch ihn werden die Beziehungen der konventionellen Kontinuumstheorie auf die Materialklasse der Strukturwerkstoffe anwendbar, wobei in allen kontinuumsanalytischen Ausführungen dieser Arbeit das Symbol E und S kongruieren.

Die Grundschiwingung wurde im rechten Winkel zur Bohrungsrichtung mit der in Kapitel 2.1 beschriebenen Messmethode gemessen. Der E -Modul wurde daraus mittels der Gleichung (2.6) bestimmt. Wegen des konstant zu kleinen Längen- zu Höhenverhältnisses der Proben von $L/H \approx 13$ wurde ein Korrekturfaktor K von 4 % beaufschlagt, siehe Gleichung (2.7). Dies entspricht dem Mittelwert des Korrekturfaktors (3,8–4,3%) bei zugrundeliegenden Querkontraktionszahlen zwischen 0,15 bis 0,4, welche für das gewählte Material realistisch sind. Die jeweilige Dichte wurde anhand des Gewichtes im Verhältnis zum äußeren Volumen ermittelt. Es wurden mindestens 10 Einzelmessungen zur Bestimmung einer Frequenz gemittelt. Die Ergebnisse der gesamten Untersuchungsreihe sind in Tabelle 2.1 und in Abbildung 2.4_c) gezeigt und man erkennt einen sog. positiven Größeneffekt bei den Messdaten des Lochmaterials, d. h. der betreffende Strukturmodul steigt bei sinkenden Abmaßen, wobei die Messdaten des Vollmaterials nur leicht sinken bei kleiner werdenden Abmaßen. Letzteres kann mit einhergehenden Fertigungs- und Messungenauigkeiten erklärt werden, sowie einem möglichen Einfluss der Rauheit der Metalloberfläche. Die mittlere Rauheit R_a wurde am Kompetenzzentrum für Mechatronik der Hochschule Augsburg exemplarisch an der größten Referenzprobe vermessen und beträgt an vier unterschiedlichen

Messstellen $0,58\ \mu\text{m}$, $0,99\ \mu\text{m}$, $0,37\ \mu\text{m}$ und $0,20\ \mu\text{m}$. Die Unterschiede in den Werten für die mittlere Rauheit beruhen auf den Bearbeitungstechniken und –werkzeugen die zur Formgebung eingesetzt wurden (z. B. verschiedene Fräser).

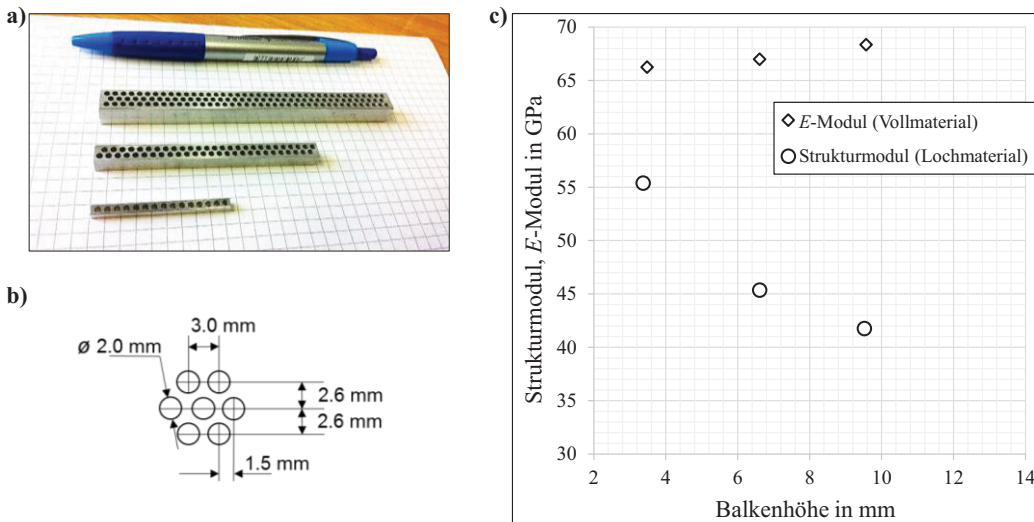


Abbildung 2.4: a) Ein Bild der drei Probekörper mit künstlicher Heterogenität. b) Dimensionen und Anordnungen der Bohrungen. c) Plot der Strukturmodulergebnisse.

2.1.3 FA an Aluminiumschäumen

In einer zweiten Untersuchungsreihe wurden verschieden große Balken aus dem Werkstoff Aluminiumschaum verwendet. Poröse Metallschäume erfahren derzeit ein großes Forschungsinteresse, vor allem auf dem Gebiet des Leichtbaus. Sie haben aufgrund ihrer Poren und Hohlräume eine geringe Dichte und dabei eine hohe spezifische Steifigkeit. Im Herstellungsprozess unterscheidet man u. a. zwischen „gegossenem“ und „geschäumtem“ Metallschaum. Der Gegossene wird durch Zugabe von Zusätzen wie Al_2O_3 in die geschmolzene Aluminiumlegierung unter Durchströmung von Gas realisiert, wobei sich der eigentliche Schaum an der Oberfläche der Schmelze sammelt und mit geeigneter Technik abgekühlt und zum Erstarren gebracht wird. Der sog. geschäumte Metallschaum stammt aus einer pulvermetallurgischen Herstellung, in der Aluminiumpulver unter Beigabe eines Treibmittels wie Titandihydrid (TiH_2) durch Pulverstrangpressen zu einem Rohling verarbeitet wird, welcher bei hoher Temperatur und Druck durch innere Gasbildung aufschäumt. Von beiden Varianten wurden Probenkörper der Länge

150–800 mm für die Frequenzvermessung hergestellt (siehe Abbildung 2.5). Die durchschnittlichen Porengrößen variieren zwischen 2–5 mm. Aufgrund von Dichteunterschieden zwischen den beiden Herstellungsvarianten von ca. 250 kg/m^3 für den gegossenen Schaum zu ca. 400 kg/m^3 für den Geschäumten, wurde diese Reihe in jeweils zwei verschiedene Werkstoffe eingeteilt, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten. Wegen der geringen Dichte sind die Frequenzen der Grundschiwingung sehr niedrig und betragen nur einige hundert Hertz. Durch die verkürzte Schwingungsdauer wurde die Messbarkeit erschwert. Es wurden rund 20 Einzelmessung gemittelt, um eine Frequenz pro Stab zu erhalten.

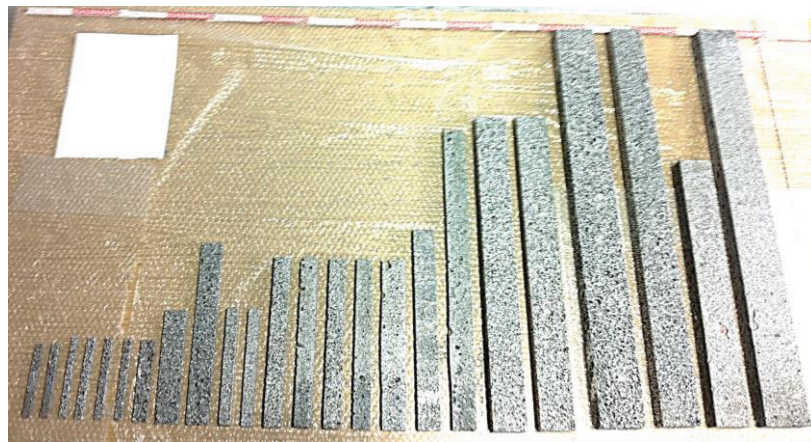


Abbildung 2.5: Verschiedenartige Aluminiumschaumbalken zur Frequenzbestimmung.

Zur Auswertung wurden nur diejenigen Balken herangezogen, deren Längen- zu Höhenverhältnis $L/H=20$ beträgt. Die Abmaße und Dichten der Probekörper und die Ergebnisse der Frequenzmessung sowie der Strukturmodulbestimmung sind in Tabelle 2.2 und Abbildung 2.6 gezeigt und man erkennt einen sog. negativen Größeneffekt. D. h. der Materialkennwert sinkt bei verringerten Abmaßen.

Schaumart	Länge in mm	Höhe in mm	Breite in mm	Dichte in kg/m ³	Frequenz in Hz	Strukturmodul in GPa
gegossen	801	39,8	80,1	236	129,6	0,975
	802	39,8	80,6	235	128,4	0,959
	139	6,6	39	279	568,8	0,732
	139,8	6,6	13	275	588,4	0,791
	139	6,6	13,2	281	503,3	0,577
	139	6,8	13	268,6	556,5	0,636
	138	6,8	10,3	258,7	623,2	0,746
	299	14,9	30,3	268,9	307,4	0,866
	300	14,9	30,8	273,8	297,9	0,839
geschäumt	126,2	6,85	13	436,02	802,85	1,438
	125,85	7,6	14	418,21	761	0,996
	801	43,41	80,7	403,45	200,5	3,353
	800	44	81,7	403,36	204,2	3,368
	300	14,5	30	409,20	406	2,459
	300	13,6	30	424,84	384,2	2,599
	300	14	43,5	398,47	392,3	2,399

Tabelle 2.2: Daten der Untersuchung der Aluminiumschaumbalken.

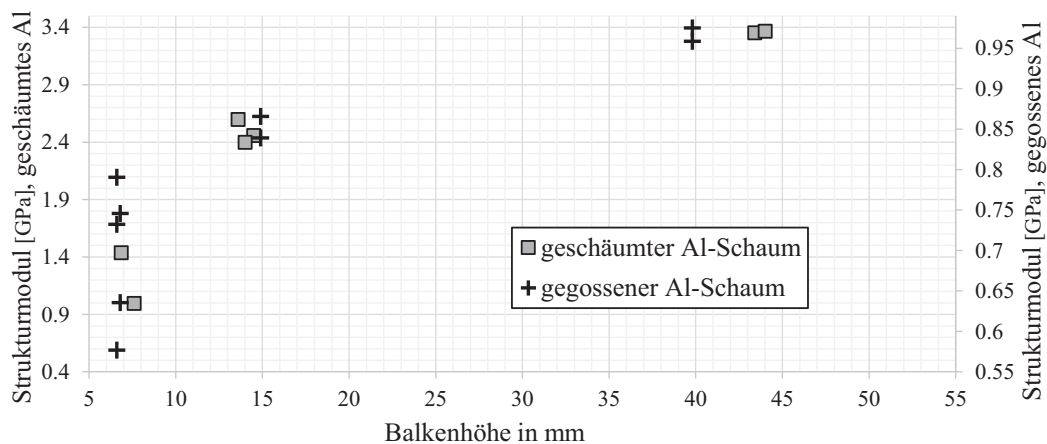


Abbildung 2.6: Strukturmodulwerte der zwei verschiedenen Aluminiumschaumsorten bei unterschiedlichen Balkenhöhen.

2.2 Atomkraftmikroskopie (AFM)

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Proben, deren Abmessungen makroskopisch waren, sollen in diesem Kapitel mikroskopisch kleine Proben auf den Größeneffekt hin untersucht werden, wobei der Begriff „mikroskopisch“ in dem Sinne verwendet wird, dass relevante Abmaße und Größen nur noch durch die Anwendung eines Mikroskops erfasst werden können. Der Höhenbereich der so geprüften Mikrobalken umfasst dabei Werte zwischen 0,2–170 μm . Um den Elastizitätsmodul von Werkstoffen in dieser Größenordnung zu messen, werden primär einfache statische Biegeversuche an freistehenden Mikrobalken durchgeführt. Die Belastung erfolgt dabei mit Hilfe eines Atomkraftmikroskops (AFM). Weitere Bezeichnungen dieser Messapparatur sind: *Rasterkraftmikroskop RKM*, *scanning force microscope SFM*, oder *scanning probe microscope SPM*. Diese Art der Mikroskopie wurde um 1981 mit der Erprobung des *scanning tunnel microscopes STM* in der Schweiz erfunden, wofür 1986 der Nobelpreis für Physik an Gerd Binnig und Heinrich Rohrer vergeben wurde. Dieses Verfahren verwendet im Gegensatz zur Licht- oder Elektronenmikroskopie die Kraftinformation die zwischen der zu betrachtenden Probenoberfläche und einer sog. AFM-Nadel wirkt. Die AFM-Nadel ihrerseits besteht aus einem einseitig fest eingespannten Mikrobalken, an dessen freiem Ende eine vielfältig geartete Spitze angebracht ist, welche einen Spitzenradius von typischerweise 10 nm aufweisen kann. Die in der Nähe einer Probenoberfläche wirkenden Kräfte führen zu einer Biegung der AFM-Nadel, die wiederum über verschiedene Methoden, z. B. durch optische Interferometrie, Laserreflektion, Piezoelektrizität oder Piezowiderstandsmessung, detektiert werden kann. Diese Kraftinformation wird in vielfältiger Weise dazu genutzt, bei der lateralen Bewegung der Probe oder der Spitze, ein Profilbild der Probenoberfläche und damit ein vergrößertes Abbild der Probe zu erstellen. Sowohl die laterale als auch die vertikale Bewegung wird mit Hilfe von kalibrierten Piezostellelementen ermöglicht. Unter optimalen Bedingungen ist diese Technik in der Lage, die Position einzelner Oberflächenatome zu detektieren und gar zu beeinflussen. Für die Zwecke dieser Arbeit soll die (hier laserreflektiv gewonnene) Biegeinformation der AFM-Nadel kraftkalibriert werden, um für rein punktuelle Kraftexperimente an Mikrobalken entsprechende Kraft-Durchbiegungszusammenhänge herzustellen.

2.2.1 Aufbau des laserreflektiven AFMs

Das verwendete AFM-System ist ein etabliertes Modell der Firma Nanonics Imaging Ltd., Jerusalem, Israel (www.nanonics.co.il), mit der Bezeichnung Multiview1000TM. Es basiert auf einer laserreflektiven Detektion der Biegung der verwendeten AFM-Nadel, welche die Besonderheit aufweist aus Glas gefertigt zu sein (Optical Fiber AFM-Probes). Der seitlich vom System ausgesendete Laserstrahl wird durch einen der Nadel vorgelagerten Spiegel direkt auf den „Hals“ der Nadel geleitet. Die im Halsbereich mit Chrom beschichtete zylindrische Nadel reflektiert den ursprünglich punktförmigen Laserspot linienartig. Der so aufgefächerte Lichtstrahl trifft im sog. PSD (den photosensitiven Dioden) auf (siehe Abbildung 2.7).

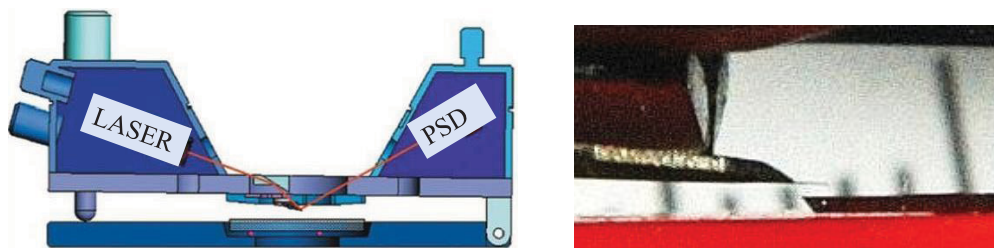


Abbildung 2.7: Links: Schematisches Schnittbild des MV1000TM-Systems. Rechts: Konventionelle Makrofotografie der AFM-Glasnadel vor einem im Hintergrund befindlichen Millimetermaßstab.

Im PSD verursacht das eintreffende Laserlicht eine Änderung des elektrischen Widerstands der beleuchteten Dioden. Das PSD besteht aus vier solcher Dioden, die als WHEATSTONESche Vollbrücke zusammengeschaltet sind. In einem begrenzten Auslenkungsbereich ist die elektrische Spannung zwischen den parallelen Leitungsteilern der WHEATSTONESchen Brücke ein Maß für die Biegung der AFM-Nadel (siehe schematische Abbildung 2.8).

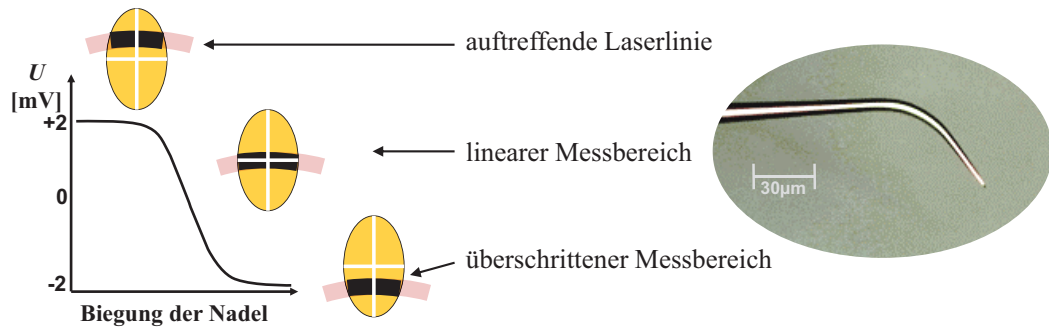


Abbildung 2.8: Links: Schematischer Zusammenhang zwischen der Auslenkung der AFM-Nadel und der Messspannung U im PSD. Rechts: Mikroskopische Aufnahme des freien Endes der AFM-Glasnadel.

Die Reflektionsgeometrie des Laserstrahlengangs ist über die Ausrichtung des Lasers selbst, über die Position und den Winkel des Spiegels und über die Position des PSDs innerhalb gewisser Grenzen frei einstellbar. Der Reflektionspunkt auf der AFM-Nadel sollte bei ca. zwei Drittel ihrer Länge liegen, gemessen von der Einspannung aus (siehe Handbuch MV1000TM, Nanonics, 2007). Man kann aber auch kürzere Abstände wählen, um damit eine größere Biegung der Nadel zuzulassen. Im unbelasteten Zustand der Nadel sollte der Strahlengang so eingestellt sein, dass die im PSD auftreffende Laserlinie sich in der Mitte des PSD und damit im linearen Messbereich befindet.

Die Probe wird auf einem geeigneten Probenhalter befestigt und in den direkt unter der AFM-Nadel befindlichen sog. *Flatscanner* eingelegt (siehe Unterbau in Abbildung 2.7, links). Der Flatscanner ist ein dreidimensional piezobetriebener Feinpositionierungstisch, welcher erlaubt, die Probe um ca. $90\mu\text{m}$ lateral und ca. $70\mu\text{m}$ vertikal zu bewegen, wobei vom Hersteller eine laterale Auflösung von $0,005\text{ nm}$ und vertikale Auflösung von $0,002\text{ nm}$ angegeben wird. Die vertikale Bewegung wird dabei durch ein Feingewinde übersetzt (siehe Abbildung 2.9, rechts). Ein Hochspannungskontrollmodul (siehe Abbildung 2.9, links) verbindet den Flatscanner mit einem Computer, auf dem die entsprechende Treibersoftware, hier Quartz[®], installiert ist.



Abbildung 2.9: Links: Die Kontrollmodule des MV1000™. Rechts: Schema des Flatscanners (Feinpositionierungstisch).

Nachdem die Nadel rein manuell in einige Millimeter Entfernung zur Probenoberfläche gebracht ist, geschieht die Annäherung (engl. „approach“) in mehreren Schritten: Als erstes wird die Probe mit Hilfe des Flatscanners automatisch in die maximale Höhenposition gebracht. Mit dem sog. „stepper motor“ (zu dt. Schrittmotor) wird dann der obere Aufbau des AFMs abgesenkt, wodurch sich die Nadel und die Probe schnell annähern. Sobald eine detektierbare Auslenkung der Nadel vom System registriert wird, stoppt der Schrittmotor, die Probe wird im Flatscanner auf Minimalposition gebracht und von dieser ausgehend relativ langsam und mit hoher Genauigkeit von unten her gegen die AFM-Spitze gehoben. Das Anheben der Probe stoppt wiederum automatisch bei einer im Vorfeld einstellbaren prozentualen Abweichung der Nadelbiegung. Der so einstellbare Kontaktabstand ist im Folgenden der Ausgangs- und Nullpunkt für die Belastungsexperimente.

2.2.2 Kraftkalibrierung der AFM-Nadel

Um die Kraft F zwischen der AFM-Nadel und der Probenoberfläche zu bestimmen, bedient man sich dem einfachen Federgesetz: $F = k w_{\text{Spitze}}$. Dabei ist k die Federkonstante der Nadel und w_{Spitze} ihre Durchbiegung am Ort der Kraftübertragung, wobei w_{Spitze} direkt oder indirekt im AFM gemessen werden kann. Der lineare Zusammenhang geht auf die Theorie kleiner Biegungen von langen, schlanken EULER-BERNOULLI Balken zurück. Es sollen im Folgenden drei Methoden vorgestellt werden, einen quantitativen Wert für die Federkonstante (auch im Folgenden als Kraftkonstante bezeichnet) einer AFM-Nadel zu erhalten.

Für einfache Geometrien lässt sich die Kraftkonstante theoretisch bestimmen. Für gerade Balken mit konstanter Querschnittsfläche erhält man z. B., vgl. [58]:

$$k = 3 \frac{EI}{L^3} . \quad (2.8)$$

Diese Methode ist allerdings als ungenau anzusehen, da die exakte Kenntnis der Abmaße der Nadel Voraussetzung ist. Vor allem die Abmessung der Höhe liegt oft unterhalb eines Mikrometers, was einen enormen Messaufwand bedeutet. Die nächst bessere Kraftkalibrierung kann, ähnlich zu der im Kapitel 2.1 dargelegten Frequenzanalyse, durch Messung der ersten Eigenfrequenz der Nadel erfolgen. Hierbei lautet die Berechnungsformel langer, schlanker Balken mit konstantem Rechtecksquerschnitt z. B. wie folgt, vgl. [58]:

$$k = 59,307 BL^3 f_1^3 \sqrt{\frac{\rho^3}{E}} . \quad (2.9)$$

Diese Formel ist unabhängig von der kritischen Messung der Nadelhöhe und die Bestimmung der ersten Eigenfrequenz der Nadel ist prinzipiell gut möglich. Dennoch bewähren sich beide Messmethoden nicht zur Bestimmung der Kraftkonstante von speziellen AFM-Nadeln, wie der Glasnadel, da diese zwar lang und schlank ist, aber über ihre Länge hinweg keinen konstanten Querschnitt aufweist (siehe Abbildung 2.8, rechts).

Die für diese Arbeit genutzte Kalibrierungsmethode ist das Verfahren des Abgleichens, vgl. VAREMBERG et al. (2005) [103]. Danach wird ein bekannter Kraft-Weg Zusammenhang eines sog. Biegenormals mit ähnlichem Biegeverhalten (siehe Abbildung 2.10) genutzt, um auf die Kraftkonstante der AFM-Nadel zurückzuschließen, ohne ihre Geometrie bestimmt haben zu müssen.

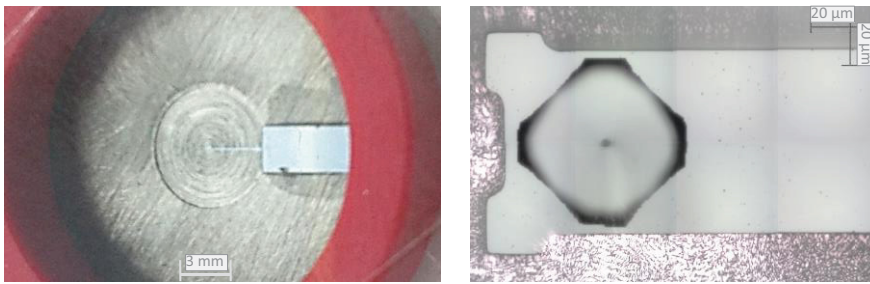


Abbildung 2.10: Das Silizium-Biegesteifigkeitsnormal der PtB in makroskopischer Aufnahme (links) und mikroskopischer Aufnahme des freien Endes (rechts).

Das Normal besteht aus einem ca. 3000 µm langen, 100 µm breiten und 25 µm hohen Balken aus Silizium mit plateauförmiger Spitze, der auf einem Metallplättchen mit 30 mm Durchmesser aufgeklebt ist. Das Metallplättchen ist in seiner Mitte um ca. 0,1 mm vertieft. Der kalibrierte Punkt befindet sich in der Mitte des Plateaus (siehe Abbildung 2.10, rechts). Die dort herrschende vertikale Biegesteifigkeit wurde mit einer Mikrokraftmesseinrichtung der PTB, bestehend aus der Nanokompensationswaage Mettler Toledo SAG245 und dem Nanopositionierer Pifoc721 von PI, unter Anwendung eines sphärischen Indenters gemessen. Dem vorliegenden Bericht (Berichtszeichen: KEN11 PTB12) ist eine gemessene Kraftkonstante von $k_{\text{PTB}} = 4,072 \pm 0,085 \text{ N/m}$ zu entnehmen, welcher durch eine lineare Regression der Kraft-Weg Kurve im Bereich zwischen 3 µN bis 160 µN bestimmt wurde und gemäß ISO (1995) zu 95 % im angegebenen Werteintervall liegt. Der Abgleich zur verwendeten AFM-Glasspitze erfolgt nun in zwei Schritten, bei denen die Kurven der elektrischen Spannung des PSD gegenüber dem Piezohub des Flatscanners aufgezeichnet werden (siehe Abbildung 2.11). Zunächst wird die Messkurve an einem Ort auf der Probe mit fester Oberfläche bestimmt, um das alleinige Biegeverhalten der AFM-Nadel zu rekordieren. Im Anschluss wird am Ort des kalibrierten Punktes in der Mitte des Plateaus gemessen, bei dem sich nun das Siliziumnormal plus die AFM-Nadel gleichzeitig biegen. Aus direkter Subtraktion der Wegdaten dieses Experiments bestimmt sich sowohl die Durchbiegung der AFM-Spitze w_{Spitze} (Abbildung 2.11, blauer Bereich) als auch die Verbiegung des Si-Normals selbst w_{Balken} (Abbildung 2.11, grüner Bereich).

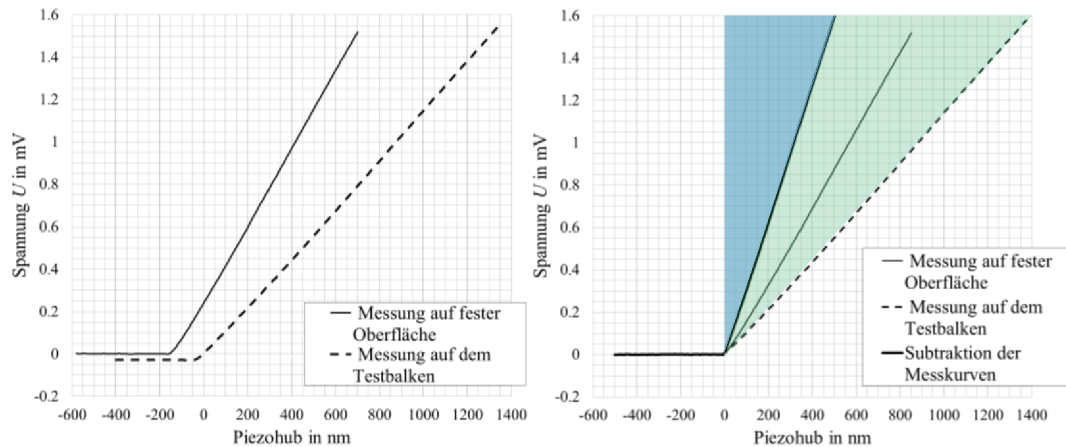


Abbildung 2.11: Typische Messkurven der elektrischen Spannung im PSD gegenüber des vertikalen Piezohubs. Links: Originaldaten. Rechts: Zum Nullpunkt verschobene Daten. Blau: Bereich der Nadelbiegung. Grün: Bereich der Biegung des Si-Normals.

Mit der Kenntnis der Nadeldurchbiegung w_{Spitze} , der Verbiegung des Si-Normals w_{Balken} und dessen Kraftkonstante k_{PtB} , lässt sich folgender Zusammenhang zur Kraftkonstante der Nadel herstellen:

$$\frac{k_{\text{Spitze}}}{k_{\text{PtB}}} = \frac{w_{\text{Balken}}}{w_{\text{Spitze}}} . \quad (2.10)$$

Die mit der Methode des Abgleichs ermittelte Kraftkonstante, die für alle folgenden Untersuchungen benutzten AFM-Spitze, wurde quantitativ zu $k_{\text{Spitze}} = 31,4 \pm 0,2 \text{ N/m}$ bestimmt.

2.2.3 Biegeexperimente an SU-8

SU-8 ist ein negativ-Fotolack aus der Mikrosystemtechnik, vgl. [56] bestehend aus den drei Bestandteilen: Grundharz (auf Basis von Bisphenol-A), Lösungsmittel und fotoempfindlicher Komponente. Im Folgenden werden die Verarbeitung und die Experimentierdurchführung des NanoTM-SU-8 der Firma MicroChem erläutert. Die Verarbeitung erfolgte in dankenswerter Zusammenarbeit mit Herrn M. Wöhrmann, M.Sc. am Fraunhofer Institut für Zuverlässigkeit und Mikrointegration (IZM) in den folgenden vom Hersteller definierten Arbeitsschritten:

- Ein 4-Inch-Silizium-Wafer wurde zum Zweck einer späteren Trennschicht mit einem Metall beschichtet.
- Der zunächst in Lösungsmittel gelöste, viskose Resist wurde mit Hilfe einer konventionellen Schleuderbeschichtungsmaschine auf den metallbeschichteten Silizium-Wafer aufgetragen. Die Rotationsgeschwindigkeit der Schleudermaschine bestimmte maßgeblich die Dicke der so aufgetragenen homogenen Schicht (zw. 8–40 μm).
- Der Großteil des Lösungsmittels verdampfte im Rotationsprozess, der Rest wurde bei einer anschließenden Trocknung bei 60 °C und 95°C ausgedampft, wonach der Werkstoff endgültig seine Festigkeit erhielt.
- Die Strukturierung in verschiedene kammartige Mikrobalken erfolgte über einen LDI (Laser Direkt Imager). Dieser spezielle UV-Laser rasterte vorgegebene Bereiche ab, welche sich durch die Einwirkung des Lichts chemisch umwandelten und für den später zum Einsatz kommenden Entwickler löslich wurden.
- Nach dem Belichten erfolgte eine zusätzliche Temperaturbehandlung bei wiederum 60 °C und 95°C, um die chemische Reaktion nach der Belichtung weiter zu unterstützen.
- Nach nur kurzer Zeit im Entwicklerbad löste sich das belichtete SU-8 vom Unbelichteten und die Balkenstrukturen wurden freigelegt.
- Durch anschließendes chemisches Ätzen, welches nicht das SU-8 angreift, wurde die Metallschicht am Si-Wafer aufgelöst und die kammartig strukturierten Folien endgültig abgelöst. Sie wurden in einem Wasserbad gesammelt und zur Aufbewahrung aufgefädelt (siehe Abbildung 2.12, links).

Im finalen Vorbereitungsschritt für die Belastungstests im AFM wurden die strukturierten Folien im Labor des LKM mittels eines sehr dünnflüssigen Klebemittels derart an scharfkantige Ränder von Abdeckgläsern angebracht, das lediglich die Mikrobalken überstehen (siehe Abbildung 2.12, rechts).

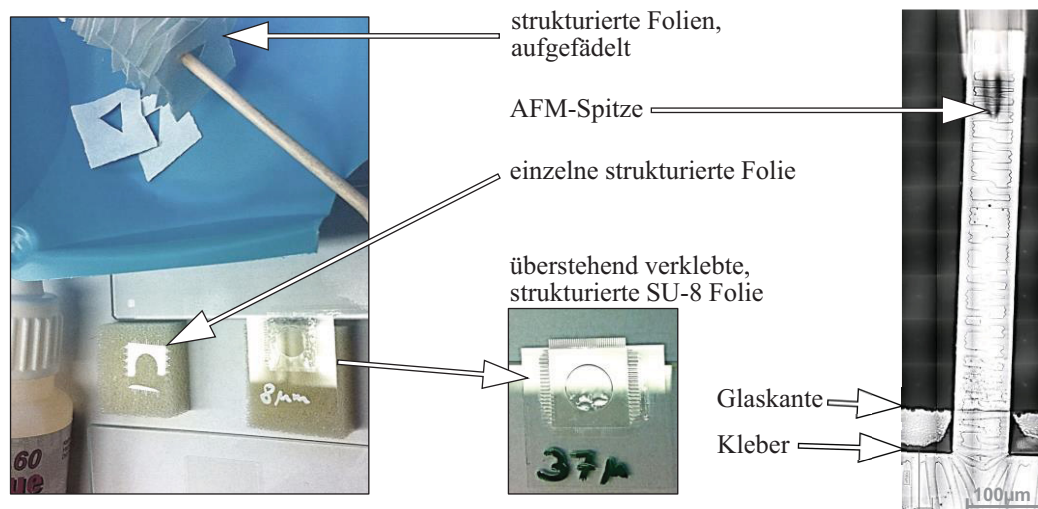


Abbildung 2.12: Probenpräparation der strukturierten SU-8 Folien. Links: Verklebung einzelner Folien mit überstehenden Prüfstrukturen. Rechts: Einzelner Mikrobalken samt Einspannungsbedingung nahe der Glaskante und Kraftapplikation durch die AFM-Spitze.

Die Abmaße der geprüften Balken wurden auf mehrere Art und Weisen bestimmt. Breite und Länge wurden ausschließlich lichtoptisch im Lichtmikroskop des AFMs gemessen (siehe Tabelle 2.5), wobei sich die Länge vom Punkt der Kraftaufbringung bis hin zur Glaskante erstreckte und durch die Positionierung der AFM-Nadel jeweils separat eingestellt werden konnte. Da die Höhe einer der einflussreichsten Werte für die spätere Auswertung ist, wurde sie anhand zwei verschiedener Lichtmikroskope, einem sog. DEKTAK-System und mehrerer REM-(Rasterelektronenmikroskop)-Aufnahmen gemittelt, wobei jedes System spezifische Ungenauigkeiten aufweist. Die Bezeichnung „DEKTAK“ bezieht sich auf ein Oberflächenprofilometer, welches die Oberfläche von Proben mechanisch abtastet. Bei dem Verfahren wird ein Metallstift mit einer Diamantspitze über die Oberfläche der Messprobe gezogen und die dabei ermittelte Höheninformation ähnlich wie im AFM in Verbindung mit der Weginformation ausgewertet (siehe Abbildung 2.13_c). Das Verfahren der Rasterelektronenmikroskopie nutzt einen fokussierten und lenkbaren Elektronenstrahl, um einen Probenbereich abzurastern und mit den jeweiligen Rückstreuinformationen pro Rastpunkt ein kontrastreiches Bild zu erzeugen (siehe Abbildung 2.13_a). Dadurch erlangt man eine deutlich

höhere örtliche Auflösung und Tiefenschärfe als bei der herkömmlichen Lichtmikroskopie.

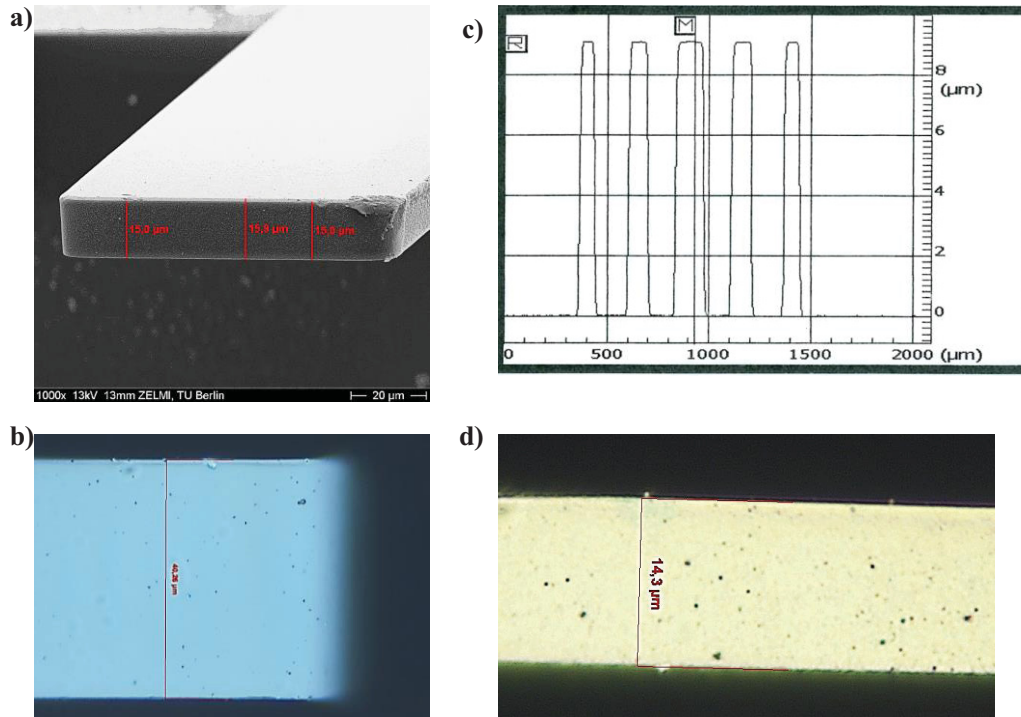


Abbildung 2.13: Vermessung der Höhe der Mikrobalken mittels: a) REM, b) Lichtmikroskop-I, c) DEKTAK-System und d) Lichtmikroskop-II, gezeigt an verschiedenen exemplarischen SU-8 Mikrobalken.

Ein nahe des Messgerätes installiertes Hygrometer überwachte die Werte der relativen Luftfeuchtigkeit, die über die gesamte Mess- und Lagerungsdauer hinweg zwischen 30–40 % lag. Die eigentlichen Untersuchungen begannen, indem eine jeweils auf ihre Höhe, Breite und Länge vermessene Struktur zur Belastung im AFM unterhalb der AFM-Spitze positioniert wurde. Die Biegesteifigkeiten der SU-8 Mikrobalken wurden mit der Methode des Abgleichens bestimmt. Zunächst wurde die Kurve der elektrischen Spannung des PSD gegenüber dem Piezohub des Flatscanners an einem Ort fester SU-8 Oberfläche aufgezeichnet. Durch die im Abschnitt 2.2.2 erläuterte Kraftkalibrierung der AFM-Nadel konnte die Skala der elektrischen Spannung des PSD direkt in eine Skala der applizierten Kräfte umgewandelt werden. Die eigentliche

Belastung erfolgte an einem Punkt ausgewählter Länge, wobei das im Abschnitt 2.2.2 beschriebene Subtraktionsverfahren beider Kurven den Zusammenhang zwischen aufgebrachter Kraft und der Durchbiegung des Mikrobalkens an der Stelle der AFM-Spitze hervorbringt. Für kleine Auslenkungen, wobei „klein“ hier über den maximalen Biegewinkel:

$$\alpha = \frac{FL^2}{2EI} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \ll 10^\circ \quad (2.11)$$

begrenzt werden soll [15], errechnet sich der konventionelle E -Modul isotroper Materialien, vorgehend auf den Abschnitt 3.1.4, aus:

$$E = \frac{4FL^3}{wBH^3} \quad (2.12)$$

wobei F die Kraft, L die Länge, w die Durchbiegung, B die Breite und H die Höhe ist. Die Ergebnisse der einzelnen Prüfungen sind in Abbildung 2.14 dargestellt.

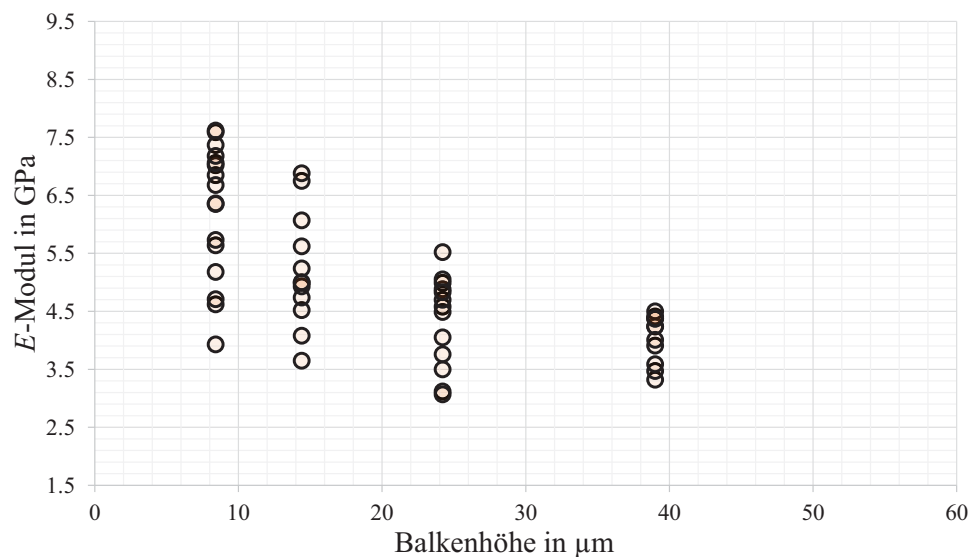


Abbildung 2.14: Rohdaten der E -Modulwerte aller untersuchten SU-8 Mikrobalken.

Länge in μm	Breite in μm	Höhe in μm	<i>E</i> -Modul in GPa	Länge in μm	Breite in μm	Höhe in μm	<i>E</i> -Modul in GPa
80	82	8,4	4,62	110	81	24,2	4,58
160			4,71	248			4,88
164			5,64	435			4,49
176			6,36	375			4,99
200			7,59	590			5,05
240			5,18	530			4,7
430			7,02	454	120	24,2	4,05
430			7,62	471			4,83
403			6,85	443			3,12
416			7,06	455			3,07
485			7,37	456			3,76
82	80	8,4	3,93	369	64	39,0	5,52
160			6,35	535			3,5
240			6,68	370			4,24
317			5,73	328	86	39,0	4,24
400			7,18	373			3,32
135	122	14,4	4,08	535		124	3,91
139			3,65	512			3,47
270			4,52	540			4,41
273			4,74	763			4,01
405			4,93	768			4,5
408			5,0	979			3,59
534			4,99	600	920		4,37
540			5,24	920			4,38
675			6,07				
679			5,62				
810			6,75				
817			6,88				

Tabelle 2.3: Abmaße und Messdaten der untersuchten SU-8 Mikrobalken.

2.2.4 Biegeexperimente an Epoxidharz

Epoxidharz ist ein künstliches Harz, welches Epoxidgruppen beinhaltet und in Verbindung mit einem speziellen Härter zu einem duroplastischen Kunststoff umgesetzt werden kann. Epoxidharze sind Polyether mit in der Regel zwei endständigen Epoxidgruppen, die durch das sog. Härten aufgetrennt werden. In Abbildung 2.15_b) ist das Schema eines gehärteten Kunststoffes auf Epoxidharzbasis gezeigt, worin die n -fachen Polyethergruppen mit $[\text{R-O}]_n$ gekennzeichnet und über den Härter (rot markiert) verbunden sind. Die Aushärtezeit ist abhängig vom verwendeten Härter und der Verdünnung und kann bei Raumtemperatur erfolgen. Die Herstellung von Mikrobalken verschiedener Höhen wurde wie folgt realisiert:

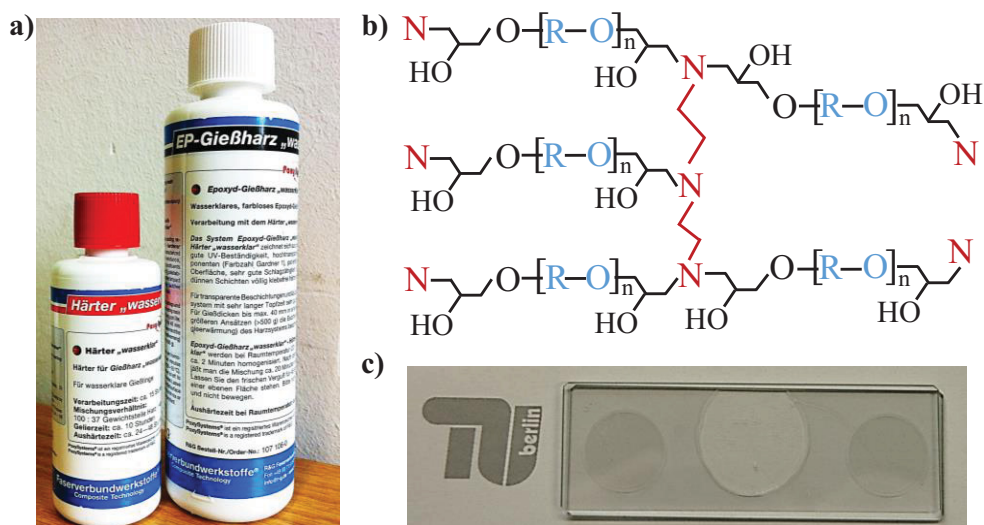


Abbildung 2.15: a) Handelsübliches härtbare Epoxidharz. b) Schema des gehärteten Kunststoffes auf der Polyetherbasis $[R-O]_n$. c) Zwischen Abstandshaltern mittig aufgetragenes Harz, eingepresst zwischen zwei Präparationsgläsern.

Das kommerziell erhältliche Kunstharz HT 2 der Firma PoxySystems® (siehe Abbildung 2.15a)), bestehend aus Bisphenol-F-diglycidylether und 4,4' Methylene-diphenyldiglycidylether wurde im Verhältnis 100:48 mit dem dazugehörigen Härter angerührt und innerhalb der 45-minütigen Verarbeitungszeit zwischen zwei Präparationsgläsern aufgebracht (siehe Abbildung 2.15c)). Als Abstandshalter dienten je nach gewünschter Schichtdicke Abdeckgläser oder herkömmliche Aluminiumfolie. Auf diese Weise konnten Schichtdicken von 17–170 μm erzielt werden. Nach einer Aushärtezeit (bei Raumtemperatur) von mindestens 24 Stunden wurden die Präparationsgläser auseinandergehebelt und die gehärtete Epoxidfolie abgezogen.

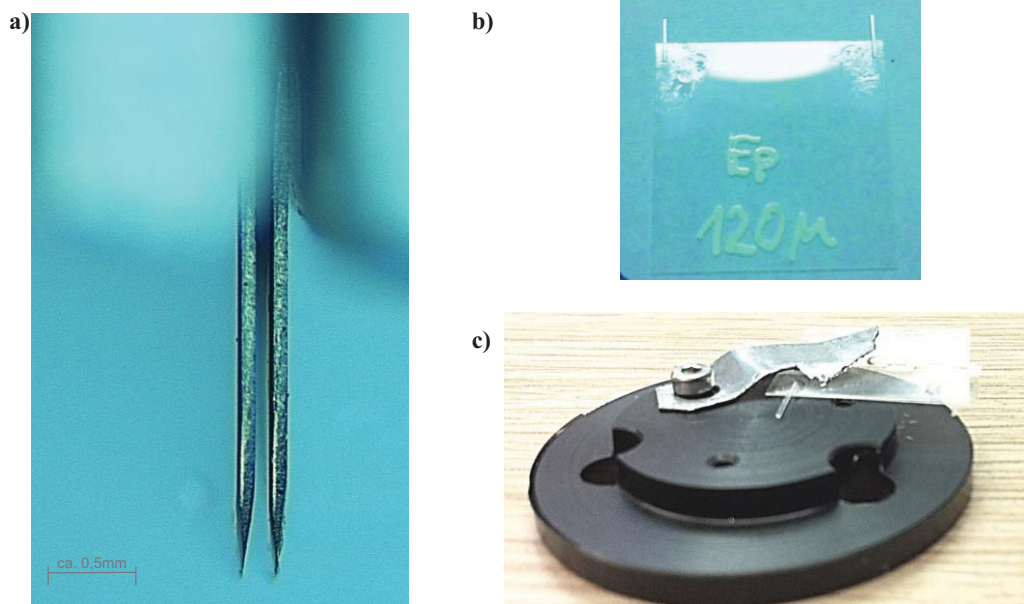


Abbildung 2.16: a) Seitliche Aufnahme des Schneid- bzw. Stanzwerkzeuges. b) Überstehend verklebte Epoxidstreifen. c) Probenhalter zur Fixierung der verklebten Gesamtprobe.

Aus den abgelösten, unterschiedlich dicken Epoxidfolien wurden mit Hilfe eines Schneid- bzw. Stanzwerkzeuges die Mikrobalken abgetrennt. Das Werkzeug besteht aus handelsüblichen Nassrasierklingen, welche wahlweise ohne und mit einer dünnen Abstandshalterschicht aneinander geschraubt wurden. Nassrasierklingen sind ca. 0,1 mm dick und genügend scharf, um die Epoxidfolien zu durchtrennen. In Abbildung 2.16_a) ist das Schneid- bzw. Stanzwerkzeug vergrößert mit einer Lage Papier als Abstandshalterschicht gezeigt. Durch die Abstandshalterschicht konnte die Breite der hergestellten Mikrobalken im Bereich von ca. 100–400 μm variiert werden. Die durch vertikalen Druck und leichte Seitwärtsbewegungen herausgestanzten Balkenstreifen wurden unter einem Mikroskop so auf die Kanten von Deckgläsern verklebt, dass ca. zwei Drittel der Streifen frei überstehen (siehe Abbildung 2.16_b)). Ein spezieller Probenhalter zur Fixierung der verklebten Gesamtprobe ist in Abbildung 2.16_c) gezeigt. Dieser fixiert punktuell das Glasplättchen, auf dem der Mikrobalken angebracht ist und kann direkt in die Probenkammer des AFMs eingelegt werden, um den darauf befindlichen Mikrobalken zu prüfen.

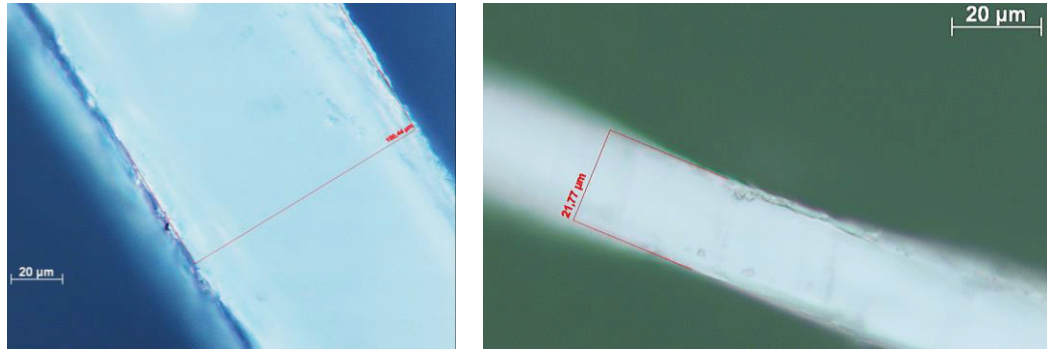


Abbildung 2.17: Links: Lichtmikroskopische Messung der Breite eines exemplarischen Mikrobalkens aus Epoxid. Rechts: Exemplarische Messung der Höhe der Epoxidschicht.

Die Vermessung der Breite, der Höhe und der Länge der Proben erfolgte an einem kalibrierten Lichtmikroskop für jeden geprüften Mikrobalken einzeln (siehe Tabelle 2.4). Exemplarische Aufnahmen dieser Messreihe sind in Abbildung 2.17 dargestellt.

Die Biegesteifigkeiten der Mikrobalken aus Epoxid wurden mit der Methode des Abgleichens bestimmt. Zunächst wurde die Kurve der elektrischen Spannung des PSD gegenüber dem Piezohub des Flatscanners an einem Ort fester Epoxidoberfläche aufgezeichnet. Durch die im Abschnitt 2.2.2 erläuterte Kraftkalibrierung der AFM-Nadel konnte die Skala der elektrischen Spannung des PSD direkt in eine Skala der applizierten Kräfte umgewandelt werden. Die eigentliche Belastung erfolgte an einem Punkt ausgewählter Länge L , wobei das im Abschnitt 2.2.2 beschriebene Subtraktionsverfahren beider Kurven den Zusammenhang zwischen aufgebrachter Kraft und der Durchbiegung des Mikrobalkens an der Stelle der AFM-Spitze hervorbringt. Für kleine Auslenkungen, wobei „klein“ hier über den maximalen Biegewinkel gemäß Formel (2.11) begrenzt wurde, errechnet sich der konventionelle E -Modul des als isotrop angenommenen Materials gemäß der Formel (2.12) aus der Kraft F , der Länge L , der Durchbiegung w , der Breite B und Höhe H . Die Ergebnisse der einzelnen Prüfungen sind in Abbildung 2.18 dargestellt.

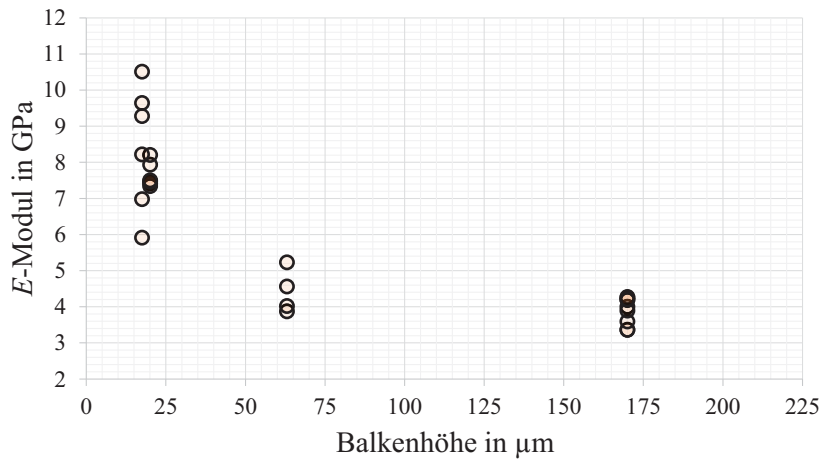


Abbildung 2.18: Rohdaten der E -Modulwerte der untersuchten Mikrobalken aus Epoxid.

Länge in μm	Breite in μm	Höhe in μm	E -Modul in GPa	Länge in μm	Breite in μm	Höhe in μm	E -Modul in GPa
1997	343	170	3,361	178	116	20	7,41
2237			3,36	328			7,93
2803			3,59	508			7,34
2995			4,25	682			7,47
3396			4,0	852			7,5
3797			4,27	994			8,2
4125			4,19	236	104	17,5	5,91
4375			3,89	350			8,22
4460			4,2	407			6,98
819	237	63	3,87	594			9,28
1158			4,02	685			9,64
1494			4,56	943			10,51
1770			5,23				

Tabelle 2.4: Abmaße und Messdaten zur Untersuchungsreihe aus Epoxid.

2.2.5 Biegeexperimente an Siliziumnitrid

Siliziumnitrid wird heutzutage wegen seiner hohen Stabilität und präzisen Herstellbarkeit als Grundmaterial für AFM-Nadeln für diverse Anwendungen eingesetzt. Aus diesem Grund existieren kommerziell viele unterschiedliche Siliziumnitridbalken, welche in einem überaus kleinen Höhenbereich realisiert werden. Drei verschiedene Höhen sind in dieser Arbeit auf ihr Biegeverhalten hin geprüft worden (200 nm, 600 nm und 800 nm). Das fertig strukturierte Material

wurde von kommerziellen Lieferanten erworben und ist laut Herstellerangaben durch einen speziellen Aufdampfprozess einer Silizium-Stickstoff Gasmischung entstanden. Einzelheiten des Aufdampfprozesses sowie des Mischverhältnisses der Gase konnten nicht bekannt gegeben werden. Es handele sich nach der Abscheidung um amorphes Si_xN_x , welches einseitig zusätzlich metallbedampft wurde. Die Metallschichtdicke liege dabei im Bereich 5–15 nm. Aufgrund dessen, dass die Höhen dieser Testobjekte im Submikrometerbereich liegen, sind sie in konventionellen Lichtmikroskopen kaum noch zu vermessen. Aufschluss über die Höhe gaben zum einen Bilder aus dem REM (Rasterelektronenmikroskop), siehe Abbildung 2.19, und zum anderen die Herstellerangabe mit einer bezifferten Genauigkeit von $\pm 10\%$. Eine Winkelkorrektur der REM-Aufnahmen wurde nicht berücksichtigt, da der Anstellwinkel bei allen Messungen zwischen 75° – 90° lag und die Messungenauigkeit somit unterhalb von 3% liegt. Zudem konnte im REM die Dicke der Metallschicht nicht aufgelöst werden. Die Herstellerangaben zur Höhe der Balken aber konnten bestätigt werden.

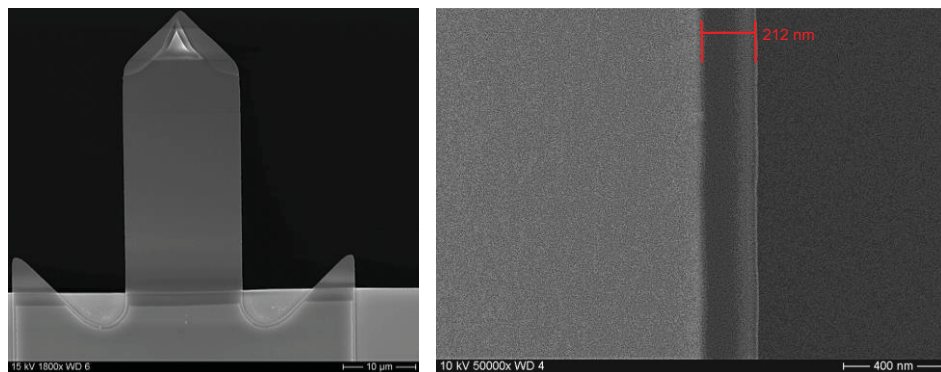


Abbildung 2.19: Links: Exemplarische REM-Aufnahme eines Si_xN_x -Mikrobalkens. Rechts: Vermessung der Balkenhöhe.

Das Höhen- zu Längenverhältnis in dieser Untersuchungsreihe übertraf deutlich den Grenzwert für schlanke Balken von 1:20 und erreichte im Maximum einen Wert von 1:140. Die Belastung erfolgte gemäß der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Prozedur der Subtraktion der Kraft-Weg-Daten der AFM-Nadel, die auf einer festen Oberfläche positioniert wurde, von den Daten, bei der die AFM-Nadel auf einem freistehenden Mikrobalken operierte. Durch das Auswerten der Messdaten für Kraft, Durchbiegung und der äußeren Abmaße wurde der E -Modul

gemäß der Formel (2.12) berechnet und ist in Tabelle 2.5 und im Plot der Abbildung 2.20 dargestellt.

Länge in μm	Höhe in μm	Breite in μm	<i>E</i> -Modul in GPa	Länge in μm	Höhe in μm	Breite in μm	<i>E</i> -Modul in GPa
43	0,8	18	375	29	0,2	16	236
83	0,8	38	383	29	0,2	16	243
93	0,8	38	300	29	0,2	16	275
123	0,8	38	455	29	0,2	16	282
168	0,8	40	243	29	0,2	16	289
80	0,6	37,5	260	29	0,2	16	306
80	0,6	37,5	208	29	0,2	16	323
80	0,6	37,5	308	29	0,2	16	344
91	0,6	37,2	249	29	0,2	16	349
91	0,6	37,2	332	29	0,2	16	379
91	0,6	37,2	333	29	0,2	16	395
167	0,6	37,2	335				
167	0,6	37,2	362				
167	0,6	37,2	342				
173	0,6	37	345				
173	0,6	37	345				
173	0,6	37	349				

Tabelle 2.5: Abmaße und Messdaten der Untersuchung der Si_xN_x -Mikrobalken.

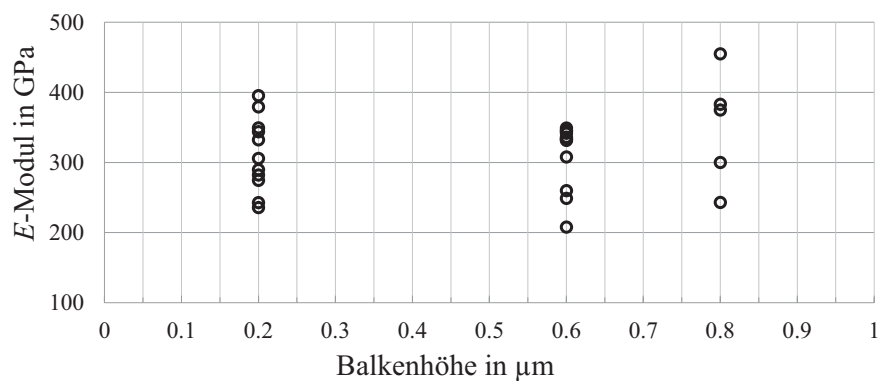


Abbildung 2.20: Plot der ermittelten *E*-Modulwerte der Si_xN_x -Mikrobalken.

2.3 Mikro-Ramanspektroskopie (MRS)

Die Messung mechanischer Dehnungen mit Hilfe der RAMANSpektroskopie wurde seit Entdeckung der RAMAN-Streuung durch den indischen Physiker und Nobelpreisträger Sir C. V. RAMAN (Chandrasekhara Venkata Raman) im Jahre 1928 weiter erforscht und etablierte sich durch die Erfindung des Lasers zu einer gängigen Untersuchungsmethode der modernen Physik. Die spektralen Analysen der von einer Probe reflektierten Laserstrahlung eignen sich besonders für Forschungsfelder wie etwa der Untersuchung molekularer Zusammensetzungen und Bindungseigenschaften und die darauf wirkenden Einflüsse von Temperatur, chemischer Zusammensetzung, elektrischer Eigenschaften oder der Dotierungsgüte von Kristallen. In Abgrenzung zu den chemisch geprägten Analysen bietet die RAMANSpektroskopie die Möglichkeit, mechanische Dehnungen an der Oberfläche opaker Festkörper zu vermessen. Eine Anwendung für diese Art der Dehnungsmessung findet man z. B. in der Mikrosystemtechnik oder Halbleiterindustrie und -forschung, in denen häufig Aussagen über den Verspannungszustand des betrachteten Werkstoffes, z. B. während des Herstellungsprozesses gewünscht werden, um Qualität, Haltbarkeit und Zuverlässigkeit der daraus entstehenden Bauteile zu beurteilen (z. B. für Mikrochips, Mikrosensorik und -aktuatorik). Derartige Bauteile, vorrangig auf Siliziumbasis, finden eine breite Anwendung in der Mobilfunk-, Automobil-, Unterhaltungs- und Luftfahrtindustrie (u. a. bei der Verbesserung der allg. Chiptechnologie oder der Beschleunigungssensoren zur Erfassung einer Fahrsituation oder der Lage eines Objektes im Raum).

Der der RAMANSpektroskopie zugrundeliegende physikalische Effekt beruht auf der Modulierung der auf ein Probenmaterial eingestrahlten elektromagnetischen Welle durch die Molekülschwingungen dieses Materials. Der dabei für die Dehnungsmessung maßgebliche Effekt, der sog. „Morphic Effect“ [38], beruht zusätzlich auf der spektralen Verschiebung der ansonsten konstanten Modulationswelle, wenn das Probenmaterial mechanischen Spannungen ausgesetzt ist. Dieser zu beobachtende Zusammenhang wird in erster Näherung in linearer Weise auf Verzerrungen, resp. Dehnungen zurückgeführt, die durch äußere aufgebrachte Kräfte und Momente, aber auch durch andere Ursachen (wie z.B. Temperaturwechsel) entstehen können. Der Durchmesser des dabei verwendeten Laserstrahls wird mit entsprechenden optischen Linsen auf einen Wert von ca. einem

Mikrometer fokussiert. In diesem Falle spricht man von der Mikro-RAMAN-spektroskopie, welche in der Lage ist, Verzerrungen in opaken Materialien mit kleiner lateraler Ortsauflösung zu detektieren.

2.3.1 Aufbau des AFM-integrierten Ramanspektrometers

Die Arbeiten wurden an einem RAMAN-Gerät der Firma Renishaw[®] durchgeführt (Modell InVia[™], siehe Abbildung 2.21), dessen Aufbau am Strahlengang in Abbildung 2.22 weiter erläutert ist.

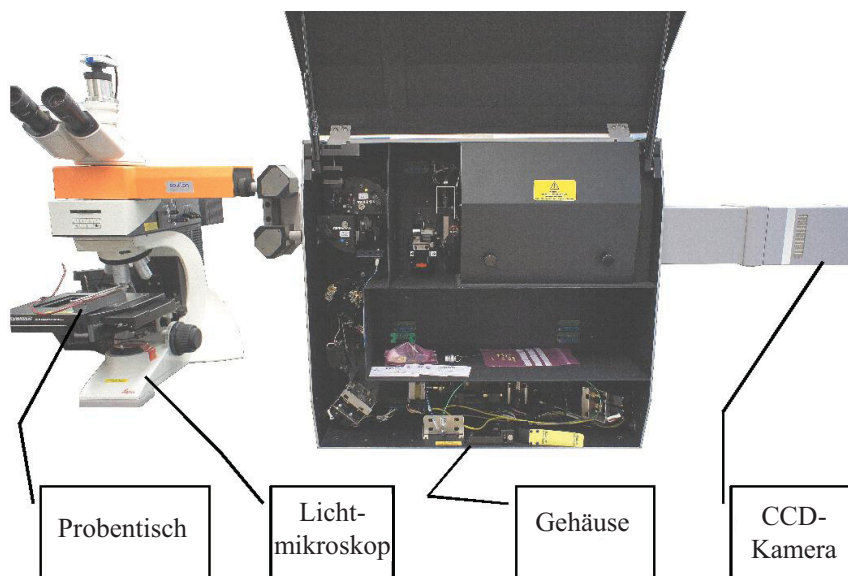


Abbildung 2.21: Komponenten des Renishaw[®] RAMAN-Gerätes InVia.

Wahlweise steht Laserlicht der Wellenlänge 633 nm (Laser Nr. 1), oder 532 nm (Laser Nr. 2) zur Verfügung. Diese werden über steuerbare Spiegel in den Hauptstrahlengang eingekoppelt. Ein elektronisch ansteuerbares Drehrad mit verschiedenen Filtern erlaubt, die Laserleistung je nach Filtersufe abzuschwächen. Durch ein spezielles Bauteil, genannt „Beam Expander“ (zu dt.: Strahlen-aufweiter), wird der Querschnitt des Laserstrahls mit Hilfe von Ausgleichs-spiegeln „geformt“, mit dem Ziel, ihn kreisförmig und in homogener Intensität über den Strahlenquerschnitt zu erhalten. Als nächste Bauteile des Strahlengangs folgen der Polarisator des einfallenden Lichtes, der halbdurchlässige Spiegel, ein manuelles Shutterrad, die optischen Linsen zur Fokussierung und schließlich die

Ebene der Probenoberfläche. In dieser Ebene kann das vollständig integrierbare Atomkraftmikroskop (siehe Abschnitt 2.2.1) installiert werden, ohne den eigentlichen Laserstrahlengang zu beeinflussen. Das von der Probe in einem Winkel von 180° zurückgestreute Licht passiert prinzipiell die selben Bauteile wie das einfallende Licht, wird jedoch durch den halbdurchlässigen Spiegel in horizontaler Richtung selektiert. Nach dieser Selektion kann eine erneute Polarisation des Rückstreulichtes erfolgen, bevor die Bestandteile: Blende, Frequenzkantenfilter, optisches Beugungsgitter und schließlich die CCD-Kamera folgen. Durch diese Bauteile wird der Strahl von Streulicht befreit, die Anregungswellenlänge aus Intensitätsgründen ausgeblendet, die verbleibenden enthaltenen Wellenlängen gebeugt und dadurch getrennt abgebildet und schließlich in der Kamera digitalisiert. Detaillierte Funktionsweisen und Hintergründe zu den einzelnen Bauteilen des verwendeten RAMANSpektroskops sowie der Benutzeroberfläche Wire[®] sind in der Diplomarbeit [53] und im Handbuch des Gerätes dargelegt.

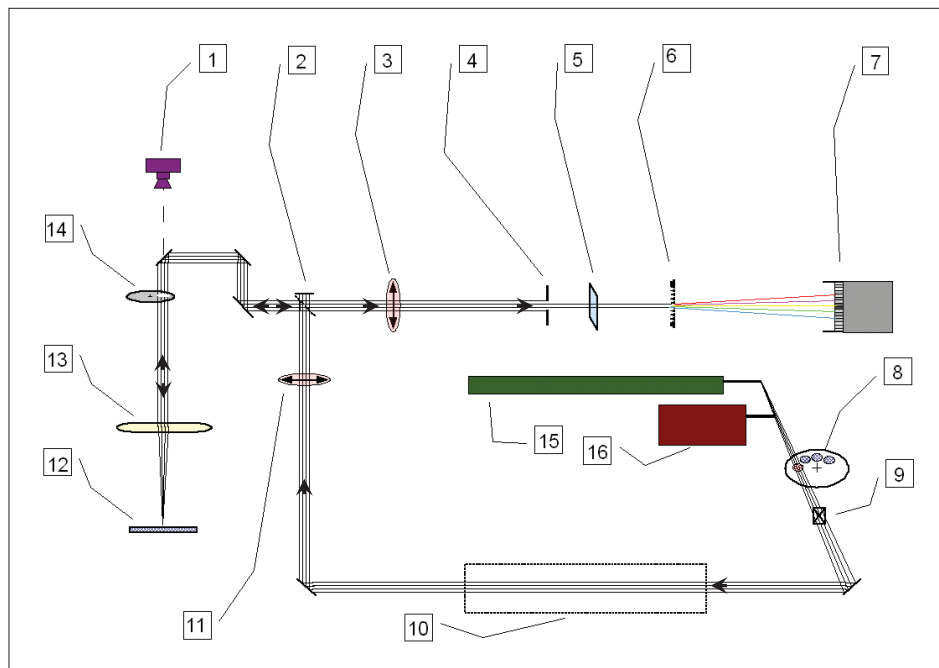


Abbildung 2.22: Schematischer Aufbau des RAMAN-Geräts: 1) einfache Kamera 2) halbdurchlässiger Spiegel 3) Polarisator des rückgestreuten Lichtes 4) Schlitzblende 5) Kantenfilter 6) optisches Gitter 7) CCD Kamera 8) Filterrad der Laserleistung 9) automatischer Shutter 10) Strahlaufweitzer 11) $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte 12) XYZ-Verstelltisch 13) Objektivlinsen 14) manuelles Shutterrad 15) LASER Nr. 1 (633 nm) 16) LASER Nr. 2 (532 nm)

Eine nachträglich installierte Neonlichtquelle zwischen dem Polarisator (3) und der Schlitzblende (4) sorgt für eine stabilere Kalibrierung der absoluten Wellenlängen. Neonlicht weist mehrere scharfkantige Peaks über ein großes Spektrum hinweg auf, welche von der spektralen Lage her unabhängig vom optomechanischen Aufbau der RAMAN-Apparatur sind. Ein Neonpeak, der der Siliziumlinie am nächsten liegt (siehe Abbildung 2.24), wird in den Messungen als Referenzpunkt genutzt, um optomechanische Einflüsse (siehe Abbildung 2.23), wie Temperaturendehnungen an den Haltern der Umlenkspiegel, usw. auszugleichen. Die Einheit der in der CCD-Kamera detektierten Intensitäten ist willkürlich (engl.: „arbitrary units, a. u.“).

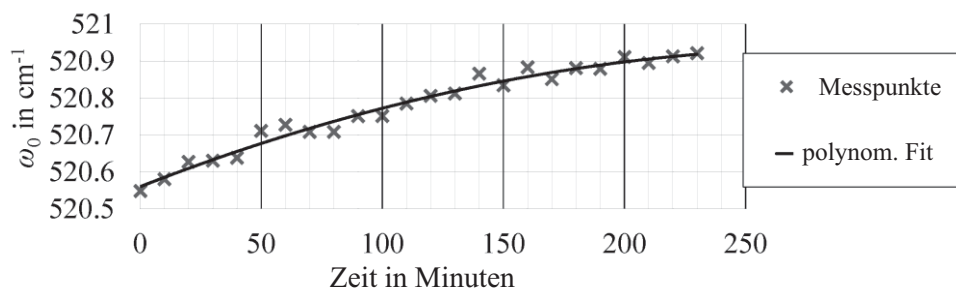


Abbildung 2.23: Optomechanischer Drift der Siliziumlinie am RAMAN-Gerät.

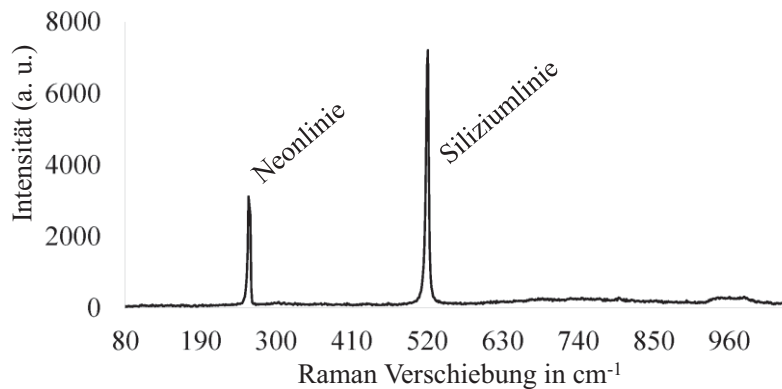


Abbildung 2.24: Die gemessene RAMAN-Linie von Silizium zusammen mit der Neonreferenzlinie.

Diese Linien, oder Intensitätsverläufe, werden nach der Messung programmintern mit einem GAUSSschen Verlauf angenähert, wobei das numerische Verfahren der Minimierung der Fehlerquadrate R :

$$R = \sum_{i=0}^n |f(\bar{\nu}_i) - y_i|^2 = \sum_{i=0}^n |A_1 \exp(-A_2(\bar{\nu}_i - A_3)^2) - y_i|^2 \quad (2.13)$$

angewendet wird. $\bar{\nu}_i$ stellen dabei die Wellenzahlen, die in einem vorgegebenen Bereich in n Intervalle aufgeteilt sind, dar. $f(\bar{\nu}_i)$ sind berechnete Intensitäten und y_i die an den selben Stellen gemessenen Vergleichswerte. Insbesondere beschreibt hierbei der Parameter A_3 die interessierende Position des GAUSSförmigen Peaks auf der Wellenzahlenskala und wird vom Steuerungsprogramm errechnet.

2.3.2 Theoretische Grundlagen der MRS

Einige Grundlagen der allgemeinen RAMANSpektroskopie und in dem Sinne auch der Mikro-RAMANSpektroskopie (MRS) sind in den Büchern von BRANDMÜLLER und MOSER (1962) [14], oder PELLETIER (1999) [78] zu finden. Da die MRS für die Zwecke dieser Arbeit ausschließlich für Dehnungsmessungen genutzt wird, sind die Veröffentlichungen von ANASTASSAKIS [4], VOIGT [107], NARAYANAN [71], LOECHELT [54], OSSIKOVSKI [76], BONERA [13], POBORCHII [79] grundlegend und die Arbeiten von DE WOLF ([21], [22], [23] und [24]) und BECKER ([7] und [8]) herauszustellen. Darin werden die Zusammenhänge der spektralen Verschiebung der sog. RAMAN-Bande von Halbleitermaterialien und der mechanischen Spannungen untersucht und beschrieben. In diesem Unterkapitel soll dieser tensorielle Zusammenhang auf einen Skalaren heruntergebrochen werden. Die Notation dabei markiert einen Tensor erster Stufe (Vektor) mit einem einfachen und einen Tensor zweiter Stufe mit einem doppelten Unterstrich. Die eintreffende elektromagnetische Welle (das Laserlicht) kann durch folgende Wellengleichung ausgedrückt werden:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_0 \cos(\underline{k}_E \cdot \underline{r} - \omega_E t), \quad (2.14)$$

wobei $\underline{\underline{E}}_0$ die Wellenamplitude, $\underline{k}_E$ den Wellenvektor, $\underline{r}$ den Ortsvektor, ω_E die Kreisfrequenz der Schwingung und t die Zeit darstellt. Diese Welle verursacht eine periodisch schwingende Polarisierung $\underline{\underline{P}}$ der Dipole der Moleküle des Materials:

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \underline{P}_0 \cos(\underline{k}_E \cdot \underline{r} - \omega_E t). \quad (2.15)$$

Unter Vernachlässigung der Gitterschwingungen der Moleküle oszilliert die Polarisierung mit derselben Kreisfrequenz wie die eintreffende Welle, ω_E . Die Intensität dieser Polarisierung $I = |\underline{P}_0|^2$ ist eine Funktion der Amplitude $\underline{P}_0$, welche wiederum abhängig von der Polarisierbarkeit, dem sog. Suszeptibilitätstensors $\underline{\chi}$, und der Amplitude der eintreffenden Welle $\underline{E}_0$ ist:

$$\underline{P}_0 = \underline{\chi}(Q_r(t)) \cdot \underline{E}_0. \quad (2.16)$$

Da die Suszeptibilität stark vom Bindungsabstand der Moleküle abhängt, ändert sich diese mit den Gitterschwingungen (Phononen) des Materials. Im Falle kristalliner Halbleiter wird diese Schwingung in sog. „Normalkoordinaten“ $Q_r(t) = Q_{r0} \cos(\underline{q} \cdot \underline{r} - \omega_r t)$ ausgedrückt, wobei Q_{r0} die Amplitude der normalisierten Gitterschwingung, $\underline{q}$ den Wellenvektor der Phononen, ω_r deren Kreisfrequenz und der Index r die jeweilige Kristallachse beschreibt. In der allgemeinen RAMANSpektroskopie ist der Wellenvektor der beobachtbaren Phononen durch den Einsatz der Lasertechnologie beschränkt auf sehr kleine Werte und man findet häufig den Begriff der „ $\underline{q} \approx 0$ - Phononen“. Über die Annahme kleiner linearisierter Änderungen der Molekülabstände, kann, unter Beachtung der EINSTEINSchen Summenkonvention die Formel (2.16) in eine TAYLOR-Reihe bis zum ersten Glied expandiert werden:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \left\{ \underline{\chi}_0 + \left(\frac{\partial \underline{\chi}}{\partial Q_r} \right)_0 Q_r(t) \right\} \cdot \underline{E}_0 \cos(\underline{k}_E \cdot \underline{r} - \omega_E t), \\ \underline{P} &= \underbrace{\underline{\chi}_0 \cdot \underline{E}_0 \cos(\underline{k}_E \cdot \underline{r} - \omega_E t)}_{\underline{P}_S} + \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{\chi}}{\partial Q_r} \right)_0 Q_{r0} \cdot \underline{E}_0 \cos(\underline{q} \cdot \underline{r} - \omega_r t) \cos(\underline{k}_E \cdot \underline{r} - \omega_E t)}_{\underline{P}_{\text{IND}}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei $\underline{P}_{\text{IND}}$ für die induzierte Polarisierung und $\underline{P}_S$ für die rückgestreute Polarisierung gleicher Wellenlänge wie die eintreffende Welle steht. Die Intensität der induzierten Polarisierung ist dabei:

$$I_{\text{IND}} = |P_{\text{IND}}|^2 \propto C \sum_{r=1}^3 \left| \left(\frac{\partial \chi}{\partial Q_r} \right)_0 \cdot \underline{E}_0 \right|^2 = C \sum_{r=1}^3 |\underline{R}_r \cdot \underline{E}_0|^2, \quad (2.18)$$

worin $\underline{R}_r$ den sog. RAMAN-Tensor bezeichnet. Mit Hinblick auf die Gruppentheorie der Kristalle lauten die RAMAN-Tensoren für kubische Einheitszellen ($r=1, 2, 3$) nach LOUDON (1964) [57]:

$$\underline{R}_{\equiv 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_{\equiv 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_{\equiv 3} = \begin{bmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

wobei d eine nicht näher spezifizierte Größe der Rückstreueffizienz darstellt. Die letzten beiden Gleichungen führen zu den „RAMAN-Auswahlregeln“, die beschreiben, in welcher Polarisationskonfiguration welche der Moden r auftritt. Die Polarisationskonfiguration ergibt sich aus den Anordnungsmöglichkeiten der Polarisationsvektoren der einfallenden Welle $\underline{e}_i$ und der rückgestreuten Welle $\underline{e}_s$. Die Auswahlregeln sind in der Literatur für verschiedene Kristallsymmetrieklassen tabelliert und z. B. für das verwendete Material Silizium in Tabelle 2.6 aufgeführt.

Oberfläche	eintreffende Polarisation, $\underline{e}_i$	gestreute Polarisation, $\underline{e}_s$	Mode r
(001)	$[\underline{1}10]$	$[\underline{1}10]$	3
	$[110]$	$[\underline{1}10]$	-
	$[100]$	$[100]$	-
	$[010]$	$[100]$	3
(110)	$[001]$	$[001]$	-
	$[\underline{1}10]$	$[001]$	1,2
	$[\underline{1}10]$	$[\underline{1}10]$	3

Tabelle 2.6: RAMAN-Auswahlregeln für einkristallines Silizium nach SIEGLE, [92].

Gemäß GANESAN, et al. (1970) [38] ordnet man den Kristallgitterschwingungen eine „effektive harmonische Kraftkonstante“ k_{eff} zu und kann so die Bewegungsgleichungen der Moleküle für die Gitterschwingung aufstellen:

$$\ddot{\underline{a}} + \hat{\underline{\underline{K}}}_{\text{eff}} \cdot \underline{a} = 0, \quad \text{mit } \hat{\underline{\underline{K}}}_{\text{eff}} = \underline{\underline{K}}_{\text{eff}} \underline{\underline{M}}_{\text{eff}}^{-1}, \quad (2.20)$$

worin $\underline{a}$ die Elongation der effektiven Masse, $\underline{\underline{M}}_{\text{eff}}$ die effektive Massenmatrix und $\underline{\underline{K}}_{\text{eff}}$ die effektive Kraftkonstantenmatrix ist. Mit dem Standardansatz $\underline{a}(t) = \underline{a}_0 \exp(i\omega_0 t)$ zur Lösung des Differentialgleichungssystems (2.20), lautet die Bestimmungsgleichung für ω_0 :

$$\det\left(\hat{\underline{\underline{K}}}_{\text{eff}} - \omega_0^2 \underline{\underline{I}}\right) = 0, \quad (2.21)$$

wobei $\underline{\underline{I}}$ den Einheitstensor und ω_0 die dreifach entartete Eigenkreisfrequenz der Lösung symbolisiert. Durch Kalibrierungsmessung an ungedehntem Silizium lässt sich diese Eigenkreisfrequenz, genannt RAMANshift und angegeben in relativen Wellenzahlen, mit dem RAMANSpektrometer bestimmen, und zwar zu rund 520 cm^{-1} , [21]. Der RAMANshift ist vom Prinzip her unabhängig von der Frequenz des eingestrahnten Lichtes. Aus Konventionsgründen arbeitet man zur Beschreibung der Kreisfrequenzen mit sog. „relativen Wellenzahlen“. Relative Wellenzahlen und Kreisfrequenzen rechnen sich folgendermaßen um:

$$\omega = 2\pi\nu_f = 2\pi\frac{c}{\lambda} = 2\pi c\bar{\nu}, \quad \text{mit } [\omega] = \frac{1}{\text{s}}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{und} \quad [\bar{\nu}] = \frac{1}{\text{m}}, \quad (2.22)$$

wobei ν_f für die Schwingfrequenz, c für die Lichtgeschwindigkeit, λ für die Wellenlänge und $\bar{\nu}$ für die „(relative) Wellenzahl“ steht. Relative Wellenzahlen sind die Differenz reziproker Wellenlängen zwischen Anregungs- und Gitterschwingungswellenlänge λ_E und λ_{ph} :

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda_E^{-1}} - \frac{1}{\lambda_{\text{ph}}^{-1}} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_E^{-2}}. \quad (2.23)$$

Für Silizium werden in der o.g. Literatur beispielsweise folgende Zahlenwerte genannt:

$\omega_0 \approx 98,5 \text{ THz}$	... Kreisfrequenz	(2.24)
$\nu_0 \approx 15,7 \text{ THz}$	... Frequenz	
$\bar{\nu}_0 \approx 52100 \text{ m}^{-1} = 521 \text{ cm}^{-1}$	... Wellenzahl	
$k_0 = \frac{\omega_0}{c} \approx 3283 \text{ cm}^{-1}$	... Kreiswellenzahl .	

Durch den von GANESAN, et al. (1970) [38] beschriebenen „Morphic Effect“ wird die normalisierte effektive Kraftkonstantenmatrix in linearer Weise durch die Anwesenheit von Dehnungen, ausdrückbar mit dem linearisierten Dehnungstensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$, beeinflusst (erste Näherung):

$$\underline{\underline{\hat{K}}}^{\text{eff}} = \underline{\underline{\hat{K}}}_0^{\text{eff}} + \underline{\underline{P}}^{(4)}[\underline{\underline{\varepsilon}}] , \quad (2.25)$$

worin $\underline{\underline{P}}^{(4)}$ den Tensor der Phononendeformationspotentiale beschreibt. Der PDP Tensor ist ein Tensor vierter Ordnung und kann mit Hilfe der VOIGT'schen Notation, bzw. dem Indizierungsschema: 11 $\rightarrow$ 1, 22 $\rightarrow$ 2, 33 $\rightarrow$ 3, 23 $\rightarrow$ 4, 31 $\rightarrow$ 5, 12 $\rightarrow$ 6 für einkristallines Silizium folgendermaßen aufgeschrieben werden, [7]:

$$\underline{\underline{P}}^{(4)} = \omega_0^2 \begin{bmatrix} p & q & q & 0 & 0 & 0 \\ q & p & q & 0 & 0 & 0 \\ q & q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} , \quad \begin{matrix} p = -1.49 \pm 0.06 \\ q = -1.97 \pm 0.06 \\ r = -1.61 \pm 0.06 \end{matrix} . \quad (2.26)$$

Die Kombination von Gleichung (2.21) und (2.25) führt zur veränderten Eigenwertgleichung der RAMANSpektroskopie:

$$\det \left(\underline{\underline{P}}^{(4)}[\underline{\underline{\varepsilon}}] - \lambda \underline{\underline{I}} \right) = 0 , \quad (2.27)$$

bei der die Eigenwerte λ ausgedrückt werden mit $\lambda = (\omega^2 - \omega_0^2) \approx 2\omega_0 \Delta\omega$, wobei nun ω_0 die Eigenkreisfrequenz des ungedehnten und ω die Eigenkreisfrequenz des gedehnten Systems ist. Ein skalarer Zusammenhang zwischen der Verschiebung der Eigenkreisfrequenz aufgrund von Dehnung kann nur herbeigeführt

werden, wenn die Anzahl unbekannter Dehnungstensoranteile nicht größer ist als die Anzahl der messbaren Schwingungsmoden im Kristall. In Vorgriff auf die Experimentierführung sei die Einschränkung der Dehnungstensoranteile in einem festen Koordinatensystem folgendermaßen gegeben:

$$\varepsilon_{yy} = \nu_y \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = \nu_z \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (2.28)$$

Die entsprechenden Querkontraktionszahlen $\nu_y = 0,064$ und $\nu_z = 0,279$, der ebenfalls im Experiment bekannten Kristallachsenorientierung, sind durch Literaturwerte aus der Veröffentlichung [48] gegeben. Aus dem Grund, dass die Kristallachsenorientierung im Experiment nicht mit dem festen Koordinatensystem koinzidiert ((001)-Oberfläche und [110] als Balkenlängsrichtung), wird der PDP Tensor mit Hilfe des tensoriellen Zusammenhangs:

$$P'_{ijkl} = A_{im} A_{jn} A_{ko} A_{lp} P_{mnop}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

(unter Beachtung der EINSTEINSchen Summenkonvention) gedreht. Unter Verwendung der so justierten Komponenten des PDP Tensors ergibt sich die veränderte Eigenwertgleichung der RAMANSpektroskopie unter Einbeziehung aller bisherigen Annahmen zu:

$$\det \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx}(p' + q'\nu_y + q\nu_z) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx}(q' + p'\nu_y + q\nu_z) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx}(p\nu_z + q\nu_y + q) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.30)$$

Mit Hilfe der Kenntnis der Kristallorientierung im Experiment und der Einstellung der Polarisatoren am Gerät, gemäß der Vektoren: $\underline{e}_I = \underline{e}_S = [1, 1, 0]$, wird die dritte Mode der Gitterschwingungen in dieser Polarisationskonfiguration selektiert, wodurch sich folgender skalare Zusammenhang zwischen den RAMAN-Frequenzverschiebungen und der Dehnung in x -Richtung aufstellen lässt:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{2\omega_0 \Delta\omega}{p\nu_z + q\nu_y + q} \Rightarrow \varepsilon_{xx}^{\text{Raman}} = -1.4 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} . \quad (2.31)$$

Diese Formel ist zur Übersichtlichkeit mit dem Superskript „Raman“ versehen und gilt für konstante Dehnungen in x -Richtung im Streuvolumen des Rückstreuortes des Laserstrahls von der Probe.

2.3.3 Biege- und Dehnungsmessungen an Silizium

Einkristallines Silizium ist ein gängiger Werkstoff in der Mikrosystemtechnik. Aufgrund seiner sehr genau untersuchten physikalischen und chemischen Eigenschaften, lässt er sich auch im sub-Millimeterbereich mit hoher Genauigkeit strukturieren. Konventionelle Atomkraftmikroskope arbeiten mit miniaturisierten Federbalken aus Silizium, die oft nur einige Mikrometer hoch sind. Die Biege- und Dehnungsmessungen dieser Arbeit wurden an solchen kommerziellen AFM-Balken im Höhenbereich von $1,0 - 7,0 \mu\text{m}$ durchgeführt. Zunächst sollen die Biegeprüfungen dargelegt werden:

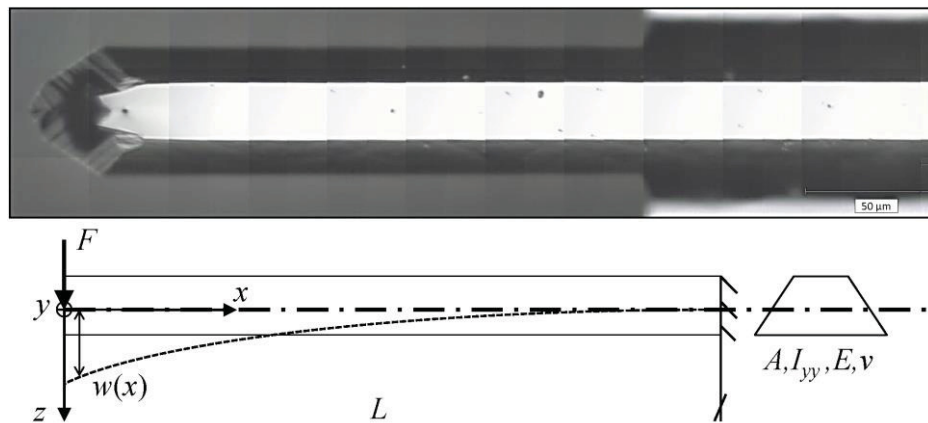


Abbildung 2.25: Exemplarischer AFM-Biegebalken mit dazugehörigem Koordinatensystem.

Der Kraftapplikationspunkt kann in Mikroskopbildern jeweils als grauer schattiger Punkt, wie im oberen Bild von Abbildung 2.25 auf der linken Seite erkennbar, ausgemacht werden. Von diesem aus wurde die jeweilige Länge L lichtoptisch bis zur Einspannstelle (dem Übergang zum Vollmaterial) gemessen.

Die Belastung erfolgte gemäß der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Prozedur der Subtraktion der Kraft-Weg-Daten der AFM-Nadel, die auf einer festen Oberfläche positioniert wurde, von den Daten, bei der die AFM-Nadel auf dem freistehenden Mikrobalken operierte. Durch das Auswerten der Messdaten für Kraft, Durchbiegung und der äußeren Abmaße wurden die E -Modulwerte gemäß der Formel:

$$E = \frac{FL^3}{3wI_{\text{tr}}} , \quad (2.32)$$

berechnet, wobei das Flächenträgheitsmoment eines trapezförmigen Querschnittes mit der kleinsten Breite B_1 und der größten Breite B_2 lautet:

$$I_{\text{tr}} = \frac{H^3}{36} \frac{B_1^2 + 4B_1B_2 + B_2^2}{B_1 + B_2} . \quad (2.33)$$

Die Ergebnisse sind an Silizium mit einer Kristallachsenorientierung einer (001)-Oberfläche und [110]-Richtung entlang der Balkenlängsrichtung aufgenommen worden und in der Abbildung 2.26 sowie der Tabelle 2.7 dargestellt.

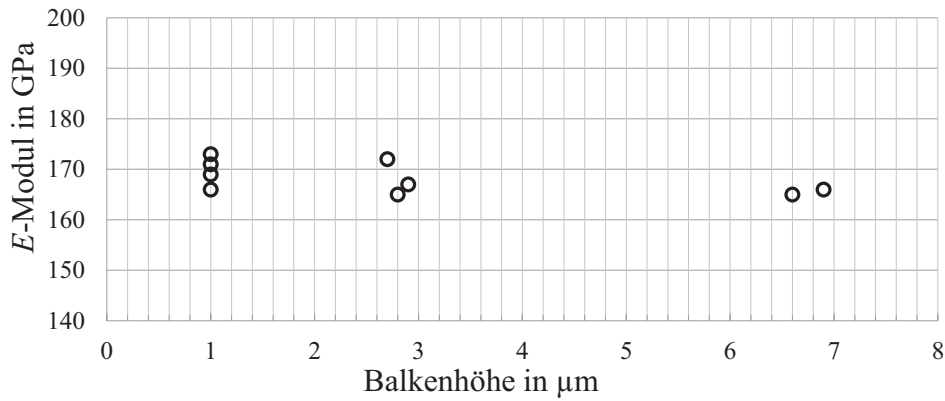


Abbildung 2.26: Rohdaten der E -Modulwerte der untersuchten Mikrobalken aus einkristallinem Silizium.

Länge in μm	Höhe in μm	Breite B_1 (B_2) in μm	E -Modul in GPa
140	6,9	17 (41)	166
175	6,6	17 (41)	165
130	2,7	18 (30)	172
130	2,8	18 (30)	165
90	2,9	18 (30)	167
50	1,0	40 (44)	166
130	1,0	40 (44)	169
120	1,0	49	173
150	1,0	49	171

Tabelle 2.7: Abmaße und Messdaten der untersuchten Mikrobalken aus Silizium.

Im Folgenden soll der *Ablauf der Dehnungsmessung* an dem ca. 7 μm hohen Siliziumbalken beschrieben werden:

- Unter Einhaltung der am Anfang des Kapitels genannten Koordinatensysteme und Kristallachsenorientierungen der Probe wurde der ca. 200 μm lange Balken mit seiner Längsachse in Richtung der x -Komponente des XYZ-Mikroskoptisches in die Probenaufnahme des AFMs gelegt und so positioniert, dass die AFM-Nadel am freistehenden Ende (bei genau $L=191 \mu\text{m}$) eine über die Zeit konstante Kraft applizieren kann.
- Der Laserstrahl der Anregungswellenlänge von 532 nm wurde auf die Siliziumoberfläche fokussiert und die RAMANlinie mit je sechs Sekunden Belichtungszeit der CCD-Kamera pro Rasterpunkt aufgezeichnet.
- Die Rasterpunkte verliefen dabei zum einen bei einer Last von 250 μN vom Lastpunkt aus entlang der Balkenachse in einer Linie bis kurz hinter die Einspannung (genannt: „Linienscan“) und zum anderen bei einer Last von 185 μN schlängelförmig über eine Fläche in der Nähe der Einspannung (genannt: „Flächenscan“). Jeweils nach jedem 50sten Rasterpunkt wurde eine automatische Refokussierung des Laserspots durchgeführt, als Ausgleich für die Biegung der Siliziumoberfläche von einigen Mikrometern.

- Die Rasterpunkte wurden im ersten Schritt ohne eine Aufbringung der Last gemessen, um eine Grundlage für die RAMAN-Banden des unbelasteten Siliziums zu erhalten. Im jeweils zweiten Schritt wurden dieselben Rasterpunkte, nun jedoch unter Belastung des Mikrobalkens, abgefahren.

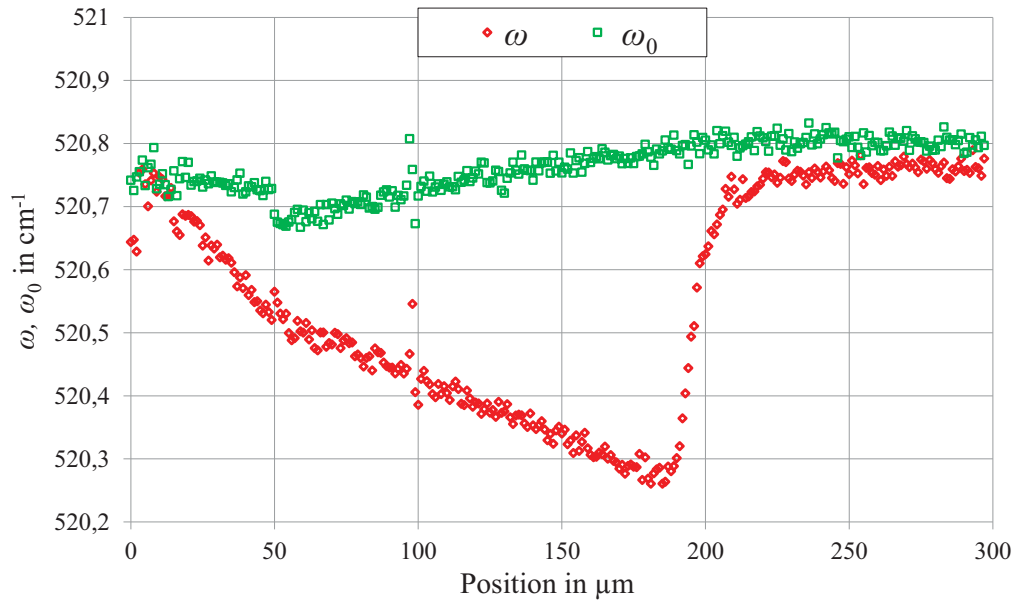


Abbildung 2.27: Rohdaten der RAMANshifts entlang der Balkenachse eines 191 μm langen Mikrobalkens aus einkristallinem Silizium.

Die reinen Messwerte der spektralen Lage sind ohne Berücksichtigung der Neonlichtkorrektur für den Linienscan in Abbildung 2.27 geplottet. Direkt zu erkennen sind die sprunghaften Einflüsse auf die Messwerte durch den Auto-Fokus Algorithmus zum Fokussieren des Laserspots alle 50 μm . Der Einfluss des optomechanischen Drifts ist an dem durchschnittlichen Abstand der Messwerte im Bereich der Einspannung zwischen 250–300 μm zu erkennen. Diese sind jeweils am Anfang und am Ende der Messprozedur aufgenommen worden, zwischen dem eine zeitliche Differenz von etwa eine Stunde lag. Darüber hinaus ist schon am unbelasteten Balken ein leichter Drift der Messwerte entlang der Balkenachse bemerkbar. Dieser überschreitet den Drift des optomechanischen Aufbaus wie in Abbildung 2.23 dargestellt bei Weitem und zeigte in diversen Untersuchungen

eine positive Korrelation zur Laserenergie. Dies weist auf einen direkten Temperatureinfluss durch die eingestrahlte Laserenergie auf das sehr kleine Balkenvolumen hin und sollte in zukünftigen Forschungsarbeiten mit der RAMANSpektroskopie an sehr kleinen Volumen näher untersucht werden. Im vorliegenden Fall wird davon ausgegangen, dass die Dehnungsmessung aufgrund der Differenzbildung von unbelastetem zu belastetem Mikrobalken nicht beeinflusst wird, da die Dehnungen aufgrund von Temperaturunterschieden sowohl den unbelasteten als auch den belasteten Fall überlagern und von der Größenordnung her klein sind.

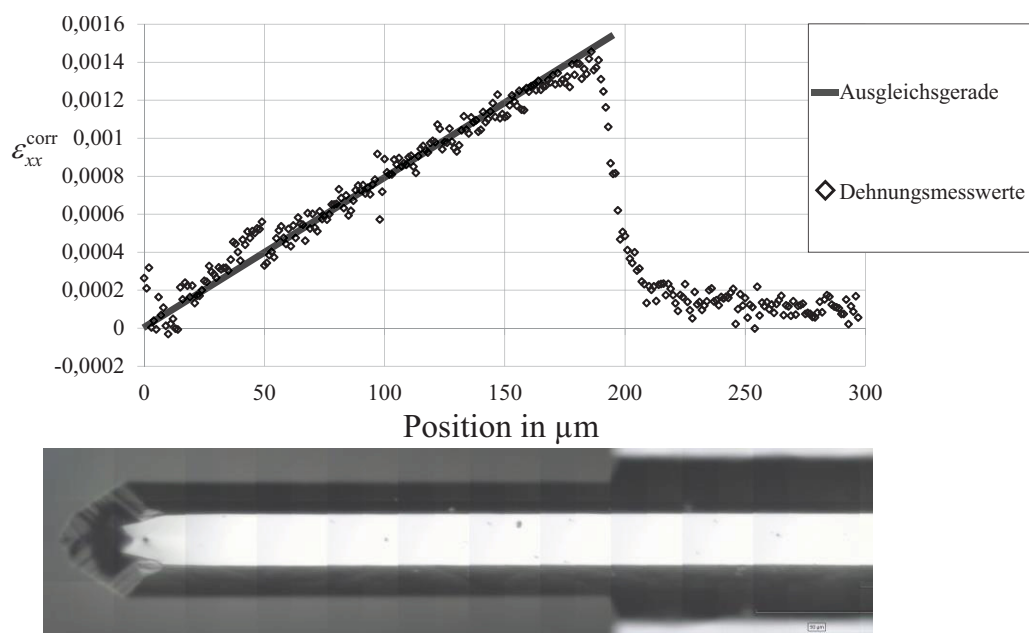


Abbildung 2.28: Dehnungsmesswerte entlang der Balkenachse eines 191 μm langen Mikrobalkens aus einkristallinem Silizium.

Nach der Neonlichtkorrektur der Messwerte und Auswertung nach der Gleichung (2.31) entstand die Darstellung der Dehnungswerte des Linienscans gemäß Abbildung 2.28. Die Ausgleichsgerade zeigt und bestätigt den linearen Zusammenhang zwischen der Balkenkoordinate und der Dehnung der oberen Faser. Der Messverlauf zeigt aber auch einen nicht sprunghaften Abfall der Dehnungen im Bereich der Einspannung. Für den Flächenscan sind die Messwerte der

Dehnungen unter Berücksichtigung der Neonlichtkorrektur nach Gleichung (2.31) in Abbildung 2.29 farblich über die gemessene Fläche aufgetragen.

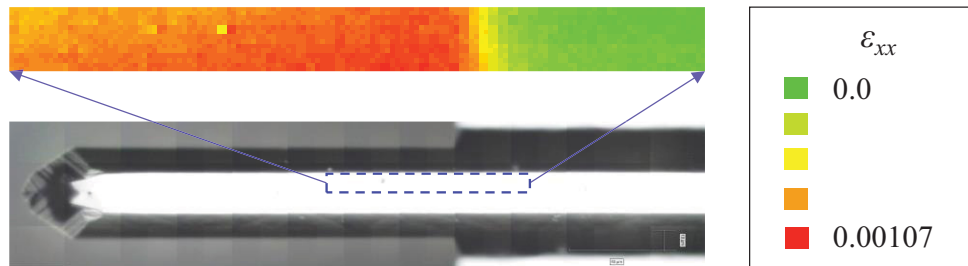


Abbildung 2.29: Farblich dargestellte Dehnungsmesswerte am 191 μm langen Mikrobalken aus einkristallinem Silizium.

3 Analytische Größeneffektmodellierung

Zur Modellierung der in einigen oben gezeigten Experimenten auftretenden Abhängigkeit der Biegesteifigkeit von den äußeren Abmaßen sollen im Folgenden höhere kontinuumstheoretische Modelle erarbeitet werden, die es erlauben werden, das konventionelle Modell der Balkenbiegung mit konstanter Biegesteifigkeit zu verfeinern. Ziel der verschiedenen Ansätze soll es jeweils sein, diskrete Gleichungen zur Verformungsberechnung bereitzustellen. Die verschiedenen Ansätze umfassen zusätzlich zur klassischen Kontinuumsmechanik die *mikropolare Kontinuumstheorie*, die *Dehnungsgradiententheorie*, die *Momentenspannungstheorie* und die *Oberflächentheorie*.

3.1 Klassische Kontinuumsmechanik

Basierend auf den Werken von beispielsweise BECKER und BÜRGER [6], ALTENBACH und ALTENBACH [1], GREVE [41], BERTRAM [11] oder MÜLLER [69], werden in diesem Kapitel die Grundlagen der Kontinuumsmechanik erklärt und dabei im Besonderen diejenigen Aspekte herausgestellt, an die die „höheren“ Theorien anknüpfen können. Die Kontinuumstheorie ist eine Feldtheorie, sie gilt als Teilgebiet der Mechanik und birgt im Allgemeinen eine phänomenologische Herangehensweise. Sie erlaubt, ausgehend von Beobachtungen zur Deformation von Körpern aufgrund äußerer Belastung, ein Modell zu kreieren, welches den Beobachtungen sehr nahe kommen soll. Der Begriff „Kontinuum“ ist dabei ein Verweis auf die Vorstellung, dass die betrachtete Materie aus sog. „materiellen Punkten“ besteht, die im EUKLIDischen Raum kontinuierlich verteilt sind und beliebig genau identifiziert werden können. Als einen Körper versteht man demnach eine kompakte, zusammenhängende Menge solcher materiellen Punkte. Die Kontinuumsmechanik wird als Feldtheorie bezeichnet, da in ihr klassischerweise die Größen Massendichte, Temperatur und die drei Komponenten der Geschwindigkeit in jedem materiellen Punkt gesucht werden. In höheren Kontinua kann die Anzahl der Feldgrößen zum Beispiel zunehmen.

3.1.1 Grundlagen der Kinematik

Die Kinematik beschreibt die reine Geometrie der Bewegung materieller Punkte ohne die Ursache zu berücksichtigen. Damit wird man in die Lage versetzt, den Ort, die Bewegung und die Deformation eines Körpers $\mathcal{K}$ über die Zeit t zu erfassen. Als Konfiguration des Körpers bezeichnet man eine Platzierung im EUKLIDischen Raum $\mathfrak{R}^3$, die definiert ist durch eine stetige ein-eindeutige Zuordnung von Ortsvektoren x_i zu den materiellen Punkten P und umgekehrt. Die stetige zeitliche Aufeinanderfolge von Konfigurationen heißt die Bewegung χ_i vom Körper $\mathcal{K}$. In Deformationsprozessen wird eine *Referenzkonfiguration* $\mathcal{B}_0$ des Körpers als bekannt vorausgesetzt und auch als materielle oder LAGRANGESche Konfiguration bezeichnet. Dessen Ortsvektoren seien mit X_i gekennzeichnet (mit $i, j, k, l, m, n, o, p, r, s, A, B, C=1, 2, 3$). Eine Konfiguration zum Zeitpunkt t wird *Momentankonfiguration* $\mathcal{B}_t$ und auch räumliche oder EULERSche Konfiguration genannt. Dessen Ortsvektoren heißen $x_i(t)$ (vergleiche Abbildung 3.1). Ab diesem Kapitel wird die Indexschreibweise von Vektoren und Tensoren unter Anwendung der Summationsregel bei doppelter Indizierung (EINSTEINSche Summenkonvention) verwendet.

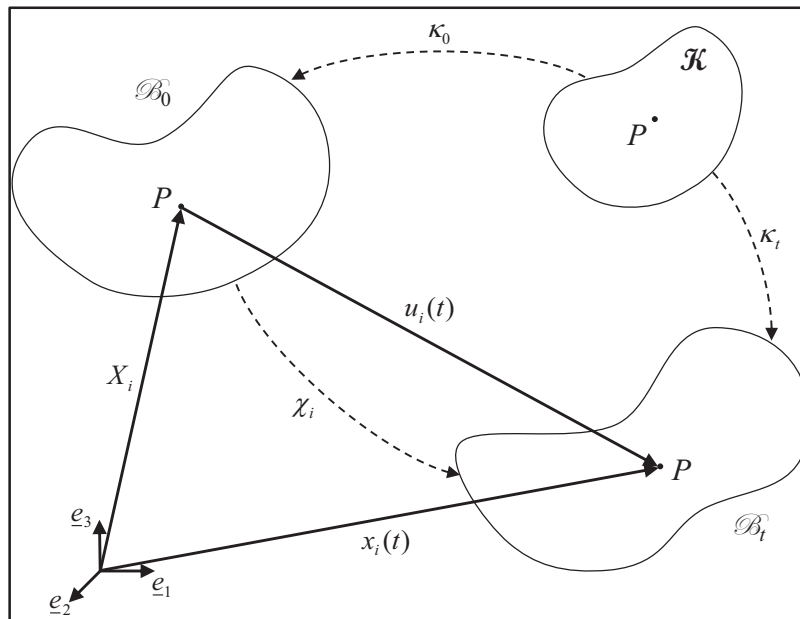


Abbildung 3.1: Referenz- und Momentankonfiguration eines deformierbaren Körpers.

Es lassen sich dabei folgende Zusammenhänge erkennen:

$$x_i = \chi_i(X_i, t) \quad (3.1)$$

und (nach [11]):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &:= \kappa_0(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}_t &:= \kappa_t(\mathcal{K}, t) \subset \mathbb{R}^3 \\ \chi_i(\cdot, t) &:= \kappa_t(\kappa_0^{-1}(\cdot), t) : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Differenz der Ortsvektoren aus der Referenz- und der Momentanplatzierung ist der Verschiebungsvektor u_i :

$$u_i(X_i, t) = \chi_i(X_i, t) - X_i . \quad (3.3)$$

Zeitliche Ableitungen einer Feldgröße ψ können in der materiellen (LAGRANGESchen) Darstellung mit dem Subskript „L“:

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi_L(X_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_L(X_i, t)}{\partial X_i} \underbrace{\frac{dX_i}{dt}}_{=0} , \quad (3.4)$$

oder in der räumlichen (EULERSchen) Darstellung mit dem Subskript „E“:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi_E(x_i(X_i, t), t)}{dt} = \frac{\partial \psi_E(x_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_E(x_i, t)}{\partial x_i} \overbrace{\frac{dx_i(X_i, t)}{dt}}^{=v_i} , \quad (3.5)$$

wobei v_i die Geschwindigkeit des beobachteten Punktes ist, geschrieben werden. Die EULERSche Beschreibung setzt sich aus einem lokalen und einem konvektiven Anteil zusammen. Aus den Gleichungen (3.4) und (3.5) ist der Zusammenhang beider Schreibweisen ableitbar:

$$\frac{\partial \psi_L}{\partial t} = \frac{\partial \psi_E}{\partial t} + \frac{\partial \psi_E}{\partial x_i} v_i . \quad (3.6)$$

Ortsableitungen einer Feldgröße ψ sind ebenfalls in der materiellen (LAGRANGESchen) Darstellung:

$$d\psi_L = \frac{\partial \psi_L(X_i, t)}{\partial X_i} dX_i , \quad (3.7)$$

oder in der räumlichen (EULERSchen) Darstellung:

$$d\psi_E = \frac{\partial \psi_E(x_i, t)}{\partial x_i} dx_i \quad (3.8)$$

beschreibbar und werden in diesem Kontext als Gradienten bezeichnet. Ein für die Kontinuumsmechanik wichtiger Gradient ist der der Bewegung χ_i . Der materielle Gradient der Bewegung ist definiert als **Deformationsgradient** F_{ij} :

$$F_{ij} = \frac{\partial \chi_i(X_j, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} , \quad (3.9)$$

wobei die Namensgebung irreführend ist, denn er beinhaltet auch die starre Rotation des Körpers (bei der sich dieser nicht deformiert). Der Deformationsgradient verknüpft vielmehr Linien-, Flächen- und Volumenelemente (dX_i , dA_i und dV) aus der Referenz- mit Linien-, Flächen- und Volumenelementen (dx_i , da_i und dv) aus der Momentankonfiguration und umgekehrt:

$$\begin{aligned} dx_i &= F_{ij} dX_j \Leftrightarrow dX_i = F_{ij}^{-1} dx_j , \\ da_i &= J F_{ji}^{-1} dA_j , \\ dv &= J dV , \text{ mit } J = \frac{1}{6} \epsilon_{ABC} \epsilon_{ijk} F_{iA} F_{jB} F_{kC} . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Der in der Gleichung (3.10)₃ benutzte Tensor dritter Stufe wird als Epsilon-Tensor, vollständig antisymmetrischer Tensor, Permutationssymbol, oder nach dem italienischen Mathematiker LEVI-CIVITA-Symbol benannt und ist im kartesischen Koordinatensystem definiert als:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } i, j, k = (1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2) \\ -1 & \text{für } i, j, k = (1, 3, 2); (3, 2, 1); (2, 1, 3) \\ 0 & \text{für } i = j; i = k; j = k \end{cases} . \quad (3.11)$$

Die Determinante des Deformationsgradienten wird auch als JACOBI-Determinante J bezeichnet und steht in diesem Kontext für die Volumenänderung bei Deformation.

Verzerrungstensoren werden im Folgenden hergeleitet, um einheitliche Maße für die Gestaltänderung zu finden. Dazu sei zunächst der materielle Gradient der Verschiebung definiert als:

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i(X_i, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i(X_i, t)}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} , \quad (3.12)$$

wobei δ_{ij} das KRONECKER Symbol (den Einheitstensor) symbolisiert. Bildet man die Differenz des Skalarproduktes zweier Linienelemente zwischen der Referenz- (dX_i und dY_i) und der Momentanplatzierung (dx_i und dy_i), lässt sich mit Hilfe der Transformation (3.10)₁ der sog. GREENsche Verzerrungstensor E_{ij}^G definieren:

$$\begin{aligned} dx_i dy_i - dX_j dY_j &= F_{ij} dX_j F_{il} dY_l - dX_j dY_j \\ &= dX_j (F_{ji} F_{il} dY_l - dY_j) \\ &= dX_j dY_l \underbrace{(F_{ji} F_{il} - \delta_{jl})}_{2E_{jl}^G} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dieser spezielle Tensor ist dimensionslos und durch den Deformationsgradienten bestimmt. Durch Substituieren des Deformationsgradienten mit dem Verschiebungsgradienten aus Gleichung (3.12), nämlich:

$$E_{ij}^G = \frac{1}{2} (F_{li} F_{lj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (H_{ij} + H_{ji} + H_{li} H_{lj}) , \quad (3.14)$$

kann der geometrisch lineare Anteil dieses Verzerrungsmaßes definiert werden, indem der letzte Summand, bestehend aus dem quadratischen Teil des Verschiebungsgradienten bei angenommenen kleinen Verzerrungen verschwinden soll.

Auf diesem Wege erhält man den *Verzerrungstensor kleiner Deformationen*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (H_{ij} + H_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = u_{(i,j)} \quad , \quad (3.15)$$

wobei zwischen materiellen und räumlichen Ortsableitungen nicht mehr unterschieden wird, da sich die Ortsvektoren der Referenz- und der Momentanlage gemessen an der charakteristischen Größe des Körpers kaum mehr unterscheiden. Man schreibt:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial X_i} \approx \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \quad . \quad (3.16)$$

Dieses Argument spielt vor allem bei der *geometrischen Linearisierung* in späteren Abschnitten eine wesentliche Rolle. Damit seien die kinematischen Grundlagen für die Zwecke dieser Arbeit dargelegt. Der Spannungstensor wird eingeführt, nachdem der Begriff der Kraft im Umfeld der Impulsbilanz erläutert wird.

3.1.2 Bilanzgleichungen

Eine Aufgabe der Kontinuumsmechanik ist es, die Feldgleichungen der Bewegung, der Dichte und der Temperatur eines kontinuierlichen Körpers bereitzustellen [41]. Dies gelingt über die kombinierte Auswertung von Massen-, Impuls-, Drehimpuls- und Energiebilanz in Verbindung mit geeigneten Materialgleichungen. Zum Aufstellen der speziellen Bilanzen für abgeschlossene Systeme wird von der allgemeinen Volumenbilanz ausgegangen. Im betrachteten Volumen $\mathcal{V}$ bleibt die Masse M zeitlich konstant (da abgeschlossen), die Form aber ist zeitabhängig $\mathcal{V}=\mathcal{V}(t)$. Nun werden beliebige skalar-, vektor-, oder tensorwertige Feldgrößen $\Psi(x_i, t)$ auf ihre zeitliche Veränderung über dem Volumen untersucht, wobei eine Bilanzgleichung in der Momentankonfiguration folgende allgemeine Struktur aufweist:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \psi dV = \int_{\partial \mathcal{V}(t)} f_i n_i dV + \int_{\mathcal{V}(t)} p dV + \int_{\mathcal{V}(t)} z dV, \text{ bzw. } \frac{d\Psi}{dt} = F + P + Z. \quad (3.17)$$

Darin ist n_i die nach außen gerichtete Einheitsnormale des Randes $\partial \mathcal{V}(t)$ des Volumens. Die zeitliche Änderung der untersuchten Feldgröße kann dabei beeinflusst werden durch:

- den Fluss F durch die Oberfläche des Volumens ($f_i n_i$ ist der spezifische Oberflächenfluss),
- die Produktion P der Feldgröße im Volumen (mit p als volumen-spezifische Produktion) und
- der Zufuhr Z im Inneren des Volumens (mit z als volumen-spezifische Zufuhr).

Fortan seien räumliche Ortsableitungen in der EULERSchen oder der LAGRANGE-schen Schreibweise durch ein Komma getrennte kleine, bzw. große Indizes symbolisiert ($j, A=1,2,3$):

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} = (\cdot)_{,j}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_A} = (\cdot)_{,A}. \quad (3.18)$$

Unter Anwendung des REYNOLDSSchen Transporttheorems ([68], S. 301, ff.):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \psi dV = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \oint_{\partial \mathcal{V}(t)} \psi v_i n_i dA, \quad (3.19)$$

mit v_i als Geschwindigkeitsfeld, und dem GAUSSschen Integralsatz für glatte Funktionen ψ :

$$\oint_{\partial \mathcal{V}(t)} \psi n_i dA = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV, \quad (3.20)$$

lässt sich eine allgemeine lokale Bilanzgleichung der Form:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi v_i + f_i) = z + p , \quad (3.21)$$

herleiten.

Die Massenbilanz materieller Körper in globaler und lokaler Form ergibt sich, indem die Feldgröße ψ mit der Dichte $\rho(t)$ ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{v(t)} \rho dV &= 0 \\ \text{und } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) &= 0 . \end{aligned} \quad (3.22)$$

In einem abgeschlossenen, materiellen System ist die Zufuhr z , die Produktion p und der Fluss $f_i n_i$ von Massendichte unzulässig. Für inkompressible Materialien erhält man sofort:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 . \quad (3.23)$$

Die Impulsbilanz ergibt sich durch das Ersetzen der Feldgröße ψ mit der Linearimpulsdichte ρv_i . Seit NEWTON ist bekannt, dass sich der Impuls durch Krafteinwirkung ändert. Folgt man dem allgemein akzeptierten, sog. Spannungsprinzip von EULER und CAUCHY, so lassen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte in Oberflächen- und Volumenkräfte aufteilen. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, u. a. durch die Ausführungen von W. NOLL [72] und R. FOSDICK [37], dass auch sog. Linienkräfte eingeführt werden könnten. Dies hätte jedoch solch weitreichende Folgen gegenüber den klassischen Formulierungen, dass es zukünftiger Forschung obliegt, eine Interpretation dieser Folgen zu liefern. Die allgemein akzeptierte Aufteilung der Kräfte ist:

$$K_i = B_i + T_i \Rightarrow \int_{v(t)} \rho \dot{v}_i dV = \int_{v(t)} \rho b_i dV + \int_{\partial v(t)} t_i dA . \quad (3.24)$$

K_i ist die Gesamtkraft, B_i ist die Volumenkraft (bzw. b_i der spezifische Volumenkräftevektor) und T_i die Oberflächenkraft (bzw. t_i der Oberflächenkrafts- oder der sog. Spannungsvektor). Mit Hilfe des CAUCHYSchen Tetraederargumentes lässt sich zeigen, dass es einen Tensor gibt, dessen Anteile in die Oberflächennormalenrichtung den Spannungsvektor darstellen:

$$t_i = n_j \sigma_{ji} . \quad (3.25)$$

Der Tensor σ_{ij} wird als CAUCHYScher Spannungstensor bezeichnet, dessen Symmetrie innerhalb dieses Kapitels besprochen wird. Durch das Einsetzen von Gleichung (3.25) in Gleichung (3.24) und durch Anwenden des GAUSSschen Integralsatzes zur Umwandlung von Oberflächen- in Volumenintegrale, erhält man:

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (3.26)$$

die Impulsbilanz in ihrer lokalen Form.

Die Drehimpulsbilanz kann herbeigeführt werden, indem man das Kreuzprodukt zwischen dem Linearimpuls und dem Ortsvektor ausführt, welches in Indexnotation mit dem LEVI-CIVITA-Symbol geschrieben werden kann als:

$$(\underline{x} \times \rho \underline{v}) = \rho \epsilon_{ijk} x_j v_k . \quad (3.27)$$

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße. Bilanziert man die zeitliche Änderung des lokalen Drehimpulses über das gesamte materielle Volumen und beachtet dabei, dass die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses gleich der Wirkung der von den äußeren Kräften (vgl. Gleichung (3.24)) stammenden Momenten ist, so sieht man:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_M \epsilon_{ijk} x_j v_k dm &= \int_{v(t)} \rho \epsilon_{ijk} x_j b_k dV + \int_{\partial v(t)} \epsilon_{ijk} x_j t_k dA \\
\Leftrightarrow \int_M (\epsilon_{ijk} \dot{x}_j v_k + \epsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k) dm &= \int_{v(t)} (\rho \epsilon_{ijk} x_j b_k + \epsilon_{ijk} (x_j \sigma_{lk,l})_l) dV \\
\Leftrightarrow \int_{v(t)} \rho \epsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k dV &= \int_{v(t)} (\rho \epsilon_{ijk} x_j b_k + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}) dV \quad (3.28) \\
\Leftrightarrow 0 &= \int_{v(t)} (\epsilon_{ijk} x_j [-\rho \dot{v}_k + \rho b_k + \sigma_{lk,l}] + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk}) dV \\
\Rightarrow 0 &= \int_{v(t)} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV .
\end{aligned}$$

Dabei ist bei den Umformungen mit eingeflossen, dass: $\epsilon_{ijk} \dot{x}_j v_k = 0$, $t_k = \sigma_{lk} n_l$, $x_{j,l} = \delta_{jl}$ und $-\rho \dot{v}_k + \rho b_k + \sigma_{lk,l} = 0$. Letzteres ist die in Gleichung (3.26) aufgestellte Linearimpulsbilanz. Durch das Aufspalten des Spannungstensors in seinen symmetrischen σ_{kj}^{Sym} und antisymmetrischen Anteil $\sigma_{kj}^{\text{Asym}}$, besagt die lokale Form der betrachteten Bilanz (3.28)₅, $\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$, dass der antisymmetrische Anteil des Spannungstensors null sein muss, um die Drehimpulserhaltung zu garantieren:

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = \underbrace{\epsilon_{ijk} (\sigma_{jk}^{\text{Sym}} + \sigma_{jk}^{\text{Asym}})}_{=0} = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk}^{\text{Asym}} . \quad (3.29)$$

Der Axialteil eines symmetrischen Tensors ist gleich null (was leicht durch ausmultiplizieren aller Indizes nachvollzogen werden kann). Damit muss der CAUCHYSche Spannungstensor in der klassischen Theorie symmetrisch $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$ sein (im Gegensatz zur mikropolaren Theorie).

Die Bilanz der Gesamtenergiedichte besteht additiv aus der zeitlichen Änderung der inneren Energiedichte u sowie der kinetischen Energiedichte $\rho v_i^2/2$. Auch sie ist eine Erhaltungsgröße ohne Produktionsterm. Eine Änderung der Gesamtenergie eines Körpers gelingt durch die Zufuhr von Wärme q_i (dem Wärmeflussvektor), der Leistung der Oberflächen- und Volumenkräfte (t_i und b_i) und einer Strahlung r (der spezifischen Strahlungsdichte). Man schreibt in globaler Form:

$$\frac{d}{dt} \int_M \left(u + \frac{v_i^2}{2} \right) dm = \oint_{\partial \mathcal{V}(t)} (-q_j n_j + v_i \sigma_{ji} n_j) dA + \int_{\mathcal{V}(t)} (\rho v_i b_i + \rho r) dV . \quad (3.30)$$

Nach Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes, der Produktregel bei der zeitlichen Ableitung in Gleichung (3.30) und der Massenbilanz in lokaler Form, erhält man die lokale Form der Bilanz der Gesamtenergie zu:

$$\left(\rho u + \rho \frac{v_i^2}{2} \right)^{\cdot} = (-q_j + v_i \sigma_{ji})_{,j} + \rho v_i b_i + \rho r . \quad (3.31)$$

Betrachtet man den Fall ohne einen Wärmefluss und ohne eine Energiezufuhr aus Strahlung, und führt die Produktregel der zeitlichen Ableitung und die Kettenregel bei der Differentiation in (3.31) aus, so ergibt sich durch geeignetes Umstellen:

$$\rho \dot{u} = v_{i,j} \sigma_{ji} + v_i \underbrace{(-\rho \dot{v}_i + \sigma_{ji,j} + \rho b_i)}_{= 0 \text{ (Impulsbilanz)}} . \quad (3.32)$$

Mit der Beziehung (3.3) lässt sich der Geschwindigkeitsgradient durch die Verschiebungen u_i ausdrücken, und die Nachdifferentiation nach X_k bringt:

$$\begin{aligned} \rho \dot{u} &= \sigma_{ji} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{,j} = \sigma_{ji} \left(\frac{\partial (u_i + X_i)}{\partial t} \right)_{,j} = \sigma_{ji} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{,j} = \sigma_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \\ &= \sigma_{ji} \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \sigma_{ji} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \sigma_{ji} \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right)}_{H_{ik}} \underbrace{\frac{\partial X_k}{\partial x_j}}_{F_{kj}^{-1}} \\ &= \sigma_{ji} \dot{H}_{ik} F_{kj}^{-1} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die partielle zeitliche Ableitung geht in eine vollständige über, da:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) = \frac{\partial}{\partial X_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \frac{dX_l}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \frac{dt}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) . \quad (3.34)$$

Durch die geometrische Linearisierung gemäß Gleichung (3.16) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho \dot{u} &= \sigma_{ji} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} \\ \rho du &= \sigma_{ji} du_{i,j} . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Mittels einfacher Tensoralgebra kann die infinitesimale Änderung des Verschiebungsgradienten $du_{i,j}$ in $du_{(i,j)} = d\epsilon_{ij}$ (der infinitesimalen Änderung des symmetrischen Anteils des Verschiebungsgradienten) umgewandelt werden, siehe hierzu Anhang A1. Diese ausführliche Herleitung hat gezeigt, dass für kleine Verformungen der Geschwindigkeitsgradient mit der Dehnungsrate ersetzt werden kann: $v_{i,j} \approx \dot{\epsilon}_{ij}$, vgl. MÜLLER (2011) [69], ff. S. 144. Unter zusätzlich angenommener linearer Abhängigkeit der Spannungen von den Dehnungen, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ij})$ (lineare Elastizität, oder auch physikalische Linearisierung genannt), ergibt sich nach Integration von (3.35)₂:

$$\begin{aligned} \rho \int_{u(t_0)}^{u(t_1)} du &= \int_{\tilde{\epsilon}_{ij}=0}^{\tilde{\epsilon}_{ij}=\epsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\tilde{\epsilon}_{ij}) d\tilde{\epsilon}_{ij} \\ \Rightarrow u^{\text{klass}} &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} , \end{aligned} \quad (3.36)$$

wobei $u^{\text{klass}} = \rho(u(t_1) - u(t_0))$ nun die Änderung der spezifischen inneren Energie der Verformung ist: die *Formänderungsenergiegedichte* der klassischen Theorie.

3.1.3 Materialgesetze – Prinzipien der rationalen Mechanik

Für die Klasse der nicht-mikromorphen Kontinua (Punktkontinua) sind die im Abschnitt 3.1 vorgestellten Bilanzgleichungen universell [6], d.h. sie konnten unabhängig von weiteren Materialannahmen aufgestellt werden. Um das Ziel der Kontinuumsmechanik zu erreichen, die Gleichungen für die Dichte, die Temperatur und der Bewegung bereit zu stellen, fehlen sog. konstitutive Gleichungen (Materialgleichungen) für die verbleibenden Unbekannten: die innere Energie, der Wärmefluss und die mechanischen Spannungen. In dieser Arbeit werden rein mechanische Materialgesetze behandelt. Der allgemeinste Zusammenhang für ein Materialgesetz für die mechanischen Spannungen in dem betrachteten Punkt x_n , welche abhängen von den Zielfunktionen: Massendichte ρ , Bewegung χ_l und Temperatur θ , lautet (vgl. [67], S. 43, ff.):

$$\sigma_{ij}(x_n, t) = F^\sigma \Big|_{X \in \mathcal{K}}^{\infty} \left[\rho(X, t-s), \chi_l(X, t-s), \theta(X, t-s); x_n \right], \quad (3.37)$$

in der sich zudem die Abhängigkeit aller Punkte X des Körpers $\mathcal{K}$ zu allen Zeiten $t-s$ in dem Funktional F^σ äußert. Ein Funktional ist eine Funktion die ihrerseits auf Funktionen angewendet wird. Durch das **Prinzip des Determinismus** ist die zeitliche Abhängigkeit des Funktionals auf die aktuelle, auf die vergangenen, nicht aber auf zukünftige Konfigurationen beschränkt. Das **Prinzip der Lokalität** besagt, dass die Spannungen eines materiellen Punktes von der Bewegung einer finiten Nachbarschaft des Punktes x_n beeinflusst werden können. Beeinflussen weiter entfernte Nachbarschaftspunkte das Materialverhalten des betreffenden Punktes, nennt man dies eine nicht-lokale Theorie. Eine TAYLOR-Reihe der räumlichen Fortsetzung überführt die Abhängigkeit von allen Punkten X des Körpers in eine Abhängigkeit der Gradienten der jeweiligen Variablen:

$$\sigma_{ij}(x_n, t) = F^\sigma \Big|_{s=0}^{\infty} \left\{ \rho(x_n, \tau), \rho_{,A}, \rho_{,AB}, \dots, \chi_i(x_n, \tau), \chi_{i,A}, \chi_{i,AB}, \dots, \theta(x_n, \tau), \theta_{,A}, \dots \right\}. \quad (3.38)$$

τ ist dabei eine Substitution von $t-s$. Im Folgenden wird gezeigt, wie die Anzahl der Variablen und ihrer Gradienten verringert werden kann. Die zeitliche Abhängigkeit des Funktionals wird darüber hinaus auf Materialien ohne Gedächtnis

eingeschränkt, so dass ausschließlich die Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t die Spannungen determiniert, was zur Folge hat, dass das Funktional F^σ in eine Funktion $\hat{\sigma}$ übergeht. Das **Prinzip der Lokalität für einfache Materialien** begrenzt den Einfluss materieller Punkte auf die einer infinitesimalen Nachbarschaft, wodurch die Ableitungsordnung der TAYLOR-Reihenentwicklung der Variablen beschränkt werden kann auf Ableitungen ausschließlich erster Ordnung:

$$\sigma_{ij}(x_n, t) = \hat{\sigma} \{ \rho(x_n, t), \rho_{,A}, \chi_i(x_n, t), \chi_{i,A}, \theta(x_n, t), \theta_{,A}, \dots \} . \quad (3.39)$$

Durch das Umschreiben der Massenbilanz lässt sich die Dichte sowie der Gradient der Dichte mit Hilfe des Deformationsgradienten ausdrücken ($\rho = \rho_0 / \det(F_{ij})$). In diesem Sinne ist damit das Funktional nicht mehr direkt abhängig von der Dichte, als vielmehr vom Deformationsgradienten. Der Gradient der Bewegung kann per Definition (3.9) mit dem Deformationsgradienten ersetzt werden. Eine Temperaturabhängigkeit soll für die hier behandelten Materialien vernachlässigt werden. Mit Hilfe der **Prinzipien der EUKLIDischen Invarianten**, wie dem *Prinzip der materiellen Objektivität* oder der *Invarianz bei überlagerter Starrkörperbewegung* ([11], S. 155, ff.), lässt sich zeigen, dass die Bewegung an sich keinen Einfluss auf die Spannung hat. Damit bleibt als einzige Variable für die konstitutive Gleichung der mechanischen Spannungen der Deformationsgradient erhalten und damit die reduzierte Funktion:

$$\sigma_{ij}(x_n, t) = \hat{\sigma} \{ F_{ij}(x_n, t) \} . \quad (3.40)$$

Das *Prinzip der Invarianz bei überlagerter Starrkörperbewegung* bietet darüber hinaus den Vorteil, vom Beobachter unabhängige Funktionen aufzubauen. Wie oben erwähnt, ist F_{ij} kein einheitliches Maß der Verzerrung unter EUKLIDischer Transformation. Erst durch das Nutzen spezieller Verzerrungsmaße, wie z. B. dem GREENSchen Verzerrungstensor, lassen sich beobachterunabhängige Formen, so genannte reduzierte Formen aufstellen.

$$T_{ij}^{2PK}(x_n, t) = k \left(E_{ij}^G(x_n, t) \right). \quad (3.41)$$

T_{ij}^{2PK} bezeichnet dabei den zweiten PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor (ein materielles Spannungsmaß). Unter Verzicht des Hinweises auf die örtliche und zeitliche Abhängigkeit des Spannungs- und Verzerrungstensors ist die allgemeinste linear-elastische (hier physikalisch² linearisierte) konstitutive Beziehung das ST. VENANT-KIRCHHOFF Gesetz:

$$T_{ij}^{2PK} = H_{ijkl} E_{kl}^G, \quad (3.42)$$

wobei H_{ijkl} ein konstanter Steifigkeitstensor vierter Ordnung ist. Nach geometrischer Linearisierung ($E_{ij}^G \rightarrow \varepsilon_{ij}$, siehe Gleichung (3.15)), bleibt das allg. anisotrope HOOKESche Gesetz:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.43)$$

wobei C_{ijkl} der Tensor der elastischen Konstanten ist. Mit Hilfe hier nicht vorgeführter Symmetrieüberlegungen, lassen sich die Komponenten von C_{ijkl} schrittweise verringern. Im *isotropen* Fall, d.h. für volle Symmetrie, erhält man folgendes *linear-elastisches* Materialgesetz für kleine Verformungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \varepsilon_{kl} \\ &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die Materialkonstanten λ und μ sind die LAMÉschen Konstanten, mit den folgenden Beziehungen zum Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν :

² Physikalische Linearisierung meint die Beschränkung auf einen linearen Spannungs-Dehnungs-zusammenhang.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} . \quad (3.45)$$

Damit ist eine simple aber weit verbreitete Materialgleichung (3.44) in der Elastizität von Festkörpern motiviert und es ist aufgezeigt worden, welche grundlegenden Annahmen darin enthalten sind.

3.1.4 Balkenbiegung nach EULER und BERNOULLI

Dieses Kapitel skizziert den Einsatz der Mittel der Kontinuumsmechanik, um eine skalarwertige Funktion für die Größen der einfachen Balkenbiegung zu generieren. Ein „Balken“ ist hierbei ein Festkörper, dessen Länge um ein vielfaches größer ist, als seine Höhe oder Breite. Er soll im Unterschied zum Stab nur Kräfte senkrecht zu seiner Balkenachse aufnehmen können, weswegen er auch als „Träger“ bezeichnet wird. Ab einem Längen- zu Höhenverhältnis von mehr als 20 kann man von einem schlanken Balken sprechen. Die zu berechnenden Größen am Balken sind: die Durchbiegung an jedem Ort der Balkenachse (die Biegelinie), der Biegewinkel und die Krümmung an jedem Ort sowie die dort herrschenden Dehnungen und Spannungen infolge von Lasten. Die Balkenhypothese nach EULER und BERNOULLI beschreibt dabei das bei der Biegung „gedachte“ Verschiebungsfeld u_i , welches unter den folgenden Annahmen gilt:

- kleine Dehnungen,
- linear elastisches Material,
- isotropes Materialverhalten,
- keine Volumenkräfte,
- Statik,
- keine Querkontraktionskoppelung ($\nu=0$),
- die Schwerachse ist der gedachte Lastangriffspunkt,
- die Last wirkt senkrecht zur unverformten Schwerachse,
- alle Lasten wirken in einer Ebene,
- die Schwerachse ist die zentrale Verformungsgröße,
- die Querschnittsflächen bleiben eben,
- die Querschnittsflächen bleiben rechtwinklig zur Biegeachse.

Aus den verschiedenen Lagerungsfällen die ein Träger erfüllen kann, wird der des einseitig fest eingespannten Kragarms gewählt, der, wie in Abbildung 3.2 gezeigt, an seinem freien Ende mit der Einzelkraft F belastet wird und eine Linienlast $q(x)$ entlang der Balkenachse aufnehmen kann. Ziel ist es nun, die EULER-BERNOULLISCHE Biegedifferentialgleichung aufzustellen und sie mit geeigneten Randbedingungen des angegebenen Lagerungsfalls zu lösen.

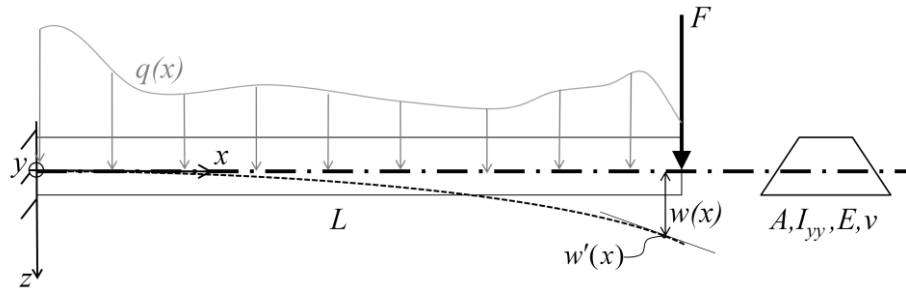


Abbildung 3.2: Koordinatensystem, Kraft, Abmaße, Querschnitt und Biegelinie eines einseitig fest eingespannten Trägers.

Die Länge des Balkens sei L , sein Querschnitt A , seine vollständigen Materialkonstanten E und ν , und sein Flächenträgheitsmoment um die y -Achse I_{yy} :

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA . \quad (3.46)$$

Die Auslenkung der Schwerachse in z -Richtung sei mit w bezeichnet und ist nur abhängig von der Balkenkoordinate x . Das „gedachte“ Verschiebungsfeld u_i eines EULER-BERNOULLI Balkens ist festgelegt durch ($i, j=x, y, z$):

$$u_x = -z \frac{dw(x)}{dx} , \quad u_y = 0 , \quad u_z = w(x) . \quad (3.47)$$

Es erfüllt alle eingangs getroffenen Annahmen und beschreibt den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) aufgrund dessen, dass jegliche Verschiebung in y -Richtung zu null gesetzt ist. Ableitungen nach x sollen durch gestrichene Größen gekennzeichnet sein. Mit dem angegebenen Verschiebungsfeld lässt sich allgemein der Verzerrungstensor kleiner Deformationen, gemäß Formel (3.15) auswerten:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \Rightarrow \varepsilon_{xx} = -zw''(x), \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (3.48)$$

Durch den gewählten Verschiebungsansatz betrachtet man lediglich Dehnungen in x -Richtung. Alle anderen Dehnungstensorkomponenten verschwinden. Mit dem HOOKEschen Materialgesetz gemäß Formel (3.44), ergeben sich die Spannungstensorkomponenten zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -(\lambda + 2\mu)zw''(x), & \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{yy} &= \lambda zw''(x), & \sigma_{xz} &= 0, \\ \sigma_{zz} &= \lambda zw''(x), & \sigma_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Der Ausdruck $(\lambda+2\mu)$ kann mit Hilfe der Zusammenhänge aus (3.45) in ein Elastizitätsmodul E umgeschrieben werden, wobei das Vernachlässigen der Querkontraktion dazu führt, dass die LAMÉsche Konstante λ gleich null wird. Damit verbleiben auch bei den Spannungskomponenten nur solche in x -Richtung. Es wird im Folgenden der Vergleich herausgearbeitet zwischen der Arbeit der (klassischen) äußeren Kräfte und Momente K^{klass} und der Änderung der inneren Energie U^{klass} der klassischen Theorie. Es besteht keine direkte zeitliche Abhängigkeit dieser Größen und es soll keine Dissipations- oder Wärmeenergie geben. Mit dem Prinzip der Variation der Minimierungsfunktion Π erhält man:

$$\begin{aligned} \Pi &= U^{\text{klass}} - K^{\text{klass}}, & \delta\Pi &= \delta U^{\text{klass}} - \delta K^{\text{klass}} \\ \delta\Pi &\rightarrow 0 & \Rightarrow \delta U^{\text{klass}} &= \delta K^{\text{klass}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die inneren Energie U^{klass} lässt sich mit Hilfe von Gleichung (3.36) aufstellen zu:

$$\begin{aligned} U^{\text{klass}} &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \\ &= \frac{E}{2} \iiint_{xyz} z^2 (w'')^2 dz dy dx = \frac{E}{2} \underbrace{\iint_{yz} z^2 dA}_I \int_x (w'')^2 dx = \frac{EI_{yy}}{2} \int_{x=0}^L (w'')^2 dx, \end{aligned} \quad (3.51)$$

und dessen Variation lautet folglich:

$$\begin{aligned}
\delta U^{\text{klass}} &= \frac{EI_{yy}}{2} \int_{x=0}^L \delta(w''^2) dx = EI_{yy} w'' \delta w' \Big|_0^L - EI_{yy} \int_{x=0}^L w''' \delta w dx \\
&= \int_{x=0}^L EI_{yy} w''' \delta w dx - EI_{yy} w''' \delta w \Big|_0^L + EI_{yy} w'' \delta w' \Big|_0^L .
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Die Variation der Arbeit K^{klass} der äußeren Kräfte Q , $q(x)$ und Momente M lautet:

$$\delta K^{\text{klass}} = \int_{x=0}^L q(x) \delta w(x) dx + Q \delta w(x) \Big|_0^L - M \delta w'(x) \Big|_0^L , \tag{3.53}$$

womit sich durch den Vergleich von (3.52)₂ und (3.53) die allgemein bekannten Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} EI_{yy} w^{IV}(x) &= q(x) \\ EI_{yy} w'''(\tilde{x}) &= -Q \\ EI_{yy} w''(\tilde{x}) &= -M \end{aligned} \right\} \tilde{x} = 0 \text{ oder } \tilde{x} = L \tag{3.54}$$

samt ihren Randbedingungen ergeben. Im vorliegenden Fall soll es keine Linienlast $q(x)$ und keine äußeren Momente M geben. Dann erhält man durch vierfache Integration der Differenzialgleichung (3.54)₁ das unbestimmte Polynom:

$$EI_{yy} w(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 . \tag{3.55}$$

Die Integrationskonstanten C_1 , C_2 , C_3 und C_4 werden über die vier Randbedingungen: $w'''(L) = F$, $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$ und $w''(L) = 0$ bestimmbar, womit die Biegelinie $w(x)$ für den Fall des einseitig fest eingespannten EULER-BERNOULLI Trägers lautet:

$$w^{\text{klass}}(x) = \frac{F}{EI_{yy}} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] .$$

(3.56)

Der Superskript „klass“ verdeutlicht die Herleitung aus der klassischen Theorie.

Eine Aussage über den Biegewinkel bekommt man durch einmaliges Ableiten der Biegelinie. Dehnungen in x -Richtung ergeben sich gemäß Gleichung (3.48) zu:

$$\varepsilon_{xx}^{\text{klass}}(x, z) = -\frac{zF}{EI_{yy}}[L - x] . \quad (3.57)$$

Die letzten beiden Formeln stellen die ersten analytischen Ausdrücke in dieser Arbeit dar, mit denen die vorangegangenen Biegeexperimente am AFM sowie die Dehnungsexperimente am Mikro-RAMANSpektroskop abgeglichen werden können. Die Bestimmungsgleichung für den Elastizitätsmodul bei einer Verschiebungsmessung an der Stelle $x=L$ lautet:

$$E = \frac{FL^3}{3w^{\text{klass}}I_{yy}} . \quad (3.58)$$

3.2 Grundzüge der mikropolaren Theorie (MP)

Die mikropolare Kontinuumstheorie ist einzuordnen in die mikromorphe Theorie, welche konzeptionell der Frage nachgeht, ob es möglich ist, „eine Kontinuums-
theorie zu konstruieren, die physikalische Phänomene auf der atomistischen, molekularen oder der Nanoskala vorhersagen kann“ (A. C. ERINGEN, 2009, im Vorwort von [61]). Die mikromorphe Theorie (auch Mikrokontinuum genannt) wird nach ERINGENS Auffassung als eine Art kontinuierliche Ansammlung deformierbarer Partikel beschrieben. Der kontroverse Begriff „Partikel“ (im Folgenden nur mit Partikel abgekürzt) wurde deshalb gewählt, weil diese besonderen materiellen Punkte in ihrer Größe infinitesimal sind und nicht die Annahme der Kontinuität der Materie verletzen sollen. Die Beschreibung der intrinsischen Deformation des Partikels gelingt über sogenannte Direktoren. Dies sind Vektoren, die dem materiellen Punkt angehängt sind und so die Orientierung und Deformation des Partikels abbilden können. Direktoren in der Referenzplatzierung seien mit $\underline{D}_i$, und solche in der Momentanplatzierung mit $\underline{d}_i$ symbolisiert. Die Bewegungsänderung des Punktes wird weiterhin über den Deformationsgradienten F_{ij} erfasst. Die Änderung der Direktoren allerdings wird in dem zusätzlichen Tensor Q_{ij} abgebildet.

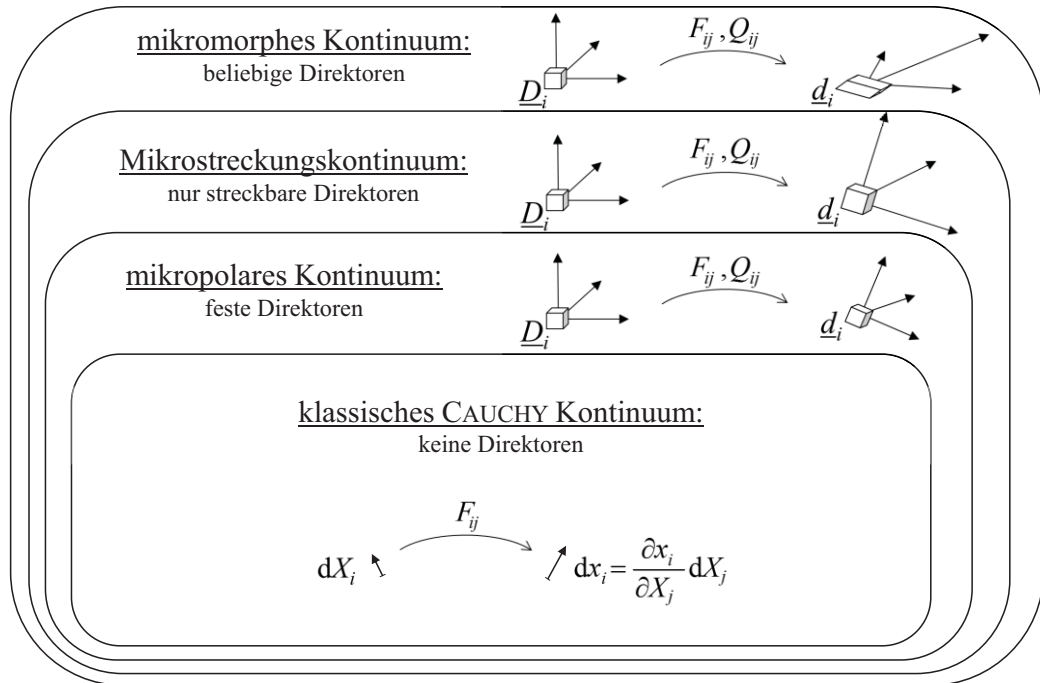


Abbildung 3.3: Spezialfälle des mikromorphen Kontinuums nach A. C. ERINGEN [32].

Unterliegen die Direktoren der zusätzlichen Bedingung der Orthogonalität (Rechtwinkligkeit), können dabei aber ihre Länge verändern, so spricht man vom Mikrostreckungskontinuum (engl. „micro-stretch continuum“). Unterliegen die Direktoren darüber hinaus der zusätzlichen Bedingung, ihre Länge nicht ändern zu dürfen, so spricht man vom mikropolaren Kontinuum, weil in diesem Fall durch Q_{ij} lediglich die Orientierung (die Rotation) des Partikels im Raum abgebildet wird. Dabei muss die Determinante von Q_{ij} stets plus eins sein, um Drehspiegelungen auszuschließen (Analoges gilt im Mikrostreckungskontinuum für den Rotationsanteil von Q_{ij} bei polarer Zerlegung). Ist Q_{ij} gleich null, so geht das Mikromorphe- in das CAUCHY-Kontinuum über. Inspiriert durch das Werk von E. und F. COSSERAT (1909) [17] und dem damit veröffentlichten Konzept von Punktmomenten (engl. „point couples“), wurden *mikropolare*- (MP) Theorien maßgeblich durch z. B. ERINGEN ([30], [32], [31] und [33]), TOUPIN [100], MINDLIN und TIERSTEN [64], NOWACKI [73] und KOITER [49] entwickelt.

3.2.1 Erweiterung der Freiheitsgrade

Um den Charakter des Partikels $\mathcal{P}$ in der Mikropolartheorie als infinitesimalen Festkörper näher zu erläutern, sei folgende Rechnung aus der Festkörpermechanik hilfreich:

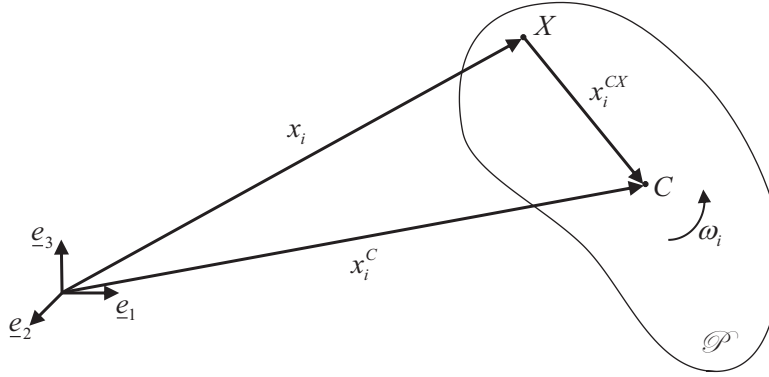


Abbildung 3.4: Schema zur Kinematik einer Starrkörpertranslation und -rotation um den Massenschwerpunkt C .

$$x_i = x_i^C + x_i^{CX} \Rightarrow v_i = v_i^C + \epsilon_{ijk} \omega_j x_k^{CX} + \dot{x}_i^{CX}, \quad (3.59)$$

in der x_i , x_i^C und x_i^{CX} die Ortsvektoren zu X , C und $\overline{CX}$ sind, wobei die zeitliche Änderung zwischen den Punkten C und X konstant bleiben soll ($\dot{x}_i^{CX} = 0$) damit der Partikel selbst die Annahme eines Starrkörpers erfüllt. ω_j ist die Winkelgeschwindigkeit, die im folgenden Zusammenhang zum Orientierungstensor Q_{ij} steht, vgl. [28]:

$$\omega_n = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijn} Q_{ki} \dot{Q}_{kj}. \quad (3.60)$$

Stellt man für diesen Fall die kinetische Energie auf, so erhält man:

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= \int_M \frac{1}{2} v_i v_i \, dm \\
&= \frac{1}{2} \int_M \left(v_i^C + \epsilon_{ijk} \omega_j x_k^{CX} \right) \left(v_i^C + \epsilon_{ilm} \omega_l x_m^{CX} \right) dm \\
&= \frac{1}{2} \int_M v_i^C v_i^C \, dm + \underbrace{\int_M v_i^C \epsilon_{ijk} \omega_j x_k^{CX} \, dm}_{=0 \text{ für Starrkörper}} + \frac{1}{2} \int_M \epsilon_{ijk} \omega_j x_k^{CX} \epsilon_{ilm} \omega_l x_m^{CX} \, dm \\
&= \frac{1}{2} \int_M v_i^C v_i^C \, dm + \frac{1}{2} \int_M \omega_j \theta_{jl} \omega_l \, dm \\
&= \frac{1}{2} \int_M v_i^C v_i^C \, dm + \frac{1}{2} \int_M s_l \omega_l \, dm \\
&= E_{\text{kin}}^C + E_{\text{rot}} \, ,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

wobei θ_{jl} das konstante Inertialmoment (Massenträgheitsmoment) und s_l die spezifische Spindichte des Partikels ist:

$$s_l = \omega_k \theta_{kl} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijn} Q_{ki} \dot{Q}_{kj} \theta_{nl} \, . \tag{3.62}$$

Es sei an dieser Stelle betont, dass der Spin als rotatorische Größe kinematisch unabhängig von der translatorischen Bewegung des Partikels ist. Der Spin übt Einfluss auf das Deformationsverhalten über die im nächsten Abschnitt zu zeigenden Bilanzgleichungen in Kombination mit einer entsprechenden konstitutiven Gleichung.

3.2.2 Bilanzgleichungen der MP-Theorie

Im Mikropolarkontinuum führen die zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrade zur Unabhängigkeit der Drehimpulsbilanz von der Linearimpulsbilanz. Aus Überlieferungen (vgl [101]) kann interpretiert werden, dass schon in den frühen Tagen der Mechanik, nämlich in der Mitte des 18ten Jahrhunderts, bereits EULER, BERNOULLI und LAGRANGE über die Unabhängigkeit der Drehimpulsbilanz diskutierten. TRUESDELL [102] kann dazu mit den Worten zitiert werden: „[We] do not regard the principle of moment of momentum as a consequence of the principle of linear momentum“. Durch die Existenz der zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrade muss ein Maß für die Änderung dieser Größe eingeführt werden,

sowie Kraftgrößen, die zu dieser Änderung führen. Zuerst seien die Oberflächen- und Volumenkräfte eingeführt, die den Spin beeinflussen.

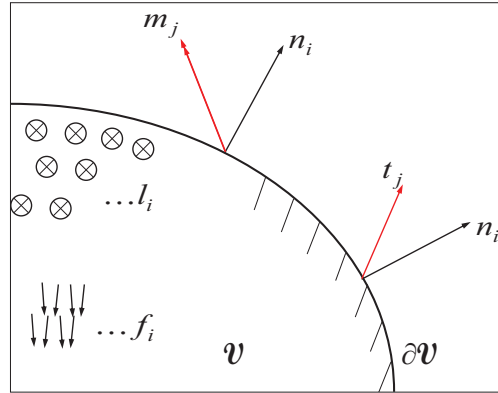


Abbildung 3.5: Schema zur Aufteilung von Volumen- und Oberflächenkräften in der Mikropolartheorie.

Im Volumen $\mathcal{V}$ wirken die Volumenkräfte f_i und die Volumenmomente l_i (siehe Abbildung 3.5). An der Oberfläche des Volumens wirken die volumenspezifischen Oberflächenkräfte t_j und die Oberflächenmomente m_j . Mit Hilfe des an dieser Stelle nicht aufgeführten CAUCHYschen Tetraedersatzes lässt sich sowohl die Existenz eines Feldes des (Kraft-) Spannungstensors $\bar{\sigma}_{ij}(x_k, t)$, als auch in analoger Weise die Existenz eines Feldes des Momentenspannungstensors $\mu_{ij}(x_k, t)$ beschreiben:

$$t_i = \bar{\sigma}_{ji} n_j \quad \text{und} \quad m_i = \mu_{ji} n_j . \quad (3.63)$$

Der Kraftspannungstensor ist hier nicht, wie in der klassischen Kontinuumsmechanik verlangt, symmetrisch ($\bar{\sigma}_{ij} \neq \bar{\sigma}_{ji}$), worauf innerhalb dieses Abschnitts weiter eingegangen werden soll.

Die Massenbilanz der MP-Theorie bleibt von den zusätzlichen Freiheitsgraden unberührt und in ihrer ursprünglichen Form erhalten (siehe Formel (3.22)).

Die Impulsbilanz der MP beschreibt die zeitliche Änderung des Linearimpulses des gesamten Körpers:

$$\frac{d}{dt} \int_M \dot{v}_k dm = \oint_{\partial V} t_k dA + \int_V \rho f_k dV . \quad (3.64)$$

Unter Anwendung der Beziehung (3.63)₁ und des GAUSSschen Integralsatzes zur Umwandlung von Oberflächen- in Volumenintegrale ergibt sich global und lokal:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \dot{v}_k dV &= \int_V (\bar{\sigma}_{lk,l} + \rho f_k) dV \quad \text{und} \\ -\rho \dot{v}_k + \bar{\sigma}_{lk,l} + \rho f_k &= 0 . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Die Spinbilanz beschreibt nun die zeitliche Änderung des intrinsischen Drehimpulses der Partikel im gesamten Körper:

$$\frac{d}{dt} \int_M s_k dm = \oint_{\partial V} m_k dA + \int_V (\rho l_k + e_k) dV , \quad (3.66)$$

wobei gesehen werden muss, dass ein Axialvektor des antisymmetrischen Anteils des Kraftspannungstensors e_k als Produktionsterm zum intrinsischen Drehimpuls im Volumen beiträgt. Dies kann durch die Überlegung motiviert werden, wie sich ein materielles Partikel verhält, wenn z.B. im Ungleichgewicht stehende Scherkomponenten des Kraftspannungstensors existieren würden: Es würde zu einem Ungleichgewicht von Momenten führen. Die zusätzlich eingeführten Freiheitsgrade können dieses aber im Gegensatz zur klassischen Theorie in ein Gleichgewicht bringen, indem entsprechende Drehmomente angreifen. Die Struktur des Axialvektors des antisymmetrischen Anteils des Kraftspannungstensors kann über Momentenbetrachtungen am infinitesimalen Volumenelement verdeutlicht werden.

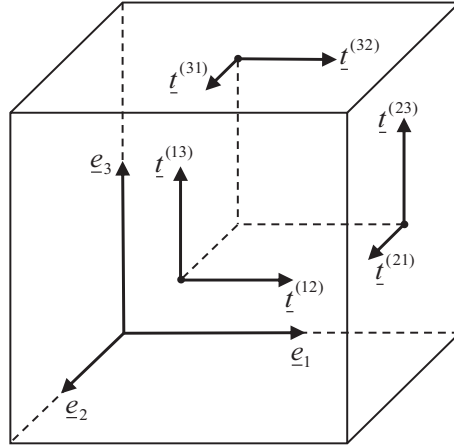


Abbildung 3.6: Darstellung der Scherspannungsvektoren am infinitesimalen Volumenelement.

Bildet man die Summe der wirkenden volumenspezifischen Momente $\underline{m}$ am Einheitswürfel (Abbildung 3.6), so erhält man in Vektorschreibweise sinngemäß:

$$\begin{aligned}
 \sum \underline{m} &= \underline{e}_1 \times \underline{t}^{(23)} + \underline{e}_1 \times \underline{t}^{(21)} + \underline{e}_2 \times \underline{t}^{(12)} + \\
 &\quad + \underline{e}_2 \times \underline{t}^{(13)} + \underline{e}_3 \times \underline{t}^{(32)} + \underline{e}_3 \times \underline{t}^{(31)} \\
 &= \underline{e}_1 \times (\bar{\sigma}_{23} \underline{e}_3) + \underline{e}_1 \times (\bar{\sigma}_{21} \underline{e}_2) + \underline{e}_2 \times (\bar{\sigma}_{12} \underline{e}_1) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \underline{e}_2 \times (\bar{\sigma}_{13} \underline{e}_3) + \frac{1}{2} \underline{e}_3 \times (\bar{\sigma}_{32} \underline{e}_1) + \frac{1}{2} \underline{e}_3 \times (\bar{\sigma}_{31} \underline{e}_2) \\
 &= -(\bar{\sigma}_{23} \underline{e}_2) + (\bar{\sigma}_{21} \underline{e}_3) - (\bar{\sigma}_{12} \underline{e}_3) + \\
 &\quad + (\bar{\sigma}_{13} \underline{e}_1) + (\bar{\sigma}_{32} \underline{e}_2) - (\bar{\sigma}_{31} \underline{e}_1) \\
 &= \underbrace{(\bar{\sigma}_{13} - \bar{\sigma}_{31})}_{-e_2} \underline{e}_1 + \underbrace{(\bar{\sigma}_{32} - \bar{\sigma}_{23})}_{-e_1} \underline{e}_2 + \underbrace{(\bar{\sigma}_{21} - \bar{\sigma}_{12})}_{-e_3} \underline{e}_3 \\
 &= \underline{e}_i \underline{e}_i \\
 &= \epsilon_{ijk} \bar{\sigma}_{jk} \underline{e}_i .
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Letzteres birgt die Komponentenschreibweise des zu beschreibenden Axialvektors e_i . Die Gleichgewichtsbedingungen der Mikropolartheorie sind aber nicht nur durch Normal- und Querkraften N und Q bestimmt, sondern auch durch Momente M (siehe Abbildung 3.7), die beim Übergang zum infinitesimal kleinen Volumenelement verbleiben können, wenn eine charakteristische Abmessung a des Volumens infinitesimal klein wird.

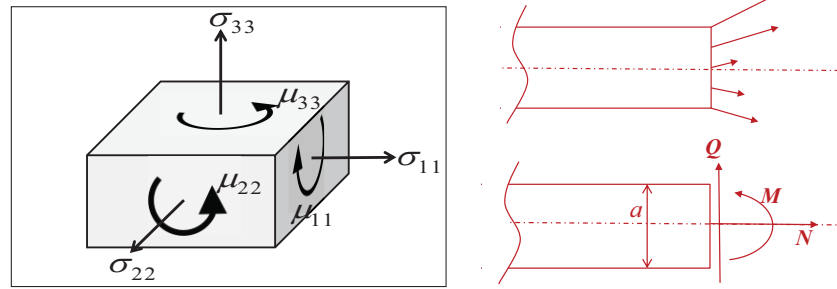


Abbildung 3.7: Darstellung einiger Kraft- und Momentenspannungskomponenten am infinitesimalen Volumenelement in der Mikropolartheorie.

Im klassischen Kontinuum verschwindet das in Abbildung 3.7 dargestellte Moment M , wenn a infinitesimal klein wird. In der Mikropolartheorie bleibt dieses dagegen erhalten. Der antisymmetrische Anteil des Kraftspannungstensors bildet sich aus dem Axialvektor des antisymmetrischen Anteils des Kraftspannungstensors e_k wie folgt:

$$\bar{\sigma}_{ij}^{\text{Asym}} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ji}) = \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \bar{\sigma}_{lm}}_{e_k}, \quad (3.68)$$

was sich durch Ausmultiplizieren aller Indizes leicht nachvollziehen lässt. Unter Anwendung der Beziehung (3.63)₂ und des GAUSSschen Integralsatzes zur Umwandlung von Oberflächen- in Volumenintegrale ergibt sich die Spinbilanz global und lokal zu:

$$\int_V \rho \dot{s}_k dV = \int_V (\mu_{lk,l} + \rho l_k + \epsilon_{klm} \bar{\sigma}_{lm}) dV \quad \text{und} \quad (3.69)$$

$$-\rho \dot{s}_k + \mu_{lk,l} + \rho l_k + \epsilon_{klm} \bar{\sigma}_{lm} = 0.$$

Die Drehimpulsbilanz der MP-Theorie beschreibt die zeitliche Änderung der Momentendichte $\underline{x} \times \rho \underline{v}$ und $\underline{s}$ über den gesamten Körpers, und gilt als Erhaltungsgröße:

$$\frac{d}{dt} \int_M (\epsilon_{ijk} x_j v_k + s_i) dm = \oint_{\partial V} (\epsilon_{ijk} x_j t_k + m_i) dA + \int_V \rho (\epsilon_{ijk} x_j f_k + l_i) dV. \quad (3.70)$$

Unter Anwendung der Beziehungen (3.63) und des GAUSSschen Integralsatzes zur Umwandlung von Oberflächen- in Volumenintegrale ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_M (\epsilon_{ijk} \dot{x}_j v_k + \epsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k + \dot{s}_i) dm &= \int_V ((\epsilon_{ijk} x_j \bar{\sigma}_{lk})_{,l} + \mu_{li,l} + \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k + \rho l_i) dV \\ &\quad \underbrace{= 0, \text{ wegen } \dot{x}_j = v_j}_{\Leftrightarrow} \\ \int_V (\rho \epsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k + \rho \dot{s}_i) dV &= \int_V (\epsilon_{ijk} x_{j,l} \bar{\sigma}_{lk} + \epsilon_{ijk} x_j \bar{\sigma}_{lk,l} + \mu_{li,l} + \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k + \rho l_i) dV = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \\ \int_V (-\rho \epsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k - \rho \dot{s}_i + \epsilon_{ijk} \bar{\sigma}_{jk} + \epsilon_{ijk} x_j \bar{\sigma}_{lk,l} + \mu_{li,l} + \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k + \rho l_i) dV &= 0 \quad (3.71) \\ &\quad \Leftrightarrow \\ \underbrace{\epsilon_{ijk} x_j [-\rho \dot{v}_k + \bar{\sigma}_{lk,l} + \rho f_k]}_{\text{Impulsbilanz} = 0} &= - \underbrace{[-\rho \dot{s}_i + \epsilon_{ijk} \bar{\sigma}_{jk} + \mu_{li,l} + \rho l_i]}_{\text{Spinbilanz}} \\ \Rightarrow \quad \epsilon_{ijk} \bar{\sigma}_{jk} &= \rho \dot{s}_i - \mu_{li,l} - \rho l_i. \end{aligned}$$

Im direkten Vergleich zur lokalen Form der Drehimpulsbilanz aus Gleichung (3.41)₅ wird in Gleichung (3.71)₅ erkenntlich, dass ein in der MP-Theorie möglicher antisymmetrischer Teil des Spannungstensors zur Produktion von Spin führt. Gerade wegen diesem Produktionsterm stellt der Spin selbst keine Erhaltungsgröße dar. Die Drehimpulsbilanz der MP-Theorie ist demzufolge keine simple Konsequenz aus der Impulsbilanz, wie dies im noch klassischen Kontinuum der Fall war. Dies haben bereits TRUESDELL [102], [101] und SZABÓ [98] zur Disposition gestellt, mit der Frage nach der Unabhängigkeit der Drehimpulsbilanz vom NEWTONschen Bewegungsgesetz.

Folgt man der Hierarchie der Bilanzen dieses Kapitels, ohne weitere Freiheitsgrade einzuführen, kann man geneigt sein, eine Bilanz über das Moment des Spins

zu erstellen, wie es YANG, et al. 2002 [110] beschrieben haben. Dies führt in globaler und lokaler Formulierung zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_M \epsilon_{ijk} x_j s_k dm &= \underbrace{\int_{\partial V} \epsilon_{ijk} x_j n_l \mu_{lk} dA}_{\text{Flussterm}} + \underbrace{\int_V \rho \epsilon_{ijk} x_j l_k dV}_{\text{Zufuhrterm}} + \underbrace{\int_V \epsilon_{ijk} x_j \epsilon_{klm} \bar{\sigma}_{lm} dV}_{\text{Produktionsterm}} \\
 \Leftrightarrow \rho \epsilon_{ijk} v_j s_k &= \epsilon_{ijk} x_j \underbrace{\left(-\rho \dot{s}_k + \mu_{lk,l} + \rho l_k + \epsilon_{klm} \bar{\sigma}_{lm} \right)}_{\text{Spinbilanz}} + \epsilon_{ilk} \mu_{lk} \\
 \Rightarrow \rho \epsilon_{ijk} v_j s_k &= \epsilon_{ilk} \mu_{lk} \quad .
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Daraus ließe sich analog zur Symmetrie des Spannungstensors in der klassischen Theorie, Gleichung (3.28)₅, die Symmetrie des Momentenspannungstensors im statischen Fall ($v_j = 0$) ableiten. Dies ist in der aktuellen Literatur jedoch nicht abschließend geklärt, wird aber letzten Endes als Schlüsselargument bei der Formulierung der modifizierten Dehnungsgradiententheorie, Abschnitt 3.3.3, genutzt. Eine andere hier nicht diskutierte Herangehensweise zeigt die Antisymmetrie des Momentenspannungstensors, [45].

3.2.3 Zu konstitutiven Gleichungen in der MP-Theorie

Der allgemeinste Zusammenhang für ein Materialgesetz für die Kraft- und Momentenspannungen der Mikropolartheorie, welche abhängen von den Ziel-funktionen: Massendichte ρ , Bewegung χ_l , Orientierung Q_{ij} und Temperatur θ in dem betrachteten Punkt x_n , lauten:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{ij}(x_n, t) &= F^{\sigma}_{X \in \mathcal{K}} \Big|_{s=0}^{\infty} \left[\rho(X, t-s), \chi_l(X, t-s), Q_{ij}(X, t-s), \theta(X, t-s); x_n \right] \\
 \mu_{ij}(x_n, t) &= F^{\mu}_{X \in \mathcal{K}} \Big|_{s=0}^{\infty} \left[\rho(X, t-s), \chi_l(X, t-s), Q_{ij}(X, t-s), \theta(X, t-s); x_n \right].
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Die Abhängigkeit aller Punkte X des Körpers $\mathcal{K}$ zu allen Zeiten $t-s$ äußert sich in den Funktionalen $F^{\sigma, \mu}$. Durch das **Prinzip des Determinismus** ist die zeitliche

Abhängigkeit der Funktionale auf die aktuelle, auf die vergangenen, nicht aber auf zukünftige Konfigurationen beschränkt. Das **Prinzip der Lokalität** besagt, dass in diesem Fall die Kraft- und Momentenspannungen eines materiellen Punktes (hier Partikels) x_n vom Zustand einer finiten Nachbarschaft des Punktes beeinflusst werden können. Eine TAYLOR-Reihe der räumlichen Fortsetzung überführt die Abhängigkeit von allen Punkten X des Körpers in eine Abhängigkeit der Gradienten der jeweiligen Variablen:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij}(x_n, t) &= F^{\bar{\sigma}} \bigg|_{s=0}^{\infty} \{ \rho(x_n, \tau), \rho_{,A}, \dots, \chi_i(x_n, \tau), \chi_{i,A}, \dots, Q_{ij}(x_n, \tau), Q_{ij,A}, \theta(x_n, \tau), \theta_{,A}, \dots \} \\ \mu_{ij}(x_n, t) &= F^{\hat{\mu}} \bigg|_{s=0}^{\infty} \{ \rho(x_n, \tau), \rho_{,A}, \dots, \chi_i(x_n, \tau), \chi_{i,A}, \dots, Q_{ij}(x_n, \tau), Q_{ij,A}, \theta(x_n, \tau), \theta_{,A}, \dots \},\end{aligned}\quad (3.74)$$

wobei τ die Substitution von $t-s$ ist. Es sollen auch in diesem Zusammenhang ausschließlich Materialien ohne Gedächtnis behandelt werden, so dass die Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t die Spannungen determiniert. Dies hat zur Folge, dass die Funktionale $F^{\sigma, \mu}$ in die Funktionen $\bar{\sigma}$ und $\hat{\mu}$ übergehen. Des Weiteren soll auf die Temperaturabhängigkeit verzichtet werden. Das **Prinzip der Lokalität für einfache Materialien** begrenzt den Einfluss materieller Punkte auf die einer infinitesimalen Nachbarschaft, wodurch die Ableitungsordnung der TAYLOR-Reihenentwicklung der Variablen beschränkt werden kann auf Ableitungen ausschließlich erster Ordnung:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij}(x_n, t) &= \bar{\sigma} \{ \rho(x_n, t), \rho_{,A}, \chi_i(x_n, t), \chi_{i,A}, Q_{ij}(x_n, t), Q_{ij,A} \} \\ \mu_{ij}(x_n, t) &= \hat{\mu} \{ \rho(x_n, t), \rho_{,A}, \chi_i(x_n, t), \chi_{i,A}, Q_{ij}(x_n, t), Q_{ij,A} \}.\end{aligned}\quad (3.75)$$

Das Umschreiben der Massenbilanz resultiert in dem Ausdruck $\rho = \rho_0 / \det(F_{ij})$. In diesem Sinne sind die Materialfunktionen dadurch nicht mehr direkt von der Dichte, als vielmehr vom Deformationsgradienten abhängig. Der Gradient der Bewegung kann per Definition (3.9) mit dem Deformationsgradienten ersetzt werden. Wie bereits im Abschnitt der klassischen Kontinuumsmechanik 3.1 erwähnt, lässt sich mit Hilfe der **Prinzipien der EUKLIDischen Invarianten** zeigen, dass die Bewegung an sich keinen Einfluss auf die Spannungen hat. Damit verbleiben als einzige Variablen für die konstitutiven Gleichungen der mechanischen Kraft- und Momentenspannungen der Deformationsgradient, die

Orientierung und der Orientierungsgradient erhalten und damit die reduzierten Funktionen:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij}(x_n, t) &= \tilde{\sigma} \{F_{ij}, Q_{ij}, Q_{ij,A}\} \\ \mu_{ij}(x_n, t) &= \hat{\mu} \{F_{ij}, Q_{ij}, Q_{ij,A}\} .\end{aligned}\quad (3.76)$$

Durch das *Prinzip der Invarianz bei überlagerter Starrkörperbewegung* lassen sich vom Beobachter unabhängige Funktionen aufbauen. Wie weiter oben erwähnt, ist F_{ij} kein einheitliches Maß der Verzerrung unter EUKLIDischer Transformation, ebenso Q_{ij} . Erst durch das Nutzen spezieller Verzerrungsmaße, wie z. B. dem relativen Streckungstensor E_{ij}^Q und dem relativen Orientierungstensor Γ_{ij} (vgl. EREMEYEV 2013, [28]):

$$\begin{aligned}E_{ij}^Q &= Q_{ik} F_{kj} - \delta_{ij} \\ \Gamma_{ij} &= -\frac{1}{2} \epsilon_{irm} (Q_{mA} Q_{rj,A}) ,\end{aligned}\quad (3.77)$$

lassen sich beobachterunabhängige Formen, so genannte reduzierte Formen, aufstellen:

$$\begin{aligned}T_{ij}^{2PK}(x_n, t) &= k(E_{ij}^Q, \Gamma_{ij}) \\ M_{ij}(x_n, t) &= K(E_{ij}^Q, \Gamma_{ij}) ,\end{aligned}\quad (3.78)$$

wobei M_{ij} einen materiellen Momentenspannungstensor darstellt. Eine physikalisch linearisierte *Formänderungsenergiedichte* u^{MP} isotroper mikropolarer Materialien lautet dann (vgl. [28]):

$$2u^{\text{MP}} = \alpha_1 E_{ii}^Q E_{kk}^Q + \alpha_2 E_{ij}^Q E_{ji}^Q + \alpha_3 E_{ij}^Q E_{ij}^Q + \beta_1 \Gamma_{ii} \Gamma_{kk} + \beta_2 \Gamma_{ij} \Gamma_{ji} + \beta_3 \Gamma_{ij} \Gamma_{ij} , \quad (3.79)$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ und β_3 sechs zu bestimmende Materialkonstanten sind. Unter der Annahme kleiner Deformationen und Nutzung des vorher eingeführten Dehnungstensors kleiner Deformationen lässt sich Gleichung (3.79) in die für das COSSERAT-Kontinuum bekannte lineare Form (vgl. LAKES, 1995 [51]) isotroper Materialien umschreiben:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + (2\mu + \kappa) \varepsilon_{ij} + \kappa \epsilon_{ijk} (\varphi_k - \phi_k) \quad , \\ \mu_{ij} &= \gamma_1 \phi_{r,r} \delta_{ij} + \gamma_2 \phi_{i,j} + \gamma_3 \phi_{j,i} \quad .\end{aligned}\tag{3.80}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sowie κ sind die sogenannten COSSERATSchen elastischen Konstanten, wobei letztere oft als Kopplungszahl beschrieben wird. Der Rotationsvektor der Mikrorotation ϕ_i ist kinematisch unabhängig vom Rotationsvektor der Makrorotation φ_i . RAMÉZANI, et al. (2012) [82] haben unter Einbeziehung der sechs elastischen Konstanten das Biegeverhalten eines mikropolar modellierbaren Materials analysiert und dabei den Größeneffekt explizit bemerkt. Da für die in dieser Arbeit geprüften Werkstoffe keine Daten aller elastischen Konstanten vorliegen und eine Messung der vier COSSERATSchen elastischen Konstanten in diesem Rahmen nicht möglich ist, sollen weitere Vereinfachungsmöglichkeiten in den Materialgleichungen aufgezeigt werden. Eine direkt anknüpfende Vereinfachung der Mikropolartheorie liefert die Momentenspannungstheorie in Abschnitt 3.4. Da die MP-Theorie auch Berührungspunkte mit der Dehnungsgradiententheorie aufweist, wird diese im Folgenden zuerst beschrieben.

3.3 Grundzüge der Dehnungsgradiententheorie (DG)

Der Ursprung sogenannter Dehnungsgradiententheorien ist schwer festzumachen. In der Zeit der frühen 1960er Jahre, in denen die Ideen der Brüder COSSERAT als Inspiration dienten, wurden in diversen Arbeiten Momentenspannungstheorien entwickelt, z. B. durch TOUPIN (1962) [100], MINDLIN und TIERSTEN (1962) [64], KOITER (1964) [49] und MINDLIN and ESHEL (1968) [66]. Darin enthalten sind zweite Ableitungen von Verschiebungen zur Beschreibung von Krümmung, Rotation, etc.. Diesen höheren Ableitungen wurde im Zuge dessen gesondertes Interesse zuteil. Anfang der 1970er Jahre wurde begonnen, vornehmlich durch A. C. ERINGEN, die *generalisierte Kontinuumsmechanik* zu beschreiben, geleitet durch die Frage: „Is it possible to construct continuum theories that can predict physical phenomena on the atomic, molecular, or nano scales?“ (Zitat von A. C. ERINGEN, 2009, im Vorwort zu [61]). Demnach wurden formell mindestens zwei Herangehensweisen etabliert: Erstens, die Nutzung erweiterter Freiheitsgrade der Punktpartikel (mikromorphe Theorie, siehe Abschnitt 3.2) und zweitens, die Annahme von Materialien zweiter Ordnung (engl.: „non-simple materials of

gradient type“, A. C. ERINGEN [32]). Letzteres führt in der Kaskade der Identifizierung allgemeiner Materialgleichungen der rationalen Mechanik direkt zu den Abhängigkeiten von höheren Ableitungen in der Deformation (vgl. A. BERTRAM, 2013 [12]). Der Begriff *Gradientenkontinuum* erscheint dafür an dieser Stelle sinnvoll.

3.3.1 Herleitung konstitutiver Abhängigkeiten

Das Ziel soll die Herleitung konstitutiver Gleichungen für isotrope, linear elastische Materialien zweiter Ordnung sein. Der Ausgangspunkt soll die Formulierung der allgemeinen Abhängigkeiten der inneren Energie der rationalen Mechanik solcher Materialien sein:

$$u(x_n, t) = F'' \Big|_{X \in \mathcal{B} |_{s=0}}^{\infty} [\rho(X, t-s), \chi_l(X, t-s), \theta(X, t-s); x_n] , \quad (3.81)$$

wobei die Dichte ρ , Bewegung χ_l und Temperatur θ in dem betrachteten Punkt x_n die klassischen Grundvariablen sind. Die Abhängigkeit aller Punkte X des Körpers $\mathcal{K}$ zu allen Zeiten $t-s$ äußert sich in dem Funktional F'' . Durch das **Prinzip des Determinismus** ist die zeitliche Abhängigkeit des Funktionals auf die aktuelle, auf die vergangenen, nicht aber auf die zukünftigen Konfigurationen beschränkt. Das **Prinzip der Lokalität** besagt, dass die innere Energie eines materiellen Punktes vom Zustand einer finiten Nachbarschaft des Punktes x_n beeinflusst werden kann. Eine TAYLOR-Reihe der räumlichen Fortsetzung überführt die Abhängigkeit von allen Punkten des Körpers in eine Abhängigkeit der örtlichen Gradienten der jeweiligen Variablen:

$$u(x_n, t) = F'' \Big|_{s=0}^{\infty} \{ \rho(x_n, \tau), \rho_{,A}, \dots, \chi_i(x_n, \tau), \chi_{i,A}, \dots, \theta(x_n, \tau), \theta_{,A}, \dots \} , \quad (3.82)$$

wobei τ die Substitution von $t-s$ ist. Im Weiteren sollen ausschließlich Materialien ohne Gedächtnis behandelt werden, so dass die Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t die Spannungen determiniert. Durch diese Einschränkung geht das Funktional F'' in die Funktion $\hat{u}$ über. Des Weiteren wird auf die Temperaturabhängigkeit verzichtet. Nun folgt das **Prinzip der Lokalität für Materialien zweiter Ordnung**. Dieses Prinzip begrenzt den Einfluss aller materiellen Punkte

auf solche einer infinitesimalen Nachbarschaft zu x_n , und die Ableitungsordnung der TAYLOR-Reihenentwicklung der Variablen beschränkt sich auf Ableitungen bis zur zweiten Ordnung:

$$u(x_n, t) = \hat{u} \{ \rho(x_n, t), \rho_{,A}, \rho_{,AB}, \chi_i(x_n, t), \chi_{i,A}, \chi_{i,AB} \} . \quad (3.83)$$

Das Umschreiben der Massenbilanz resultiert in dem Ausdruck $\rho = \rho_0 / \det(F_{ij})$. In diesem Sinne ist damit das Funktional nicht mehr direkt abhängig von der Dichte, als vielmehr vom Deformationsgradienten. Der Gradient der Bewegung kann per Definition (3.9) mit dem Deformationsgradienten ersetzt werden. Wie bereits im Abschnitt der klassischen Kontinuumsmechanik 3.1 erwähnt, lässt sich mit Hilfe der **Prinzipien der EUKLIDISCHEN INVARIANTEN** zeigen, dass die Bewegung an sich keinen Einfluss auf die Spannungen hat, was zu folgender reduzierten Funktion führt:

$$u(x_n, t) = \hat{u} \{ F_{ij}, F_{ij,A} \} . \quad (3.84)$$

Damit verbleiben als einzige Variablen für die konstitutive Gleichung der inneren Energie der Deformationsgradient und der Gradient des Deformationsgradienten erhalten. Dies wird schematisch in Abbildung 3.8 verdeutlicht und soll als Gegenüberstellung zu Abbildung 3.3 den Unterschied zwischen der MP- und der DG-Theorie aufzeigen.

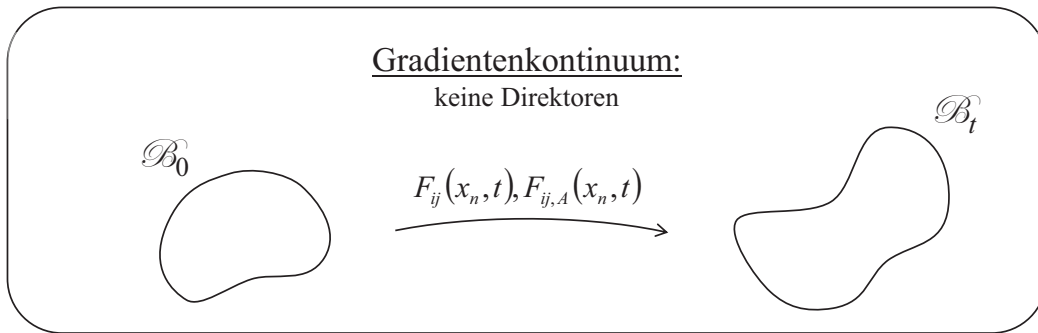


Abbildung 3.8: Verdeutlichung der Funktionsvariablen (dem Deformationsgradient und dem Gradient des Deformationsgradienten) bei der Verformung im Gradientenkontinuum.

Durch das *Prinzip der Invarianz bei überlagerter Starrkörperbewegung* lassen sich vom Beobachter unabhängige Funktionen aufbauen. Wie schon erwähnt, ist F_{ij} kein einheitliches Maß der Verzerrung unter EUKLIDischer Transformation. Erst durch das Nutzen spezieller Verzerrungsmaße, wie dem GREENSchen Verzerrungstensor E_{ij}^G und dem Verzerrungstensor höherer Ordnung K_{ijk} (vgl. A. BERTRAM 2013, [12]):

$$\begin{aligned} E_{ij}^G &= \frac{1}{2} (F_{ik} F_{kj} - \delta_{ij}), \\ K_{ijk} &= F_{il}^{-1} \frac{\partial F_{lj}}{\partial X_k}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

kann die reduzierte Form der Funktion aufgestellt werden:

$$u = \tilde{u}(E_{ij}^G, K_{ijk}). \quad (3.86)$$

Mit der Annahme der Existenz einer spezifischen elastischen Energie, [12]:

$$p := \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{2} T_{ij}^{2PK} \dot{E}_{ij}^G + S_{ijk} \dot{K}_{ijk} \right], \quad (3.87)$$

können die arbeitskonjugierten Spannungsmaße definiert werden als:

$$T_{ij}^{2PK} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial E_{ij}^G} \quad \text{und} \quad S_{ijk} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial K_{ijk}}. \quad (3.88)$$

Darin enthalten sind der zweite PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor T_{ij}^{2PK} und der materielle Spannungstensor höherer Ordnung S_{ijk} , genannt Hyperspannungstensor (engl.: „material hyper stress, or double stress tensor“, [12]). Bis hierhin sind die Ausführungen i. A. für große Deformationen gültig und sollen im anschließenden Abschnitt unter der Annahme kleiner Deformationen weitergeführt werden.

3.3.2 Erweiterte Kinematik

Die in MINDLIN und ESHEL (1968) [66] aufgelisteten kinematischen Variablen des Gradientenkontinuums für die lineare Elastizität kleiner Verformungen werden hier übernommen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) && \dots \text{Dehnungstensor} \\
\eta_{ijk} &= u_{k,ij} && \dots \text{Verschiebungsgradient zweiter Ordnung} \\
\tilde{\eta}_{ijk} &= \frac{1}{2}(u_{k,ji} + u_{j,ki}) = \varepsilon_{kj,i} && \dots \text{Gradient der Dehnung} \\
\bar{\bar{\eta}}_{ijk} &= \frac{1}{3}(u_{k,ij} + u_{i,jk} + u_{j,ki}) && \dots \text{sym. Anteil des Verschiebungs-} \\
&&& \text{gradienten 2ter Ordnung} \\
\varphi_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} && \dots \text{makroskopischer Rotationsvektor} \\
\bar{\eta}_{il} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,jl} && \dots \text{Rotationsgradient} \\
\chi_{ij}^S &= \frac{1}{4} (\varepsilon_{ilk} u_{k,lj} + \varepsilon_{jlk} u_{k,li}) && \dots \text{sym. Anteil des Rotationsgradienten} .
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Es sei an dieser Stelle betont, dass der Rotationsvektor φ_i ohne weitere Argumentation als makroskopischer Rotationsvektor gewählt wurde. Die dadurch gewollte Interpretationsmöglichkeit von intrinsischen Drehungen materieller Punkte eröffnet so eine Brücke zur Mikropolartheorie, wie in späteren Abschnitten verwiesen wird. Mit den Gleichungen (3.89) lassen sich die sogenannten drei Formen der spezifischen Formänderungsenergiedichten u in MINDLINS Dehnungsgradiententheorie postulieren:

$$u^{\text{DG}} = u^{\text{I}}(\varepsilon_{ij}, \eta_{ijk}) = u^{\text{II}}(\varepsilon_{ij}, \tilde{\eta}_{ijk}) = u^{\text{III}}(\varepsilon_{ij}, \bar{\eta}_{ij}, \bar{\bar{\eta}}_{ijk}) . \tag{3.90}$$

In der Literatur werden die erste und zweite Form leicht favorisiert verwendet. Die arbeitskonjugierten Spannungsmaße der ersten Form werden folgendermaßen gewonnen:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u^{\text{I}}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{und} \quad \mu_{ijk} = \frac{\partial u^{\text{I}}}{\partial \eta_{ijk}} , \tag{3.91}$$

wobei μ_{ijk} den Hyperspannungs-, oder Spannungstensor höherer Ordnung (engl.: „hyper stress, or double stress tensor“) für kleine Deformationen darstellt, und symmetrisch in „ ij “ ist (Satz von SCHWARTZ). Für isotrope Materialien (genauer: isotrope Materialien zweiter Ordnung) ergibt sich die lineare Formänderungsenergiedichte weiter zu (vgl. [66]):

$$\begin{aligned}
2u^I &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \eta_{ijk} \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \alpha_3 \varepsilon_{kk} \varepsilon_{mm} + \beta_1 \eta_{ijk} \eta_{ijk} + \beta_2 \eta_{iik} \eta_{jjk} + \\
&\quad + \beta_3 \eta_{iik} \eta_{kjj} + \beta_4 \eta_{ijj} \eta_{ikk} + \beta_5 \eta_{ijk} \eta_{kji} .
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Aus Gründen der Symmetrie des Dehnungstensors lassen sich α_1 und α_2 zusammenfassen. Aus $(\alpha_1 + \alpha_2)$ und α_3 gehen die LAMÉschen Konstanten hervor und $\beta_1, \dots, \beta_5$ verbleiben als zusätzliche Materialparameter der DG-Theorie der linearen Elastizität isotroper Materialien. Da für die in dieser Arbeit geprüften Werkstoffe keine Daten dieser elastischen Konstanten vorliegen und eine Messung der fünf zusätzlichen elastischen Konstanten in diesem Rahmen nicht möglich ist, sollen weitere Vereinfachungsmöglichkeiten in den Materialgleichungen aufgezeigt werden. Eine direkt anknüpfende Vereinfachung der DG-Theorie liefert die modifizierte DG-Theorie, welche im nächsten Abschnitt eingeführt wird.

3.3.3 Modifizierte Dehnungsgradiententheorie (MDG)

Die Anzahl der Komponenten eines Tensors dritter Stufe ist 27. Der Verschiebungsgradient zweiter Ordnung hat aufgrund seiner Symmetrie in zwei Indizes 18 unabhängige Komponenten. Eine Vereinfachung der „vollen“ DG-Theorie (z. B. zu MINDLINS erster Form) wird erreicht, wenn man erstens, wie in Gleichung (3.89)₅ dargestellt, eine Verschiebungsgradientenformulierung für intrinsische Drehungen wählt und zweitens, das in Gleichung (3.72) erarbeitete Argument der Symmetrie des Momentenspannungstensors annimmt. Letzteres erlaubt die Nutzung eines ebenso symmetrischen Dehnungsmaßes für die Rotation, den symmetrischen Rotationsgradienten χ_{ij} aus Gleichung (3.89)₇. LAM, et al. (2003) [52] zeigen ausführlich die daraus folgende Reduktion der zusätzlichen Materialparameter von fünf auf drei, indem der Verschiebungsgradient zweiter Ordnung η_{ijk} nach folgendem Schema zerlegt wird:

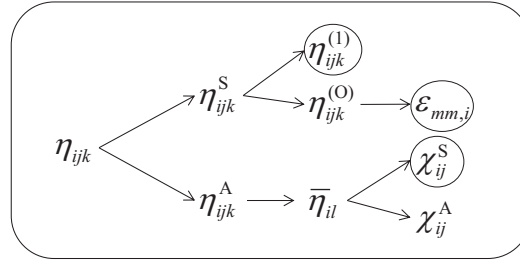


Abbildung 3.9: Schema der Aufspaltung des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung in der MDG-Theorie.

η_{ijk}^S ist der symmetrische Teil des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung, η_{ijk}^A der antisymmetrische Anteil. $\eta_{ijk}^{(1)}$ ist der Deviator des symmetrischen Teils des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung und $\eta_{ijk}^{(0)}$ der Kugelteil, der als Gradient der Spur des Dehnungstensors $\epsilon_{mm,i}$ dargestellt werden kann. $\bar{\eta}_{il}$ ist der Rotationsgradient und χ_{ij}^S der symmetrische- und χ_{ij}^A der antisymmetrische Teil. Nach FLECK und HUTCHINSON (1997) [35] lässt sich der Rotationsgradient in den antisymmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung folgendermaßen überführen:

$$\eta_{ijk}^A = \frac{2}{3} (\epsilon_{ikl} \bar{\eta}_{lj} + \epsilon_{jkl} \bar{\eta}_{li}). \quad (3.93)$$

Damit sind die Funktionsvariablen der Formänderungsenergiedichte der MDG-Theorie reduziert zu (siehe eingekreiste Tensoren in Abbildung 3.9):

$$u^{\text{MDG}} = u^{\text{MDG}}(\epsilon_{ij}, \epsilon_{mm,i}, \eta_{ijk}^{(1)}, \chi_{ij}^S) \quad (3.94)$$

und sie kann explizit geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} u^{\text{MDG}} &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} p_i \epsilon_{nn,i} + \frac{1}{2} \mu_{ijk} \eta_{ijk}^{(1)} + \frac{1}{2} \mu_{ij} \chi_{ij}^S \\ &= \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \mu \ell_0^2 \epsilon_{mm,i} \epsilon_{nn,i} + \mu \ell_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + \mu \ell_2^2 \chi_{ij}^S \chi_{ij}^S. \end{aligned} \quad (3.95)$$

p_i , μ_{ijk} und μ_{ij} sind die jeweiligen höheren Spannungsmaße und ℓ_0 , ℓ_1 und ℓ_2 die jeweiligen zusätzlichen Materialparameter, die sogenannten *inneren Längensparameter des Materials* (engl.: „material length scale parameters“). Der Deviator des symmetrischen Teils des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung ist in Verschiebungsschreibweise gegeben als, [52]:

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}(u_{k,ij} + u_{i,jk} + u_{j,ki}) - \frac{1}{15}[\delta_{ij}(u_{k,mm} + u_{m,km}) + \delta_{jk}(u_{i,mm} + u_{m,im}) + \delta_{ki}(u_{j,mm} + u_{m,jm})]. \quad (3.96)$$

Die letzte Vereinfachung der Dehnungsgradiententheorie, die hier getroffen werden soll und ohne weitere Angabe von Gründen in der Literatur vorzufinden ist, ist die der Gleichsetzung der inneren Längenparameter des Materials $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = \ell$.

3.3.4 Balkenbiegung mit der MDG-Theorie

Um eine Balkenbiegedifferentialgleichung für die modifizierte Dehnungsgradiententheorie herzuleiten, wird der EULER-BERNOULLISCHE Verschiebungsfeldansatz aus Gleichung (3.47) zur Auswertungen konventioneller Dehnungen und Spannungen, und das Prinzip der Variation der Minimierungsfunktion Π (Gleichung (3.50)) benutzt. Neu aufgestellt werden muss die innere Energie U^{MDG} mit Hilfe der Gleichung (3.95):

$$U^{\text{MDG}} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \varepsilon_{nn,i} + \mu_{ijk} \eta_{ijk}^{(1)} + \mu_{ij} \chi_{ij}^S) dV. \quad (3.97)$$

Der Gradient der Spur des Dehnungstensors $\varepsilon_{nn,i}$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nn,i} &= (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})_{,i} = (-zw''(x))_{,i}, \\ \varepsilon_{nn,x} &= -zw'''(x), \quad \varepsilon_{nn,y} = 0, \quad \varepsilon_{nn,z} = -w''(x). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Dessen Spannungsmaß p_i hat die Komponenten:

$$p_x = -2\mu\ell^2 zw'''(x), \quad p_y = 0, \quad p_z = -2\mu\ell^2 w''(x). \quad (3.99)$$

Die von null verschiedene Komponente des symmetrischen Rotationsgradienten und dessen Spannungsmaß ist:

$$\chi_{xy}^S = -\frac{1}{2} w''(x) \quad \Rightarrow \quad \mu_{xy} = -\mu \ell^2 w''(x) . \quad (3.100)$$

Die von null verschiedenen Komponenten des symmetrischen Teils des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung sind, [50]:

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & \eta_{113}^{(1)} &= -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & \eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & \eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \eta_{311}^{(1)} &= -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{5} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.101)$$

und die entsprechenden höheren Spannungsmaße:

$$\begin{aligned} \mu_{111} &= -\frac{4}{5} \mu \ell^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & \mu_{113} &= -\frac{8}{15} \mu \ell^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \mu_{122} &= \frac{2}{5} \mu \ell^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \mu_{133} &= \frac{2}{5} \mu \ell^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & \mu_{212} &= \frac{2}{5} \mu \ell^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & \mu_{221} &= \frac{2}{5} \mu \ell^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \mu_{223} &= \frac{2}{15} \mu \ell^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \mu_{232} &= \frac{2}{15} \mu \ell^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \mu_{311} &= -\frac{8}{15} \mu \ell^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \mu_{313} &= \frac{2}{5} \mu \ell^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & \mu_{322} &= \frac{2}{15} \mu \ell^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \mu_{331} &= \frac{2}{5} \mu \ell^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \mu_{333} &= \frac{2}{5} \mu \ell^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} . \end{aligned} \quad (3.102)$$

Die Skalarmultiplikationen im Integranden in Gleichung (3.97) führen zu:

$$\begin{aligned}
 U^{\text{MDG}} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\underbrace{EI + \frac{718}{225} \mu A \ell^2}_N \right) \cdot w''^2 + \left(\underbrace{\frac{14}{5} \mu I \ell^2}_K \right) \cdot w'''^2 dx, \\
 N &= EI + \frac{718}{225} \mu A \ell^2, \\
 K &= \frac{14}{5} \mu I \ell^2
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

und dessen Variation inklusive dreimaliger partieller Integration:

$$\begin{aligned}
 \delta U^{\text{MDG}} &= \int_0^L S w'' \delta w'' dx + \int_0^L K w''' \delta w''' dx \\
 \delta U^{\text{MDG}} &= \int_0^L [N w^{IV} - K w^{VI}] \cdot \delta w dx + K w' \delta w|_0^L - N w'' \delta w|_0^L + \\
 &\quad + N w'' \delta w'|_0^L - K w^{IV} \delta w'|_0^L + K w''' \delta w''|_0^L.
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Der Vergleich der hier postulierten Variation der Arbeit der äußeren Kräfte δA^{MDG} , welche aus den Kräften $q(x)$ und V , den Momenten M und höheren Momenten M^h besteht:

$$\delta A^{\text{MDG}} = \int_0^L q(x) \delta w dx + V \delta w|_0^L + M \delta w'|_0^L + M^h \delta w''|_0^L, \tag{3.105}$$

mit der Variation der inneren Energie, bringt folgende Balkenbiegedifferentialgleichung der MDG-Theorie samt Randbedingungen hervor:

$$\left. \begin{aligned}
 N w^{IV}(x) - K w^{VI}(x) &= q(x) \quad , \forall x \in [0, L] \\
 K w^V(\tilde{x}) - N w'''(\tilde{x}) &= V \\
 N w''(\tilde{x}) - K w^{IV}(\tilde{x}) &= M \\
 K w'''(\tilde{x}) &= M^h
 \end{aligned} \right\} \quad \tilde{x} = 0, L. \tag{3.106}$$

Die Substitutionen N und K sollen entgegen der in der Literatur zu findenden Herangehensweise in dieser Arbeit ohne Einfluss der Querkontraktion (siehe Annahmen zum EULER-BERNOULLISCHEN Verschiebungsfeld, $\nu=0$) und für ausschließlich rechteckige Balkenquerschnitte der Höhe H , Breite B und dem Flächenförmigkeitsmoment $I=BH^3/12$ umgeformt werden zu:

$$N = EI \left(1 + \frac{4308}{225} \frac{\ell^2}{H^2} \right), \quad K = \frac{7}{5} EI \ell^2. \quad (3.107)$$

Die Lösung der homogenisierten Differentialgleichung ($q(x)=0$) gelingt über die Substitution $a(x) = w(x) - KN^{-1}w''(x)$ und der daraus folgenden allgemeinen Lösung:

$$a^{IV}(x) = 0 \Rightarrow a(x) + \frac{A_1}{6}x^3 + \frac{A_2}{2}x^2 + A_3x + A_4 = 0. \quad (3.108)$$

Die letzte Gleichung stellt wiederum eine Differentialgleichung dar, mit dessen homogener Lösung ($a(x)=0$) die allgemeine Lösung der Hauptdifferentialgleichung (3.106) lautet:

$$\begin{aligned} w^{\text{MDG}}(x) &= \left(A_5 e^{\sqrt{\frac{N}{K}}x} + A_6 e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}x} \right) + \frac{A_1}{6}x^3 + \frac{A_2}{2}x^2 + A_3x + A_4 \\ &= C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 + C_5 e^{\sqrt{N/K}x} + C_6 e^{-\sqrt{N/K}x}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Zur Lösung dieses Ansatzes dienen Randbedingungen, die aus dem speziellen Lagerungs- und Belastungsfall gewonnen werden. Zu der Anwendung der vier folgenden klassischen Randbedingungen des einseitig fest eingespannten Balkens: $Kw'(L) - Nw'''(L) = V(L) = F$, $Elw(0) = 0$, $Elw'(0) = 0$ und $Nw''(L) - Kw^{IV}(L) = M(L) = 0$, kommen zwei weitere hinzu, da sechs Konstanten zu bestimmen sind. Eine der zwei weiteren Randbedingungen betrifft die Momentenfreiheit der höheren Momente an der Stelle $x=L$: $Kw'''(L) = M^h(L) = 0$. Für das Aufstellen der letzten Randbedingung bleibt nach KONG, et al. (2009) [50] die Wahl zwischen der Momentenfreiheit der klassischen (RB1)- oder der höheren Momente (RB2) an der Stelle $x=0$:

$$\begin{aligned} \text{RB1: } Kw'''(0) &= M^h(0) = 0 \\ \text{RB2: } Elw''(0) &= M^{\text{klass}}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Die Konstanten lauten für die Wahl der Randbedingung RB1:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= F \frac{K^{\frac{3}{2}}(e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L} + e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L} - 2)}{N^{\frac{5}{2}}(e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L} - e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L})}, & C_2 &= F \frac{K}{N^2}, \\
 C_3 &= F \frac{L}{2N}, & C_4 &= -F \frac{1}{6N}, \\
 C_5 &= F \frac{K^{\frac{3}{2}}(-1 + e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L})}{N^{\frac{5}{2}}(e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L} - e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L})}, & C_6 &= F \frac{K^{\frac{3}{2}}(-1 + e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L})}{N^{\frac{5}{2}}(e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L} - e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L})}
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

und für die Wahl von RB2:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= F \frac{KL}{N^2}, & C_2 &= \frac{FK^{\frac{1}{2}}(L\sqrt{N}e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L} - L\sqrt{N}e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L} + 2\sqrt{K})}{N^2(e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L} + e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L})}, \\
 C_3 &= F \frac{L}{2N}, & C_4 &= -F \frac{1}{6N}, \\
 C_5 &= F \frac{K(\sqrt{K} - L\sqrt{N}e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L})}{N^{\frac{5}{2}}(e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L} + e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L})}, & C_6 &= -F \frac{K(\sqrt{K} + L\sqrt{N}e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L})}{N^{\frac{5}{2}}(e^{\sqrt{\frac{N}{K}}L} + e^{-\sqrt{\frac{N}{K}}L})}.
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Bei dieser komplex anmutenden Lösung sei erinnert, dass N und K vom inneren Längenparameter des Materials abhängen, was letztendlich zum Größeneffekt führt. Die Auswirkungen auf den Unterschied beider höherer Randbedingungen auf die zur klassischen Theorie normierte Durchbiegung ist in Abbildung 3.10 dargestellt und beträgt maximal vier Prozent.

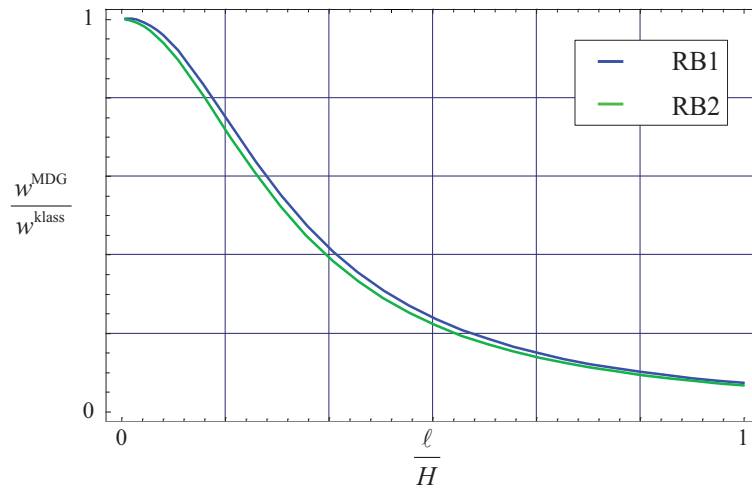


Abbildung 3.10: Normierte Durchbiegungen über zur Balkenhöhe H normierte innere Längenparameter der MDG-Theorie.

Es ist zu erkennen, dass bei verschwindendem inneren Längenparameter die MDG-Theorie in die klassische ($w^{\text{MDG}}/w^{\text{klass}}=1$) übergeht und die Auswirkungen der Wahl der Randbedingungen auf die Durchbiegung nicht stark ausgeprägt ist. Insgesamt ist durch Formel (3.109)₂ in Kombination mit (3.111) oder (3.112) die Biegelinie bestimmt und kann zur Auswertung in Abschnitt 5.1 genutzt werden.

3.4 Die Momentenspannungstheorie als Sonderfall (MS)

Wie schon im Vorfeld angeklungen ist, eröffnet die Nutzung des Rotationsvektors makroskopischer Rotationen die Überlagerung der Mikropolar- und der Dehnungsgradiententheorie. Die MS-Theorie stellt damit einen Sonderfall beider Theorien dar. Aus Sicht der DG-Theorie gelangt man zur MS-Theorie durch Postulieren einer Formänderungsenergiedichte u^{MS} , die zusätzlich zum Dehnungstensor vom Rotationsgradiententensor abhängt und der Annahme, dass letzterer symmetrisch sei (wie durch Gleichung (3.72) motiviert):

$$u^{\text{MS}} = u^{\text{MS}}(\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}^{\text{S}}). \quad (3.113)$$

Dies würde die Verwendung der Annahme von Materialien zweiter Ordnung inkludieren. Aus Sicht der MP-Theorie wiederum gelangt man zur MS-Theorie durch Gleichsetzen des Mikro- mit dem Makrorotationsvektor, $\varphi_i = \phi_i$, obgleich die MP-Theorie auf der Annahme von Materialien erster Ordnung (einfache Materialien) beruht. Die konstitutiven Gleichungen der linearen isotropen Elastizität mikropolarer Materialien (COSSERAT-Kontinuum), Gleichung (3.80), ergeben dann sofort:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} , \\ \mu_{ij} &= 2\mu \ell^2 \chi_{ij}^{\text{S}} . \end{aligned} \quad (3.114)$$

Die Kopplungszahl κ verschwindet und die Materialkonstante γ_1 fällt aufgrund der Spurfreiheit von χ_{ij}^{S} heraus ($\chi_{kk}^{\text{S}}=0$). γ_2 und γ_3 lassen sich aufgrund der Symmetrie von μ_{ij} zusammenfassen zu dem Ausdruck $2\mu\ell^2$. Der Kraftspannungstensor stellt sich in Gleichung (3.114)₁ als symmetrisch dar, was im anschließenden Abschnitt durch das Auswerten der Gesamtenergiebilanz gezeigt werden kann. Die MS-Theorie als Konstrukt ist in der Literatur bekannt als

Momentenspannungstheorie (engl.: „couple stress theory“), Pseudo-COSSERAT Kontinuum oder „indeterminate COSSERAT model“ und stellt die am weitesten vereinfachte Erweiterung des CAUCHY-Kontinuums dar.

3.4.1 Bilanzen in der MS-Theorie

Die Massen- und Impulsbilanz bleiben auch in der Momentenspannungstheorie unberührt. In der Spinbilanz fällt der nicht-symmetrische Teil des Kraftspannungstensors gegenüber der Mikropolartheorie weg, da durch Betrachtungen der Gesamtenergiebilanz gezeigt werden kann, dass lediglich der symmetrische Teil des Kraftspannungstensors in die Änderung der Gesamtenergie einfließt. Die **Spinbilanz** lautet somit verkürzt:

$$\int_V \rho \dot{s}_k dV = \int_V (\mu_{lk,l} + \rho l_k) dV \quad \text{und} \quad -\rho \dot{s}_k + \mu_{lk,l} + \rho l_k = 0 . \quad (3.115)$$

Die **Drehimpulsbilanz** ergibt global und lokal:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M (\epsilon_{ijk} x_j v_k + s_i) dm &= \oint_{\partial V} (\epsilon_{ijk} x_j t_k + m_i) dA + \int_V \rho (\epsilon_{ijk} x_j f_k + l_i) dV \\ \Leftrightarrow \underbrace{\epsilon_{ijk} x_j [-\rho \dot{v}_k + \sigma_{lk,l} + \rho f_k]}_{\text{Impulsbilanz}=0} &= - \underbrace{[-\rho \dot{s}_i + \mu_{li,l} + \rho l_i]}_{\text{Spinbilanz}} \\ \Rightarrow 0 &= \rho \dot{s}_i - \mu_{li,l} - \rho l_i . \end{aligned} \quad (3.116)$$

Die **Bilanz der Gesamtenergie**, bestehend aus kinetischer (E_{kin})- und innerer Energie (U), wobei sich die kinetische Energie in rotatorische- und translatorische Anteile spaltet, lautet global:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + U) &= \frac{d}{dt} \int_M \left(\frac{1}{2} v_i v_i + \frac{1}{2} s_i \dot{\varphi}_i + u \right) dm = \underbrace{\oint_{\partial V} (t_k \dot{x}_k + m_k \dot{\varphi}_k) dA}_{\text{Flussterm}} + \\
&+ \underbrace{\int_V (\rho f_k \dot{x}_k + \rho l_k \dot{\varphi}_k) dV}_{\text{Versorgungsterm}} .
\end{aligned} \tag{3.117}$$

In den folgenden Ausführungen soll gezeigt werden, dass durch die Verwendung des makroskopischen Rotationsvektors φ_i nach Gleichung (3.89)₅ der nicht-symmetrische Anteil des Kraftspannungstensors $\bar{\sigma}_{kj}$ nicht zur Änderung der Gesamtenergie beiträgt. Nach der Anwendung des GAUSSschen Satzes zur Umwandlung von Oberflächen- zu Volumenintegralen lautet die Gesamtenergiebilanz unter der Miteinbeziehung des nicht-symmetrischen Kraftspannungstensors in lokaler Form:

$$\begin{aligned}
\rho \dot{u} &= v_k \left[\underbrace{-\rho \dot{v}_k + \bar{\sigma}_{lk,l} + \rho f_k}_{\text{Impulsbilanz} = 0} \right] + \bar{\sigma}_{lk} \dot{x}_{k,l} + \dot{\varphi}_k \left[\underbrace{-\rho \dot{s}_k + \mu_{lk,l} + \rho l_k}_{\text{Spinbilanz aus MP} = -e_k} \right] + \mu_{lk} \dot{\varphi}_{k,l}
\end{aligned} \tag{3.118}$$

$$\Rightarrow \rho \dot{u} = \bar{\sigma}_{lk} \dot{x}_{k,l} - \epsilon_{kop} \bar{\sigma}_{op} \dot{\varphi}_k + \mu_{lk} \dot{\varphi}_{k,l} .$$

Durch das Überführen der letzten Gleichung in die differentielle Schreibweise und dem Ersetzen von dx_i mit du_i (kinematische Bedingung), folgt:

$$\rho du = \bar{\sigma}_{lk} du_{k,l} - \epsilon_{kop} \bar{\sigma}_{op} d\varphi_k + \mu_{lk} d\varphi_{k,l} . \tag{3.119}$$

Durch Einsetzen des differentiellen Rotationsvektors $d\varphi_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} du_{k,j}$ und Aufspaltung des Kraftspannungstensors in seinen symmetrischen- und anti-symmetrischen Teil $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^S + \bar{\sigma}_{ij}^A$, wobei $\bar{\sigma}_{ij}^S \equiv \sigma_{ij}$, ergibt sich:

$$\rho du = (\bar{\sigma}_{ij}^S + \bar{\sigma}_{ij}^A) du_{j,i} - \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_{kij} \epsilon_{kop} \bar{\sigma}_{op}}_{\bar{\sigma}_{ij}^A} du_{i,j} + \mu_{lk} d\varphi_{k,l} \quad (3.120)$$

$$\Rightarrow \rho du = \sigma_{ij} du_{j,i} + \mu_{lk} d\varphi_{k,l} .$$

Durch Ausmultiplizieren aller Indizes ist nachvollziehbar, dass:

$$\bar{\sigma}_{ij}^A = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \epsilon_{kop} \bar{\sigma}_{op} . \quad (3.121)$$

Dadurch ist in Gleichung (3.120) gezeigt, dass ein antisymmetrischer Teil des Kraftspannungstensors nicht zur Änderung der Gesamtenergie beiträgt. Die Symmetrie des Momentenspannungstensors kann analog zur Herleitung der Symmetrie in der MP-Theorie, Gleichung (3.72), hergeleitet werden. Aufgrund der Symmetrie der Spannungsmaße σ_{ij} und μ_{ij} können wie im Anhang A1 gezeigt, für den Verschiebungs- und den Rotationsgradienten ebenfalls symmetrische Tensoren (ε_{ij} und χ_{ij}^S) genutzt werden. Nach rückführender Integration der Differentialschreibweise vom Anfang (A) bis zum Ende (E) eines Prozesses, lautet die Änderung der inneren Energie eines linear elastischen mikropolaren Körpers in der Momentenspannungstheorie:

$$\begin{aligned} \rho du &= \sigma_{kl} d\varepsilon_{kl} + \mu_{kl} d\chi_{kl}^S \\ \Leftrightarrow \rho(u_E - u_A) &= \int_{\tilde{\varepsilon}_{kl}=0}^{\tilde{\varepsilon}_{kl}=\varepsilon_{kl}} \sigma_{kl} d\tilde{\varepsilon}_{kl} + \int_{\tilde{\chi}_{kl}^S=0}^{\tilde{\chi}_{kl}^S=\chi_{kl}^S} \mu_{kl} d\tilde{\chi}_{kl}^S \\ \Rightarrow u^{MS} &= \frac{1}{2} \sigma_{kl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \mu_{kl} \chi_{kl}^S . \end{aligned} \quad (3.122)$$

3.4.2 Balkenbiegung mit der MS-Theorie

Um die Balkenbiegedifferentialgleichung in der Momentenspannungstheorie herzuleiten, wird der EULER-BERNOULLISCHE Verschiebungsfeldansatz aus Gleichung (3.47) zur Auswertung bezüglich konventioneller Spannungen und Dehnungen, und das Prinzip der Variation der Minimierungsfunktion Π (Gleichung (3.50)) benutzt. Neu aufgestellt werden muss die innere Energie U^{MS} mit Hilfe der Gleichung (3.122):

$$U^{\text{MS}} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu_{kl} \chi_{kl}^S) dV . \quad (3.123)$$

Die von null verschiedenen Komponenten des symmetrischen Rotationsgradienten und dessen Spannungsmaß sind identisch zu den Ausführungen in Gleichung (3.100). Es ergibt sich für die innere Energie:

$$\begin{aligned} U^{\text{MS}} &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \mu_{xy} \chi_{xy}^S + \mu_{yx} \chi_{yx}^S) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (E z^2 + \mu \ell^2) \cdot w''^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (EI + \mu A \ell^2) \cdot w''^2 dx , \end{aligned} \quad (3.124)$$

und dessen Variation mit vierfach partieller Integration:

$$\begin{aligned} \delta U^{\text{MS}} &= \frac{1}{2} \int_0^L (EI + \mu A \ell^2) \cdot \delta(w''^2) dx \\ &= (EI + \mu A \ell^2) \int_0^L w'' \delta w dx - (EI + \mu A \ell^2) w''' \delta w \Big|_0^L + (EI + \mu A \ell^2) w'' \delta w' \Big|_0^L , \end{aligned} \quad (3.125)$$

wobei $I = I_{yy}$ ist. Der direkte Vergleich zur Variation der Arbeit K^{klass} der äußeren Kräfte F , $q(x)$ und Momente M , Gleichung (3.53), bringt die folgende Differentialgleichung:

$$\left. \begin{aligned} (EI + \mu A \ell^2) w^{IV}(x) &= q(x) & , \forall x \in [0, L] \\ (EI + \mu A \ell^2) w'''(\tilde{x}) &= -Q \\ (EI + \mu A \ell^2) w''(\tilde{x}) &= -M \end{aligned} \right\} \tilde{x} = 0 \text{ oder } \tilde{x} = L \quad (3.126)$$

samt ihrer Randbedingungen hervor. Im vorliegenden Fall soll es keine Linienlast $q(x)$ und keine äußeren Momente M geben. Dann erhält man durch vierfache Integration der Differenzialgleichung (3.126)₁ das unbestimmte Polynom:

$$(EI + \mu A \ell^2) w(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 . \quad (3.127)$$

Die Integrationskonstanten C_1 , C_2 , C_3 und C_4 werden über die vier Randbedingungen: $w'''(L) = F$, $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$ und $w''(L) = 0$ bestimmbar, womit die Biegelinie $w(x)$ für den Fall des einseitig fest eingespannten EULER-BERNOULLI Trägers in der MS-Theorie lautet:

$$w^{\text{MS}}(x) = \frac{F}{(EI + \mu A \ell^2)} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] . \quad (3.128)$$

Die Kraftkonstante (oder Federkonstante) eines Balkens kann aus dem Verhältnis aus einer aufgebrachten Einzellast zu der daraus resultierenden Durchbiegung an der Stelle der Kraftaufbringung errechnet werden:

$$D = \frac{F|_L}{w(L)} . \quad (3.129)$$

Vergleicht man die Kraftkonstante eines EULER-BERNOULLI Balkens aus der klassischen Theorie $D_0 = F/w^{\text{klass}}$, mit w^{klass} aus Gleichung (3.56), mit der aus der Momentenspannungstheorie $D^{\text{MS}} = F/w^{\text{MS}}$, so zeigt sich:

$$\frac{D^{\text{MS}}}{D_0} = \frac{\frac{3}{L^3}(EI + \mu A \ell^2)}{\frac{3}{L^3}EI} . \quad (3.130)$$

Die LAMÉsche Konstante μ kann mit Hilfe von Gleichung (3.45) unter Verwendung der Querkontraktionszahl ν und des E -Moduls umgeschrieben werden.

In der Literatur führen einige Autoren an dieser Stelle die Querkontraktionszahl wieder ein, obwohl in der Herleitung, durch die Anwendung des EULER-BERNOULLISchen Verschiebungsfeldes, diese bereits zu null gesetzt wurde. In dieser Arbeit soll ν weiterhin, gemäß der getroffenen Annahmen, unbeachtet bleiben, wodurch $\mu = E/2$ wird. Geht man des Weiteren von einem rechteckigen Balkenquerschnitt und dem sich daraus ergebenden Flächenträgheitsmoment $I = AH^2/12$ aus, wobei H die Höhe des Balkens bezeichnet, ergibt sich das Verhältnis der Biege widerstände zu:

$$\frac{D^{\text{MS}}}{D_0} = 1 + 6 \frac{\ell^2}{H^2} . \quad (3.131)$$

3.5 Grundzüge der Oberflächentheorie (OF)

Die Oberfläche eines Festkörpers zeigt typischerweise Eigenschaften, die von denen des Volumens abweichen können. Diese Unterschiede werden etwa durch Oberflächenoxidation, Alterung, Beschichtung, Atom- und Molekülumlagerung und letztendlich dem Abschluss der Atom- und Molekülbindungen (siehe Abbildung 3.11) in vergleichsweise dünnen Grenzschichten hervorgerufen.

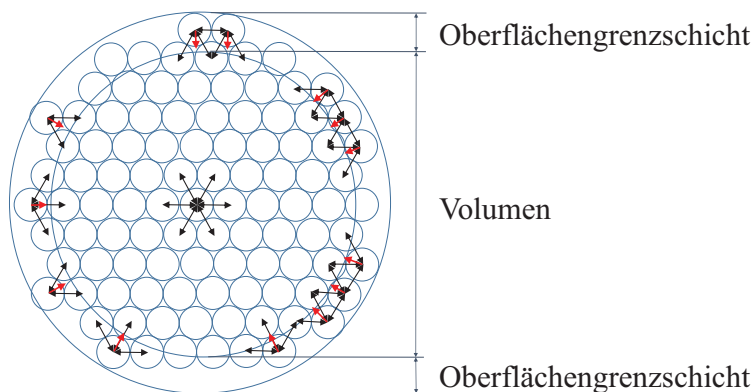


Abbildung 3.11: Der Abschluss der Molekülbindungen mit resultierenden intermolekularen Kräften (rote Pfeile) als Ursache von Molekülumlagerungen.

Es gibt zwei Hauptansätze, um die Eigenschaften von Oberflächen und Grenzflächen zu untersuchen:

- die (geometrische) GIBBS-Methode, in der eine Oberflächenlage mit der Dicke von null eingeführt wird, um zusätzliche Größen des Oberflächenmaterials zu erfassen, und
- die Schicht-Methode, bei der eine Oberflächenlage mit endlicher Dicke eingeführt wird.

Der GIBBSschen Thermodynamik folgend, wurden viele Beschreibungen der Oberflächengrößen vorgestellt, z.B. von SHUTTLEWORTH (1950) [91] und OROWAN (1970) [75]. Die etablierte kontinuumsmechanische Beschreibung eines Oberflächenspannungstensors ist auf GURTIN & MURDOCH (1975) [44] zurückzuführen und wird in aktuellen Arbeiten, wie MILLER & SHENOY (2000) [63], JAVILI et al. (2013) [46], WANG et al. (2010) [108] oder RU (2010) [84] besprochen. Darin ist ausgehend vom kinematischen Modell materieller Oberflächen eine lineare Elastizitätstheorie inklusive Eigenspannungen (das sog. GURTIN-MURDOCH Modell) vorgestellt, welches in dieser Arbeit Anwendung auf die einfache Balkenbiegung finden soll. Dabei behalten alle klassischen Gleichungen und konstitutiven Beziehungen der linearen Elastizität innerhalb des Vollmaterials ihre Gültigkeit. Nach einer kurzen Einführung zur Koordinatentransformation auf Oberflächenkoordinaten und weiterer wichtiger Größen der Oberflächenelastizität, wird in dieser Arbeit ein simplifiziertes, von der EULER-BERNOULLI Theorie ausgehendes Beispiel gerechnet.

3.5.1 Wichtige Größen der OF-Theorie

Ausgehend vom allgemeinsten Fall einer beliebig gekrümmten, glatten und parametrisierten Fläche seien die Flächenkoordinaten z^1 und z^2 sowie der Begriff der *ko- und kontravarianten Komponentendarstellung* eingeführt (siehe Abbildung 3.12). Dazu werden kartesische Komponenten (aus dem x -System) eines Vektors zum Punkt A mit „(x)“, und Komponenten aus dem z -System mit dem Zusatz „(z)“ versehen. Als kovariant werden in der beispielhaften Abbildung 3.12 solche Komponenten bezeichnet, die in einem rechten Winkel zu den Achsen des z -Systems gemessen werden. Im Gegensatz dazu werden in diesem Beispiel kontravariante Komponenten an einer Parallelkonstruktion des z -Systems gemessen.

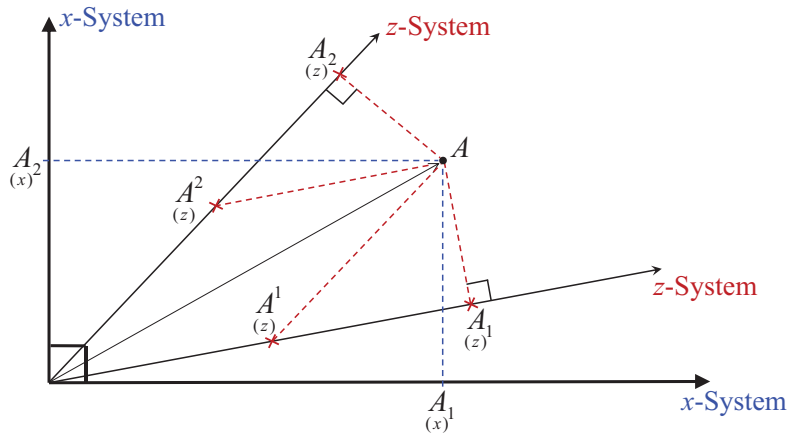


Abbildung 3.12: Zweidimensionales Beispiel ko- und kontravarianter Vektorkomponenten.

Die Komponenten des Vektors $A_{(x)}^i$ lassen sich in die ko- und kontravarianten Komponenten bzgl. der krummlinigen Basis z durch Differentiation der Koordinaten umrechnen, [69]:

$$A_{(z)}^i = \frac{\partial x_k}{\partial z^i} A_{(x)}^k, \quad \text{bzw.} \quad A_{(z)}^i = \frac{\partial z^i}{\partial x_k} A_{(x)}^k. \quad (3.132)$$

Bei Ortsableitungen von Vektorfeldern muss zudem folgender Zusammenhang genutzt werden, [69]:

$$A_{(z);k}^l = \frac{\partial A_{(z)}^l}{\partial z^k} + \Gamma_{kn}^l A_{(z)}^n, \quad \text{mit} \quad \Gamma_{kn}^l = \frac{\partial z^l}{\partial x_s} \frac{\partial^2 x_s}{\partial z^k \partial z^n}. \quad (3.133)$$

Man nennt Letzteres die kovariante Ableitung der kontravarianten Komponenten von A_i , mit Γ als Christoffelsymbol. Die Ortsableitung gemischter Tensoren gelingt wie folgt:

$$B_{(z)p;l}^n = \frac{\partial B_{(z)p}^n}{\partial z^l} + \Gamma_{lr}^n B_{(z)p}^r - \Gamma_{pl}^r B_{(z)r}^n. \quad (3.134)$$

Diese Darstellungs- und Ableitungsregeln sind in der allgemeinen Oberflächenelastizität zu verwenden und zu beachten.

Wichtige Oberflächengrößen werden im Folgenden mit „s“ (engl.: „surface“) gekennzeichnet und vektorielle als auch tensorielle Größen aufgrund der Zweidimensionalität der Oberfläche mit den Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta=1,2$ behaftet. Der zu einem materiellen Oberflächenpunkt führende Ortsvektor $\underline{x}$, die Tangentialvektoren $\underline{s}_\alpha$ sowie die Flächennormale $\underline{n}$, welche senkrecht zu beiden Tangentialvektoren steht, werden im kartesischen Inertialsystem $\underline{e}_i$ (x-System) beschrieben (siehe Abbildung 3.13).

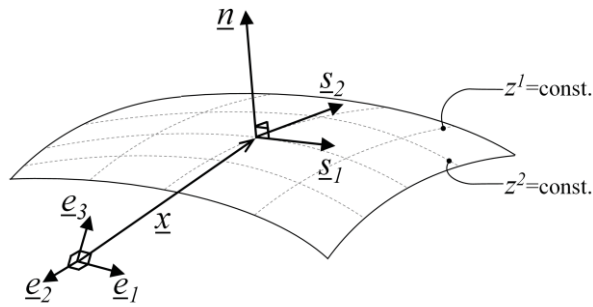


Abbildung 3.13: Kartesisches Inertialsystem und krummlinige Flächenkoordinaten.

Die unnormierten Tangentialvektoren sowie die Oberflächenidentität ergeben sich aus:

$$\underline{s}_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial z^\alpha} \underline{e}_i, \quad \text{sowie} \quad \delta_{\alpha\beta}^{\cdot} = \underline{s}^\alpha \cdot \underline{s}_\beta. \quad (3.135)$$

Die Komponenten des Krümmungstensors $\kappa_{\alpha\beta}$ der Oberfläche sind dabei definiert als (vgl. FLÜGGE, 1972, ff. 131, [36]):

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} n_i = x_{i,\alpha\beta} n_i. \quad (3.136)$$

Ein CAUCHYScher Oberflächenspannungstensor $\tau_{\alpha\beta}$ kann mit Hilfe der Idee einer freien GIBBSschen Oberflächenenergie beschrieben werden als [105]:

$$\tau_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \sigma \delta_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} + \frac{\partial \sigma(\varepsilon^{\cdot\delta\cdot}_{\cdot\gamma})}{\partial \varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}} , \quad (3.137)$$

wobei $\varepsilon_{\alpha\beta}^S$ der Oberflächendehnungstensor, $\delta_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$ die Oberflächenidentität und σ die Oberflächenenergiedichte ist. Der Oberflächendehnungstensor für kleine Oberflächendeformationen kann angegeben werden als (vgl. FLÜGGE, 1972, [36]):

$$\varepsilon_{\cdot\beta}^{S\alpha\cdot} = \frac{1}{2} (u_{\cdot\beta}^{S\alpha} + u_{\cdot\alpha}^{S\beta}) . \quad (3.138)$$

Verhält sich die Oberfläche elastisch isotrop, so lässt sich $\tau_{\alpha\beta}$ darstellen als:

$$\tau_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \gamma_0 \delta_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} + \lambda^S \varepsilon_{\cdot\gamma}^{S\gamma\cdot} \delta_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} + 2\mu^S \varepsilon_{\cdot\beta}^{S\alpha\cdot} , \quad (3.139)$$

worin γ_0 die Eigenspannungen, λ^S und μ^S die LAMÉschen Konstanten der Oberfläche und $\varepsilon_{\cdot\gamma}^{S\gamma\cdot}$ die Spur des Oberflächendehnungstensors in ko- und kontravarianter Schreibweise darstellen. Eine Formänderungsenergie(-dichte) der materiellen Oberfläche von *linear elastischen einfachen Materialien* ($u^{\text{Surf}}(\gamma_0, \varepsilon_{\alpha\beta}^{S\cdot\cdot}) = \frac{1}{2} \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_{\cdot\cdot}^{S\alpha\beta}$) ist dann gegeben durch:

$$U^{\text{Surf}} = \oint_{\partial\mathcal{B}} u^{\text{Surf}} dA , \quad u^{\text{Surf}} = \frac{1}{2} (\gamma_0 + \lambda^S \varepsilon_{\cdot\gamma}^{S\gamma\cdot}) \varepsilon^{\cdot\delta\cdot}_{\cdot\delta} + \mu^S \varepsilon_{\cdot\cdot}^{S\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{S\cdot\cdot} . \quad (3.140)$$

Der Gebrauch krummliniger Koordinaten und der damit zusammenhängenden ko- und kontravarianten Schreibweise vektorieller und tensorieller Größen vereinfacht sich enorm bei der Beschreibung ebener Flächen, auf denen die Flächenkoordinaten $\underline{s}_\alpha$ stets rechtwinkelig zueinander stehen.

3.5.2 Balkenbiegung mit der OF-Theorie

Im Folgenden wird ein schlanker EULER-BERNOULLI-Balken mit rechteckigem Querschnitt und nicht gekrümmten, ebenen Oberflächen (siehe Abbildung 3.14), mit Hilfe der erweiterten Gleichungen der Oberflächentheorie analytisch untersucht. Folgende Annahmen werden zusätzlich zu den bestehenden des klassischen EULER-BERNOULLI Balkens getroffen:

- stückweise glatte Oberflächen,
- ebene Oberflächen,
- orthogonale Tangentialvektoren $\underline{s}_\alpha$,
- keine Eigenspannungen ($\gamma_0=0$),
- keine Querkontraktionskopplung auf der Oberfläche ($v^S=0$).

Durch die Ebenheit der Oberflächen entsprechen sich ko- und kontravariante Komponenten, z. B. des Oberflächendehnungstensors:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{S\cdots} = \varepsilon^{\cdots S\alpha\beta}, \quad (3.141)$$

und der Krümmungstensor verschwindet ($\kappa_{\alpha\beta}=0$). Der Oberflächendehnungstensor ergibt sich in diesem Fall zu:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^S = u_{(\alpha,\beta)}^S = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^S + u_{\beta,\alpha}^S). \quad (3.142)$$

Wegen der fehlenden Querkontraktionskopplung verschwindet zudem die LAMÉsche Konstante λ^S der Oberfläche und aufgrund der Eigenspannungsfreiheit ($\gamma_0=0$) reduziert sich die Formänderungsenergiedichte der Oberflächen insgesamt zu:

$$u^{\text{Surf}} = \mu^S \varepsilon_{\alpha\beta}^S \varepsilon_{\alpha\beta}^S, \quad (3.143)$$

wobei $\mu^S = E^S/2$. E^S ist der Oberflächenelastizitätsmodul.

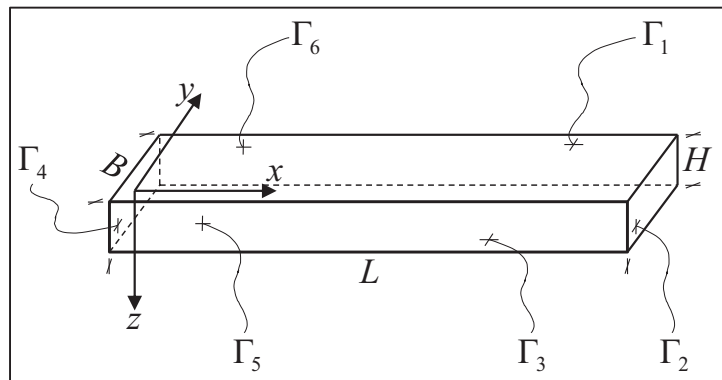


Abbildung 3.14: Kartesisches Koordinatensystem und Oberflächennumerierung am EULER-BERNOULLI Balken.

Zu dem dreidimensionalen Verschiebungsfeld $u_x = -z dw/dx$, $u_y = 0$ und $u_z = w(x)$ kommen die sich daraus ergebenden Verschiebungsfelder der jeweiligen Oberflächen hinzu:

$$\begin{aligned}
 u_x^S|_{\Gamma_1} &= \frac{H}{2} \frac{dw(x)}{dx}, & u_y^S|_{\Gamma_1} &= 0, \\
 u_y^S|_{\Gamma_2} &= 0, & u_z^S|_{\Gamma_2} &= w(x), \\
 u_x^S|_{\Gamma_3} &= -\frac{H}{2} \frac{dw(x)}{dx}, & u_y^S|_{\Gamma_3} &= 0, \\
 u_y^S|_{\Gamma_4} &= 0, & u_z^S|_{\Gamma_4} &= w(x), \\
 u_x^S|_{\Gamma_5} &= -z \frac{dw(x)}{dx}, & u_z^S|_{\Gamma_5} &= w(x), \\
 u_x^S|_{\Gamma_6} &= -z \frac{dw(x)}{dx}, & u_z^S|_{\Gamma_6} &= w(x).
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

Die von null verschiedenen Komponenten der jeweiligen Oberflächendehnungstensoren (pro Fläche) lauten:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{xx}^S|_{\Gamma_1} &= \frac{H}{2} w'', & \mathcal{E}_{xx}^S|_{\Gamma_3} &= -\frac{H}{2} w'', \\
 \mathcal{E}_{xx}^S|_{\Gamma_5} &= -zw'', & \mathcal{E}_{xx}^S|_{\Gamma_6} &= -zw''.
 \end{aligned} \tag{3.145}$$

Die Dehnungstensorkomponenten des Vollmaterials ergeben sich in Analogie zu denen aus Gleichung (3.48). Die gesamte Formänderungsenergie dieses Balkenmodells U^{OF} besteht aus der Superposition von U^{Surf} aus Gleichung (3.144) und U^{Klass} aus Gleichung (3.51):

$$\begin{aligned}
U^{\text{OF}} &= U^{\text{Surf}} + U^{\text{Klass}} = \oint_{\partial \mathcal{B}} u^{\text{Surf}} dA + \int_{\mathcal{B}} u^{\text{Klass}} dV \\
&= \int_{\Gamma_1} u^{\text{Surf}} dA + \int_{\Gamma_2} u^{\text{Surf}} dA + \int_{\Gamma_3} u^{\text{Surf}} dA + \int_{\Gamma_4} u^{\text{Surf}} dA + \int_{\Gamma_5} u^{\text{Surf}} dA + \int_{\Gamma_6} u^{\text{Surf}} dA + \int_{\mathcal{B}} u^{\text{Klass}} dV \\
&= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{2} E^S \varepsilon_{xx}^S \varepsilon_{xx}^S dA + \int_{\Gamma_3} \frac{1}{2} E^S \varepsilon_{xx}^S \varepsilon_{xx}^S dA + \int_{\Gamma_5} \frac{1}{2} E^S \varepsilon_{xx}^S \varepsilon_{xx}^S dA + \int_{\Gamma_6} \frac{1}{2} E^S \varepsilon_{xx}^S \varepsilon_{xx}^S dA + \\
&\quad + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} E_b \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xx} dV, \tag{3.146}
\end{aligned}$$

worin E_b den E -Modul des Vollmaterials bezeichnet (engl.: b=„bulk“). Multipliziert man in der letzten Gleichung die Dehnungen aus und führt die Integrationen über die jeweiligen Gebiete durch, so erhält man:

$$\begin{aligned}
U^{\text{OF}} &= \int_{\Gamma_1} \frac{E^S H^2}{8} w''^2 dy dx + \int_{\Gamma_3} \frac{E^S H^2}{8} w''^2 dy dx + \int_{\Gamma_5} \frac{1}{2} E^S z^2 w''^2 dz dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_6} \frac{1}{2} E^S z^2 w''^2 dz dx + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} E_b z^2 w''^2 dx dy dz \\
&= \frac{E^S H^2 B}{4} \int_{x=0}^L w''^2(x) dx + E^S \underbrace{\int_{x=0}^L \int_{z=-\frac{H}{2}}^{z=+\frac{H}{2}} z^2 dz}_{I_{\text{OF}}} w''^2(x) dx + \frac{E_b I_{yy}}{2} \int_{x=0}^L w''^2(x) dx, \tag{3.147}
\end{aligned}$$

mit I_{OF} als Umfangträgheitsmoment der Oberflächentheorie (engl.: „perimeter moment of inertia“; ähnlich dem Flächenträgheitsmoment I_{yy}). Im vorliegenden Fall integriert sich I_{OF} zu $H^3/12$ und I_{yy} zu $BH^3/12$. Die Variation von Gleichung (3.147) ergibt:

$$\begin{aligned}
\delta U^{\text{OF}} &= \left(\frac{E^S H^2 B}{4} + \frac{E^S H^3}{12} + \frac{E_b I_{yy}}{2} \right) \int_{x=0}^L \delta(w''^2) dx \\
&= \left(E^S \frac{BH^2}{2} + E^S \frac{H^3}{6} + E_b \frac{BH^3}{12} \right) \int_{x=0}^L w'' \delta w'' dx. \tag{3.148}
\end{aligned}$$

Da das Integral in Gleichung (3.148) dem in Gleichung (3.52) entspricht, kann die Biegedifferentialgleichung der vorliegenden Oberflächentheorie mit Hilfe der

Lösung aus der klassischen Theorie angegeben werden, indem man lediglich die Konstante vor dem Integral ersetzt:

$$\left. \begin{aligned} \left(E^s \frac{BH^2}{2} + E^s \frac{H^3}{6} + E_b \frac{BH^3}{12} \right) w^{IV}(x) &= q(x) \quad , \forall x \in [0, L] \\ \left(E^s \frac{BH^2}{2} + E^s \frac{H^3}{6} + E_b \frac{BH^3}{12} \right) w'''(\tilde{x}) &= -Q \\ \left(E^s \frac{BH^2}{2} + E^s \frac{H^3}{6} + E_b \frac{BH^3}{12} \right) w''(\tilde{x}) &= -M \end{aligned} \right\} \tilde{x} = 0 \text{ oder } \tilde{x} = L . \quad (3.149)$$

Da die gleichen Einspannungs- und Belastungsbedingungen wie bei der klassischen Lösung angewendet werden sollen, ergibt sich die Lösung der Biegedifferentialgleichung ebenso durch den Austausch der Integralkonstante zu:

$$w^{OF}(x) = \frac{F}{\left(E^s \frac{BH^2}{2} + E^s \frac{H^3}{6} + E_b \frac{BH^3}{12} \right)} \left[\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right] . \quad (3.150)$$

Ein direkter Vergleich der Integralkonstanten resultiert in dem größenabhängigen E -Modul:

$$\begin{aligned} E \frac{BH^3}{12} &= \left(E^s \frac{BH^2}{2} + E^s \frac{H^3}{6} + E_b \frac{BH^3}{12} \right) \\ \Rightarrow E &= E_b + E^s \left(\frac{6}{H} + \frac{2}{B} \right) , \end{aligned} \quad (3.151)$$

was identisch der von MILLER & SHENOY (2000) [63] und WANG et al. (2010) [108] gezeigten Lösung ist. Im Grenzfall eines verschwindenden Oberflächeneinflusses ($E^s=0$) geht die OF-Theorie in die klassische Theorie über. Ein positiver, als auch negativer Größeneffekt kann modelliert werden, wenn, wie der angegebenen Arbeit [63] zu entnehmen ist, der Oberflächenelastizitätsmodul E^s sowohl positive als auch negative Werte annehmen darf. Der physikalische Widerspruch negativer E -Moduln sollte allerdings im jeweiligen Anwendungsfall beachtet werden.

4 Numerische Größeneffektmodellierung

Das allgemeine Ziel numerischer Untersuchungen ist es, quantitative Größen (wie Kräfte, Verformungen, Spannungs- und Dehnungstensorcomponenten) für beliebig geformte, dreidimensionale Bauteile unter vielseitig vorgegebener Belastung zu berechnen, ohne vorherige Annahmen eines Verschiebungsfeldes (z.B. dem EULER-BERNOULLISchen Verschiebungsfeld) zu treffen. In der numerischen Analyse, speziell des Größeneffekts, können vom Prinzip her alle in dieser Arbeit aufgeführten erweiterten Theorien umgesetzt werden. Zu diesem Zweck soll die Methode der finiten Elemente (FEM) genutzt werden. Sie ist ein weit verbreitetes Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen auf einem Grundgebiet, welches in beliebig viele Elemente geteilt (diskretisiert) wird. Die analytische Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion. Beim numerischen Lösungsverfahren soll die gesuchte Funktion in einem vorgegebenen Intervall bestmöglich angenähert werden. Das Grundprinzip der FEM ist dabei, die Differentialgleichung zusammen mit den Anfangs-, Rand- und Übergangsbedingungen auf jedem Element des Grundgebietes mit Hilfe geeigneter Ansatzfunktionen zu lösen, wobei deren Funktionsparameter an den Diskretisierungsstellen (Knoten) bestimmt werden. Aus diesen Parametern lassen sich im sog. Post-Processing die angenäherte Lösungsfunktion (z. B. die Funktion der Verschiebung) sowie aus ihr abgeleitete Größen (z. B. Dehnungs- und Spannungstensorcomponenten) berechnen. Die folgenden Schritte sind bei der FEM zu beachten:

- das Herleiten der Variationsformulierung der zu lösenden Differentialgleichung,
- das Erstellen der Geometrie, der Randbedingungen und der Diskretisierung (Unterteilung des Rechengebietes),
- das Aufstellen und Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems,
- das Auswerten des gefundenen Parametersatzes der Ansatzfunktionen (Berechnung und Visualisierung gesuchter Größen).

Dieses Verfahren ist für große Systeme (mit vielen Freiheitsgraden) programmier-technisch sehr komplex und für verschiedene Problemstellungen im Umkreis der Thermodynamik in Form kommerzieller Software verfügbar (ABAQUS[®], ANSYS[®], usw.). Zur Berechnung von Problemen auf der Grundlage erweiterter Kontinuumstheorien kann derzeit ausschließlich auf akademisch/wissenschaftliche Software zurückgegriffen werden, die es erlaubt, die Variationsformulierung und Materialgesetze der entsprechenden Theorie zu berücksichtigen. Viele Arbeiten, wie etwa die von AMANTIDOU & ARAVAS 2002 [3], GAO & PARK 2007 [39], SOH & WANJI (2004) [95], SHU et al. (1999) [90], ODEN et al. (1970) [74], WEI (2006) [109] oder ENGEL et al. (2002) [27] nutzen eine der drei Formen von MINDLIN's Dehnungsgradiententheorie zur Definition geeigneter Elementenformulierungen. Im folgenden Abschnitt soll die Anwendung der numerischen Methode der finiten Elemente auf die Momentenspannungstheorie bezogen und mittels des open-source Software Packets FEniCS[®] (siehe LOGG et al., 2012 [55]) implementiert werden.

4.1 FE-Variationsformulierung der Momentenspannungstheorie

Zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung (DGL) auf einem Grundgebiet nutzt man ihre sog. schwache Formulierung, mit der die Ableitungsordnung der DGL um eins gesenkt werden kann. Die Impulsbilanz und die unabhängige Drehimpulsbilanz der MS-Theorie, Gleichungen (3.26) und (3.116), lauten ohne Einflüsse von Volumenkräften f_i und -momenten l_i für den statischen Fall ($\partial(\cdot)/\partial t=0$):

$$\int_V \sigma_{ji,j} \, dV = 0 \quad \text{und} \quad \int_V \mu_{ji,j} \, dV = 0 \quad , \quad (4.1)$$

bei dem beide Spannungsmaße symmetrisch sind. Die Zielfunktion in diesem Satz von Differentialgleichungen ist das Verschiebungsfeld u_i , welches in den Materialgleichungen der angegebenen Spannungsmaße vorkommt und mit entsprechenden Materialparametern gewichtet wird. Die Materialgleichungen der linearen Elastizität in der MS-Theorie lauten:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{und} \quad \mu_{ij} = 2\mu \ell^2 \chi_{ij}^S, \quad (4.2)$$

worin ε_{ij} und χ_{ij}^S jeweils den symmetrischen Verschiebungsgradienten und den symmetrischen Rotationsgradienten (siehe Gleichung (3.89)₇) kleiner Verformungen darstellen. In Verschiebungsschreibweise lauten die letzten beiden Gleichungen wie folgt:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)} \quad \text{und} \quad \mu_{ij} = \frac{1}{2} \mu \ell^2 (\epsilon_{ilk} u_{k,lj} + \epsilon_{jlk} u_{l,ki}). \quad (4.3)$$

Die höchste Ordnung der angegebenen Differentialgleichung (4.1)₂ bezüglich der Zielfunktion u_i beträgt drei, was durch Einsetzen der Materialgleichungen in Verschiebungsschreibweise leicht zu sehen ist:

$$\int_V (\lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j),j}) dV = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \mu \ell^2 \int_V (\epsilon_{ilk} u_{k,lj} + \epsilon_{jlk} u_{l,ki}) dV = 0. \quad (4.4)$$

Die schwache Formulierung dieser DGL wird durch Heranmultiplizieren jeweiliger Verschiebungs- bzw. Rotationsfelder herbeigeführt:

$$\int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = 0 \quad \text{und} \quad \int_V \mu_{ij,j} \delta \varphi_i dV = 0. \quad (4.5)$$

Wegen der Beliebigkeit und Unabhängigkeit der sog. Testfunktionen δu_i und $\delta \varphi_i$ ändert sich die in den Gleichungen (4.5) enthaltene Information nicht durch eine Summation dieser:

$$\int_V \sigma_{ji,j} \delta u_i dV + \int_V \mu_{ji,j} \delta \varphi_i dV = 0. \quad (4.6)$$

Die Anwendung der partiellen Integration:

$$\begin{aligned}
\int_V \sigma_{ji,j} \delta u_i \, dV &= \int_V (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} \, dV - \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} \, dV \quad , \\
\int_V \mu_{ji,j} \delta \varphi_i \, dV &= \int_V (\mu_{ji} \delta \varphi_i)_{,j} \, dV - \int_V \mu_{ji} \delta \varphi_{i,j} \, dV
\end{aligned} \tag{4.7}$$

und des GAUSSschen Integralsatzes zur Umwandlung von Volumen- in Oberflächenintegrale in seiner verallgemeinerten Form inklusive Sprungtermen, [69]:

$$\begin{aligned}
\int_V (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} \, dV &= \int_{\partial V} (\sigma_{ji} \delta u_i) n_j \, dA - \int_{A_e} \llbracket \sigma_{ji} \delta u_i \rrbracket n_j \, dA_e \quad , \\
\int_V (\mu_{ji} \delta \varphi_i)_{,j} \, dV &= \int_{\partial V} (\mu_{ji} \delta \varphi_i) n_j \, dV - \int_{A_e} \llbracket \mu_{ji} \delta \varphi_i \rrbracket n_j \, dA_e \quad ,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

auf die Gleichung (4.6) ergibt:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_V (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} \, dV - \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} \, dV + \int_V (\mu_{ji} \delta \varphi_i)_{,j} \, dV - \int_V \mu_{ji} \delta \varphi_{i,j} \, dV \\
\Leftrightarrow 0 &= \int_{\partial V} (\sigma_{ji} \delta u_i) n_j \, dA - \int_{A_e} \llbracket \sigma_{ji} \delta u_i \rrbracket n_j \, dA_e - \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} \, dV + \\
&\quad + \int_{\partial V} (\mu_{ji} \delta \varphi_i) n_j \, dV - \int_{A_e} \llbracket \mu_{ji} \delta \varphi_i \rrbracket n_j \, dA_e - \int_V \mu_{ji} \delta \varphi_{i,j} \, dV \quad .
\end{aligned} \tag{4.9}$$

A_e bezeichnet hierbei singuläre Flächen, die sich durch das Volumen V ziehen und sich durch die Elementierung ergeben (engl.: e=„element“). n_j ist in diesem Kontext die Flächennormale von A_e . Die Sprungterme:

$$\begin{aligned}
\llbracket \sigma_{rk} \delta u_k \rrbracket n_r &= (\sigma_{rk}^+ \delta u_k^+ - \sigma_{rk}^- \delta u_k^-) n_r \quad \text{und} \\
\llbracket \mu_{rk} \delta \varphi_k \rrbracket n_r &= (\mu_{rk}^+ \delta \varphi_k^+ - \mu_{rk}^- \delta \varphi_k^-) n_r
\end{aligned} \tag{4.10}$$

sorgen dabei im Wesentlichen für die Kontinuität der jeweiligen Testfunktion. Da bei der späteren Implementierung in FEniCS[®] vorgefertigt sog. CG-Elemente (engl.: „continuous LAGRANGE“-Elemente) genutzt werden, zwischen denen die Zielfunktion u_i als kontinuierlich definiert ist, führt die Sprungbedingung (4.10)₁

zu numerischen Problemen, da sie per Elementendefinition bereits erfüllt ist. Die Sprungbedingung des Verschiebungsfeldes wird daher an dieser Stelle nicht implementiert. Im Weiteren wird $\sigma_{ji}n_j$ mit dem Kraftspannungsvektor t_i ersetzt. Der Momentenspannungsvektor m_i wird aufgrund ungeklärter Applizierbarkeit in der Realität zu null gesetzt, $\mu_{ji}n_j=m_i=0$. Ferner wird die Variation des makroskopischen Rotationsvektors:

$$\delta\varphi_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta u_{k,j} \quad (4.11)$$

benutzt, um die folgende, sog. schwache Formulierung zu erhalten:

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\partial v} t_i \delta u_i \, dA + \int_v \sigma_{ji} \delta u_{i,j} \, dV + \\ & + \int_{A_e} \llbracket \mu_{ji} \frac{1}{2} \epsilon_{ilk} \delta u_{k,l} \rrbracket n_j \, dA_e + \int_v \mu_{ji} \frac{1}{2} \epsilon_{ilk} \delta u_{k,lj} \, dV . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aufgrund der Symmetrie der enthaltenen Spannungsmaße können mit Argumenten einfacher Tensorrechnung auch die Dehnungs- und Rotationsmaße symmetrisiert werden, siehe Anhang A1, und es ergibt sich die folgende *Variationsformulierung der MS-Theorie* in Hinblick auf die FEM:

$$0 = \int_v (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \mu_{ij} \delta \chi_{ij}) \, dV - \int_{\partial v} t_i \delta u_i \, dA + \int_{A_e} \llbracket \mu_{ij} \frac{1}{2} \epsilon_{ilk} \delta u_{k,l} \rrbracket n_j \, dA_e . \quad (4.13)$$

4.2 3D-Implementierung der MS-Theorie im FEniCS-Projekt

Das FEniCS Projekt ist eine Sammlung freier Softwarepakete mit einer umfangreichen Liste von Befehlen für die automatisierte, effiziente Lösung von Differentialgleichungen. Nach der Herleitung der Variationsformulierung der zu lösenden Differentialgleichung folgt nun das Erstellen der Geometrie, der Randbedingungen, der Belastung, der Diskretisierung, das Aufstellen und Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems und das Auswerten der approximierten Lösung.

Die Geometrie ist gemäß Abbildung 3.14 erstellt worden und kann in der Länge, Breite und Höhe variiert werden. Aufbauend auf einer konventionellen dreidimensionalen elastostatischen Modellierung eines einseitig fest eingespannten Balkens lautet die implementierte DIRICHLET-Randbedingung auf dem Randgebiet Γ_4 (vgl. Abbildung 3.14):

$$u_i(x_n) = (0, 0, 0), \quad \forall x_n \in \Gamma_4, \quad (4.14)$$

dass jegliche Verschiebung aller sich auf dem entsprechenden Randgebiet befindenden Punkte zu null gesetzt werden (siehe Programmiercode im Anhang A2). Die Belastung erfolgt über die Definition des Kraftspannungsvektors auf der Fläche Γ_2 :

$$t_i(x_n) = (0, 0, -F/A), \quad \forall x_n \in \Gamma_2, \quad (4.15)$$

wobei F die Kraft auf die Fläche A darstellt (siehe Programmiercode im Anhang A2). Die Vernetzung erfolgt mittels (in der Basisfunktion u_i) kontinuierlicher GALERKIN-Elemente (auch LAGRANGE- oder Tetraeder-Elemente genannt) mit einem Polynomansatz der Ordnung zwei, um der zweifachen Ableitungen von u_i in der schwachen Formulierung Rechnung zu tragen.



Abbildung 4.1: Qualitative Darstellung eines LAGRANGE- (oder Tetraeder-) Elements zweiter Ordnung.

Die Elementengröße und darüber die Netzdichte kann frei angepasst werden (siehe Programmiercode im Anhang A2). Es wurde dabei eine ausschließlich äquidistante Vernetzung gewählt. Die Variationsformulierung der anzunähernden Differentialgleichung wird in Anteile des Volumenintegrals, des Oberflächenintegrals und des Integrals über die Elementenflächen getrennt und dem Programm in symbolischer Schreibweise übergeben. Das Aufstellen der Systemmatrix

(Assemblieren) und das Lösen selbiger ist in dem „solve“-Befehl vorprogrammiert. Dabei wird das aufgestellte lineare Gleichungssystem über eine reduzierte LR-Zerlegung (engl.: „sparse lower/upper decomposition“) oder über das GAUSSsche Eliminationsverfahren vollständig gelöst. Im Lösungsvektor sind dann die Parameter der Basisfunktionen aller Elemente enthalten. An auswählbaren Auswertungspunkten liefern diese im Nachhinein die dreidimensionalen Knotenverschiebungen und deren Ableitungen. Die Materialkonstanten wurden in Übereinstimmung mit den in CHONG (2002) [16] und LAM et al. (2003) [52] angegebenen Daten aus experimentellen Messungen gewählt: $E=3,8$ GPa, $\nu=0,38$ und $\ell=9,4$ μm , wobei der innere Längenparameter mit der in Kapitel 5 vorgestellten Modellfunktion bestimmt wurde. Die Belastung am freien Ende betrug $F=1.0$ μN .

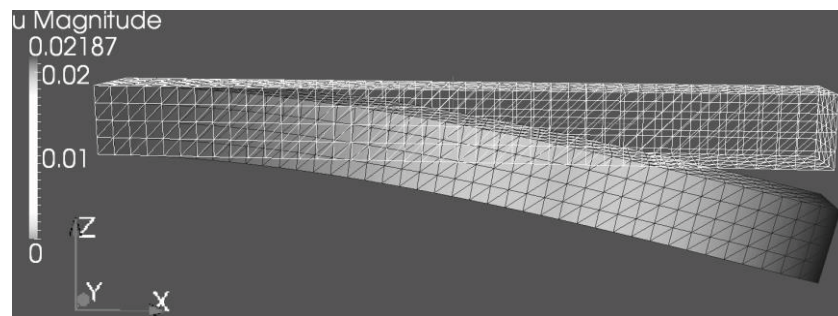


Abbildung 4.2: Beispielhafte Darstellung eines diskretisierten Biegebalkens vor und nach der Berechnung. $L=10H=10B$.

4.3 Untersuchung des numerischen Modells

Zum Testen des hier aufgestellten numerischen Modells der dreidimensionalen Balkenbiegung wurden folgende Untersuchungen durchgeführt:

- Die Konvergenz bei $\ell=0$ (Netzverfeinerung).
- Zug- und Scherversuche eines Elementes bei variierendem inneren Längenparameter.
- Die Konvergenz bei $\ell=25$ μm (Netzverfeinerung).
- Die Biegelinie bei $\ell=0$ μm , 8 μm und 19 μm .
- Die Dehnungen in x -Richtung und die Vergleichsdehnung bei $\ell=0$ μm , 8 μm und 19 μm .

- Die Rotation und der Rotationsgradient um die y -Achse, sowie die entstehenden Vergleichsmomentenspannungen bei $\ell=0\text{ }\mu\text{m}$, $8\text{ }\mu\text{m}$ und $19\text{ }\mu\text{m}$.

Soweit möglich, wird mit den analytischen Ergebnissen aus Abschnitt 3.1.4 und 3.4.2 verglichen. Zunächst wurde der innere Längenparameter des Materials ℓ zu null gesetzt, um den Übergang zur klassischen Theorie zu untersuchen und zudem die korrekte Arbeitsweise des Programmiercodes zu überprüfen.

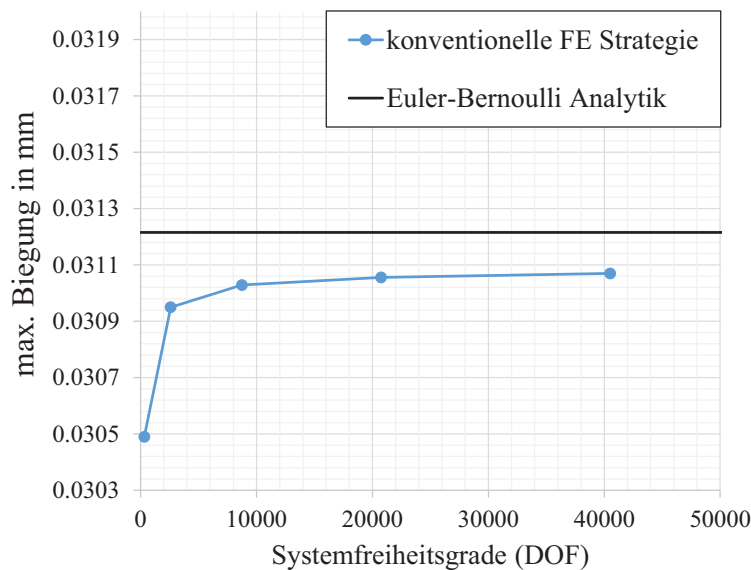


Abbildung 4.3: Das Konvergenzverhalten des numerischen Modells eines unterschiedlich fein diskretisierten Biegebalkens. $L=18H=18B$, $H=59\text{ }\mu\text{m}$, $\ell=0\text{ }\mu\text{m}$.

Dabei ergab sich bei der größten Elementierung von nur einem Element in Höhenrichtung, einem Element in Breitenrichtung und 18 Elementen in Längenrichtung eine Abweichung von ca. 2,3 % zur klassischen analytischen EULER-BERNOULLI Lösung (siehe Abbildung 4.11). Eine Verfeinerung hin zu fünf Elementen in Höhenrichtung, fünf Elementen in Breitenrichtung und 90 Elementen in Längenrichtung verkleinerte die prozentuale Abweichung auf ca. 0,45 %. Dies ist für numerische Simulationen als äußerst gut zu werten. Da ein solches Ergebnis in analoger Weise auch für geänderte Balkenabmaße und Materialkonstanten erreicht werden konnte, ist von der korrekten Arbeitsweise des Programms hinsichtlich der klassischen Theorie auszugehen.

Qualitative Zug- und Scherversuche eines einzelnen Elementes bei variierendem inneren Längenparameter ergaben die in der MS-Theorie prognostizierten Tendenzen. In der Simulation des reinen Zuges existiert keine Korrelation zum inneren Längenparameter des Materials. Dies kann derart interpretiert werden, dass bei reinem Zug weder Rotationen, noch Dehnungsgradienten zum Tragen kommen. Simulationen des Scherversuchs hingegen zeigten eine negative Korrelation zum inneren Längenparameter. Je größer dieser gewählt wurde (bei gleichbleibender Größe und Scherbelastung des Elementes), desto kleiner die resultierende Verschiebung. Dieses Verhalten ist eingangs als positiver Größeneffekt definiert worden.

Die Konvergenz eines numerischen Modells eines Biegebalkens mit einer Höhe von $59\text{ }\mu\text{m}$ bei einem konstanten inneren Längenparameter von $\ell=25\text{ }\mu\text{m}$ ($H/\ell \approx 2$) ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Bei der größten Elementierung von nur einem Element in Höhenrichtung, einem Element in Breitenrichtung und 18 Elementen in Längenrichtung wird eine Abweichung von ca. 2,3 % zur analytischen Lösung der Momentenspannungstheorie erreicht. Bei weiterer Verfeinerung konvergiert die numerische Lösung qualitativ zur analytischen Lösung der klassischen Theorie.

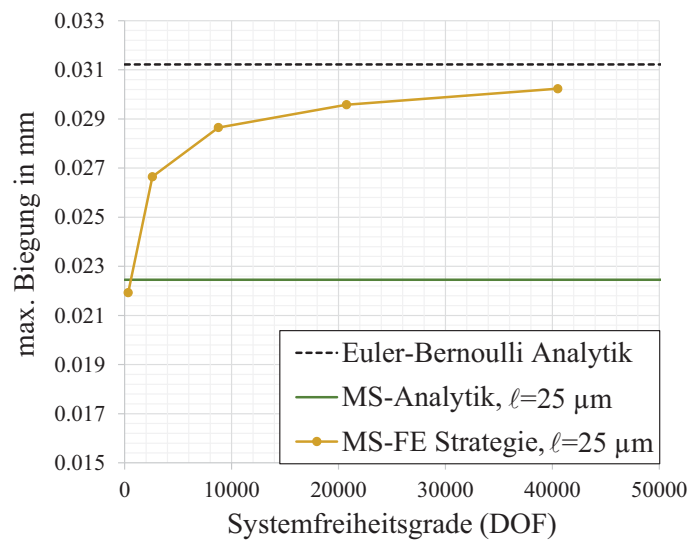


Abbildung 4.4: Das Konvergenzverhalten des numerischen Modells eines unterschiedlich fein diskretisierten Biegebalkens. $L=18H=18B$, $H=59\text{ }\mu\text{m}$, $\ell=25\text{ }\mu\text{m}$.

Dies erscheint insoweit ungewöhnlich, als dass eine höhere Netzdichte i. A. die Approximationsgüte hinsichtlich der zu Grunde liegenden Differentialgleichung verbessert. Zudem gilt das mathematische Prinzip, dass die Lösungsfunktionen elliptischer Differentialgleichungen durch die finite Elemente Methode approximiert werden können. Offensichtlich wird mit dem vorliegenden Modell im Umfeld der vorgegebenen Softwarepakete aus FEniCS weiterhin die Lösung der klassischen Theorie angenähert.

Zur näheren Untersuchung dieser Tatsache soll folgende numerische Testreihe dienen. Unter konstantem inneren Längen- und konstanter restlicher Materialparameter wurden die äußeren Abmaße sowie die Elementenanzahl von ein bis drei Elemente in der Höhe geändert.

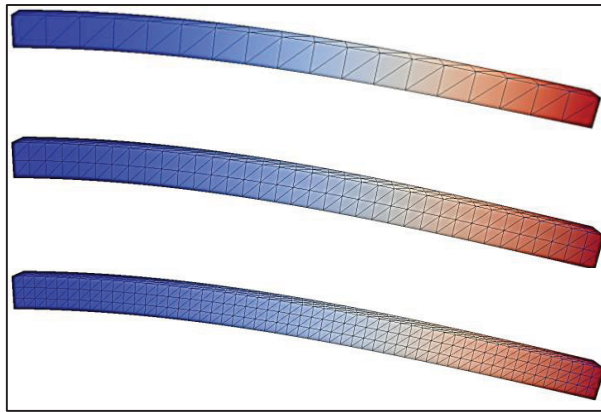


Abbildung 4.5: Die drei unterschiedlich vernetzten numerischen Modelle zur speziellen Untersuchung der Abhängigkeit der Elementengröße. $L=18H=18B$, $\ell=25\text{ }\mu\text{m}$.

19 numerische Einzelergebnisse der maximalen Durchbiegung wurden dabei in ihr prozentuales Verhältnis zu den jeweiligen, im Abschnitt 3.4.2 vorgestellten analytischen Ergebnissen der MS-Theorie gesetzt (siehe Abbildung 4.6). Ein prozentuales Verhältnis von null bedeutet in diesem Fall beste Übereinstimmung.

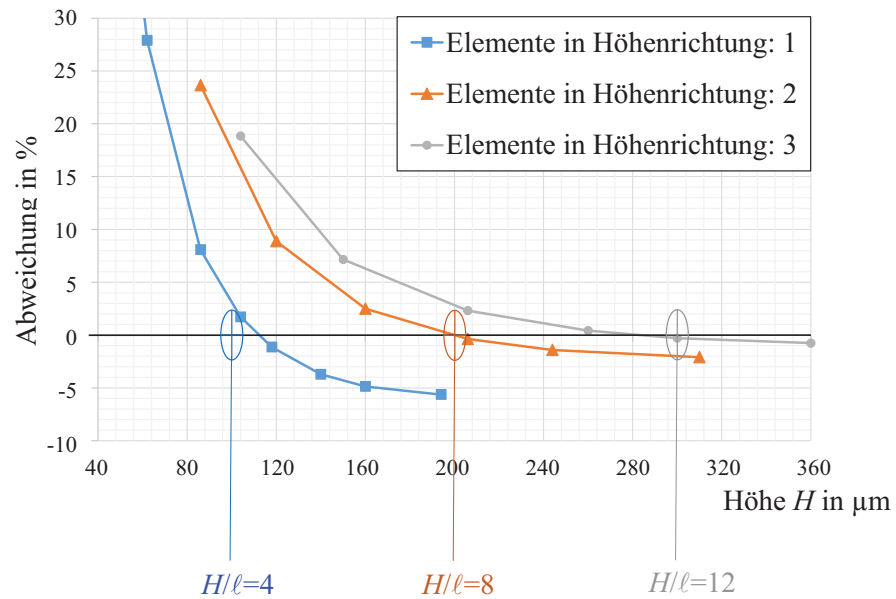


Abbildung 4.6: Die prozentuale Abweichung der Biegewerte dreier unterschiedlich vernetzter numerischer Modelle zu den jeweiligen analytischen Werten. $L=18H=18B$, $\ell=25\text{ }\mu\text{m}$.

Auffällig ist, dass die jeweils beste Annäherung an die analytischen Werte der MS-Theorie bei einem jeweils ähnlichen Verhältnis von innerem Längenparameter ℓ zur Elementenkantenlänge h_{elem} liegt. D. h., die tatsächliche Größe der äquidistant verteilten Elemente hat einen erheblichen Einfluss auf die Ergebnisse. Dieser Einfluss liefert jeweils gute Ergebnisse (Ergebnisse unterhalb von 2,4% Abweichung), wenn die Elementenkantenlänge etwa dem Vierfachen des inneren Längenparameters entspricht, $h_{\text{elem}} \approx 4\ell$. Ein solcher Zusammenhang könnte in der FEniCS internen Transformation der Elemente in den Einheitsraum und dortiger Evaluierung der Elementenformulierung entstehen, was sich für weitere Untersuchungen dem Einflussbereich des Nutzers der Software entzieht.

Wegen der Reproduzierbarkeit der Abhängigkeit der Elementengröße auch bei anderen Größendimensionen und Kräften, und der gut angenäherten Ergebnisse (unterhalb 2,4%), wurde im Folgenden darauf geachtet, dass die Elementenkantenlänge in etwa 4ℓ beträgt, was nicht immer genau möglich war. Unter dieser Voraussetzung wurden die Verschiebungen in z -Richtung u_z entlang der Mittelachse der Balkengeometrie nach der Berechnung ausgelesen und entlang der x -

Achse aufgetragen. Die daraus ersichtliche Biegelinie wurde für die drei verschiedenen inneren Längenparameter $\ell=0 \mu\text{m}$, $\ell=8 \mu\text{m}$ und $\ell=19 \mu\text{m}$ ausgewertet.

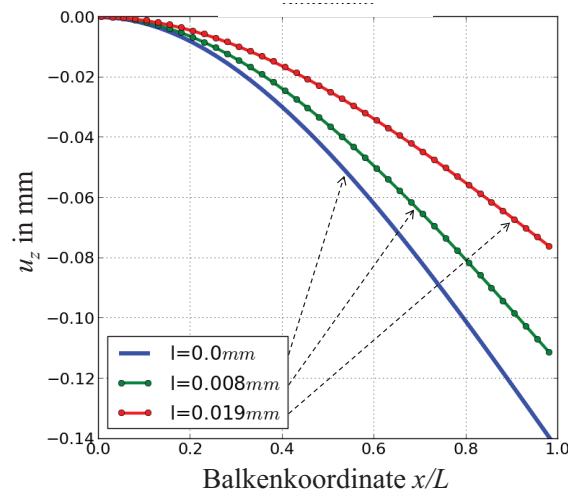


Abbildung 4.7: Die Biegelinie. $L=40H=40B$. $\ell=0 \mu\text{m}$, $8 \mu\text{m}$ und $19 \mu\text{m}$.

Wegen der Tatsache, dass die zweiten Ableitungen der Verschiebung auf dem gesamten Element konstant sind, im Folgenden aber ebenso deren Verläufe über die Balkenkoordinate gezeigt werden sollen, wurde die Balkenlänge für diese Simulationen auf $L/H=40$ erhöht. Jeder Punkt im Plot entspricht dabei einem Auswertungspunkt in jeweils einem Element. Die Biegelinien bei sich ändernden inneren Längenparametern zeigen einen positiven Größeneffekt. Die Dehnungen in x -Richtung sowie die Vergleichsdehnungen:

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{\text{VGL}} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij}}, \quad (4.16)$$

wobei ε'_{ij} den Deviator des Dehnungstensors darstellt:

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (4.17)$$

wurden im Post-Prozessorteil des Programmcodes durch entsprechende Ableitungen der gefundenen Lösung u_i gesondert berechnet und in Abbildung 4.8 entlang der Balkenachse geplottet.

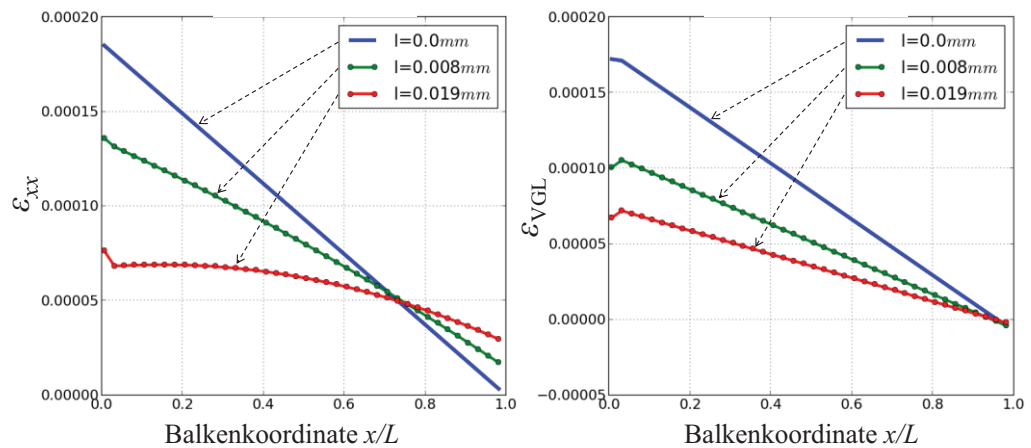


Abbildung 4.8: Der Dehnungs- und Vergleichsdehnungsverlauf.
 $L=40H=40B$. $\ell=0 \mu\text{m}$, $8 \mu\text{m}$ und $19 \mu\text{m}$.

Als interessant hervorzuheben ist der Verlauf der Dehnungen in x -Richtung (Abbildung 4.8, links), da dieser bei größer werdendem inneren Längenparameter nicht-linear wird und eine Dehnung direkt am freien Ende entsteht. Der sprungartige Verlauf der Dehnungen an der Einspannstelle ist auf den komplexeren Dehnungszustand zurückzuführen, da die Querkontraktionskopplung in diesem Bereich zu hohen Dehnungen in y - und z -Richtung führt.

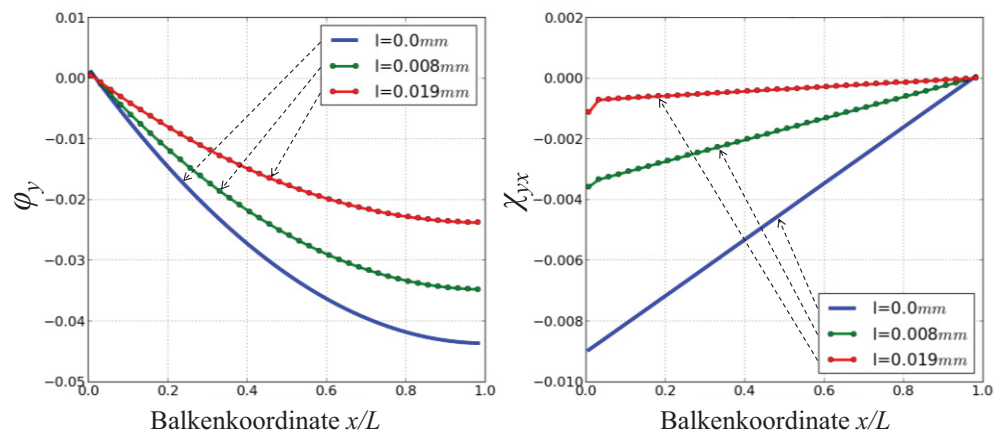


Abbildung 4.9: Der Rotations- und Rotationsgradientenverlauf.
 $L=40H=40B$. $\ell=0 \mu\text{m}$, $8 \mu\text{m}$ und $19 \mu\text{m}$.

Die Komponente des Rotationsvektors φ_i , welche die Rotation um die y -Achse beschreibt sowie dessen Gradient in x -Richtung, wurden wie folgt aus der numerischen Lösung u_i berechnet:

$$\varphi_y = \frac{1}{2} \epsilon_{yjk} u_{k,j} \quad \text{und} \quad \chi_{yx} = \frac{1}{4} (\epsilon_{yij} u_{j,ix} + \epsilon_{xij} u_{j,iy}) . \quad (4.18)$$

Am Punkt der Einspannung ist die Rotation um die y -Achse gleich null, steigt absolut gesehen mit laufender Balkenkoordinate erst stark an und konvergiert dann zu einem endgültigen Rotationswert am freien Ende. Am Gradienten der Rotation erkennt man weiterführend, dass die Änderung der Rotation am freien Ende in jedem Fall zu null strebt.

Geht man davon aus, dass es auch für den Momentenspannungstensor ein Vergleichsmaß gibt, die Vergleichsmomentenspannung μ_{VGL} :

$$\mu_{\text{VGL}} = \sqrt{\frac{3}{2} \mu_{ij} \mu_{ij}} , \quad (4.19)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass der Momentenspannungstensor deviatorisch ist, so ergibt sich für die Vergleichsmomentenspannung entlang der Balkenachse der in Abbildung 4.10 gezeigte Verlauf.

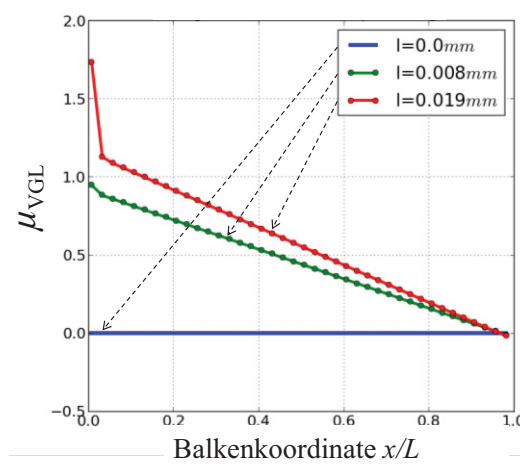


Abbildung 4.10: Der Verlauf der Vergleichsmomentenspannung.
 $L=40H=40B$. $\ell=0 \mu\text{m}$, $8 \mu\text{m}$ und $19 \mu\text{m}$.

Die Vergleichsmomentenspannung verhält sich linear über der Balkenachse und verschwindet am freien Ende des Balkens. Für $\ell=0 \mu\text{m}$ ist die Vergleichsmomentenspannung über den gesamten Balken gleich null, was in Übereinstimmung mit der klassischen Theorie steht.

4.4 Vergleich numerischer und analytischer Größeneffektmodellierung

Für einen Vergleich des Größeneffekts aus der numerischen Simulation zur analytischen Lösung der Momentenspannungstheorie für die einfache Balkenbiegung wurden die experimentellen Ergebnisse aus den Veröffentlichungen von CHONG (2002) [16] und LAM et al. (2003) [52] als Orientierung verwendet. Darin sind vier verschieden hohe Mikrobalken (der Höhen $20 \mu\text{m}$, $38 \mu\text{m}$, $75 \mu\text{m}$ und $115 \mu\text{m}$) aus Epoxidharz gefertigt und auf ihre Biegesteifigkeit hin geprüft worden. Das Längen- zu Höhenverhältnis lag bei $L/H=10$ und die separat getesteten klassischen Materialparameter bei $E=3,8 \text{ GPa}$ und $\nu=0,38$.

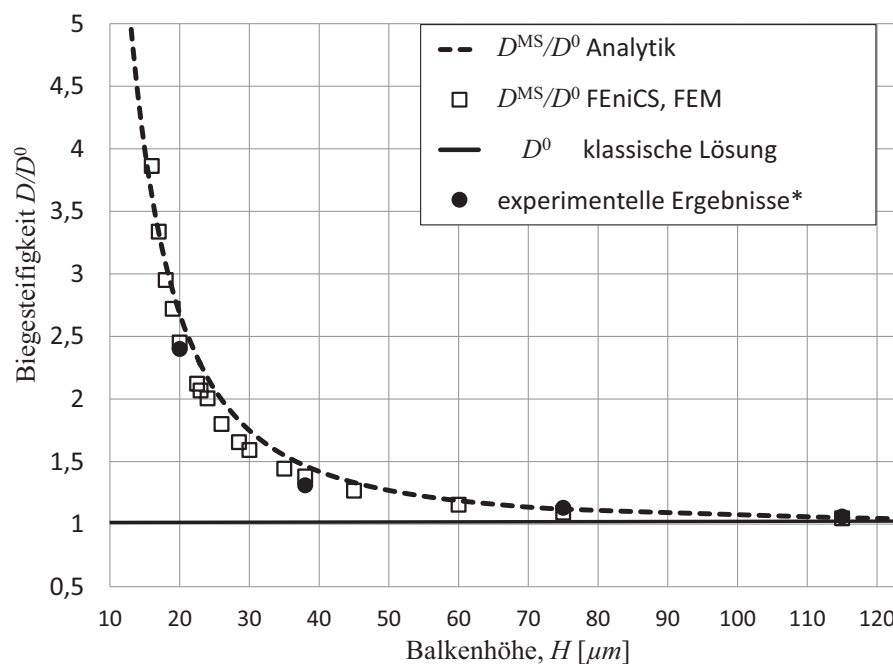


Abbildung 4.11: Plot von Biegesteifigkeitsverhältnissen aus Experiment (*CHONG, 2002 [16]), Analytik und Simulation. $\ell=9,4 \mu\text{m}$.

In den angegebenen Experimenten ist eine Biegesteifigkeitserhöhung gemessen worden, die auf einen inneren Längenparameter von $\ell=9,4\mu\text{m}$ schließen lässt, wenn die in Kapitel 5 vorgestellte Modellfunktion der MS-Theorie zugrunde gelegt wird. Die Biegesteifigkeiten wurden gemäß der Formel (3.131) aus der Momentenspannungstheorie ausgewertet.

Es zeigt sich qualitativ sowie quantitativ eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment, Analytik und Simulation. Der in den besagten Experimenten ermittelte positive Größeneffekt kann mittels der vorgestellten Erweiterung der finiten Elemente Methode modelliert werden. Die gemittelte Abweichung zwischen den diskreten FE-Werten und der analytischen Funktion beträgt dabei unter vier Prozent.

5 Auswertung und Diskussion

In diesem Kapitel sollen die verschiedenen eigenen experimentellen Ergebnisse mit den dazu hergeleiteten Theorien verknüpft werden. Die höheren Materialparameter sollen mittels numerischer Methoden aus den experimentellen Werten gewonnen werden. Im Abschnitt 5.4 soll die Diskussion aller Ergebnisse erfolgen, die in dieser Arbeit erlangt wurden.

Um eine Reihe von Messwerten $y_i(\hat{x}_i)$ aus einem definierten experimentellen Versuch an einen analytischen Zusammenhang $f(\hat{x}_i; \alpha_r)$ anzupassen, d. h. einen oder mehrere Koeffizienten im analytischen Zusammenhang bestmöglich zu bestimmen, wird der jeweilige Fehler zwischen einem betrachteten Messwert zu der analytischen Lösung herangezogen. Diese Einzelfehler sollen dabei im Mittel über alle Messwerte minimal werden. Man schreibt mit $i=1, \dots, n$ und $(r, k, l)=1, \dots, m$:

$$\min_{\alpha_r} \|f(\hat{x}_i; \alpha_r) - y_i(\hat{x}_i)\|^2, \quad n > m, \quad (5.1)$$

wobei α_r die Koeffizienten der analytischen Funktion sind. Die Modellfunktionen f sollen im Folgenden für die:

- modifizierte Dehnungsgradiententheorie (MDG),
- die Momentenspannungstheorie (MS) und
- die Oberflächentheorie (OF)

hergeleitet werden. Da es sich bei der Frequenzanalyse (FA) und bei den AFM Messungen um Biegeexperimente an schlanken Balken handelt, und dies in den zugrunde liegenden Verschiebungsfeldern für die Analytik zum Tragen kommt, sind die Materialkoeffizienten aus statischer Biegung und dynamischer Frequenzmessung identisch. Typische Messreihen bestehen aus dem E -Modul, der Länge L , der Höhe H und der Breite B des Balkens (E, L, H, B) . Aus den AFM-Messungen wird der E -Modul gemäß Gleichung (2.12) bestimmt, wohingegen er bei der FA aus der Gleichung (2.6) gewonnen wird. Um die jeweiligen Messreihen an die Lösung der Balkenbiegung aus der MDG-Theorie anzupassen, wird die Modellfunktion f mit Hilfe der Gleichung (3.109) in Kombination mit den Randbedingungen RB2 aus Gleichung (3.112) wie folgt gewonnen:

$$\begin{aligned}
 w^{\text{MDG}}(L) &= C_1 L^3 + C_2 L^2 + C_3 L + C_4 + C_5 e^{L\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} + C_6 e^{-L\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} \\
 &= \frac{F}{EI} \left[\hat{C}_1 L^3 + \hat{C}_2 L^2 + \hat{C}_3 L + \hat{C}_4 + \hat{C}_5 e^{L\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} + \hat{C}_6 e^{-L\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} \right] \\
 &\Rightarrow E = \frac{F}{w^{\text{MDG}}(L)I} \left[\hat{C}_1 L^3 + \hat{C}_2 L^2 + \hat{C}_3 L + \hat{C}_4 + \hat{C}_5 e^{L\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} + \hat{C}_6 e^{-L\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} \right].
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Aus den Konstanten $C_1, \dots, C_6$ und den Substitutionen S und K werden die Größen F/EI ausgeklammert, wodurch die so entstandenen Ausdrücke mit einem Dach versehen werden. Der Ausdruck $F/w^{\text{MDG}}(L)$ wird durch i -fach gemessene Größen nach Gleichung (2.12) ersetzt:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{3E_i^{\text{Mess}}}{L_i^3} \left[\hat{C}_1 L_i^3 + \hat{C}_2 L_i^2 + \hat{C}_3 L_i + \hat{C}_4 + \hat{C}_5 e^{L_i\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} + \hat{C}_6 e^{-L_i\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} \right], \\
 E_i^{\text{Mess}} &= \frac{EL_i^3}{3} \underbrace{\left[\hat{C}_1 L_i^3 + \hat{C}_2 L_i^2 + \hat{C}_3 L_i + \hat{C}_4 + \hat{C}_5 e^{L_i\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} + \hat{C}_6 e^{-L_i\sqrt{\hat{S}/\hat{K}}} \right]^{-1}}_{=f^{\text{MDG}}(E, \ell; L, H)}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Mit der beschriebenen Modellfunktion f^{MDG} und dem Lösungsvektor $y_i = E_i^{\text{Mess}}$ liefert eine entsprechende numerische Methode der Koeffizientenanpassung aus dem folgenden Abschnitt die bestmöglichen Werte für E und ℓ . Dabei gehen die Größen Länge und Höhe, nicht aber die Breite mit ein.

Um die jeweiligen Messreihen an die Lösung der Balkenbiegung aus der MS-Theorie anzupassen, wird die Modellfunktion mit Hilfe der Gleichung (3.128) wie folgt gewonnen (Annahmen: Rechtecksquerschnitt und keine Querkontraktionskopplung):

$$w^{\text{MS}}(L) = \frac{FL^3}{3(EI + \frac{1}{2}EA\ell^2)} \Leftrightarrow E = \frac{FL^3}{3 w^{\text{MS}}(L)I(1 + 6\frac{\ell^2}{H^2})}. \tag{5.4}$$

Der Ausdruck $F/w^{\text{MS}}(L)$ wird durch i -fach gemessene Größen nach Gleichung (2.12) ersetzt:

$$E = \frac{3E_i^{\text{Mess}} I}{L_i^3} \frac{L_i^3}{3I(1+6\frac{\ell^2}{H_i^2})} \Leftrightarrow E_i^{\text{Mess}} = \underbrace{E(1+6\frac{\ell^2}{H_i^2})}_{=f^{\text{MS}}(E,\ell;H)} . \quad (5.5)$$

Mit der beschriebenen Modellfunktion f^{MS} und dem Lösungsvektor $y_i=E_i^{\text{Mess}}$ liefert eine entsprechende numerische Methode der Koeffizientenanpassung aus dem folgenden Abschnitt die bestmöglichen Werte für E und ℓ . Dabei geht die Höhe, nicht aber die Breite und die Länge mit ein.

Um die jeweiligen Messreihen an die Lösung der Balkenbiegung aus der Oberflächentheorie anzupassen, wird die Modellfunktion mit Hilfe der Gleichung (3.151)₂ wie folgt gewonnen:

$$E_i^{\text{Mess}} = E_b + E^{\text{S}} \left(\frac{6}{H_i} + \frac{2}{B_i} \right) . \quad (5.6)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=f^{\text{OF}}(E_b, E^{\text{S}}; H, B)}$$

Mit der beschriebenen Modellfunktion f^{OF} und dem Lösungsvektor $y_i=E_i^{\text{Mess}}$ liefert eine entsprechende numerische Methode der Koeffizientenanpassung aus dem folgenden Abschnitt die bestmöglichen Werte für E_b und E^{S} . Dabei gehen die Größen Breite und Höhe, nicht aber die Länge mit ein.

5.1 Numerische Methoden der Koeffizientenanpassung

Zur bestmöglichen und automatisierten Koeffizientenanpassung kommen hauptsächlich zwei Methoden zum Einsatz. Die erste Methode beschreibt eine weitgehend *analytische Minimierung der quadratischen Funktion des Fehlers* und die zweite eine direkt *numerische Minimierung der Funktion des Fehlers*. Beide Methoden sollen hier kurz vorgestellt werden. Im *allgemeinen linearen Fall*, wenn sich eine Modellfunktion schreiben lässt als:

$$\begin{aligned} f(\hat{x}_i; \alpha_r) &= \alpha_0 \psi_0(\hat{x}_i) + \alpha_1 \psi_1(\hat{x}_i) + \dots + \alpha_m \psi_m(\hat{x}_i) = \sum_{r=1}^m \alpha_r \psi_r(\hat{x}_i) \\ &= A_{ir} \alpha_r . \end{aligned} \quad (5.7)$$

ergibt sich das folgende Minimierungsproblem in Matrixform:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_r} \|f(\hat{x}_i; \alpha_r) - y_i\|^2 &= \min_{\alpha_r} \|A_{ir} \alpha_r - y_i\|^2 \\ &= \min_{\alpha_r} \underbrace{(A_{ir} \alpha_r A_{il} \alpha_l - 2 A_{ir} \alpha_r y_i + y_i y_i)}_{R(\alpha_r)} . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Das Extremum von $R(\alpha_r)$ wird bestimmt über die Ableitung nach den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} R(\alpha_r) = A_{ir} A_{il} (\alpha_r \alpha_l)_{,k} - 2 A_{ir} \alpha_{r,k} y_i \\ &= A_{ir} A_{il} (\alpha_{r,k} \alpha_l + \alpha_r \alpha_{l,k}) - 2 A_{ir} \alpha_{r,k} y_i \\ &= A_{ir} A_{il} (\delta_{rk} \alpha_l + \alpha_r \delta_{lk}) - 2 A_{ir} \delta_{rk} y_i \\ &= A_{ik} A_{il} \alpha_l + A_{ir} A_{ik} \alpha_r - 2 A_{ik} y_i \\ &= 2 A_{ik} A_{il} \alpha_l - 2 A_{ik} y_i \\ &= A^T A \alpha - A^T \mathbf{y} \\ &\Downarrow \\ A^T A \alpha &= A^T \mathbf{y} . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die Matrix A ist eine $(n \times m)$ -Matrix. Es lässt sich zeigen (hier ohne Beweis), dass $A^T A$ positiv definit und somit das gefundene Extremum ein Minimum ist. Die Lösung eines solchen linearen Gleichungssystems kann mit Hilfe der Software MATLAB[®] berechnet werden, wobei dort eine QR -Zerlegung von $A^T A$ implementiert ist, die über Householdertransformationen erzeugt wird. Der so gefundene Lösungsvektor α_r beinhaltet die gesuchten Koeffizienten. Dieses Verfahren kommt zum Einsatz bei der Koeffizientenanpassung in für die MS-Theorie und die OF-Theorie.

Ist die anzunähernde Modellfunktion f *nicht allgemein linear*, so gelingt das Aufbauen der Matrix A nach Gleichung (5.7) nicht. In einem solchen Fall soll das Minimum des quadratischen Fehlers iterativ gefunden werden. Da ein solches Verfahren in dieser Arbeit für eine Modellfunktion mit zwei Koeffizienten verwendet wird, kann man für den Fehler e bei gewählten α_1 und α_2 schreiben:

$$e(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n (f(\hat{x}_i; \alpha_1, \alpha_2) - y_i)^2. \quad (5.10)$$

Eine Variation von α_1 und α_2 in einem N -fach unterteilten Intervall I_1 für α_1 und einem M -fach unterteilten Intervall I_2 für α_2 , führt zu $K=N \cdot M$ Fehlerwerten:

$$e_K(\alpha_{1N}, \alpha_{2M}) = \sum_{i=1}^n (f(\hat{x}_i; \alpha_{1N}, \alpha_{2M}) - y_i)^2, \quad \alpha_{1N} \in I_1, \alpha_{2M} \in I_2, \quad (5.11)$$

wobei der kleinste Eintrag im Fehlervektor e_K mit Hilfe einfachster numerischer Befehle gefunden werden kann. Das diesem Eintrag zugehörige Koeffizientenpaar (α_1, α_2) stellt entsprechend den gewählten Intervallunterteilungen das bestmögliche Ergebnis der Anpassung dar. Dieses Verfahren kommt zum Einsatz bei der Koeffizientenanpassung in für die MDG-Theorie.

5.2 Bestimmung erweiterter Materialparameter der Frequenzmessungen

Die zu bestimmenden erweiterten Materialparameter ergeben sich aus der modifizierten Dehnungsgradiententheorie (MDG), der Momentenspannungstheorie (MS) und der Oberflächentheorie (OF). Sie werden durch die Auswertung der Modellfunktionen der jeweiligen Theorie in Kombination mit den entsprechenden Messwerten aus den Abschnitten 2.1.2 und 2.1.3 gewonnen.

5.2.1 Aluminium mit künstlicher Heterogenität

Die auf ihre erste Eigenschwingfrequenz hin geprüften Balken aus künstlich heterogenisiertem Aluminium zeigen Strukturmodulwerte mit erkennbarem positiven Größeneffekt. Die mit den Werten aus Tabelle 2.1 durchgeführte Koeffizientenanpassung ergibt für die verschiedenen Theorien folgende Werte:

Theorie	Koeffizient-1	Koeffizient-2
Momentenspannungstheorie	$S=39,8 \text{ GPa}$	$\ell=0,92 \text{ mm}$
Modifizierte Dehnungsgradiententheorie	$S=39,8 \text{ GPa}$	$\ell=0,51 \text{ mm}$
Oberflächentheorie	$E_b=34,1 \text{ GPa}$	$E^S=9,15 \text{ GN/m}$

Tabelle 5.1: Materialparameter aus den Untersuchungen der Aluminiumbalken mit künstlicher Heterogenität.

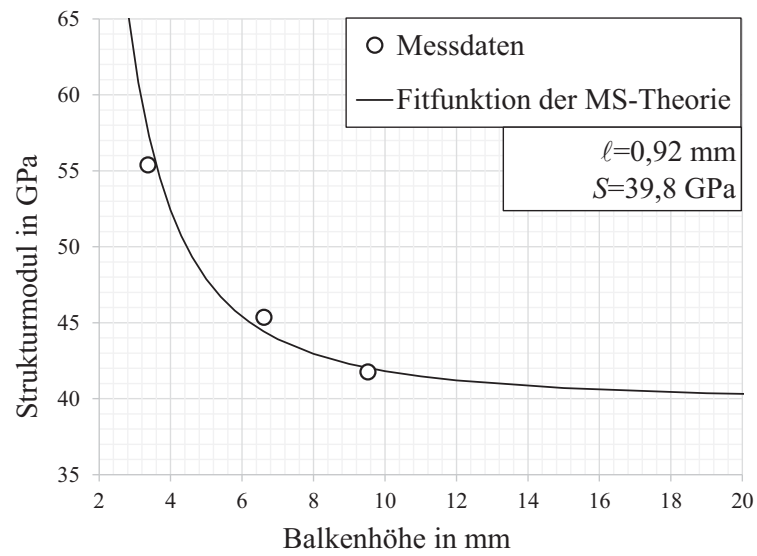


Abbildung 5.1: Ergebnisse der Strukturmodulmessung an Aluminium mit künstlicher Heterogenität und der Modellfunktion der MS-Theorie mit angepassten Koeffizienten.

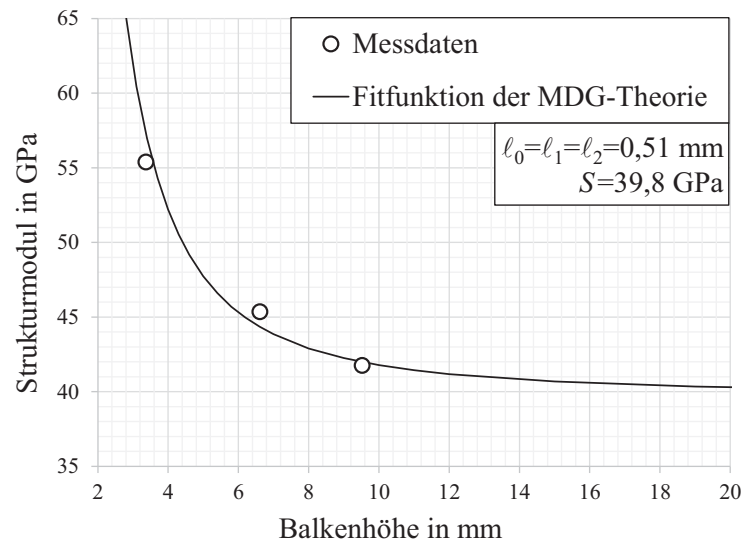


Abbildung 5.2: Ergebnisse der Strukturmodulmessung an Aluminium mit künstlicher Heterogenität und der Modellfunktion der MDG-Theorie mit angepassten Koeffizienten.

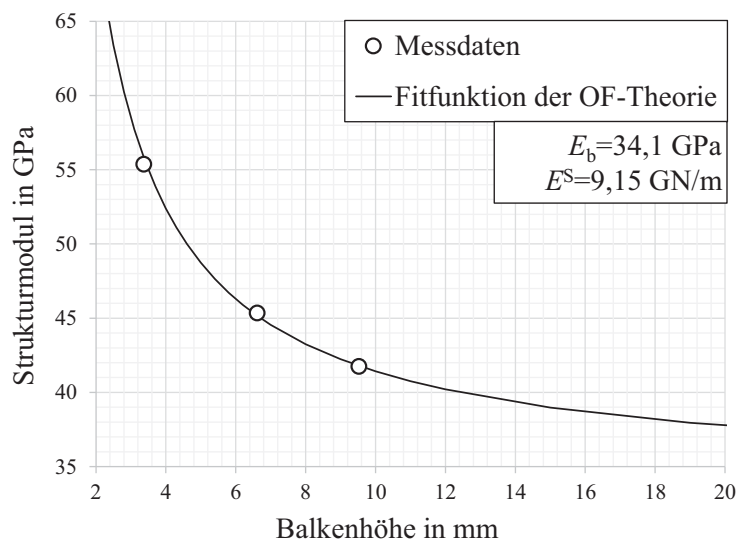


Abbildung 5.3: Ergebnisse der Strukturmodulmessung an Aluminium mit künstlicher Heterogenität und der Modellfunktion der OF-Theorie mit angepassten Koeffizienten.

5.2.2 Aluminiumschäume

Die auf ihre erste Eigenschwingfrequenz hin geprüften Balken aus Aluminiumschäumen zeigen Strukturmodulwerte mit erkennbarem negativen Größeneffekt. Die mit den Werten aus Tabelle 2.2 durchgeführte Koeffizientenanpassung kann lediglich mit der OF-Theorie erfolgen, welche als einzigste der hier vorgestellten Theorien in der Lage ist, den negativen Verlauf des Größeneffekts zu beschreiben. Die analytische Minimierung der quadratischen Funktion des Fehlers mit der Modellfunktion der OF-Theorie die Werte:

Material	Koeffizient-1	Koeffizient-2
Gegossener Aluminiumschaum der Dichte $\rho \approx 255 \text{ kg/m}^3$	$E_b = 1,01 \text{ GPa}$	$E^S = -0,303 \text{ MN/m}$
Geschäumtes Aluminium der Dichte $\rho \approx 415 \text{ kg/m}^3$	$E_b = 3,74 \text{ GPa}$	$E^S = -2,555 \text{ MN/m}$

Tabelle 5.2: Materialparameter der Untersuchungsreihe der Aluminiumschäume.

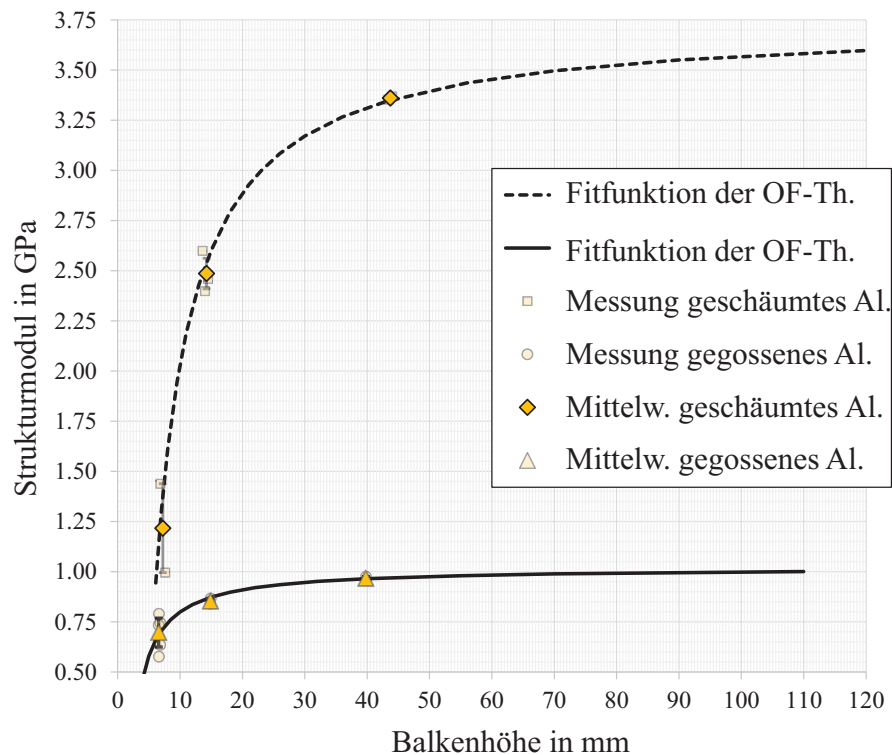


Abbildung 5.4: Ergebnisse der Strukturmodulmessungen beider Aluminiumschäume und den Modellfunktionen der OF-Theorie mit jeweils angepassten Koeffizienten.

Der negative Größeneffekt ist an den negativen Vorzeichen der Oberflächenelastizitätsmoduln in Tabelle 5.2 zu erkennen. Negative E -Modulwerte sind i. A. nicht physikalisch, führen jedoch unter den hier angenommenen Voraussetzungen zu einer Beschreibbarkeit des experimentell beobachteten Effekts.

5.3 Bestimmung erweiterter Materialparameter der AFM-Messungen

Die zu bestimmenden erweiterten Materialparameter ergeben sich durch Anwendung der in Kapitel 5.2 beschriebenen numerischen Methoden auf die modifizierten Dehnungsgradiententheorie (MDG), der Momentenspannungstheorie (MS) und der Oberflächentheorie (OF). Sie werden durch die Auswertung der Modellfunktionen der jeweiligen Theorie in Kombination mit den entsprechenden Messwerten aus den Abschnitten 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5 und 2.3.3 gewonnen.

5.3.1 SU-8 Polymer

Die auf den E -Modul hin geprüften Mikrobalken aus dem Polymermaterial SU-8 zeigen Steifigkeitswerte mit erkennbarem positivem Größeneffekt. Die numerisch durchgeführte Koeffizientenanpassungen nach Abschnitt 5.1 ergibt für die verschiedenen Theorien folgende Werte:

Theorie	Koeffizient-1	Koeffizient-2
Momentenspannungstheorie	$E=4,13$ GPa	$\ell=2,5$ μm
Modifizierte Dehnungsgradiententheorie	$E=4,14$ GPa	$\ell=1,39$ μm
Oberflächentheorie	$E_b=3,36$ GPa	$E^S=3,95$ kN/m

Tabelle 5.3: Materialparameter aus den Untersuchungen des SU-8 Polymers.

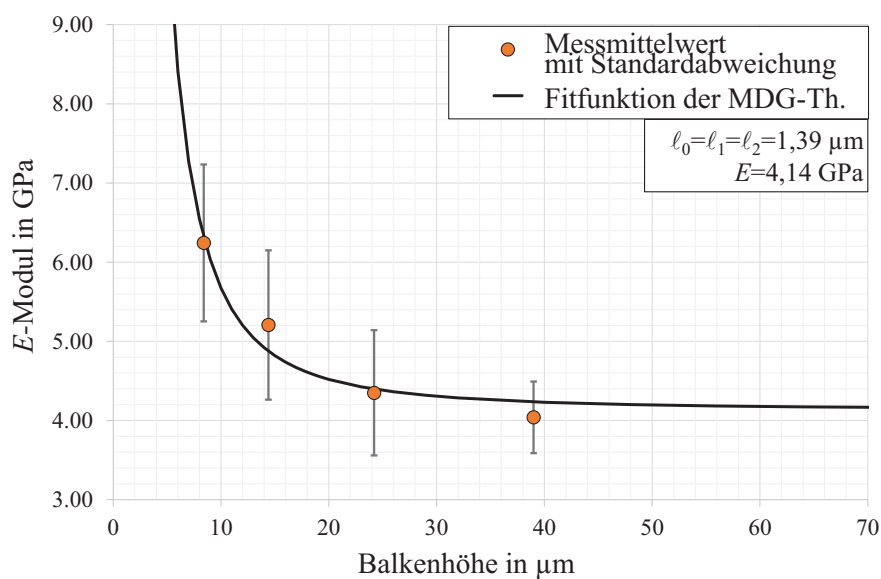


Abbildung 5.5: Gemittelte Ergebnisse der E -Modulmessung an SU-8 und die Modellfunktion der MDG-Theorie mit angepassten Koeffizienten.

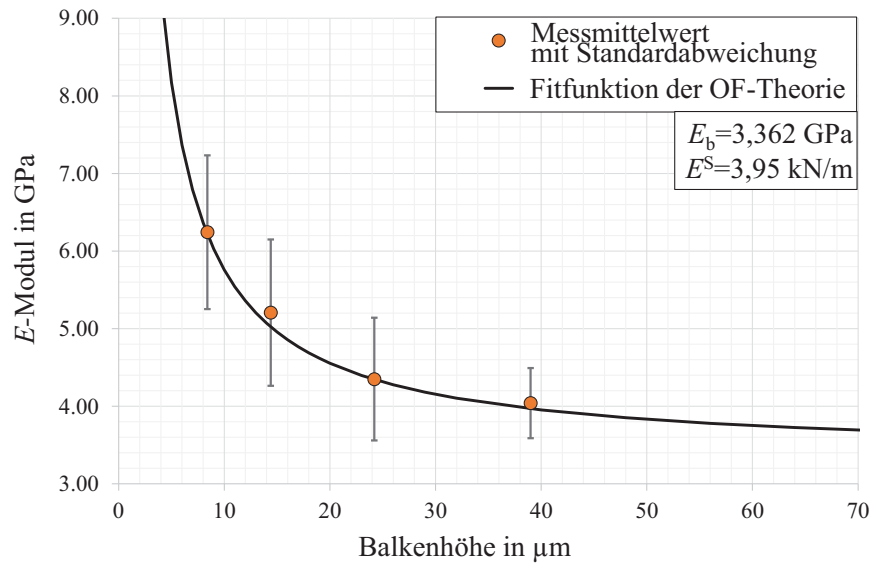


Abbildung 5.6: Gemittelte Ergebnisse der E -Modulmessung an SU-8 und die Modellfunktion der OF-Theorie mit angepassten Koeffizienten.

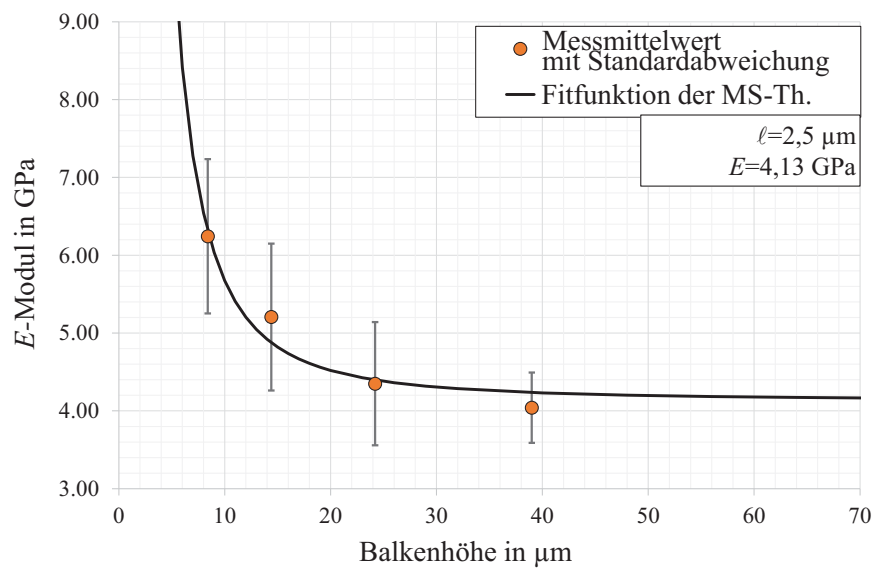


Abbildung 5.7: Gemittelte Ergebnisse der E -Modulmessung an SU-8 und die Modellfunktion der MS-Theorie mit angepassten Koeffizienten.

5.3.2 Epoxidharz

Die auf den E -Modul hin geprüften Mikrobalken aus dem Material Epoxid zeigen Steifigkeitswerte mit erkennbarem positiven Größeneffekt. Die numerisch durchgeführte Koeffizientenanpassungen nach Kapitel 5.1 ergibt für die verschiedenen Theorien folgende Werte:

Theorie	Koeffizient-1	Koeffizient-2
Momentenspannungstheorie	$E=3,93 \text{ GPa}$	$\ell=7,75 \text{ }\mu\text{m}$
Modifizierte Dehnungsgradiententheorie	$E=3,93 \text{ GPa}$	$\ell=4,34 \text{ }\mu\text{m}$
Oberflächentheorie	$E_b=3,22 \text{ GPa}$	$E^s=14,13 \text{ kN/m}$

Tabelle 5.4: Materialparameter der Untersuchungsreihe des Epoxids.

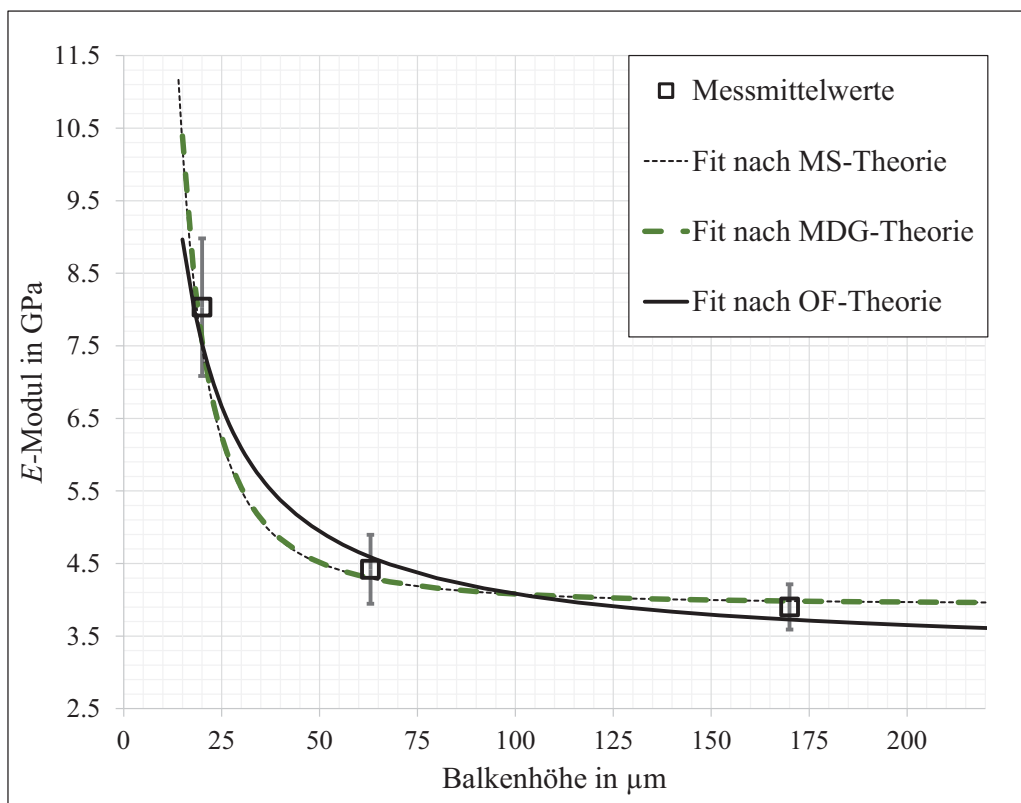


Abbildung 5.8: Gemittelte Ergebnisse der E -Modulmessung an Epoxid und die Modellfunktionen der MS-, MDG- und OF-Theorie.

5.3.3 Einkristallines Silizium

Bei den *statischen Belastungstests* mit einkristallinem Silizium wurde über alle geprüften Balkenhöhen gemittelt ein durchschnittlicher E -Modul von $E=168,2\text{ GPa}$ bestimmt (arithmetisches Mittel der Messwerte aus Tabelle 2.7). Dies entspricht dem in der Literatur bekannten Wert des E -Moduls von Silizium der $[110]$ -Richtung von ca. 169 GPa (vgl. [48]). Der Anstieg der bereichsweise gemittelten E -Moduln zwischen den drei untersuchten Höhen betrug ca. das 1,026-fache, was im Bereich der Messungenauigkeit liegt. Ein Einfluss der Höhe, und damit ein Größeneffekt, kann innerhalb der betrachteten Dimensionen nicht vermessen werden. Mit den exemplarisch für die MS-Theorie numerisch bestimmten Materialkoeffizienten ist dies anhand des geringen Unterschiedes der E -Modulwerte zwischen höherer Theorie und dem einfachen arithmetischen Mittel sowie einem vergleichsweise kleinen inneren Längenparameter zu erkennen.

Theorie	Koeffizient-1	Koeffizient-2
Momentenspannungstheorie	$E=166,8\text{ GPa}$	$\ell=0,05\text{ }\mu\text{m}$
Arithmetisches Mittel	$E=168,2\text{ GPa}$	—

Tabelle 5.5: Materialparameter des untersuchten Siliziums.

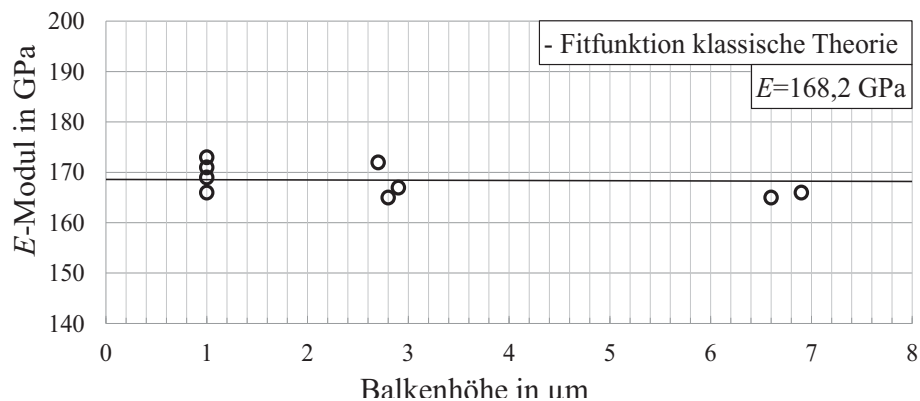


Abbildung 5.9: Ergebnisse der E -Modulmessung an einkristallinem Silizium und der Modellfunktion der klassischen Theorie (arithmetisches Mittel).

Bei den *RAMANSpektroskopischen Untersuchungen* der Dehnungen an der Oberfläche der belasteten Mikrobalken kann als Auswertungsgröße die Eindringtiefe des Laserlichtes in das Material abgeschätzt werden. Dabei muss angenommen werden, dass, wie in den Biegeexperimenten an den gleichen Proben beobachtet, auch in den Dehnungsexperimenten kein Größeneffekt auftritt. Unter dieser Annahme lassen sich die gemessenen Dehnungen mit denen der klassischen Theorie verbinden. Die Dehnungen an der Oberseite der verschieden großen Mikrobalken sind gemäß der Gleichung (2.31) der RAMANtheorie bestimmt worden. Die analytische Beschreibung der Dehnungen in x -Richtung an der Oberseite ($z=H/2$) der Einspannung ($x=0$) lautet gemäß Gleichung (3.57):

$$\varepsilon_{xx}^{\text{klass}}(x, z) = -\frac{zF}{EI_{yy}}[x - L] \Rightarrow \varepsilon_{xx}^{\text{klass}}(0, +\frac{H}{2}) = \frac{FHL}{2EI_{tr}}. \quad (5.12)$$

Bei den Messungen der maximalen Dehnung an der Einspannstelle der einzelnen Mikrobalken mit bekannten Abmaßen ist die durch die AFM-Nadel aufgebrachte Kraft F konstant und wegen der Kraftkalibrierung bestimmt. Somit lässt sich Gleichung (5.12)₂ jeweils auswerten. Das Verhältnis von berechneten zu gemessenen maximalen Dehnungen soll als *Korrekturfaktor* f bezeichnet werden:

$$f_{\text{mess}} = \frac{\varepsilon_{xx}^{\text{klass}}}{\varepsilon_{xx}^{\text{Raman}}}. \quad (5.13)$$

Im Idealfall ist der Korrekturfaktor konstant und eins. In den durchgeführten Messungen variiert dieser jedoch stark bei sehr dünnen Siliziumbalken. Ein Deutungsversuch dieses Effektes ist es, der Dehnungsmessung eine gleichbleibende Eindringtiefe des Laserlichtes zuzusprechen. Das hieße, dass jeder Dehnungsmesspunkt im Inneren des Balkens liegt, und zwar im Schnitt bei der Hälfte der Eindringtiefe d_p des Laserlichtes. Nimmt man, wie in folgender Abbildung gezeigt, einen linearen Verlauf der Dehnungen in x -Richtung entlang der z -Achse an, wobei sie in der neutralen Faser verschwinden, lässt sich der Zusammenhang zwischen der Balkenhöhe H und der Eindringtiefe d_p rein geometrisch herstellen. Die neutrale Faser z_{neutral} berechnet sich bei trapezförmigen Querschnitten aus:

$$z_{\text{neutral}} = \frac{H}{3} \frac{B_1 + 2B_2}{B_1 + B_2}, \quad (5.14)$$

und befindet sich bei allen Prüfbalken aus einkristallinem Silizium bei ca. $z_{\text{neutral}} \approx 0,562H$.

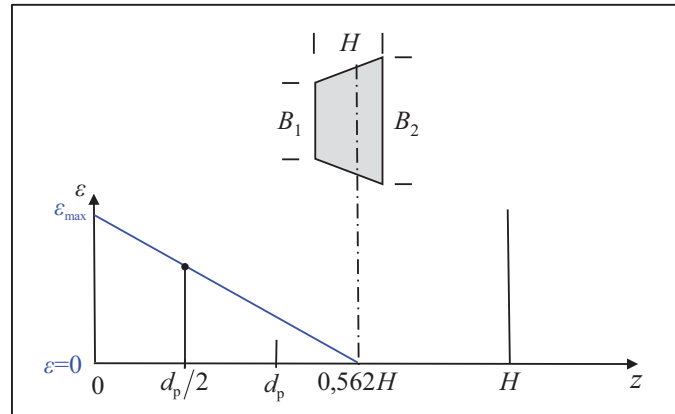


Abbildung 5.10: Veranschaulichung des linearen Dehnungsverlaufs entlang der z -Achse bei einem trapezförmigen Querschnitt und des Dehnungsmesspunktes bei halber Eindringtiefe.

Ein höhenabhängiger Korrekturfaktor f_H ergibt sich danach aus Geometrie Gründen zu:

$$f_H = \frac{1,124H}{1,124H - d_p}. \quad (5.15)$$

Aus physikalischen Gründen muss die Balkenhöhe nach unten hin beschränkt werden auf die Eindringtiefe des Laserlichts ($H \geq d_p$), da ansonsten das Licht an der unteren Seite des Mikrobalkens austritt was das Streuvolumen verringern würde und weitere, geometrisch kompliziertere Fälle betrachtet werden müssten. Die letzte Gleichung dient zugleich als Modellfunktion zur numerischen Koeffizientenanpassung in Zusammenhang mit den Lösungswerten $y_i = f_{\text{mess}_i}$. Die so bestimmte Eindringtiefe beträgt hier rund $d_p = 900 \text{ nm}$.

Die auf diese Art und Weise gemessene Eindringtiefe findet in der Literatur [21] und [5] Bestätigung. Mit der darin aufgezeigten Berechnungsmethode mit Hilfe

optischer Parameter des Materials und des verwendeten Laserlichts der Wellenlänge 532 nm lässt sich die Eindringtiefe auf ca. 950 nm abschätzen und kommt der in dieser Arbeit gemessenen sehr nahe.

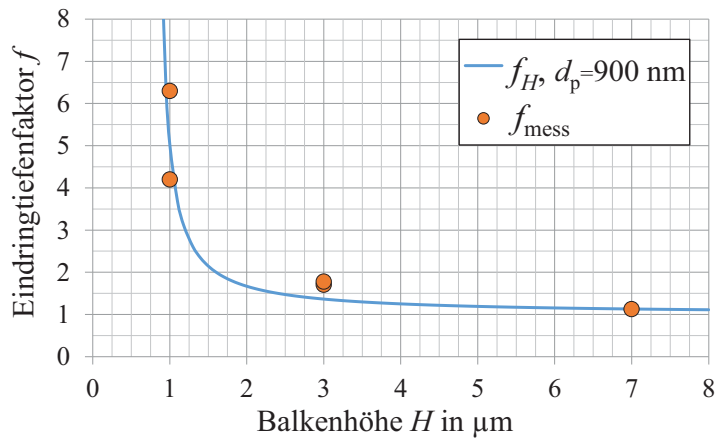


Abbildung 5.11: Plot gemessener und abgeschätzter Eindringtieffaktoren.

Balkenhöhe, H	f_{mess}	f_H (900 nm)
1 μm	4,2	5,02
	6,3	
3 μm	1,71	1,36
	1,78	
7 μm	1,19	1,29

Tabelle 5.6: Auswertung von gemessenem und analytischem Korrekturfaktor.

5.3.4 Amorphes Siliziumnitrid

Bei den *statischen Belastungstests* an amorphem Siliziumnitrid wurde über alle geprüften Balkenhöhen hinweg ein durchschnittlicher E -Modul von $E=319 \text{ GPa}$ gemessen (aus dem arithmetischen Mittel der Messwerte aus Tabelle 2.5). Die numerische Auswertung der Koeffizientenanpassung der MS-Theorie ergibt für den inneren Längenparameter die numerische Null, wodurch der mittels

Koeffizientenanpassung ermittelte E -Modul nahezu den arithmetischen Mittel von 319 GPa entspricht. Als Anhaltspunkt für den Literaturwert des E -Moduls für amorphes Si_xN_x kann der Wert von 255 GPa für Si_3N_4 aus der Literaturquelle [26] dienen. Innerhalb der betrachteten Dimensionen kann kein Einfluss der Höhe und damit kein Größeneffekt vermessen werden. Dies deutet, ähnlich wie bei den Ergebnissen des einkristallinen Siliziums darauf hin, dass sich die Nanostruktur des jeweiligen Werkstoffs gegenüber der äußeren Abmaßen als sehr dicht gepackt und homogen erweist.

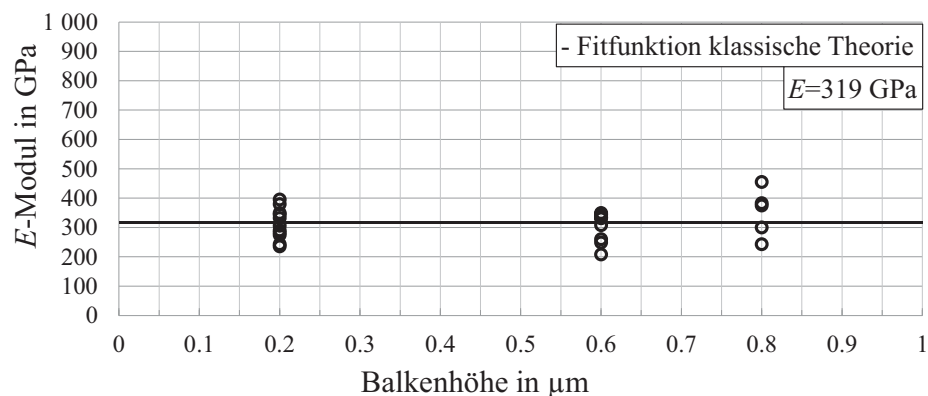


Abbildung 5.12: Ergebnisse der E -Modulmessung an amorphem Siliziumnitrid und der Modellfunktion der klassischen Theorie.

5.4 Diskussion der Ergebnisse und Ausblick

Im Rahmen dieser Forschungsarbeit über ausgewählte erweiterte Kontinuums-theorien, bestehend aus den generalisierten Kontinua (Dehnungsgradiententheorie und Mikropolartheorie) und der Oberflächentheorie, wurde aufgezeigt, wie der Größeneffekt in der Elastizität abgeleitet werden kann. Analytische und numerische Ansätze wurden beispielhaft am einseitig fest eingespannten schlanken Balken hergeleitet und einer Methode der Koeffizientenanpassung der Materialgesetze zugeführt. Eigene Experimente im Umfeld der Bestimmung des Elastizitätsmoduls wurden bei unterschiedlicher charakteristischer Objektgröße (200 nm bis 80 cm) mittels Eigenfrequenzmessungen (FA) und miniaturisierten Biegeversuchen (AFM) erfolgreich durchgeführt. So zeigten die Materialien

SU-8 sowie Epoxid einen deutlich positiven Größeneffekt. Die gemessenen *E*-Modulwerte des Epoxids nahmen um das ca. 2,1-fache zu, während die Balkenhöhe von 170 μm auf 17,5 μm verringert wurde und die des SU-8s um das ca. 1,6-fache, während die Balkenhöhe von 39 μm auf 8,4 μm verringert wurde. Die durch Bohrungen künstlich hergestellte Heterogenität der Aluminiumbalken führte zu einer Zunahme des Strukturmoduls um das ca. 1,33-fache, während die Stabhöhen von 9,5 mm auf 3,4 mm abnahmen. Für den gegossenen Aluminiumschaum ergab sich eine Verringerung des Strukturmoduls um das ca. 1,4-fache, als die Stabhöhe zwischen 40 mm und 6,6 mm reduziert wurde, wohingegen die Verringerung des Strukturmoduls beim geschäumten Aluminium das ca. 2,83-fache betrug, wenn die Stabhöhe von 44 mm auf 6,9 mm verkleinert wurde. Für einkristallines Silizium in den Balkenhöhen zwischen 7,0 μm bis 1,0 μm sowie Siliziumnitrid zwischen 800 nm bis 200 nm, lag die Änderung der *E*-Modulwerte im Bereich der Ungenauigkeit des Messsystems.

Die Reproduzierbarkeit der Messung einzelner Frequenzen bei der *Frequenzanalyse* war sehr hoch. Die Standardabweichung vom Messmittelwert betrug jeweils unter zwei Prozent, was einerseits auf stabiles Eigenschwingverhalten der Proben als auch auf eine stabile Messdatenaufnahme deutet. Die leichte Streuung der Frequenzwerte kann auf die manuelle Impulsgebung durch den Anschlagshammer und auf Ungenauigkeiten in der Lagerung an den Knotenpunkten der ersten Grundschwingung zurückgeführt werden. Die weit größere Ungenauigkeit bei der Frequenzanalyse ist in der Homogenität der Mikrostruktur der verschiedenen Proben zueinander zu sehen. Nicht jede Aluminumschaumprobe weist die gleiche Verteilung von Probengrößen auf, weswegen sich die unterschiedlichen Werte für den *E*-Modul ergeben. Dadurch betrug auch bei Proben mit nahezu gleichen äußeren Abmaßen die maximale Streuung der Messwerte ca. $\pm 10\%$.

Die Fehlerquellen bei der Messmethode mit Hilfe des *Atomkraftmikroskops* sind weitaus vielschichtiger. Auch dort unterlagen die einzelnen Proben trotz ähnlicher Abmaße einer möglichen inhomogenen Verteilung der Mikrostruktur, welche aufgrund der Miniaturisierung der Balken nicht weiter untersucht, aufgeschlüsselt und bewertet werden konnte. Darüber hinaus birgt die bloße Messung der äußeren Abmaße auf dieser Skala eine gewisse Ungenauigkeit. Die SU-8 Balken wurden

daher mit insgesamt vier Messwerkzeugen vermessen (Lichtmikroskop I, Lichtmikroskop II, Rasterelektronenmikroskop REM und einem DEKTAK System), wobei sich für die kleinste Probengeometrie eine Längenabweichung von ca. $\pm 10\%$ zwischen den verschiedenen Messmethoden ergab. In der Auswertung wurde mit dem entsprechenden arithmetischen Mittel für den Wert der Höhe gearbeitet. Zusammen mit der Ungenauigkeit bei den Längenbestimmungen zwischen der Einspannung und dem Kraftapplikationspunkt, und den allgemeinen Toleranzen bei der Messaufnahme durch das AFM (z. B. durch das PSD) ergab sich für die Messungen an den SU-8 Mikrobalken eine maximale Streuung der E -Modulwerte von ca. $\pm 27\%$. Die maximale Streuung unter den Messwerten lag für Epoxid bei ca. $\pm 22\%$, für einkristallines Silizium in der $[110]$ -Orientierung bei ca. $\pm 3\%$ und bei amorphem Siliziumnitrid bei ca. $\pm 27\%$. Bei den Polymermaterialien (SU-8 und Epoxid) wurden die Moleküllänge, -dichte, -masse und -verteilung unter Betrachtung identischer Herstellungsweise als homogen angenommen. Auch das für Polymere bekannte leicht viskose Materialverhalten wurde in dieser Arbeit dahingehend untersucht, dass eine zeitliche Abhängigkeit des Materialverhaltens bei den unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten von $0,1\mu\text{ms}^{-1}$ bis $20\mu\text{ms}^{-1}$, um lediglich $1,7\%$ streuende Ergebnisse der Durchbiegungen ergab, wobei für die E -Moduluntersuchungen mit konstanter Belastungsgeschwindigkeit gearbeitet wurde.

Trotz dieser relativ groß anmutenden Fehlerwerte tritt der Größeneffekt teils signifikant in Erscheinung. Das in der Literatur häufig zitierte experimentelle Ergebnis von CHONG (2002) [16] konnte in dieser Arbeit nachvollzogen werden. Der in der vorliegenden Arbeit gemessene innere Längenparameter des Materials Epoxid von $\ell=7,75\mu\text{m}$ ist um rund 17% niedriger als der Literaturwert von $\ell=9,4\mu\text{m}$. Neben den messtechnischen Abweichungen, kommen zudem Unterschiede im Verfahren der Epoxidherstellung zum Tragen. Des Weiteren scheinen die gewählten Verschiebungsfeldannahmen bei der analytischen Modellierung der Balkenbiegung einen deutlichen Einfluss auf die Größe des inneren Längenparameters auszuüben. Innerhalb der Momentenspannungstheorie wurde in der vorliegenden Arbeit mit den Annahmen des EULER-BERNOULLI Balkenmodells gerechnet, wobei sich die Arbeiten von CHONG [16], LAM et al. [52] und KONG [50] auf einen Verschiebungsfeldansatz nach O'MALLEY

beziehen, wodurch der Wert des inneren Längenparameters bei vernachlässigter Querkontraktionskopplung um das $\sqrt{2}$ -fache unterscheidet und für $0 < \nu < 0,5$ weiter steigt. Auf diese Weise extrahieren die genannten Autoren den inneren Längenparameter von Epoxid zu $\ell = 17,6 \mu\text{m}$. Durch die Unabhängigkeit von Verschiebungsfeldansätzen untermauert das vorliegende finite Elemente Modell der MS-Theorie die Anwendung des EULER-BERNOULLI Balkenmodells, selbst bei vernachlässigter Querkontraktion.

Die *Mikro-RAMANSpektroskopie*, speziell zum Messen von Dehnungen an Kleinstproben, stößt, wie in dieser Arbeit dargelegt, an eine Grenze. Durch die wellenlängenabhängige Eindringtiefe des anregenden Laserlichts ist davon auszugehen, dass es im Streuvolumen zu einer Mischung der dehnungsinduzierten Wellenlängenmodulation kommt. Sind die Dehnungen innerhalb dieses Streuvolumens örtlich nicht konstant, so können diese im Gerät nicht weiter aufgelöst werden. Die charakteristische Größe des Streuvolumens entspricht in erster Abschätzung der Eindringtiefe des Anregungslichtes, welche in dieser Arbeit für einkristallines Silizium mit einem unkonventionellen Verfahren zu etwa 900 nm gemessen worden ist und damit im gleichen Bereich wie der Literaturwert von ca. 950 nm liegt. Für zukünftige Forschungsvorhaben in diesem Bereich sollte die Eindringtiefe deutlich verringert werden, indem kürzere Anregungswellenlängen genutzt werden (UV-Laser), oder die Tip-Enhanced Ramanspektroskopie TERS eingesetzt wird.

Der positive Größeneffekt im Elastizitätsmodul einiger hier geprüfter Materialien lässt sich durch die Modellfunktionen der MDG-, der MS- und der OF-Theorie gut annähern, wohingegen der negative Größeneffekt im Rahmen der vorgestellten Modelle lediglich mit der OF-Theorie zu beschreiben ist. Die Anwendung Letzterer führte auf nicht physikalische Oberflächenelastizitätsmodulwerte mit dessen Hilfe die experimentell gewonnenen Ergebnisse eines negativen Größeneffekts modelliert werden konnten. Alternativ könnte eine Ausarbeitung der OF-Theorie unter Miteinbeziehung von Oberflächeneigenspannungen γ_0 eine physikalisch korrekte Modellierbarkeit auch des negativen Größeneffekts zulassen. Mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden analytischer sowie messtechnischer Art kann in zukünftigen Forschungsvorhaben des Weiteren erörtert werden, welcher kontinuumstheoretische Ansatz für ein jeweiliges

Material geeigneter ist, indem die zusätzlichen Abhängigkeiten von den restlichen äußeren Abmaßen, der Breite und der Länge, in darüber hinaus zusätzlichen Testmoden (wie dem einfachen Zug-, oder Torsionsversuch) explizit mit untersucht werden. Die Modellfunktion der einfachen Balkenbiegung in der MDG-Theorie zeigte z. B. eine zusätzliche Abhängigkeit von der Länge L (siehe Gleichung (5.3)₂) und die der OF-Theorie eine zusätzliche Abhängigkeit von der Breite B (siehe Gleichung (5.6)). Modelliert man zudem in der OF-Theorie die zusätzliche konstante Oberflächenspannung γ_0 , so ergäbe sich eine neue Modellfunktion mit gewichteten zusätzlichen Abhängigkeiten von der Länge und der Breite, [108]. Mit geeigneten Probengeometrien ließen sich diese Zusammenhänge weiter untersuchen und die Gültigkeit einzelner Theorien bewerten. Des Weiteren sollte eine zukünftige Erforschung der mikropolaren Kontinuumstheorie der Frage nach der Symmetrie des Momentenspannungstensors nachgehen.

Mit dieser Arbeit ist zur Erforschung erweiterter Kontinuumstheorien, speziell bei der Bestimmung erweiterter Materialkoeffizienten, ein weiterer Beitrag geleistet, indem die Basis verschiedener Theoriekonstrukte zusammengetragen, dargelegt und am einfachen Beispiel ausgewertet worden ist.

Anhang

A1

Um zu zeigen, dass bei der Skalarmultiplikation (doppelte Indizeüberschiebung) zwischen dem symmetrischen Spannungstensor σ_{ij} und dem nicht-symmetrischen Verschiebungsgradienten H_{ij} anstelle des letzteren der Verzerrungstensor kleiner Deformationen ε_{ij} eingesetzt werden kann, seien zunächst zwei beliebige Tensoren A_{ij} und B_{ij} im gleichen orthonormalen Basissystem definiert. Dann bringt die Zerlegung in symmetrische (S) und antisymmetrische Anteile (A) bei der Skalarmultiplikation den folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 A_{ij}B_{ij} &= \left[\underbrace{\frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})}_{A_{ij}^S} + \underbrace{\frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})}_{A_{ij}^A} \right] \left[\underbrace{\frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji})}_{B_{ij}^S} + \underbrace{\frac{1}{2}(B_{ij} - B_{ji})}_{B_{ij}^A} \right] \\
 &= \frac{1}{4}(A_{ij} + A_{ji})(B_{ij} + B_{ji}) + \frac{1}{4}(A_{ij} + A_{ji})(B_{ij} - B_{ji}) \\
 &\quad + \frac{1}{4}(A_{ij} - A_{ji})(B_{ij} + B_{ji}) - \frac{1}{4}(A_{ij} - A_{ji})(B_{ij} - B_{ji}) \\
 &= \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})\frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji}) \\
 &\quad + \frac{1}{4}(A_{ij}B_{ij} - A_{ij}B_{ji} + A_{ji}B_{ij} - A_{ji}B_{ji}) \\
 &\quad + \frac{1}{4}(A_{ij}B_{ij} + A_{ij}B_{ji} - A_{ji}B_{ij} - A_{ji}B_{ji}) \\
 &\quad + \frac{1}{4}(A_{ij}B_{ij} - A_{ij}B_{ji} - A_{ji}B_{ij} + A_{ji}B_{ji}).
 \end{aligned} \tag{A1.1}$$

Mit Hilfe folgender Umindizierungen:

$$A_{ij}B_{ij} = A_{ik}B_{ik} = A_{lk}B_{lk} = A_{jk}B_{jk} = A_{ji}B_{ji} \tag{A1.2}$$

und

$$A_{ij}B_{ji} = A_{ik}B_{ki} = A_{lk}B_{kl} = A_{jk}B_{kj} = A_{ji}B_{ij} \tag{A1.3}$$

wird aus Gleichung A1.1:

$$\begin{aligned}
A_{ij}B_{ij} &= \underbrace{\frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})}_{A_{ij}^S} \underbrace{\frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji})}_{B_{ij}^S} + \frac{1}{2}(A_{ij}B_{ij} - A_{ji}B_{ij}) \\
&= A_{ij}^S B_{ij}^S + \frac{1}{2}(A_{ij}B_{ij} - A_{ji}B_{ij}).
\end{aligned} \tag{A1.4}$$

Sei nun A_{ij} selbst ein symmetrischer Tensor $A_{ij} = A_{ij}^S = A_{ji}$, dann gilt:

$$A_{ij}^S B_{ij} = A_{ij}^S B_{ij}^S + \underbrace{\frac{1}{2}(A_{ij}B_{ij} - A_{ij}B_{ij})}_{=0} = A_{ij}^S B_{ij}^S. \tag{A1.5}$$

Übersetzt auf gängige Größen aus der Kontinuumsmechanik kann aus Gleichung A1.5 gefolgert werden:

$$\sigma_{ij} du_{i,j} = \sigma_{ij} du_{i,j}^S = \sigma_{ij} \underbrace{\frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i})}_{d\varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \tag{A1.6}$$

A2

Im Folgenden ist der Basisteil des erarbeiteten und genutzten Programmiercodes für Berechnungen in der Elastostatik der Momentenspannungstheorie bereit gestellt. Dabei wird im Grundsatz auf die Programmiersprache „Python“ in der Version 2.6 und die Befehlsbibliothek von FEniCS, genannt „dolfin“ zurückgegriffen.

```
#####
"""
Couple Stress elasticity
C. Liebold, B.E. Abali, W.H. Mueller
supply code. """

__author__ = "authors = C. Liebold (christian.liebold@tu-berlin.de)"
__date__ = "2013-05-01"
__copyright__ = "Copyright (C) 2013 C. Liebold"
__license__ = "GNU LGPL Version 3 or later"
__address__ = http://tu-berlin.de/lkm/ComputationalReality

# Copyright (C) 2013 C. Liebold
# This code is free software: you can redistribute it and/or modify
```

```

# it under the terms of the GNU Lesser General Public License as published by
# the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
# (at your option) any later version.
#
# This code is distributed in the hope that it will be useful,
# but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
# MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
# GNU Lesser General Public License for more details.
#
# For the GNU Lesser General Public License see <http://www.gnu.org/licenses/>.
#

#-----
from dolfin import *
import numpy

#-----
def create_mesh():

    force = 300.e-3 #mN
    zlength = 59.e-3
    ez = 2
    xlength = 18.*zlength
    ylength = zlength
    ex = int((xlength*ez)/zlength)
    ey=ez
    mesh = Box(0.0, 0.0, 0.0, xlength, ylength, zlength, ex, ez, ez)
    load = force/(ylength*zlength) # = Scherspannung am freien Ende

    return xlength, ylength, zlength, mesh, load, force, ex, ey, ez

#---Material---data---Epoxy---[mm-kg-s]-----
E, nu, nuu = 3.8e6, 0., 0.38

lambada = E*nuu/((1.+nuu)*(1.-2.*nuu))
mu = E/(2.*(1.+nu))
EM = E/(1.-nuu*nuu)
muuu = E/(2.*(1.+nuu))

#-----
def compute(xlength, ylength, zlength, mesh, load, ex, ey, ez):

    class Links(SubDomain):
        def inside(self, x, on_boundary):
            return near(x[0], 0.0, 10.E-6) and on_boundary
    links = Links()

    class Rechts(SubDomain):
        def inside(self, x, on_boundary):
            return near(x[0], xlength, 10.E-6) and on_boundary
    rechts = Rechts()

    Space = VectorFunctionSpace(mesh, 'CG', 2, dim=3)
    plot_Space = VectorFunctionSpace(mesh, 'DG', 0, dim=3)

    du= TrialFunction(Space) # = Zielfunktion
    delu = TestFunction(Space) # = Testfunktion
    u = Function(Space)

    boundaries = MeshFunction('uint', mesh, mesh.topology().dim() - 1)
    boundaries.set_all(0)
    links.mark(boundaries, 1)
    rechts.mark(boundaries, 2)
    ds = Measure("ds")[boundaries]

    bcs = [DirichletBC(Space, Constant((0.,0.,0.)), boundaries, 1)]

    Traction = Expression(("aa", "bb", "cc"), aa=0., bb=0., cc=-load)

    delta = Identity(3)
    i, j, k, l, m, o, p, t, n = indices(9)
    e=as_tensor([((0.,0.,0.), (0.,0.,1.), (0.,-1.,0.)), ((0.,0.,-1.), (0.,0.,0.), (1.,0.,0.)), (
        (0.,1.,0.), (-1.,0.,0.), (0.,0.,0.) ) ])

```

```

sigma=as_tensor((lambda*delta[m,n]*delta[o,p]+mu*(delta[m,o]*delta[n,p]+delta[m,p]
*delta[n,o]))*1./2.*(u[o].dx(p)+u[p].dx(o)), (m,n))
mucs=as_tensor((-1./2.*muu*le*le)*(e[m,p,o]*u[o].dx(p).dx(n)+e[n,p,o]*u[o].dx(p).dx(m))
, (m,n))

#-----DGL, Variational form:

VOL = (sigma[i,j]*(1./2.*(delu[j].dx(i)+delu[i].dx(j))) )*dx \
+1./4.*mucs[r,i]*(e[r,j,k]*delu[k].dx(j).dx(i)+e[i,j,k]*delu[k].dx(j).dx(r))*dx \
+(1./2.*e[k,i,j]*delu('+'')[j].dx(i)*mucs('+'')[o,k]-1./2.*e[k,i,j]*delu('-')[j]
.dxi)*mucs('-')[o,k])*N('+'')[o]*dS
BDR = (Traction[p] * delu[p])*ds(2)

solve(VOL == BDR, u, bcs)

#-----POST-PROCESSOR:-----
U = VectorFunctionSpace(mesh, "DG", 1)
M = VectorFunctionSpace(mesh, "DG", 0)

#-----Biegelinie, Verschiebungsfeld:
file_u = File('1-' +str(le)+'_CS-fae.pvd')
file_u << u

#-----Rotationsvektor erstellen:
file_phi = File('2-' +str(le)+'_CS-fae_phi.pvd')
phi = as_tensor(-1./2.*(e[i,j,k]*(u[k].dx(j))), (i,))
phivec = project(phi, U) #interpolate
file_phi << phivec

#-----Rotationsgradient erstellen:
vec1 = as_tensor( (1.,0.,0.) )
file_chi = File('3-' +str(le)+'_CS-fae_chi.pvd')
chi = as_tensor(u[m], (m,))
chimesh = project(chi, M)
file_chi << chimesh

#-----xx-Dehnung erstellen:
vec2 = as_tensor( (1.,0.,0.) )
file_eps = File('4-' +str(le)+'_CS-fae_eps.pvd')
eps = as_tensor( 1./2.*(u[o].dx(p)+u[p].dx(o))*vec2[o], (p,))
epsmesh = project(eps, U)
file_eps << epsmesh

#-----Vergleichsdehnung erstellen:
ep = as_tensor( 1./2.*(u[o].dx(p)+u[p].dx(o)), (o,p))
epsvgl = as_tensor((ep[0,0]**2.+ep[1,1]**2.+ep[2,2]**2.-ep[0,0]*ep[1,1]-ep[0,0]*ep[2,2]
-ep[1,1]*ep[2,2]+3.*(ep[0,1]**2.+ep[0,2]**2.+ep[1,2]**2.))* (1./2.))*vec2[i], (i,))
Epsvglmesh = project(epsvgl, U)

#-----Vergleichsrotationsgradienten erstellen:
mul=as_tensor(-2.*muu*le*le*1./4.*(e[m,p,o]*u[o].dx(p).dx(n) + e[n,p,o]*u[o].dx(p).dx(m))
, (m,n))
mudevi = as_tensor( (mul[i,j]-1./3.*(mul[d,d])*delta[i,j]), (i,j))
muvgl = as_tensor( ((3./2.*mudevi[k,r]*mudevi[k,r])** (1./2.))*vec2[i], (i,))
muvglmesh = project(muvgl, M)

plotx,plotu,plotphi,plotchi,ploteps,plotepsvgl,plotmuvgl=
numpy.arange(0.00464*2.,1.,0.00625/8.), [], [], [], [], [], []

for x_ in plotx:
    x=x_*xlength
    P=(x, ylength/2., zlength/2.)
    B=(x, 0.579*ylength, 0.932*zlength)
    plotu.append(u(P)[2])
    plotphi.append(phivec(B)[1])
    plotchi.append(chimesh(B)[1])
    ploteps.append(epsmesh(B)[0])
    plotepsvgl.append(epsvglmesh(B)[0])
    plotmuvgl.append(muvglmesh(B)[0])
return u, plotu, plotphi, plotchi, ploteps, plotepsvgl, plotmuvgl, plotx, epsmesh

#-----Call-Function:
for le in [0.E-3, 8.E-3, 19.E-3]:
    info('varying the length parameter le= '+str(le)+' millimeter')
    xlength,ylength,zlength,mesh,load,einfl,knoten = create_mesh(force,le)
    dofs=mesh.num_vertices()*mesh.topology().dim()
    info('model consists '+str(dofs)+' degrees of freedom')

```



```

u, plotu, plotphi, plotchi, ploteps, plotepsvgl, plotmuvgl, plotx, epsmesh =
    compute(xlength, ylength, zlength, mesh, load, le, einfl, knoten)

#-----Direct-Output:
l = le
xlen = xlength #- knoten
Af = ylength*zlength
Iyy = ylength*zlength*zlength*zlength/12.
wcs = (-force/(2.*(E*Iyy+1./2.*muuu*Af*l*1)))*(xlen*xlen*xlen-(1./3.)*xlen*xlen*xlen)
web = (-force/(2.*E*Iyy))*(xlen*xlen*xlen-(1./3.)*xlen*xlen*xlen)

Dof=force/web
Dcs_Do=force/(wcs*Do)
Dfem_Do=force/(u((xlength, ylength/2., zlength/2.))[2]*Do)

print '--> E-B klassisch: ',web,' mm'
print '--> C-S analytisch: ',wcs,' mm, fuer l=',str(le)
print '--> FEM - FEniCS : ',u((xlength, ylength/2., zlength/2.))[2],' mm, fuer
    l=',str(le),' ,%-Abweichg:',(wcs*100./((u((xlength, ylength/2., zlength/2.))[2]))-100.
print '--> normierte Biegesteifigkeit Dcs/Do=',Dcs_Do
print '--> normierte Biegesteifigkeit Dfem/Do=',Dfem_Do

#-----Visualization:
import matplotlib.pyplot as pylab
pylab.ion()
pylab.clf()
pylab.cla()
pylab.rcParams.update({'font.size': 16})

#-----Plots:-----
pylab.subplot(231)
pylab.ylabel(r'$u_z$ in $mm$', fontsize=20)
pylab.xlabel('axial coordinate $x_1/L$')
pylab.title('deflection curve')
pylab.grid(True)
if le == 0.0:
    pylab.plot(plotx, plotu, marker='.', markersize=9, linestyle='-', linewidth=4,
        label='l$='+str(le)+' $mm$')
elif le == 8.E-3:
    pylab.plot(plotx, plotu, marker='s', markersize=6, linestyle='-', linewidth=3,
        label='l$='+str(le)+' $mm$')
else:
    pylab.plot(plotx, plotu, marker='o', markersize=6, linestyle='-', linewidth=3,
        label='l$='+str(le)+' $mm$')
pylab.legend(loc='best')
pylab.draw()

pylab.subplot(232)
pylab.ylabel(r'$\varphi_y$', fontsize=20)
pylab.xlabel('axial coordinate $x_1/L$')
pylab.title('rotation vector')
pylab.grid(True)
if le == 0.0:
    pylab.plot(plotx, plotphi, marker='.', markersize=9, linestyle='-', linewidth=4,
        label='l$='+str(le)+' $mm$')
elif le == 8.E-3:
    pylab.plot(plotx, plotphi, marker='s', markersize=6, linestyle='-', linewidth=3,
        label='l$='+str(le)+' $mm$')
else:
    pylab.plot(plotx, plotphi, marker='o', markersize=6, linestyle='-', linewidth=3,
        label='l$='+str(le)+' $mm$')
pylab.legend(loc='best')
pylab.draw()

pylab.subplot(233)
pylab.ylabel(r'$\chi_{yx}$', fontsize=20)
pylab.xlabel('axial coordinate $x_1/L$')
pylab.title('rotation gradient')
pylab.grid(True)
if le == 0.0:
    pylab.plot(plotx, plotchi, marker='.', markersize=9, linestyle='-', linewidth=4,
        label='l$='+str(le)+' $mm$')
elif le == 8.E-3:
    pylab.plot(plotx, plotchi, marker='s', markersize=6, linestyle='-', linewidth=3,
        label='l$='+str(le)+' $mm$')
else:

```

```

        pylab.plot(plotx, plotchi, marker='o', markersize=6, linestyle='-', linewidth=3,
                    label='l'+str(le)+' $mm$')
pylab.legend(loc='best')
pylab.draw()

pylab.subplot(234)
pylab.ylabel('$\epsilon_{xx}$', fontsize=20)
pylab.xlabel('axial coordinate $x_{1}/L$')
pylab.title('$x$-strain')
pylab.grid(True)
if le == 0.0:
    pylab.plot(plotx, ploteps, marker=',', markersize=9, linestyle='-', linewidth=4,
                label='l'+str(le)+' $mm$')
elif le == 8.E-3:
    pylab.plot(plotx, ploteps, marker='s', markersize=6, linestyle='-', linewidth=3,
                label='l'+str(le)+' $mm$')
else:
    pylab.plot(plotx, ploteps, marker='o', markersize=6, linestyle='-', linewidth=3,
                label='l'+str(le)+' $mm$')
pylab.legend(loc='best')
pylab.draw()

pylab.subplot(235)
pylab.ylabel('$\epsilon_{VGL}$', fontsize=20)
pylab.xlabel('axial coordinate $x_{1}/L$')
pylab.title('equivalent strain')
pylab.grid(True)
if le == 0.0:
    pylab.plot(plotx, plotepsvg1, marker=',', markersize=9, linestyle='-',
                linewidth=4, label='l'+str(le)+' $mm$')
elif le == 8.E-3:
    pylab.plot(plotx, plotepsvg1, marker='s', markersize=6, linestyle='-',
                linewidth=3, label='l'+str(le)+' $mm$')
else:
    pylab.plot(plotx, plotepsvg1, marker='o', markersize=6, linestyle='-',
                linewidth=3, label='l'+str(le)+' $mm$')
pylab.legend(loc='best')
pylab.draw()

pylab.subplot(236)
pylab.ylabel('$\mu_{VGL}$', fontsize=20)
pylab.xlabel('axial coordinate $x_{1}/L$')
pylab.title('equivalent couple stress')
pylab.grid(True)
if le == 0.0:
    pylab.plot(plotx, plotmuvgl, marker=',', markersize=9, linestyle='-',
                linewidth=4, label='l'+str(le)+' $mm$')
elif le == 8.E-3:
    pylab.plot(plotx, plotmuvgl, marker='s', markersize=6, linestyle='-',
                linewidth=3, label='l'+str(le)+' $mm$')
else:
    pylab.plot(plotx, plotmuvgl, marker='o', markersize=6, linestyle='-',
                linewidth=3, label='l'+str(le)+' $mm$')
pylab.legend(loc='best')
pylab.draw()

```

```

#-----end of file----- end of file----- end of file----- end of file----- end of file--
#####

```

Abkürzungsverzeichnis

LKM	Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
IZM	Fraunhofer Institut für Zuverlässigkeit und Mikrointegration
PTB	Physikalisch Technische Bundesanstalt
FE	Finite Elemente
EB	EULER-BERNOULLI Ansatz
FEM	Finite Elemente Methode
FA	Frequenzanalyse
AFM	Atomkraftmikroskop
MRS	Mikro-RAMANSpektroskopie
MP	Mikopolare (Theorie)
DG	Dehnungsgradienten(theorie)
MDG	Modifizierte Dehnungsgradienten(theorie)
MS	Momentenspannungs(theorie)
OF	Oberflächen(theorie)
FEniCS	Open Source FE-Software
CNT	Carbon Nanotubes (Kohlenstoffnanoröhrchen)
MEMS	Mikroelektromechanisches System
NEMS	Nanoelektromechanisches System
N. V.	Aktiengesellschaft (niederländisch)
i. A.	im Allgemeinen
u. a.	unter anderem
a. u.	willkürliche Einheit
bzw.	beziehungsweise
d. h.	das heißt

z. B.	zum Beispiel
μN	Mikronewton
mN	Millinewton
kN	Kilonewton
MN	Meganewton
cm	Zentimeter
mm	Millimeter
μm	Mikrometer
nm	Nanometer
kg	Kilogramm
Hz	Hertz
kHz	Kilohertz
THz	Terahertz
GPa	Gigapascal
sog.	sogenannte
DIN	Deutsche Indexnorm
ASTM	American Society for Testing and Materials
FFT	Fast Fourier Transformation
RKM	Rasterkraftmikroskop
SFM	Scanning Force Microscope
SPM	Scanning Probe Microscope
STM	Scanning Tunnel Microscope
PSD	Photosensitive Diodes
ISO	International Organization for Standardization
Si	Silizium
LDI	Laser Direct Imager
REM	Rasterelektronenmikroskop

CCD	Coupled Charged Device
PDP	Phononendeformationspotential
E	EULER
L	LAGRANGE
G	GREEN
S	Symmetrisch
s	Oberfläche
e	Element
A	Antisymmetrisch
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
RB	Randbedingung
DGL	Differentialgleichung
Si _x N _x	Siliziumnitrid
DOF	Systemfreiheitsgrade (engl.: „ <u>D</u> egrees <u>O</u> f <u>F</u> reedom“)

Symbolverzeichnis

$\underline{x}, \underline{r}, x_i, X_A$	Ortsvektoren
X	materieller Punkt
$\underline{e}_i$	Einheitsvektoren
E	Elastizitätsmodul
S	Strukturmodul
ℓ	Innerer Längenparameter des Materials (höherer Materialkoeffizient)
U	elektrische Spannung, bzw. innere Energie
U^{klass}	Innere Energie in der klassischen Theorie
L, B, H, A	Länge, Breite, Höhe, Flächeninhalt
I_{yy}	Flächenträgheitsmoment
I_{tr}	Flächenträgheitsmoment bei trapezförmigen Querschnitt
ρ	Dichte
$w(x)$	Biegelinie eines Balkens
F	Kraft
t, s	Zeit
f_n, f_1	n -te Eigenfrequenz, erste Eigenfrequenz
k	Federkonstante
α	Biegewinkel
$\underline{E}_0$	Wellenamplitude elektromagnetischer Schwingung
$\underline{k}_E$	Wellenvektor
ω_E, ω_0	Kreisfrequenz der eintreffenden Welle und der Grundschiwingung
ω_r	Kreisfrequenz der Gitterschiwingung
$\underline{P}_0$	Polarisationsamplitude

$\underline{\underline{\chi}}(Q_r(t))$	Polarisierbarkeits-/ Suszeptibilitätstensor
$Q_r(t)$	Normalkoordinaten der Gitterschwingung
$\underline{q}$	Wellenvektor der Gitterschwingung
I_{IND}	Intensität der induzierten Polarisation
$\underline{\underline{R}}_r$	RAMAN-Tensoren
$\underline{e}_1, \underline{e}_s$	Polarisationsvektoren des einfallenden und gestreuten Lichts
$\underline{a}$	Elongation der effektiven Masse
$\underline{\underline{M}}_{\text{eff}}$	effektive Massenmatrix
$\underline{\underline{K}}_{\text{eff}}$	effektive Kraftkonstantenmatrix
$\underline{\underline{I}}, \delta_{ij}$	Einheitstensor
ν	Querkontraktionszahl
ν_f	Schwingfrequenz
$\underline{\underline{P}}^{(4)}$	Tensor der Phononendeformationspotentiale
p, q, r	Phononendeformationspotentiale für Si
$\underline{\underline{\varepsilon}}, \varepsilon_{ij}$	Dehnungstensor kleiner Deformation
ε'_{ij}	Deviator des Dehnungstensors
E_{ij}^{G}	GREENScher Verzerrungstensor
$\mathcal{B}_0$	Körper in der Referenzkonfiguration
$\mathcal{B}_t$	Körper in der Momentankonfiguration
Ψ	beliebige Feldgröße
$T_{ij}^{2\text{PK}}$	zweiter PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor
H_{ijkl}	Tensor elastischer Konstanten im ST. VENANT-KIRCHHOFF Gesetz
C_{ijkl}	Tensor elastischer Konstanten im HOOKESchen Gesetz
ϵ_{ijk}	LEVI-CIVITA Symbol
H_{ij}	Verschiebungsgradient

$\mathcal{V}(t)$	zeitabhängiges Volumen
$\mathcal{K}$	Körper
v_i	Geschwindigkeitsfeld
b_i	spezifischer Volumenkraftsvektor
t_i	Oberflächenkrafts- oder Spannungsvektor
m_j	Oberflächenmomentenvektor
σ_{ij}	CAUCHYScher Spannungstensor
u	innere Energiedichte
q_i	Wärmeflussvektor
F_{ij}	materieller Deformationsgradient
χ_l	Komponenten der Bewegung
θ	Temperatur
λ, μ	LAMÉsche Konstanten
$q(x)$	Linienlast
u_i	Verschiebungsfeld
Π	Minimierungsfunktion
K^{klass}	Arbeit der äußeren Kräfte der klassischen Theorie
$\underline{D}_i, \underline{d}_i$	Direktoren in der Referenzplatzierung und Momentanplatzierung
Q_{ij}	Orientierungstensor
$\mathcal{P}$	Partikel
$E_{\text{kin}}^{\text{C}}, E_{\text{rot}}$	kinetische und rotatorische Energie
$\underline{s}, s_i$	Spinvektor
θ_{jl}	Massenträgheitsmoment
f_i, l_i	Volumenkräfte und -momente
$\mu_{ij}(x_k, t)$	CAUCHYScher Momentenspannungstensor

M_{ij}	materieller Momentenspannungstensor
n_i	Flächennormale
e_k	antisymmetrischen Anteils des Kraftspannungstensors
Q, N, M	Normal- und Querkräfte, Momente
$\bar{\sigma}_{ij}(x_n, t)$	unsymmetrischer CAUCHYScher Kraftspannungstensor
Γ_{ij}	relativer Orientierungstensor
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \kappa$	COSSERATSche elastischen Konstanten
ϕ_i, φ_i	Mikrorotations-, Makrorotationsvektor
K_{ijk}	Verzerrungstensor höherer Ordnung
S_{ijk}	Spannungstensor höherer Ordnung (Hyperspannungstensor)
η_{ijk}^S	symmetrische Teil des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung
$\eta_{ijk}^{(1)}$	Deviator des symmetrischen Teils des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung
$\eta_{ijk}^{(0)}$	Kugelteil symmetrischen Teils des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung
$\varepsilon_{mm,i}$	Gradient der Spur des Dehnungstensors
$\bar{\eta}_{il}$	Rotationsgradient
χ_{ij}^S, χ_{ij}^A	symmetrische- und der antisymmetrische Teil des Rotationsgradienten
p_i, μ_{ijk}, μ_{ij}	höhere Spannungsmaße
δA^{MDG}	Variation der Arbeit der äußeren Kräfte der MDG-Theorie
M^h	höheren Momente
D	Biegesteifigkeit
$\underline{s}_\alpha$	Tangentialvektoren
z^α	Flächenkoordinaten
$\kappa_{\alpha\beta}$	Krümmungstensors der Oberfläche

$\tau_{\alpha\beta}$	CAUCHYScher Oberflächenspannungstensor
$\varepsilon_{\alpha\beta}^S$	Oberflächendehnungstensor
$g_{\alpha\beta}$	Oberflächenmetrik
$\delta_{\alpha\beta}$	Oberflächenidentitätstensor
σ	Oberflächenenergiedichte
γ_0	Eigenspannungen in der Oberfläche
λ^S, μ^S	LAMÉsche Konstanten der Oberfläche
ν^S	Querkontraktionszahl der Oberfläche
E_b, E^S	Volumen- und Oberflächenelastizitätsmoduln
A_e	singuläre Flächen (Elementenflächen)
$\Gamma_1, \dots, \Gamma_6$	Randgebiete eines Volumens
μ_{VGL}	Vergleichsmomentenspannung
α_r	Koeffizienten einer Funktion
$y_i(\hat{x}_i)$	i -ter Messwert
$\hat{x}_i$	i -ter Messpunkt
$f(\hat{x}_i; \alpha_r)$	Modellfunktion
f_H	höhenabhängiger Korrekturfaktor
f_{mess}	gemessener Korrekturfaktor
z_{neutral}	neutrale Faser bei trapezförmigen Querschnitt
R_a	mittlere Rauheit

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1:	Hierarchische Übersicht ausgewählter erweiterter Kontinuumstheorien zur Modellierung des Größeneffekts der Elastizität.	4
Abbildung 2.1:	Darstellung der Biegelinie der Grundschiwingung einer stabförmigen Probe der Länge L	10
Abbildung 2.2:	Darstellung des gesamten Messaufbaus zur Frequenzanalyse.	11
Abbildung 2.3:	Plot der Frequenzfunktion über ein erwähltes λ_n - Intervall in willkürlicher Einheit (a. u.).	13
Abbildung 2.4:	a) Ein Bild der drei Probek balken mit künstlicher Heterogenität. b) Dimensionen und Anordnungen der Bohrungen. c) Plot der Ergebnisse für den E -Modul.	16
Abbildung 2.5:	Verschiedenartige Aluminiumschaumbalken zur Frequenzbestimmung.	17
Abbildung 2.6:	E -Modulwerte der zwei verschiedenen Aluminiumschaumsorten bei unterschiedlichen Balkenhöhen.	18
Abbildung 2.7:	Links: Schematisches Schnittbild des MV1000 TM -Systems. Rechts: Konventionelle Makrofotografie der AFM-Glasnadel vor einem im Hintergrund befindlichen Millimetermaßstab.	20
Abbildung 2.8:	Links: Schematischer Zusammenhang zwischen der Auslenkung der AFM-Nadel und der Messspannung U im PSD. Rechts: Mikroskopische Aufnahme des freien Endes der AFM-Glasnadel.	21
Abbildung 2.9:	Links: Die Kontrollmodule des MV1000 TM . Rechts: Schema des Flatscanners (Feinpositionierungstisch).	22
Abbildung 2.10:	Das Silizium-Biegesteifigkeitsnormal der PtB in makroskopischer Aufnahme (links) und mikroskopischer Aufnahme des freien Endes (rechts).	24
Abbildung 2.11:	Typische Messkurven der elektrischen Spannung im PSD gegenüber des vertikalen Piezohubs. Links: Originaldaten. Rechts: Zum Nullpunkt verschobene Daten. Blau: Bereich der Nadelbiegung. Grün: Bereich der Biegung des Si-Normals.	25
Abbildung 2.12:	Probenpräparation der strukturierten SU-8 Folien. Links: Verklebung einzelner Folien mit überstehenden Prüfstrukturen. Rechts: Einzelner Mikrobalken samt Einspannungsbedingung nahe der Glaskante und Kraftapplikation durch die AFM-Spitze.	27

Abbildung 2.13: Vermessung der Höhe der Mikrobalken mittels: a) REM, b) Lichtmikroskop-I, c) DEKTAK-System und d) Lichtmikroskop-II, gezeigt an verschiedenen exemplarischen SU-8 Mikrobalken.....	28
Abbildung 2.14: Rohdaten der <i>E</i> -Modulwerte aller untersuchten SU- 8 Mikrobalken.	29
Abbildung 2.15: a) Handelsübliches härtpbares Epoxidharz. b) Schema des gehärteten Kunststoffes auf der Polyetherbasis [R-O] _n . c) Zwischen Abstandshaltern mittig aufgetragenes Harz, eingepresst zwischen zwei Präparationsgläsern.	31
Abbildung 2.16: a) Seitliche Aufnahme des Schneid- bzw. Stanzwerkzeuges. b) Überstehend verklebte Epoxidstreifen. c) Probenhalter zur Fixierung der verklebten Gesamtprobe.	32
Abbildung 2.17: Links: Lichtmikroskopische Messung der Breite eines exemplarischen Mikrobalkens aus Epoxid. Rechts: Exemplarische Messung der Höhe der Epoxidschicht.	33
Abbildung 2.18: Rohdaten der <i>E</i> -Modulwerte der untersuchten Mikrobalken aus Epoxid.	34
Abbildung 2.19: Links: Exemplarische REM-Aufnahme eines Si _x N _x - Mikrobalkens. Rechts: Vermessung der Balkenhöhe.	35
Abbildung 2.20: Plot der ermittelten <i>E</i> -Modulwerte der Si _x N _x - Mikrobalken.	36
Abbildung 2.21: Komponenten des Renishaw® RAMAN-Gerätes InVia.	38
Abbildung 2.22: Schematischer Aufbau des RAMAN-Geräts: 1) einfache Kamera 2) halbdurchlässiger Spiegel 3) Polarisator des rückgestreuten Lichtes 4) Schlitzblende 5) Kantenfilter 6) optisches Gitter 7) CCD Kamera 8) Filterrad der Laserleistung 9) automatischer Shutter 10) Strahlenaufweiter 11) λ/2-Verzögerungsplatte 12) XYZ-Verstelltisch 13) Objektivlinsen 14) manuelles Shutterrad 15) LASER Nr. 1 (633 nm) 16) LASER Nr. 2 (532 nm)	39
Abbildung 2.23: Optomechanischer Drift der Siliziumlinie am RAMAN-Gerät.	40
Abbildung 2.24: Die gemessene RAMAN-Linie von Silizium zusammen mit der Neonreferenzlinie.	40
Abbildung 2.25: Exemplarischer AFM-Biegebalken mit dazugehörigem Koordinatensystem.	47
Abbildung 2.26: Rohdaten der <i>E</i> -Modulwerte der untersuchten Mikrobalken aus einkristallinem Silizium.	48

Abbildung 2.27: Rohdaten der RAMANshifts entlang der Balkenachse eines $191\text{ }\mu\text{m}$ langen Mikrobalkens aus einkristallinem Silizium.....	50
Abbildung 2.28: Dehnungsmesswerte entlang der Balkenachse eines $191\text{ }\mu\text{m}$ langen Mikrobalkens aus einkristallinem Silizium.....	51
Abbildung 2.29: Farblich dargestellte Dehnungsmesswerte am $191\text{ }\mu\text{m}$ langen Mikrobalken aus einkristallinem Silizium.....	52
Abbildung 3.1: Referenz- und Momentankonfiguration eines deformierbaren Körpers.....	54
Abbildung 3.2: Koordinatensystem, Kraft, Abmaße, Querschnitt und Biegelinie eines einseitig fest eingespannten Trägers.....	69
Abbildung 3.3: Spezialfälle des mikromorphen Kontinuums nach A. C. ERINGEN [32]......	73
Abbildung 3.4: Schema zur Kinematik einer Starrkörpertranslation und -rotation um den Massenschwerpunkt C	74
Abbildung 3.5: Schema zur Aufteilung von Volumen- und Oberflächenkräften in der Mikropolartheorie.....	76
Abbildung 3.6: Darstellung der Scherspannungsvektoren am infinitesimalen Volumenelement.....	78
Abbildung 3.7: Darstellung einiger Kraft- und Momentenspannungskomponenten am infinitesimalen Volumenelement in der Mikropolartheorie.....	79
Abbildung 3.8: Verdeutlichung der Funktionsvariablen (dem Deformationsgradient und dem Gradient des Deformationsgradienten) bei der Verformung im Gradientenkontinuum.	86
Abbildung 3.9: Schema der Aufspaltung des Verschiebungsgradienten zweiter Ordnung in der MDG-Theorie.....	90
Abbildung 3.10: Normierte Durchbiegungen über zur Balkenhöhe H normierter innerer Längenparameter der MDG-Theorie.....	95
Abbildung 3.11: Der Abschluss der Molekülbindungen mit resultierenden intermolekularen Kräften (rote Pfeile) als Ursache von Molekülumlagerungen.....	102
Abbildung 3.12: Zweidimensionales Beispiel ko- und kontravarianter Vektorkomponenten.....	104
Abbildung 3.13: Kartesisches Inertialsystem und krummlinige Flächenkoordinaten.	105
Abbildung 3.14: Kartesisches Koordinatenystem und Oberflächennumerierung am EULER-BERNOULLI Balken.....	107

Abbildung 4.1:	Qualitative Darstellung eines LAGRANGE- (oder Tetraeder-) Elements zweiter Ordnung.	116
Abbildung 4.2:	Beispielhafte Darstellung eines diskretisierten Biegebalkens vor und nach der Berechnung. $L=10H=10B$	117
Abbildung 4.3:	Das Konvergenzverhalten des numerischen Modells eines unterschiedlich fein diskretisierten Biegebalkens. $L=18H=18B$, $H=59\text{ }\mu\text{m}$, $\ell=0\text{ }\mu\text{m}$	118
Abbildung 4.4:	Das Konvergenzverhalten des numerischen Modells eines unterschiedlich fein diskretisierten Biegebalkens. $L=18H=18B$, $H=59\text{ }\mu\text{m}$, $\ell=25\text{ }\mu\text{m}$	119
Abbildung 4.5:	Die drei unterschiedlich vernetzten numerischen Modelle zur speziellen Untersuchung der Abhängigkeit der Elementengröße. $L=18H=18B$, $\ell=25\text{ }\mu\text{m}$	120
Abbildung 4.6:	Die prozentuale Abweichung der Biegewerte dreier unterschiedlich vernetzter numerischer Modelle zu den jeweiligen analytischen Werten. $L=18H=18B$, $\ell=25\text{ }\mu\text{m}$	121
Abbildung 4.7:	Die Biegelinie. $L=40H=40B$. $\ell=0\text{ }\mu\text{m}$, $8\text{ }\mu\text{m}$ und $19\text{ }\mu\text{m}$	122
Abbildung 4.8:	Der Dehnungs- und Vergleichsdehnungsverlauf. $L=40H=40B$. $\ell=0\text{ }\mu\text{m}$, $8\text{ }\mu\text{m}$ und $19\text{ }\mu\text{m}$	123
Abbildung 4.9:	Der Rotations- und Rotationsgradientenverlauf. $L=40H=40B$. $\ell=0\text{ }\mu\text{m}$, $8\text{ }\mu\text{m}$ und $19\text{ }\mu\text{m}$	123
Abbildung 4.10:	Der Verlauf der Vergleichsmomentenspannung. $L=40H=40B$. $\ell=0\text{ }\mu\text{m}$, $8\text{ }\mu\text{m}$ und $19\text{ }\mu\text{m}$	124
Abbildung 4.11:	Plot von Biegesteifigkeitsverhältnissen aus Experiment (*CHONG, 2002 [16]), Analytik und Simulation. $\ell=9,4\text{ }\mu\text{m}$	125
Abbildung 5.1:	Ergebnisse der E -Modulmessung an Aluminium mit künstlicher Heterogenität und der Modellfunktion der MS-Theorie mit angepassten Koeffizienten.	133
Abbildung 5.2:	Ergebnisse der E -Modulmessung an Aluminium mit künstlicher Heterogenität und der Modellfunktion der MDG-Theorie mit angepassten Koeffizienten.	133
Abbildung 5.3:	Ergebnisse der E -Modulmessung an Aluminium mit künstlicher Heterogenität und der Modellfunktion der OF-Theorie mit angepassten Koeffizienten.	134
Abbildung 5.4:	Ergebnisse der E -Modulmessungen beider Aluminiumschäume und den Modellfunktionen der OF-Theorie mit jeweils angepassten Koeffizienten.	135
Abbildung 5.5:	Gemittelte Ergebnisse der E -Modulmessung an SU-8 und die Modellfunktion der MDG-Theorie mit angepassten Koeffizienten.	136

Abbildung 5.6:	Gemittelte Ergebnisse der E -Modulmessung an SU-8 und die Modellfunktion der OF-Theorie mit angepassten Koeffizienten.	137
Abbildung 5.7:	Gemittelte Ergebnisse der E -Modulmessung an SU-8 und die Modellfunktion der MS-Theorie mit angepassten Koeffizienten.	137
Abbildung 5.8:	Gemittelte Ergebnisse der E -Modulmessung an Epoxid und die Modellfunktionen der MS-, MDG- und OF-Theorie.	138
Abbildung 5.9:	Ergebnisse der E -Modulmessung an einkristallinem Silizium und der Modellfunktion der klassischen Theorie (arithmetisches Mittel).	139
Abbildung 5.10:	Veranschaulichung des linearen Dehnungsverlaufs entlang der z -Achse bei einem trapezförmigen Querschnitt und des Dehnungsmesspunktes bei halber Eindringtiefe.	141
Abbildung 5.11:	Plot gemessener und abgeschätzter Eindringtiefenfaktoren.	142
Abbildung 5.12:	Ergebnisse der E -Modulmessung an amorphem Siliziumnitrid und der Modellfunktion der klassischen Theorie.	143

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1.1: Literaturquellen zu experimentellen Daten ¹ des Größeneffekts in der Elastizität.....	6
Tabelle 2.1: Daten zur Untersuchungsreihe der Balken mit künstlicher Heterogenität.	14
Tabelle 2.2: Daten der Untersuchung der Aluminiumschaumbalken.	18
Tabelle 2.3: Abmaße und Messdaten der untersuchten SU-8 Mikrobalken.	30
Tabelle 2.4: Abmaße und Messdaten zur Untersuchungsreihe aus Epoxid.	34
Tabelle 2.5: Abmaße und Messdaten der Untersuchung der Si _x N _x - Mikrobalken.	36
Tabelle 2.6: RAMAN-Auswahlregeln für einkristallines Silizium nach SIEGLE, [92].	43
Tabelle 2.7: Abmaße und Messdaten der untersuchten Mikrobalken aus Silizium.	49
Tabelle 5.1: Materialparameter aus den Untersuchungen der Aluminiumbalken mit künstlicher Heterogenität.	132
Tabelle 5.2: Materialparameter der Untersuchungsreihe der Aluminiumschäume.	134
Tabelle 5.3: Materialparameter aus den Untersuchungen des SU-8 Polymers.	136
Tabelle 5.4: Materialparameter der Untersuchungsreihe des Epoxids.....	138
Tabelle 5.5: Materialparameter des untersuchten Siliziums.	139
Tabelle 5.6: Auswertung von gemessenem und analytischem Korrekturfaktor.	142

Literaturverzeichnis

- [1] Altenbach J., Altenbach H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1994.
- [2] Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A.: *On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: A short review and bibliography*. Arch. Appl. Mech., **80**, 2010, pp. 73–92.
- [3] Amanatidou E., Aravas N.: *Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **191**, 2002, pp. 1723–1751.
- [4] Anastassakis E., Pinczuk A., Burstein E.: *Effect of static uniaxial stress on the Raman spectrum of silicon*. Solid State Communications, **8**, 1970 pp. 133–138.
- [5] Aspnes D.E., Studna A.A.: *Dielectric functions and optical parameters of Si, Ge, GaP, GaAs, GaSb, InP, InAs, and InSb from 1.5 to 6.0 eV*. Amer. Phys. Soc., **27**(2), 1983, pp. 985–1009.
- [6] Becker E., Bürger W.: *Kontinuumsmechanik, Eine Einführung in die Grundlagen und einfache Anwendung*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [7] Becker M.: *Lokale Messung von Kornorientierungen und inneren mechanischen Spannungen in polykristallinem Silizium mittels Mikro-Ramanspektroskopie*. Promotion TU Erlangen-Nürnberg. 2006.
- [8] Becker M., Scheel H., Christiansen S., Strunk H.P.: *Grain orientation, texture, and internal stress optically evaluated by micro-Raman spectroscopy*. J. Appl. Phys., **101**(6), 2007, pp. 01–10.
- [9] Besdo D.: *Towards a Cosserat-theory describing motion of an originally rectangular structure of blocks*. Arch. Appl. Mech. **80**, 2010, pp. 25–45.

- [10] Beveridge A.J., Wheel M.A., Nash D.H.: *The micropolar elastic behaviour of model macroscopically heterogeneous materials*. International Journal of Solids and Structures, **50**, 2013, pp. 246–255.
- [11] Bertram A.: *Elasticity and Plasticity of Large Deformations – an Introduction*. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [12] Bertram A.: *The Mechanics and Thermodynamics of Finite Gradient Elasticity and Plasticity*. Preprint, Univ. Magdeburg, 2013.
- [13] Bonera E., Fanciulli M., Batchelder D.N.: *Combining high resolution and tensorial analysis in Raman stress measurements of silicon*. Journal of Applied Physics, **94**(4), 2003, pp. 2729–2740.
- [14] Brandmüller J., Moser H.: *Einführung in die RAMAN-Spektroskopie*. Darmstadt, 1962.
- [15] Brüller O., Neff T.: *Elastostatik für Ingenieure*. Herbert Utz Verlag, 2000.
- [16] Chong C.M.: *Experimental investigation and modeling of size effect in elasticity*. Dissertation, Hong Kong University of Science and Technology, 2002.
- [17] Cosserat E., Cosserat F.: *Theorie des corps deformables*. Hermann et Fils, 1909, Paris.
- [18] Cuenot S., Demoustier-Champagne S., Nysten B.: *Elastic modulus of polypyrrole nanotubes*. Physical Review Letters, **85**(8), 2000, pp. 1690–1693.
- [19] Cuenot S., Fretigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B.: *Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy*. Physical Review B, **69**, 2004, pp. 01–05.
- [20] Desai A.: *Size Effect on the Mechanical Properties in Zinc Oxide*. The Pennsylvania State University, ProQuest, 2008, ISBN-0549769455, 9780549769453

- [21] De Wolf I.: *Stress measurements in silicon devices through Raman spectroscopy: Bridging the gap between theory and experiment*. J. Appl. Phys., **79**(9), 1996-a, pp. 7148–7156.
- [22] De Wolf I.: *Micro-Raman spectroscopy to study local mechanical stress in silicon integrated circuits*. J. Raman Spectrosc., **30**(10), 1996-b, pp. 877–883.
- [23] De Wolf I.: *Mechanical stress measurements using micro-Raman spectroscopy*. Microsystem Technologies, **5**, 1998, pp. 13–17.
- [24] De Wolf I.: *Stress measurements in Si microelectronics devices using Raman spectroscopy*. J. Raman Spectrosc., **30**(10), 1999, pp. 877–883.
- [25] Diebels S., Steeb H.: *The size effect in foams and its theoretical and numerical investigation*. Proc. R. Soc. Lond. A, **458**, 2002, pp. 2869–2883.
- [26] Edwards R.L., Coles G., Sharpe W.N. Jr.: *Comparison of tensile and bulge tests for thin-film silicon nitride*. Society for Experimental Mechanics, **44**(1), 2004, pp. 49–54.
- [27] Engel G., Garikipati K., Hughes T.J.R., Larson M.G., Mazzei L., Taylor R.L.: *Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **191**, 2002, pp. 3669–3750.
- [28] Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H.: *Foundations of Micropolar Mechanics*. Springer, 2013.
- [29] Eringen A.C.: *Linear Theory of Micropolar Elasticity*. J. Math. Mech., **15**, 1966-a, pp. 909–923.
- [30] Eringen A.C.: *A unified theory of thermomechanical materials*. Int. J. Engng. Sci., **4**, 1966-b, pp. 179–202.

- [31] Eringen A.C.: *Continuum Physics. Vol. IV - Polar and nonlocal field theories*. Academic Press, INC., 1976, New York.
- [32] Eringen A.C.: *Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids*. Springer-Verlag, 1999, New York.
- [33] Eringen A.C.: *Nonlocal Continuum field theories*. Springer-Verlag, 2010, New York.
- [34] Fleck N.A., Müller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W.: *Strain gradient plasticity: Theory and experiment*. Acta metall. mater., **42**(2), 1994, pp. 475–487.
- [35] Fleck N.A., Hutchinson J.W.: *Strain gradient plasticity*. In: Hutchinson J.W., Wu T.Y. (Eds.), *Advances in Applied Mechanics*, **33**, Academic Press, New York, 1997, pp. 295 –361.
- [36] Flügge W.: *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [37] Fosdick R.: *On the “principle of virtual power” for arbitrary parts of a body*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, **23**(6), 2011, pp. 483–489.
- [38] Ganesan S., Maradudin A.A., Oitmaa J.: *A Lattice Theory of Morphic Effects in Crystals*. Annals Of Physics, **56**, 1970, pp. 556–594.
- [39] Gao X.-L., Park S.K.: *Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem*. International Journal of Solids and Structures **44**, 2007, pp. 7486–7499.
- [40] Greer J.R., Oliver W.C., Nix W.D.: *Size dependence of mechanical properties of gold at the micron scale in the absence of strain gradients*. Acta Materialia, **53**, 2005, pp. 1821–1830.

- [41] Greve R.: *Kontinuumsmechanik, Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [42] Günther W.: *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. **10**, 1958, p. 195.
- [43] Guo X.H., Fang D.N., Li X.D.: *Measurement of deformation of pure Ni foils by speckle pattern interferometry*. Mechanics in Engineering, **27**(2), 2005, pp. 21–25.
- [44] Gurtin M.E. and Murdoch A.I.: *A Continuum Theory of Elastic Material Surfaces*. Arch. Ration. Mech. An., **57**(4), 1975, pp. 291–323.
- [45] Hadjesfandiari A.R., Dargush G.F.: *Couple stress theory for solids*. International Journal of Solids and Structures, **48**, 2011, pp. 2496–2510.
- [46] Javili A., McBride A., Steinmann P.: *Thermomechanics of Solids With Lower-Dimensional Energetics: On the Importance of Surface, Interface, and Curve Structures at the Nanoscale. A Unifying Review*. Applied Mechanics Reviews, **65**, 2013, pp. 010802-1-010802-31.
- [47] Jing G.Y., Duan H.L., Sun X.M., Zhang Z.S., Xu J., Li Y.D., Wang J.X., Yu D.P.: *Surface effects on elastic properties of silver nanowires: Contact atomic-force microscopy*. Physical Review B, **73**, 2006, pp. 01–06.
- [48] Kim J., Cho D., Muller R.: *Why is (111) silicon a better mechanical material for MEMS*. Proc. Transducers, 2001, pp. 662–665.
- [49] Koiter W.T.: *Couple-stresses in the theory of elasticity*. Pt. I-II. Proc. Koninkl. Nederland Akad. Wetensh., **67**, 1964, pp. 17–44.
- [50] Kong S., Zhou S., Nie Z., Wang K.: *Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory*. International Journal of Engineering Science, **47**, 2009, pp. 487–498.

- [51] Lakes R.: *Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua*. Ed. H. Mhlhaus, J. Wiley, N.Y., Ch. 1, 1995, pp. 1–22.
- [52] Lam D.C.C., Yang F., Chong C.M., Wang J., Tong P.: *Experiments and theory in strain gradient elasticity*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **51**, 2003, pp. 1477–1508.
- [53] Liebold C.: *Zur Messung mechanischer Spannungen mittels Raman-spektroskopie*. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2011.
- [54] Loechelt G.H., Cave H.G., Menéndez J.: *Measuring the tensor nature of stress in silicon using polarized off-axis Raman spectroscopy*. Appl. Phys. Lett., **66**(26), 1995, pp. 3639–3641.
- [55] Logg A., Mardal K.-A., Wells G.N. et al.: *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012, [doi:10.1007/978- 3-642-23099-8].
- [56] Lorenz H., Despont M., Fahrni N., LaBianca N., Renaud P., Vettiger P.: *SU-8: A low-cost negative resist for MEMS*. J. Micromech. Microeng. **7**, 1997, pp. 121–124.
- [57] Loudon R.: *The Raman effect in crystals*. Advances in Physics **13**(52), 1964, pp. 423–482.
- [58] Lübke J., Doering L., Reichling M.: *Precise determination of force microscopy cantilever stiffness from dimensions and eigenfrequencies*. Meas. Sci. Technol. **23**, 2012, pp. 1–9.
- [59] Ma Q., Clarke D.R.: *Size dependent hardness of silver single crystals*. Journal of Materials Research, **10**(4), 1995, pp. 853–863.
- [60] Masiani R., Rizzi N., Trovalusci P.: *Masonry as Structured Continuum*. Meccanica **30**, 1995, pp. 673–683.

-
- [61] Maugin G.A., Metrikine A.V. (Eds.): *Mechanics of Generalized Continua – One Hundred Years after the Cosserats*. Advances in Mechanics and Mathematics, **21**, Springer, 2010.
- [62] McFarland A.W, Colton. J.S.: *Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors*. Journal of Micro-mechanics and Microengineering, **15**(5), 2005, pp. 1060–1067.
- [63] Miller R.E., Shenoy V.B.: *Size-Dependent Elastic Properties of Nanosized Structural Elements*. Nanotechnology, **11**(3), 2000, pp. 139–147.
- [64] Mindlin R.D., Tiersten H.F.: *Effects of couple-stresses in linear elasticity*. ARMA, **11**, 1962, pp. 415–448.
- [65] Mindlin R.D.: *Micro-structure in linear elasticity*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, **16**(1), 1964, pp. 51–78.
- [66] Mindlin, R.D., Eshel, N.N.: *On first strain-gradient theories in linear elasticity*. International Journal of Solids and Structures, **4**, 1968, pp. 109–124.
- [67] Müller I.: *Thermodynamik – Grundlagen der Materialtheorie*. Bertelsmann Universitätsverlag Düsseldorf, 1973.
- [68] Müller W.H., Ferber F.: *Technische Mechanik für Ingenieure*. 2., verbesserte Auflage, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2005.
- [69] Müller W.H.: *Streifzüge durch die Kontinuumstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2011.
- [70] Müller W.H.: *An Expedition to Continuum Theory*. Springer, 2014.
- [71] Narayanan S., Kalidindi S.R., Schadler L.S.: *Determination of unknown stress states in silicon wafers using microlaser Raman spectroscopy*. J. Appl. Phys., **82**(5), 1997, pp. 2595–2600.

- [72] Noll W., Virga E.G.: *On Edge Interactions and Surface Tension*. Mechanics and Thermodynamics of Continua, 1991, pp. 483–513.
- [73] Nowacki W.: *Theory of Micropolar Elasticity*. CISM, Udine, 1972.
- [74] Oden J.T., Rigsby D.M., Cornett D.: *On The Numerical Solution Of A Class Of Problems In A Linear First Strain-Gradient Theory Of Elasticity*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, **2**, 1970, pp. 159–174.
- [75] Orowan E.: *Surface Energy and Surface Tension in Solids and Liquids*. Proc. R. Soc. A, **316**(1527), 1970, pp. 473–491.
- [76] Ossikovski R., Nguyen Q., Picardi G., Schreiber J.: *Determining the stress tensor in strained semiconductor structures by using polarized micro-Raman spectroscopy in oblique backscattering configuration*. Journal of Applied Physics, **103**(9), 2008, pp. 01–13.
- [77] Pau, A., Trovalusci P.: *Block masonry as equivalent micropolar continua: the role of relative rotations*. Acta Mechanica, **223**(7), 2012, pp. 1455–1471.
- [78] Pelletier M.J.: *Analytical applications of Raman spectroscopy*. Blackwell Publishing Ltd., Oxford, 1999.
- [79] Poborchii V., Tada T., Kanayama T.: *Study of stress in a shallow-trench-isolated Si structure using polarized confocal near-UV Raman microscopy of its cross section*. Applied Physics Letters, **91**(24), 2007, pp. 01–03.
- [80] Poncharal P., Wang Z.L., Ugarte D., De Heer W.A.: *Electrostatic Deflections and Electromechanical Resonances of Carbon Nanotubes*. Science **283**, 1999, pp. 1513–1516.
- [81] Poole W.J., Ashby M.F., Fleck N.A.: *Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals*. Scripta Materialia, **34**(4), 1996, pp. 559–564.

-
- [82] Ramézani H., El-Hraiech A., Jeong J., Benhamou C.-L.: *Size effect method application for modeling of human cancellous bone using geometrically exact Cosserat elasticity*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 237–240, 2012, pp. 227–243.
- [83] Ratle A., Lagacé M., Pandolfelli V., Allaire C., Rigaud M.: *A simple method for evaluating elastic modulus of refractories at high temperatures*. Journal of the Canadian ceramic society, **65**(3), 1996, pp. 202–204.
- [84] Ru C.Q.: *Simple geometrical explanation of Gurtin-Murdoch model of surface elasticity with clarification of its related versions*. Science China Press, Physics, Mechanics & Astronomy and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **53**(3), 2010, pp. 536–544.
- [85] Sadeghian H., Yang C.K., Goosen J.F.L., van der Drift E., Bossche A., French P. J., van Keulen F.: *Characterizing size-dependent effective elastic modulus of silicon nanocantilevers using electrostatic pull-in instability*. Applied Physics Letters, **94**, 2009, pp. 221903-01-221903–03.
- [86] Salvétat J.-P., Andrew G., Briggs D., Bonard J.-M., Bacsá R.R., Kulik A.J., Stöckli T., Burnham N.A., Forró L.: *Elastic and Shear Moduli of Single-Walled Carbon Nanotube Ropes*. Physical Review Letters **82**(5), 1999-a, pp. 944–947.
- [87] Salvétat J.-P., Kulik A.J., Bonard J.M., Briggs G.A.D., Stockli T., Metenier K., Bonnamy S., Beguin F., Burnham N.A., Forro L.: *Elastic Modulus of Ordered and Disordered Multiwalled Carbon Nanotubes*. Adv. Mater. Weinheim, Ger. **11**, 1999-b, pp. 161–165.
- [88] Schaefer H.: *Das Cosserat-Kontinuum*. Z. Angew. Math. Mech., **47**(8), 1967, p. 485–498.
- [89] Schnell W., Gross D., Hauger W.: *Technische Mechanik 2, Elastostatik*. 7. Auflage, Springer, 2002.

- [90] Shu J.Y., King W.E., Fleck N.A.: *Finite Elements For Materials With Strain Gradient Effects*. Int. J. Numer. Meth. Engng., **44**, 1999, pp. 373–391.
- [91] Shuttleworth R.: *The Surface Tension of Solids*. Proc. Phys. Soc. A, **63**(5), 1950, pp. 444–457.
- [92] Siegle H., Eckey L., Hoffmann A., Thomsen C.: *Quantitative determination of hexagonal minority phase in cubic GaN using Raman spectroscopy*. Solid State Communications **96**(12), 1995, pp. 943–949.
- [93] Simons G., Weippert Ch., Dual J., Villain J.: *Size Effects in Tensile Testing of Thin Cold Rolled and Annealed Cu Foils*. Materials Science and Engineering A, **416**, 2006, pp. 290–299.
- [94] Simons G., Dual J., Weippert C., Villain J.: *Experimental Investigations of Size Effects in Thin Copper Foils*. IUTAM Symposium on Multiscale Modeling and Characterization of Elastic-Inelastic Behavior of Engineering Materials, Solid Mechanics and Its Applications, **114**, 2004, pp. 89–96.
- [95] Soh A.-K., Wanji C.: *Finite element formulations of strain gradient theory for microstructures and the C0–1 patch test*. Int. J. Numer. Meth. Engng, **61**, 2004, pp. 433–454.
- [96] Stan G., Ciobanu C.V., Parthangal P. M., Cook R.F.: *Diameter-dependent radial and tangential elastic moduli of ZnO nanowires*. Nano Letters, **7**(12), 2007, pp. 3691–3697.
- [97] Stelmashenko N.A., Walls M.G., Brown L.M., Milman Y.V.: *Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study*. Acta Metallurgica et Materialia, **41**(10), 1993, pp. 2855–2865.
- [98] Szabó I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser, Basel, 1977.

-
- [99] Tejchman J., Gorski J.: *Deterministic and statistical size effect during shearing of granular layer within a micro-polar hypoplasticity*. Int. J. Numer. Anal. Meth. In Geomech. **32**, 2008, pp. 81–107.
- [100] Toupin, R.A.: *Elastic materials with couple-stresses*. ARMA, **11**, 1962, pp. 385–414.
- [101] Truesdell C.: *Die Entwicklung des Drallsatzes*. ZAMM, **44**(4/5), 1964, pp. 149–158.
- [102] Truesdell C.: *Whence the law of moment of momentum*. In: Essays in the history of mechanics. Springer, Berlin, 1968.
- [103] Varenberg M., Etsion I., Halperin G.: *Nanoscale fretting wear study by scanning probe microscopy*. Tribology Letters, **18**(4), 2005, pp. 493–498.
- [104] Vavva M.G., Protopappas V.C., Gergidis L.N., Charalambopoulos A., Fotiadis D.I., Polyzos D.: *Velocity dispersion of guided waves propagating in a free gradient elastic plate: Application to cortical bone*. J. Acoust. Soc. Am. **125**(5), 2009, pp. 3414–3427.
- [105] Vermaak J.S., Mays W., Kuhlmann-Wilsdorf D.: *On surface stress and surface tension*. Surface Science **12**, 1968, pp. 128–133.
- [106] Villain J., Weippert C., Simons G., Dual J.: *Size Effects and Mechanical Properties: Results for Thin Copper Foils*. presented at Materialsweek, International Congress Centre Munich, 2002.
- [107] Voigt A., Wolf E., Strunk H.P.: *Grain orientation and grain boundaries in cast multicrystalline silicon*. Materials Science and Engineering, **B54**, 1998, pp. 202–206.
- [108] Wang Z.-Q., Zhao Y.-P., Huang Z.-P.: *The effects of surface tension on the elastic properties of nano structures*. International Journal of Engineering Science **48**(2), 2010, pp. 140–150.

- [109] Wei Y.: *A new finite element method for strain gradient theories and applications to fracture analyses*. European Journal of Mechanics A/Solids, **25**, 2006, pp. 897–913.
- [110] Yang F., Chong C.M., Lam D.C.C., Tong P.: *Couple stress based strain gradient theory for elasticity*. International Journal of Solids and Structures, **39**(10), 2002, pp. 2731–2743.