

Analytische Lösung des gekoppelten Wärme-  
und Stofftransportproblems bei der Absorption  
im laminaren Rieselfilm

vorgelegt von  
Dipl.-Ing.  
Thomas Meyer  
geb. in Aschersleben

von der Fakultät III - Prozesswissenschaften  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften  
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Matthias Kraume (TU Berlin)  
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Felix Ziegler (TU Berlin)  
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Stephan Kabelac (LU Hannover)

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 31. März 2016

Berlin 2016



# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Arbeit am Institut für Maschinen- und Energieanlagentechnik der Technischen Universität Berlin unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Felix Ziegler im Zeitraum von Februar 2009 bis November 2015.

Besonderen Dank möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Felix Ziegler aussprechen, dessen kritische Begutachtung der Ergebnisse und des Textes diese Arbeit in erheblichem Maße verbessert haben.

Ich möchte mich posthum bei Prof. Dr.-Ing. H. D. Baehr bedanken, ohne dessen sorgfältige Aufarbeitung und Darstellung der mathematischen Grundlagen der LAPLACE-Transformation für die Lösung nicht-stationärer Wärmeleitungsprobleme die vorliegende Arbeit in dieser Form mit großer Wahrscheinlichkeit nicht entstanden wäre.

Mein Dank gilt ebenso Prof. Dr.-Ing. Stephan Kabelac des Instituts für Thermodynamik der Leibniz Universität Hannover für die bereitwillige Übernahme des Zweitgutachtens.

Abschließend danke ich meinen Kollegen, insbesondere Herrn Martin Mittermaier, für die zahlreichen anregenden Diskussionen zum Thema und darüber hinaus, die ebenfalls maßgeblich zur Verbesserung dieser Arbeit beigetragen haben.



# Abstract

The objective of the present study is the identification of the influencing factors on the combined heat and mass transfer by using an analytical solution with technically more realistic boundary conditions. This analytical solution can then be used to vary the design of heat and mass exchangers for a given working fluid with respect to the exchanger effectiveness or to compare different working fluids for a given design of the exchangers.

In the present study a physical film model is derived from the differential energy and component balances for a laminar falling film. The obtained partial differential equations are solved by means of the LAPLACE transform for a diabatic wall boundary condition.

The obtained analytical solutions are used to calculate heat and mass fluxes from the evolving temperature and mass fraction profiles as a function of the characterizing dimensionless numbers for a typical working fluid of aqueous lithiumbromide.

A comparison with available experimental data reveals excellent agreement despite the strong simplifications especially in terms of film flow, assumption of complete wetting of the tubes etc..

With the analytical solution for the diabatic wall boundary condition the great spread of the experimentally determined heat transmission and mass transfer coefficients published in literature is comprehensible and reproducible for the single tube calculation for typical varying inlet conditions of aqueous lithiumbromide trickled onto horizontal tubes.

In a technically typical range of  $0,005 < \dot{\Gamma} < 0,05 \text{ kg}/(ms)$  for the irrigation density, the analytical solution yields mean mass transfer coefficients in the range of  $\bar{\beta} \approx 0,08 - 0,18 \text{ m}/h$  as well as mean heat transmission coefficients of  $\bar{k} \approx 0,18 - 1,25 \text{ kW}/(m^2K)$  depending on the temperature difference between the solution inlet temperature and the cooling water temperature.



# Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist, die grundlegenden Abhängigkeiten und Einflussparameter auf den gekoppelten Wärme- und Stofftransport in Absorptionswärmewandlern mit Hilfe analytischer Funktionen für technisch möglichst realistische Randbedingungen zu beschreiben. Diese analytische Lösung kann anschließend als Auslegungswerkzeug für die Wärme- und Stoffübertrager für eine möglichst effektive Ausnutzung der bereitgestellten Übertragungsfläche sowie für Vergleiche verschiedener Arbeitsmedien untereinander herangezogen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die sich aus dem physikalischen Filmmodell für laminar berieselte Horizontalrohre ergebenden partiellen Differentialgleichungen für den Energie- und Stofftransport mit Hilfe der LAPLACE-Transformation für die technisch typische thermische Randbedingung der diabaten Wand im komplexen LAPLACE-Bereich gelöst und zurück transformiert. Die so erhaltenen Lösungen werden verwendet, um am Beispiel wässriger Lithiumbromidlösung, einem typischen Arbeitsmedium für den Einsatz in Absorptionswärmewandlern, die Wärme- und Stoffstromdichten aus den sich entwickelnden Temperatur- und Massenanteilsprofilen zu berechnen und deren Abhängigkeit von den bestimmenden dimensionslosen Kenngrößen zu ermitteln.

Ein Vergleich mit experimentell ermittelten Daten zeigt sehr gute Übereinstimmungen trotz der teilweise starken Vereinfachungen des Rieselfilmmodells, z.B. der sehr starken Vereinfachung der Filmströmungsverhältnisse, der Annahme kompletter Benetzung der Rohre etc..

Mit der in dieser Arbeit präsentierten analytischen Lösung für die diabate Wand lässt sich anhand einer Einzelrohrbetrachtung die große Bandbreite der in der Literatur veröffentlichten, experimentell ermittelten Wärmedurch- und Stoffübergangskoeffizienten für mit wässriger Lithiumbromidlösung berieselte Horizontalrohre nachvollziehen.

Mit Hilfe der analytischen Lösung ergeben sich bei der Variation der Berieselungsdichte von  $0,005 < \dot{\Gamma} < 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$  mittlere Stoffübergangskoeffizienten von  $\bar{\beta} \approx 0,08 - 0,18 \text{ m}/\text{h}$  sowie abhängig von der Temperaturdifferenz des Kühlwassers zu der Salzlösungseintrittstemperatur mittlere Wärmedurchgangskoeffizienten von  $\bar{k} \approx 0,18 - 1,25 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$ .



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>i</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>xv</b>
<b>1 Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2 Modellierung</b>	<b>5</b>
2.1 Modellvorstellung und Annahmen . . . . .	5
2.1.1 Impulsbilanz . . . . .	7
2.1.2 Bilanz normal über die Systemgrenzen transportierter Erhaltungsgrößen . . . . .	12
2.1.3 Gesamtmassenbilanz . . . . .	13
2.1.4 Komponentenbilanz . . . . .	14
2.1.5 Energiebilanz . . . . .	14
2.2 Entdimensionierung der Modellgleichungen . . . . .	15
<b>3 Stand der Wissenschaft</b>	<b>19</b>
3.1 Lösungsmethoden von Grigor'eva und Nakoryakov . . . . .	20
3.1.1 Fourier-Methode . . . . .	20
3.1.2 Lösung für den halbumendlichen Körper bzw. für die un- gestörte Phasengrenzfläche . . . . .	33
3.2 Modell und Lösungsmethode von Grossman . . . . .	36
3.3 Überblick über weitere Modelle und Methoden . . . . .	40

<b>4</b>	<b>Analytische Lösung mit Hilfe der LAPLACE-Transformation</b>	<b>49</b>
4.1	LAPLACE-Transformation der partiellen Differentialgleichungen . . . . .	50
4.2	Anwendung der transformierten Randbedingungen . . . . .	51
4.2.1	Anwendung der Randbedingungen im LAPLACE-Bereich	53
4.2.2	Adiabate Wand . . . . .	55
4.2.3	Isotherme Wand . . . . .	57
4.2.4	Diabate Wand . . . . .	58
4.3	Rücktransformation in den reellen Bereich . . . . .	62
4.3.1	Bestimmung der Polstellen . . . . .	63
4.3.2	Bestimmung der Residuen der Polstellen . . . . .	65
4.3.3	Aufsummierung aller Residuen . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Ergebnisse der analytischen Lösung</b>	<b>79</b>
5.1	Filmtemperaturprofil . . . . .	80
5.1.1	Adiabate und isotherme Wand . . . . .	80
5.1.2	Diabate Wand . . . . .	82
5.2	Filmmassenanteilsprofil . . . . .	84
5.2.1	Adiabate und isotherme Wand . . . . .	84
5.2.2	Diabate Wand . . . . .	86
5.3	Absorbierte Massenstromdichte . . . . .	88
5.4	Wärmestromdichte und mittlere Filmtemperatur . . . . .	91
5.5	Unterkühlung des Films . . . . .	96
5.6	Variation der modifizierten Stefan- und der Lewis-Zahl . . . . .	100
5.6.1	Variation der modifizierten Stefan-Zahl . . . . .	103
5.6.2	Variation der Lewis-Zahl . . . . .	108
5.7	Charakterisierung des Wärmeübertragers . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Vergleich mit experimentellen Daten</b>	<b>123</b>
6.1	Stoffeigenschaften wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	124
6.2	Wertebereich der dimensionslosen Kenngrößen für typische Absorberbetriebsbedingungen . . . . .	129
6.3	Ergebnisse der analytischen Lösung . . . . .	139
6.3.1	Variation der Berieselungsdichte . . . . .	146
6.3.2	Variation der Salzlösungseintrittstemperatur . . . . .	150
6.3.3	Variation der Salzlösungseintrittszusammensetzung . . . . .	152

---

6.3.4	mittlere Stoffüber- und Wärmedurchgangskoeffizienten . . . . .	153
6.4	Messdaten von Beutler . . . . .	158
6.4.1	Aufbau der Messapparatur von Beutler . . . . .	158
6.4.2	Kenngrößen der Messung . . . . .	160
<b>7</b>	<b>Fazit</b>	<b>169</b>
<b>A</b>	<b>Physikalischer Anhang</b>	<b>175</b>
A.1	Fick'sche Diffusion . . . . .	175
A.2	Asymptotische Endwerte für die adiabate Wand . . . . .	175
A.3	Integrale Absorbatbilanz . . . . .	176
A.4	Stoffdaten wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	180
A.5	Diffusionskoeffizient wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	181
A.6	Analytische Funktion für die Dampfdruckdaten wässriger Lithi- umbromidlösung . . . . .	182
A.7	Randbedingungen erster Art an der Phasengrenzfläche . . . . .	186
A.8	Verbesserung der FOURIER-Methode . . . . .	192
<b>B</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>195</b>
B.1	Fourier-Methode . . . . .	195
B.2	Laplace Transformation . . . . .	196
B.3	Inverse LAPLACE-Transformation . . . . .	198
B.4	Zusammenhang zwischen Exponential- und Winkelfunktionen . . . . .	202
B.5	Ermittlung von Mittelwerten und Gradienten aus den Lösungs- funktionen . . . . .	203
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>205</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung des gekoppelten Wärme- und Stofftransportes im laminaren Rieselfilm mit den qualitativen Temperatur- und Massenanteilsprofilen für zwei unterschiedliche Filmströmungskordinaten $x_1 < x_2$ . . . . .	6
2.2	Differentielles Impulsbilanzvolumenelement im laminaren Rieselfilm . . . . .	8
2.3	Entdimensioniertes Geschwindigkeitsprofil der Rieselfilmströmung nach Nusselt (1923) . . . . .	11
2.4	Differentielles Bilanzvolumenelement im laminaren Rieselfilm in kartesischen Koordinaten für normal über die Systemgrenzen transportierte Erhaltungsgrößen . . . . .	12
4.1	Schematische Darstellung des Modells der diabaten Wand und eines qualitativen Temperaturverlaufs während des Absorptionsprozesses . . . . .	59
5.1	Profile der dimensionslosen Temperatur $\Theta$ über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate $\eta$ für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate $\xi$ ; durchgezogene Linien für die adiabate Wand und gestrichelte Linien für die isotherme Wand mit einer Wandtemperatur von $\Theta_W = -1$ . . . . .	81
5.2	Profile der dimensionslosen Temperatur $\Theta$ für die diabate Wand über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate $\eta$ für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate $\xi$ ; durchgezogene Linien für $\tilde{Bi} = 0, 1$ und gestrichelte Linien für $\tilde{Bi} = 1$ mit einer externen Fluidtemperatur von $\Theta_{ext} = -1$ . . . . .	83

- 
- 5.3 Profile des dimensionslosen Absorbatmassenanteils  $\gamma$  über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linien für die adiabate Wand und gestrichelte Linien für die isotherme Wand mit einer Wandtemperatur von  $\Theta_W = -1$  . . . . . 85
- 5.4 Profile des dimensionslosen Absorbatmassenanteils  $\gamma$  für die diabate Wand über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linien für  $\tilde{Bi} = 0, 1$  und gestrichelte Linien für  $\tilde{Bi} = 1$  mit einer externen Fluidtemperatur von  $\Theta_{ext} = -1$  . . . . . 87
- 5.5 Entwicklung des lokalen dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten  $\mu_i$  an der Filmoberfläche für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linie für  $\tilde{Bi} = 0, 1$ , gestrichelte Linie für  $\tilde{Bi} = 1$  mit  $\Theta_{ext} = -1$ , Punktlinie für die isotherme Wand mit  $\Theta_W = -1$  und Strichpunktlinie für die adiabate Wand . . . . . 89
- 5.6 Entwicklung des lokalen dimensionslosen Wandtemperaturgradienten  $\Phi_W$  für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linie für  $\tilde{Bi} = 0, 1$ , gestrichelte Linie für  $\tilde{Bi} = 1$  mit  $\Theta_{ext} = -1$ , gepunktete Linie für die isotherme Wand mit  $\Theta_W = -1$  . . . . . 92
- 5.7 Entwicklung der über die Filmdickenkoordinate gemittelten dimensionslosen Austrittstemperatur  $\bar{\Theta}_{Lsg}$  für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linie für  $\tilde{Bi} = 0, 1$ , gestrichelte Linie für  $\tilde{Bi} = 1$  mit  $\Theta_{ext} = -1$ , gepunktete Linie für die isotherme Wand mit  $\Theta_W = -1$  und Strichpunktlinie für die adiabate Wand . . . . . 95
- 5.8 Entwicklung der dimensionslosen Unterkühlung des Films  $\Delta\Theta_{UK}$  (durchgezogene Linie) für die isotherme Wand mit  $\Theta_W = -1$  über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{Bi} \rightarrow \infty$  (gestrichelte Linie  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  und gepunktete Linie  $\bar{\Theta}_{Lsg}$ ) . . . . . 98

- 5.9 Entwicklung der dimensionslosen Unterkühlung des Films  $\Delta\Theta_{UK}$  (durchgezogene Linie) für die adiabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{Bi} = 0$  (gestrichelte Linie  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  und gepunktete Linie  $\bar{\Theta}_{Lsg}$ ) . . . . . 99
- 5.10 Entwicklung der dimensionslosen Unterkühlung des Films  $\Delta\Theta_{UK}$  (durchgezogene Linie) für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$  (gestrichelte Linie  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  und gepunktete Linie  $\bar{\Theta}_{Lsg}$ ) . . . . . 101
- 5.11 Entwicklung der dimensionslosen Unterkühlung des Films  $\Delta\Theta_{UK}$  (durchgezogene Linie) für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{Bi} = 0,1$  und  $\Theta_{ext} = -1$  (gestrichelte Linie  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  und gepunktete Linie  $\bar{\Theta}_{Lsg}$ ) . . . . . 102
- 5.12 Entwicklung des dimensionslosen Filmtemperaturprofils über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für  $Le = 100$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $\tilde{St} = 0,2$  und durchgezogene Linie  $\tilde{St} = 0,05$  . . . . . 104
- 5.13 Entwicklung des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsprofils über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für  $Lewis = 100$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $\tilde{St} = 0,2$  und durchgezogene Linie  $\tilde{St} = 0,05$  . . . . . 106
- 5.14 Entwicklung des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten an der Filmoberfläche über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $Lewis = 100$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $\tilde{St} = 0,2$ , gepunktete Linie  $\tilde{St} = 0,1$  und durchgezogene Linie  $\tilde{St} = 0,05$  . . . . . 107
- 5.15 Entwicklung des dimensionslosen Filmtemperaturprofils über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für  $\tilde{St} = 0,1$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $Le = 200$ , durchgezogene Linie  $Le = 50$  . . . . . 109
- 5.16 Entwicklung des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsprofils über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für  $\tilde{St} = 0,1$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $Le = 200$  durchgezogene Linie  $Le = 50$  . . . . . 110

5.17	Entwicklung des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten an der Filmoberfläche über der dimensionslosen Strömungskordinate $\xi$ für $\tilde{St} = 0, 1$ , $\tilde{Bi} = 1$ und $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie $Le = 200$ und durchgezogene Linie $Le = 50$ . . . . .	111
5.18	Verlauf der mittleren Nusselt-Zahl $Nu$ sowie des dimensionslosen logarithmischen Mittelwertes der Temperaturdifferenz $\Delta\Theta_{ln}$ als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate $\xi$ für verschiedene externe Temperaturen . . . . .	116
5.19	Verlauf der mittleren Sherwood-Zahl $Sh$ als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate $\xi$ für verschiedene externe Temperaturen . . . . .	118
5.20	Verlauf des dimensionslosen logarithmischen Mittelwertes der treibenden Absorbatmassenanteilsdifferenz $\Delta\gamma_{ln}$ als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate $\xi$ für verschiedene externe Temperaturen . . . . .	119
6.1	Wärmeleitfähigkeit wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	124
6.2	Dichte und spezifische Wärmekapazität wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	125
6.3	Temperaturleitfähigkeit wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	126
6.4	Kinematische Viskosität wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	126
6.5	Diffusionskoeffizient wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	127
6.6	Gleichgewichtstemperatur wässriger Lithiumbromidlösung . . . . .	128
6.7	Verlauf der Lewis-Zahl für wässrige Lithiumbromidlösung bei typischen Absorberbedingungen . . . . .	130
6.8	Verlauf des Steigungsparameters $B$ für wässrige Lithiumbromidlösung als Sekante durch den Punkt $x_0 = 0,5$ in Abbildung 6.6 . . . . .	131
6.9	Verlauf der modifizierten Stefan-Zahl für wässrige Lithiumbromidlösung unter Verwendung der in Abb. 6.8 gezeigten Steigungsparameter $B$ . . . . .	132
6.10	Verlauf der dimensionslosen Kühlwassertemperatur $\Theta_{ext}$ im Absorber für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Salzlösungseintrittstemperatur . . . . .	133
6.11	Verlauf der Filmdicke für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte . . . . .	135

---

6.12	Verlauf der modifizierten Biot-Zahl für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte . . . . .	136
6.13	Verlauf der maximalen dimensionslosen Strömungslänge $\tilde{\xi}$ (6.6) für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für einen Rohraußendurchmesser von $d = 0,016m$ . . . . .	138
6.14	Verlauf der mittleren absorbierten Massenstromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung für einen sehr großen Bereich der Berieselungsdichte und eine Salzlösungseintrittstemperatur von $T_0 = 40^\circ C$ . . . . .	143
6.15	Verlauf der mittleren absorbierten Massenstromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung bei typischen Absorberbedingungen für einen sehr großen Bereich der Berieselungsdichte und $T_0 = 30^\circ C$ . . . . .	145
6.16	Verlauf der mittleren absorbierten Massenstromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für verschiedene Eintrittstemperaturen der Salzlösung . . . . .	147
6.17	Verlauf der mittleren an die Wand abgegebenen Wärmestromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für verschiedene Eintrittstemperaturen der Salzlösung . . . . .	148
6.18	Verlauf der mittleren an die Wand abgegebenen Wärmestromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung bei typischen Absorberbedingungen als Funktion der Eintrittstemperatur der Salzlösung . . . . .	151
6.19	Verlauf der mittleren an die Wand abgegebenen Wärmestromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Eintrittszusammensetzung der Salzlösung . . . . .	153
6.20	Verlauf der mittleren Stoffübergangskoeffizienten für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für verschiedene Salzlösungseintrittstemperaturen . . . . .	155
6.21	Verlauf der mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für verschiedene Salzlösungseintrittstemperaturen . . . . .	156

6.22	Schematischer Versuchsaufbau des Rieselfilmversuchs von Beutler (1997) . . . . .	159
6.23	Kühlwassertemperaturen bei Variation der Salzlösungseintrittstemperatur . . . . .	165
6.24	Wärmeleistungen bei Variation der Salzlösungseintrittstemperatur . . . . .	166
6.25	Kühlwassertemperaturen bei Variation der Sumpftemperatur und somit des Absorberdrucks $p_{Abs}$ . . . . .	167
A.1	Bilanzvolumenelement für die integrale Absorbatmassenbilanz . . . . .	177
A.2	Entwicklung des über die Filmdickenkoordinate gemittelten dimensionslosen Absorbatmassenanteils $\bar{\gamma}_x$ als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate $\xi$ für $Le = 100$ , $\tilde{St} = 0, 1$ , $\Theta_{ext} = -1$ und zwei modifizierte Biot-Zahlen $\tilde{Bi} = 1$ (gestrichelte Linie) und $\tilde{Bi} = 0, 1$ (durchgezogene Linie) und die thermischen Grenzfälle . . . . .	179
A.3	Von Löwer (1960) experimentell ermittelte Dampfdruckdaten wässriger Lithiumbromidlösung bei verschiedenen Salzmassenanteilen $x = m_{LiBr}/(m_{LiBr} + m_{H_2O})$ und -temperaturen (Markierungen) und die in dieser Arbeit verwendeten, an diese Messdaten angepassten analytischen Dampfdruckfunktionen (durchgezogene Linien) . . . . .	183
A.4	Anstiegendifferenzen der von Löwer (1960) experimentell ermittelten Dampfdruckdaten wässriger Lithiumbromidlösung bei verschiedenen Salzmassenanteilen $x = m_{LiBr}/(m_{LiBr} + m_{H_2O})$ (Markierungen) und das an diese Messdaten angepasste Polynom zweiter Ordnung (durchgezogene Linien) . . . . .	185
A.5	Aus den Dampfdruckdaten ermittelte Absorptionsenthalpie als Funktion des Salzmassenanteils . . . . .	187
A.6	Verlauf der mittleren dimensionslosen Filmoberflächentemperatur für die Lösungsmethode mit Randbedingung erster Art an der Filmoberfläche (Meyer und Ziegler, 2014) im Vergleich zur Lösung dieser Arbeit für die isotherme Wand . . . . .	188

---

A.7	Verlauf des mittleren dimensionslosen Filmoberflächenabsorbatmassenanteilsgradienten für die Lösungsmethode mit Randbedingungen erster Art an der Filmoberfläche (Meyer und Ziegler, 2014) im Vergleich zur Lösung dieser Arbeit für die isotherme Wand . . . . .	189
A.8	Kleiner Ausschnitt des Verlaufs des mittleren dimensionslosen Filmoberflächenabsorbatmassenanteilsgradienten für die Lösungsmethode mit Randbedingungen erster Art an der Filmoberfläche (Meyer und Ziegler, 2014) im Vergleich zur Lösung dieser Arbeit für die isotherme Wand. . . . .	190
A.9	Verlauf der absoluten und relativen Abweichung der dimensionslosen Filmoberflächenabsorbatmassenanteilsgradienten für die Lösungsmethode mit Randbedingungen erster Art an der Phasengrenzfläche (Meyer und Ziegler, 2014) im Vergleich zu der Lösung dieser Arbeit für die isotherme Wand. . . . .	191



# Tabellenverzeichnis

5.1	Exemplarische Bedingungen für einen mit wässriger Lithiumbromidlösung berieselten Horizontalrohrabsorber . . . . .	120
5.2	Stoffdaten der wässrigen Lithiumbromidlösung für die in 5.1 gegebenen Bedingungen basierend auf den experimentell ermittelten Stoffdaten von Löwer (1960); Diffusionskoeffizient aus der Berechnungsgleichung von Kim (1992) (siehe Anhang A.5) . . .	121
5.3	Dimensionslose Kennzahlen auf Basis der in Tabelle 5.1 und 5.2 gezeigten Daten . . . . .	121
6.1	Von Yoon et al. (2008) angegebene Bereiche der experimentell ermittelten mittleren Stoffüber- und Wärmedurchgangskoeffizienten ohne Additive . . . . .	157
6.2	Systemvorgaben der von Beutler (1997) durchgeführten Experimente an einer horizontalen untereinander angeordneten Rohrreihe . . . . .	161
6.3	Stoffdaten der wässrigen Lithiumbromidlösung für die in 6.2 gegebenen Eintrittsbedingungen der Salzlösung basierend auf den Daten von Löwer (1960) und Kim (1992) . . . . .	162
A.1	Von A. Wohlfeil mit Hilfe der Messdaten von Löwer (1960) für die Stoffdaten wässriger Lithiumbromidlösungen ermittelte Koeffizienten für die mathematischen Funktionen (A.16), (A.17), (A.18) und (A.19) . . . . .	180



# Nomenklatur

## *Dimensionslose Kennzahlen*

$\tilde{\text{Bi}}$	modifizierte Biot-Zahl	$\tilde{\text{Bi}} = \frac{\delta/\lambda}{1/U'} $
$\text{Le}$	Lewis-Zahl	$\text{Le} = \frac{a}{D}$
$\tilde{\text{St}}$	modifizierte Stefan-Zahl	$\tilde{\text{St}} = \frac{c_p \cdot (T_{eq,0} - T_0)}{\Delta h_{Abs} \cdot (c_{eq,0} - c_0)}$

## *Griechische Buchstaben*

$\Delta$	Differenz	
$\delta$	Dicke	m
$\eta$	dimensionslose Filmdickenkoordinate	
$\eta$	dynamische Viskosität	$\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
$\gamma$	dimensionsloser Absorbatmassenanteil	
$\dot{\Gamma}$	Berieselungsdichte	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
$\dot{\Gamma}_V$	volumenspezifische Berieselungsdichte	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$\nu$	kinematische Viskosität	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\Omega$	dimensionslose Filmgeschwindigkeit	
$\Phi$	dimensionslose Wärmestromdichte	
$\Psi$	Argument der komplementären Fehlerfunktion	
$\rho$	Dichte	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

---

$\tau$	Schubspannung	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
$\Theta$	dimensionslose Temperatur	
$\xi$	dimensionslose Filmströmungskordinate	
<i>Römische Buchstaben</i>		
$a$	Temperaturleitfähigkeit	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$A, B$	Konstanten Phasengleichgewicht	K
$B$	angeströmte Breite der Wand	m
$c$	Massenanteil Absorbat	$\text{kg} \cdot \text{kg}^{-1}$
$c^*$	Konzentration	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$
$c_p$	spezifische Wärmekapazität	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$D$	Diffusionskoeffizient	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$F$	Kraft	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
$g$	Erdbeschleunigung	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
$I$	Impuls	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$i$	imaginäre Einheit	
$j$	normale Stromdichte einer beliebigen Erhaltungsgröße	$\dots \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
$k$	Eigenwerte	
$L$	Rohrlänge	m
$\dot{M}$	Massenstrom	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
$\dot{m}$	Massenstromdichte	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
$m$	Masse	kg
$\dot{n}$	Stoffmengenstromdichte	$\text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
$p$	Druck	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

---

$\dot{q}$	Wärmestromdichte	$\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
$T$	Temperatur	$^{\circ}\text{C}$
$t$	Zeit	s
$u$	Geschwindigkeit	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$U'$	partieller Wärmedurchgangskoeffizient	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$v$	spezifisches Volumen	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
$x$	Absorbentmassenanteil	$\text{kg} \cdot \text{kg}^{-1}$
$x$	Koordinate in Strömungsrichtung	m
$y$	Koordinate in Filmdickenrichtung	m
$z$	Komplexe Variable	
$z$	Koordinate in Rohrlängenrichtung	m

*Abkürzungen, Super- und Subskripte*

0	Eintritt der Lösung $x = 0$
$\gamma$	dimensionsloser Absorbatmassenanteil
$\infty$	asymptotischer Wert für $\xi_{\infty}$
$\overline{(\dots)}$	gemittelter Wert
$\Theta$	dimensionslose Temperatur
$A$	Absorbat
$ab$	abgeführt
$adia$	adiabat
$B$	Absorbent
$dia$	diabat

*eq, 0* Gleichgewichtszustand bei Eintrittsbedingungen

*eq, x* Gleichgewichtszustand beim Absorbentmassenanteil  $x$

*ext* externes Medium

*Film* Film

*i* Filmoberfläche

*iso* isotherm

*KW* Kühlwasser

*L* Lösung

*Lsg* Lösung

*max* maximal

*Nak* Modell von Nakoryakov et al. (1997)

*Su* Sumpf

*UK* Unterkühlung

*W* Wand/Wasser

$x, y, z$  Raumrichtungen

*zu* zugeführt

# Kapitel 1

## Einleitung und Motivation

Seit mehreren Jahrzehnten ist die Beschreibung des gekoppelten Wärme- und Stofftransports bei der nicht-isothermen Dampf- und Gasabsorption in Flüssigkeiten Gegenstand ingenieurwissenschaftlicher Untersuchungen. Die ausgiebige Beschäftigung mit diesem Phänomen ist dessen Komplexität geschuldet, welche je nach Detailgrad der physikalischen Modellierung unterschiedlich komplexe mathematische Modellgleichungen erfordert. Darüber hinaus ergibt sich in Abhängigkeit von der Form dieser Modellgleichungen die Notwendigkeit neuer bzw. alternativer Lösungsmethoden. Die zahlreichen Veröffentlichungen zu diesem Thema unterscheiden sich in mindestens einem der genannten Punkte, d.h. entweder in den Modellannahmen und den sich daraus ergebenden Unterschieden in den Modellgleichungen oder im Lösungsverfahren der erhaltenen Gleichungen. Häufig erfordert die Erweiterung der Modelle um weitere physikalische Effekte auch neue Lösungsverfahren.

Killion und Garimella (2001) fassen einen großen Teil der bis zu diesem Zeitpunkt veröffentlichten Arbeiten zu den Modellen und Lösungsmethoden des gekoppelten Wärme- und Stofftransportes mit dem Ziel zusammen, aus ihrer Sicht notwendige Forschungsgebiete bei der Rieselfilmabsorption abzuleiten. Nach ihren Schlussfolgerungen gehören hierzu unter anderem die intensivere Untersuchung der Hydrodynamik der Film- und Dampfströmung sowie die Auswirkungen des Wärme- und Stofftransportes auf die Strömungsverhältnisse. Neben der Untersuchung der Hydrodynamik fordern Killion und Garimella (2001) die sorgfältige Untersuchung der Auswirkungen der vereinfachenden Annahmen bei den unterschiedlichen Modellierungsansätzen. In einer Zwischen-

zusammenfassung zu den Modellen der laminaren Filmströmungen stellen Killion und Garimella (2001) fest, dass viele der von ihnen zusammengetragenen Modelle nach wie vor von der thermischen Randbedingung einer isothermen oder adiabaten Wand ausgehen. Sie regen daher für den auslegenden Ingenieur die Erstellung eines hilfreicherer Modelles an, welches realistischere Wärmedurchgangsmodelle für die Wand verwendet. Im gleichen Abschnitt bezweifeln Killion und Garimella (2001) jedoch auch, dass sich die verfügbaren Modelle für den laminaren Rieselfilm aufgrund der sehr starken vereinfachenden Annahmen insbesondere bei der Hydrodynamik für die Auslegung von Absorbern eignen.

Daher müssen die mit den jeweiligen Modellansätzen und Lösungsverfahren erhaltenen theoretischen Ergebnisse mit verfügbaren und vergleichbaren experimentellen Ergebnissen kritisch hinterfragt und auf deren Gültigkeitsbereich hin untersucht werden. Killion und Garimella (2001) weisen auf die experimentelle Untersuchung lokaler Bedingungen in der Filmströmung als ein notwendiges Forschungsgebiet hin, um die theoretischen Modelle validieren zu können.

In der vorliegenden Arbeit wird ein analytisches Lösungsverfahren für den gekoppelten Wärme- und Stofftransport im laminaren Rieselfilm vorgestellt. Die Verwendung dieser analytischen Lösungsmethode beschränkt die physikalisch-mathematische Modellierung zwar deutlich in Bezug auf die Filmströmungsverhältnisse, ermöglicht jedoch die Anwendung einer Wärmedurchgangsrandbedingung, welche für die meisten technischen Anwendungen die realistischere Randbedingung ist. Aufgrund der wesentlich kürzeren Rechenzeiten im Vergleich zu komplexeren, numerischen Strömungssimulationen sind analytische Lösungen auch für ganze Prozesssimulationen und Parameterstudien mit moderaten Rechenzeiten geeignet.

Die dieser Arbeit zu Grunde liegenden mathematischen Modellgleichungen der Transportvorgänge im laminaren Rieselfilm sind dem Stand der Wissenschaft vorangestellt, da diese die Grundlage für sämtliche nachfolgenden Betrachtungen und Lösungsmethoden darstellen und dieser Aufbau einen nachfolgenden Vergleich zu den bisher veröffentlichten Modellen erleichtert. Die Herleitung dieser Modellgleichungen unter Anwendung der differentiellen Bilanzen der Erhaltungsgrößen veranschaulicht die getroffenen vereinfachenden Annahmen und wird daher ausführlich erläutert.

Im Anschluss an die Herleitung der Modellgleichungen wird insbesondere auf die Lösungsmethoden von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) und Grossman (1983) im Detail eingegangen, weil die von ihnen präsentierten Lösungen ausgehend von den gleichen, bzw. ähnlichen Modellgleichungen wie in dieser Arbeit erhalten wurden. Ziel dieser vergleichenden Darstellung der bisherigen mit der in dieser Arbeit präsentierten analytischen Lösung ist es, sowohl die mathematischen Unterschiede herauszuarbeiten, als auch Ähnlichkeiten dazu zu verwenden, um Probleme und Schwierigkeiten bei den bisherigen Lösungsverfahren zu erkennen und zu beheben (Meyer, 2014b).

Nach dieser detaillierten Darstellung erfolgt eine zusammenfassende Darstellung des Stands der Wissenschaft zur Modellbildung sowie zu den weiteren analytischen Lösungen des gekoppelten Wärme- und Stofftransportes im laminaren Rieselfilm. Anschließend wird das in dieser Arbeit verwendete analytische Lösungsverfahren ausführlich präsentiert. Die Ergebnisse der analytischen Lösung werden anhand sich entwickelnder Temperatur- und Massenanteilsprofile im Film sowie der aus diesen Profilverläufen ermittelten Wärme- und Massenstromdichten präsentiert.

Abschließend wird am Beispiel wässriger Lithiumbromidlösung, einem typischen Absorbens, die in dieser Arbeit erhaltene analytische Lösung dazu verwendet, Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten als Funktion typischer Steuergrößen im Experiment zu ermitteln. Diese werden anschließend mit experimentell bestimmten Werten verglichen.

Im Anhang sind sowohl kurze physikalische als auch mathematische Hintergründe, Herleitungen und Nebenrechnungen ausgelagert, die als notwendig erachtet wurden, den Lesefluss im Hauptteil der Arbeit jedoch unterbrechen würden. Aus diesem Grund wird an entsprechender Stelle im Hauptteil auf den Anhang verwiesen.



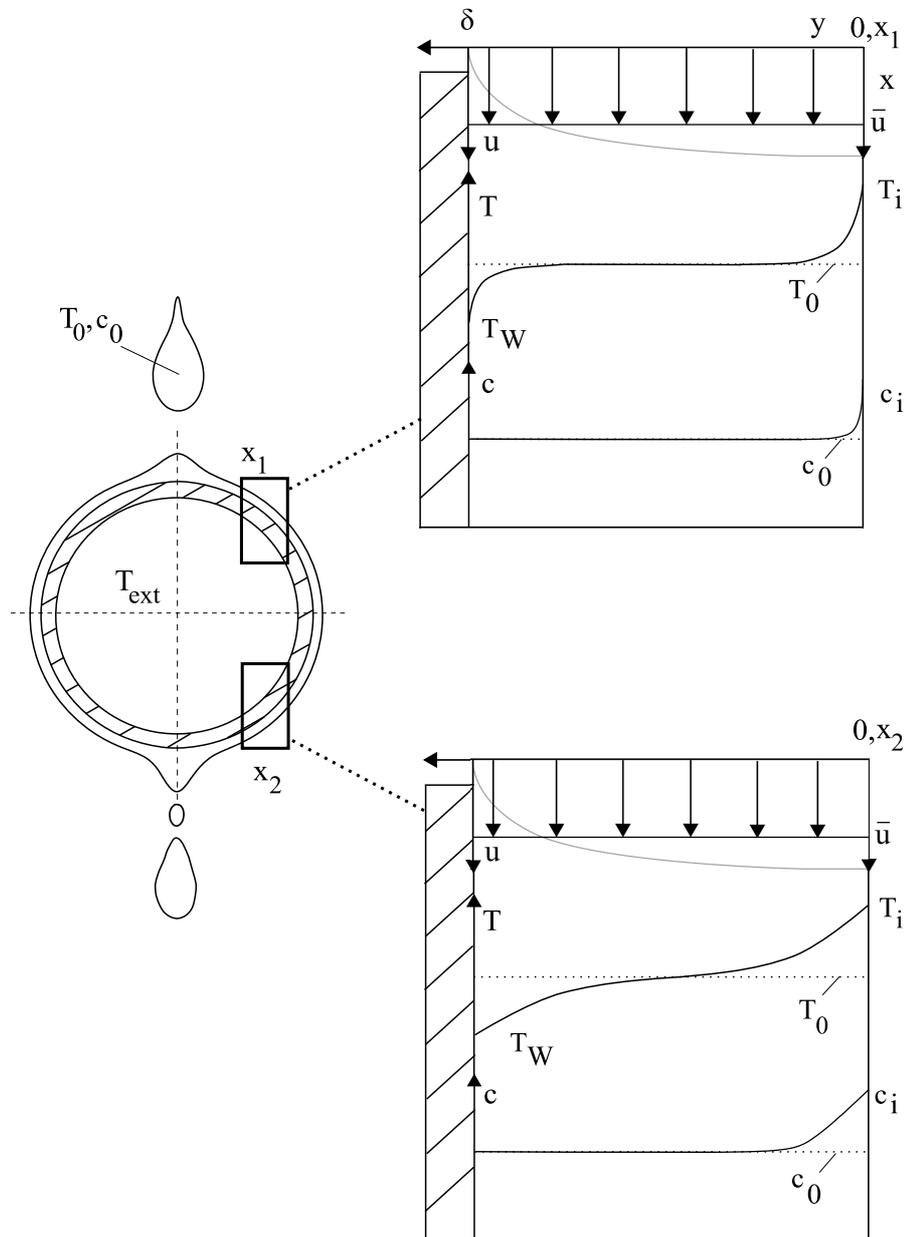
# Kapitel 2

## Modellierung

### 2.1 Modellvorstellung und Annahmen

Abbildung 2.1 zeigt schematisch eine typische technische Ausführung eines Dampfabsorptionsprozesses, z.B. in Absorptionkälteanlagen mit wässriger Lithiumbromidlösung als Arbeitsmedium. Ein Salzlösungstropfen mit dem Anfangswassermassenanteil  $c_0$  und der Anfangstemperatur  $T_0$  trifft auf das mit Kühlwasser durchströmte, horizontale Rohr. Die Salzlösung umströmt das Rohr als dünner Film. Während der Umströmung wird an der Filmoberfläche Dampf absorbiert und Absorptionswärme freigesetzt. Daher steigt, wie in Abb. 2.1 qualitativ dargestellt, der Wassermassenanteil  $c_i$  sowie die Temperatur  $T_i$  an der Oberfläche des Films. Sowohl die Wärme- als auch das absorbierte Wasser werden in den Film transportiert, d.h. das Temperatur- und Massenanteilprofil breiten sich mit zunehmender Strömungslänge  $x_2 > x_1$  ausgehend von der Filmoberfläche bei  $y = 0$  in den Film aus. Für den in Abb. 2.1 gezeigten Fall einer gekühlten Wand, gibt es aufgrund der niedrigeren Wandtemperatur  $T_W$  im Vergleich zur Filmeintrittstemperatur  $T_0$  für das Temperaturprofil eine weitere, sich ausgehend von der Wand mit steigender Filmströmungslänge in den Film ausbreitende Grenzschicht. Diese Transportvorgänge von Wärme und Stoff in den Film haben entscheidenden Einfluss auf die weitere Absorption von Dampf an der Oberfläche.

Anhand eines vereinfachten physikalisch-mathematischen Filmmodells und dessen analytischer Lösung werden im Rahmen dieser Arbeit die technischen Möglichkeiten, auf den Absorptionsprozess Einfluss zu nehmen, erörtert.



**Abbildung 2.1:** Schematische Darstellung des gekoppelten Wärme- und Stofftransportes im laminaren Rieselfilm mit den qualitativen Temperatur- und Massenanteilprofilen für zwei unterschiedliche Filmströmungskordinaten  $x_1 < x_2$

Die vereinfachenden Modellannahmen werden anhand der differentiellen Bilanzen der Erhaltungsgrößen im laminaren Rieselfilm eingeführt und veranschaulicht. Zu Beginn werden die Vereinfachungen in Bezug auf die Hydrodynamik anhand der differentiellen Impulsbilanz erläutert, um im Anschluss daran die differentielle Massen-, Komponenten- und Energiebilanz im Film aufzustellen. Die hier getroffenen Annahmen sind nicht speziell, sondern typisch für das Fachgebiet, wie in Kapitel 3 noch berichtet wird.

### 2.1.1 Impulsbilanz

Eine grundlegende und starke Vereinfachung ist die Verwendung kartesischer Koordinaten und die Betrachtung des Problems für eine ebene, vertikale, von Salzlösung überströmte Platte. Darüber hinaus werden konstante Stoffeigenschaften der Salzlösung vorausgesetzt.

Ganz allgemein ist der Geschwindigkeitsvektor des über diese ebene Wand strömenden Films abhängig von sämtlichen Raumkoordinaten und der Zeit  $\vec{u} = \mathbf{f}(x, y, z, t)$ . Die Änderung des Impulses in dem in Abbildung 2.2 gezeigten differentiellen, ortsfesten Bilanzvolumenelement mit der differentiellen Masse  $dm = \rho \cdot dx dy dz$  ergibt sich wie folgt:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d(dm \cdot \vec{u})}{dt} = \frac{d(dm)}{dt} \cdot \vec{u} + dm \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}. \quad (2.1)$$

Aufgrund der als konstant angenommenen Dichte  $\rho$  ändert sich die Masse des ortsfesten, differentiellen Volumenelements nicht, wodurch die zeitliche Ableitung der Masse  $d(dm)/dt$  verschwindet. Der Beschleunigungsvektor  $d\vec{u}/dt$  lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\frac{d\vec{u}(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}. \quad (2.2)$$

Es werden stationäre, d.h. zeitlich invariante Bedingungen vorausgesetzt, sodass die partielle Ableitung nach der Zeit verschwindet. Des Weiteren werden Konvektionsströme in  $z$ -Richtung, d.h. der Plattenbreite vernachlässigt,  $u_z = 0$ , weshalb die Ableitung nach dieser Raumrichtung ebenfalls entfällt.

Eine Änderung des Impulses wird durch die Summe der am differentiellen Fluidelement angreifenden Kräfte hervorgerufen:

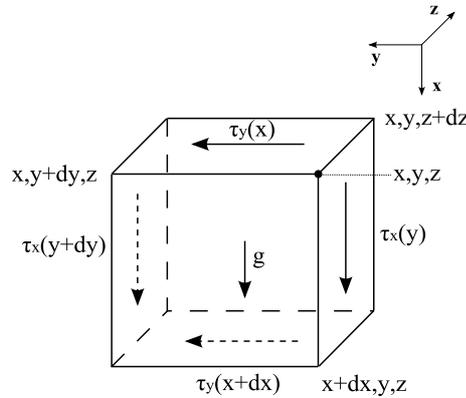
$$\overbrace{\rho \cdot dV}^{=dm} \cdot \left[ u_x \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right] = \sum d\vec{F}. \quad (2.3)$$

In Abbildung 2.2 sind die an diesem Bilanzvolumenelement angreifenden Kräfte dargestellt. Berücksichtigt werden dabei die Schwerkraft und die tangential angreifenden Schubspannungen. Jegliche Druckgradienten im Film werden vernachlässigt. Wie gewöhnlich wird der Impuls komponentenweise in den jeweiligen Raumrichtungen bilanziert. Die stationären Impulsbilanzen ergeben sich wie folgt:

$$x: \quad \rho \cdot dV \cdot \left[ u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = [\tau_x(y + dy) - \tau_x(y)] \cdot dx dz + \rho g \cdot dV, \quad (2.4)$$

$$y: \quad \rho \cdot dV \cdot \left[ u_x \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] = [\tau_y(x + dx) - \tau_y(x)] \cdot dy dz. \quad (2.5)$$

Die Approximation der austretenden Ströme mit Hilfe der Taylorreihe unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung ergibt die differentiellen Impulsbilanzen in  $x$  und  $y$ -Richtung.



**Abbildung 2.2:** Differentielles Impulsbilanzvolumenelement im laminaren Riesel-film

$$x: \quad u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + g, \quad (2.6)$$

$$y: \quad u_x \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Die Salzlösung wird als NEWTON'sches Fluid betrachtet und die Schubspannungen durch das entsprechende Gesetz mit  $\eta$  als dynamischer Viskosität be-

schrieben:

$$x: \quad \tau_x = \eta \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (2.8)$$

$$y: \quad \tau_y = \eta \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Die differentiellen Impulsbilanzen für den Film für die in Abbildung 2.2 dargestellten Kräfte lauten nach dem Einsetzen des Schubspannungsansatzes:

$$x: \quad u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + g, \quad (2.10)$$

$$y: \quad u_x \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}. \quad (2.11)$$

Die in (2.10) und (2.11) dargestellten differentiellen Impulsbilanzen in Strömungsrichtung  $x$  und quer zur Strömungsrichtung  $y$  stellen nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Für diese Form von Differentialgleichungen existieren keine allgemeinen analytischen Lösungsmethoden. Aus diesem Grund wird diese Form der Bewegungsgleichungen derzeit fast ausschließlich mit Hilfe numerischer Methoden gelöst, wie z.B. mittels Programmen zur Strömungssimulation.

An dieser Stelle werden weitere Vereinfachungen der in (2.10) und (2.11) gezeigten differentiellen Impulsbilanzen vorgestellt, um z.B. die von Nusselt (1923) für die Filmströmung am Berieselungskühler eingeführte analytische Lösung zu erläutern.

### Ausgebildete laminare Filmströmung nach Nusselt

Nusselt (1923) betrachtet die eindimensionale Rieselfilmströmung in Richtung der Schwerkraft (Gl. (2.10)). Dabei vernachlässigt er sämtliche Trägheitskräfte im Film, d.h. die linke Seite der Gleichung (2.10) und erhält die Filmströmung durch das Gleichgewicht der durch die Wand verursachten Reibungskräfte und der Schwerkraft. Folglich ergibt sich folgende gewöhnliche Differentialgleichung für die Filmgeschwindigkeit in Strömungsrichtung  $x$ :

$$0 = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + g. \quad (2.12)$$

Nusselt (1923) integrierte (2.12) zweimal und erhielt eine quadratische Gleichung in  $y$ -Richtung mit zwei noch zu bestimmenden Integrationskonstanten:

$$u_x(y) = -\frac{g}{\nu} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2. \quad (2.13)$$

Als Randbedingungen nimmt Nusselt (1923) verschwindende Schubspannungen an der Filmoberfläche  $y = 0$  sowie die Haftung des Fluids an der Wand ( $y = \delta$ ) an:

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad (2.14)$$

$$u_x(y = \delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{g}{\nu} \frac{\delta^2}{2}. \quad (2.15)$$

Als Ergebnis erhält Nusselt das ausgebildete Geschwindigkeitsprofil für den laminaren Rieselfilm:

$$u_x(y) = \frac{g}{\nu} \frac{\delta^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right). \quad (2.16)$$

Die sich unter diesen Bedingungen einstellende Filmdicke hängt vom auf der Breite der Wand  $B$  aufgegebenen Massenstrom an Salzlösung ab. Mit diesem bestimmte Nusselt (1923) über eine Integration über die noch unbekannte (Nusselt'sche) Filmdicke  $\delta$  ebendiese:

$$\dot{M}_{x=0} = \rho \cdot B \cdot \int_0^\delta u_x(y) dy = \rho \cdot B \cdot \frac{g}{\nu} \cdot \frac{\delta^3}{3}. \quad (2.17)$$

Die Filmdicke lässt sich somit aus der auf die Breite der Wand bezogenen Volumenstromberieselung  $\dot{\Gamma}_V$  und der kinematischen Viskosität der Salzlösung  $\nu$  bestimmen:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \nu}{g} \cdot \dot{\Gamma}_V} \quad \text{mit} \quad \dot{\Gamma}_V = \frac{\dot{M}_{x=0}}{\rho \cdot B} = \bar{u} \cdot \delta. \quad (2.18)$$

Somit sind die mittlere Filmgeschwindigkeit  $\bar{u}$  und die maximale Filmgeschwindigkeit  $u_{max}$  bestimmt:

$$\bar{u} = \frac{1}{3} \frac{g}{\nu} \delta^2, \quad (2.19)$$

$$u_{max} = u(y = 0) = \frac{1}{2} \frac{g}{\nu} \delta^2 = \frac{3}{2} \bar{u}. \quad (2.20)$$

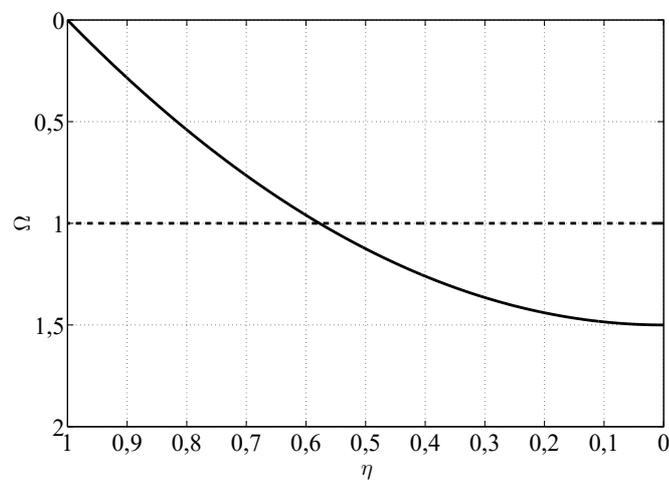
Vorgreifend auf folgende Kapitel zur Entdimensionierung wird die Nusselt'sche Geschwindigkeitsgleichung (2.16) durch Einführung entdimensionierter Variablen vereinfacht:

$$\eta = \frac{y}{\delta}, \quad (2.21)$$

$$\Omega = \frac{u(y)}{\bar{u}}, \quad (2.22)$$

$$\Omega(\eta) = \frac{3}{2} (1 - \eta^2). \quad (2.23)$$

Abbildung 2.3 zeigt den Verlauf der dimensionslosen Filmgeschwindigkeit  $\Omega$  aufgetragen über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$ . Die gestrichelte Linie bei  $\Omega = 1$  stellt die mittlere dimensionslose Filmgeschwindigkeit dar, da mit  $\bar{u}$  entdimensioniert wurde. Abbildung 2.3 ist gemäß dem in Abb. 2.1 eingeführten Koordinatensystem ausgerichtet. Auf der rechten Seite des Diagramms bei  $\eta = 0$  ( $y = 0$ ) befindet sich die freie Filmoberfläche, welche mit der maximalen Filmgeschwindigkeit strömt  $\Omega(\eta = 0) = 3/2$ . Auf der linken Seite des Diagramms bei  $\eta = 1$  befindet sich die Wand. Der Wandhaftungsbedingung zufolge beträgt die Filmgeschwindigkeit an dieser Stelle  $u(y = \delta) = 0$ , d.h.  $\Omega(\eta = 1) = 0$ .



**Abbildung 2.3:** Entdimensioniertes Geschwindigkeitsprofil der Rieselfilmströmung nach Nusselt (1923)

### Annahme einer konstanten mittleren Filmgeschwindigkeit $\bar{u}$

Wie in Abbildung 2.3 gut zu erkennen, führt die Annahme einer konstanten mittleren Filmgeschwindigkeit  $\bar{u}$  im Vergleich zum Nusselt'schen Geschwindigkeitsprofil zu einer Überschätzung der Filmgeschwindigkeit in Wandnähe und zu einer Unterschätzung an der Filmoberfläche. Dabei führt die Überschätzung der Filmgeschwindigkeit in der Nähe der Wand zu einer Verzerrung insbesondere des Wärmetransportes. Der konvektive Wärmetransport wird durch die Annahme einer konstanten Filmgeschwindigkeit in der Nähe der Wand überschätzt.

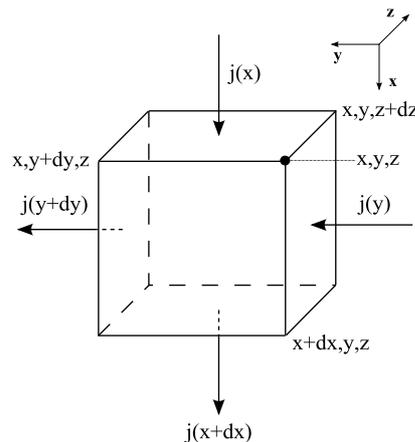
Nichtsdestotrotz wird aus Gründen der analytischen Lösbarkeit und der mathe-

matischen Stabilität der erhaltenen Lösungen die Annahme einer konstanten mittleren Filmgeschwindigkeit getroffen. Diese mittlere Filmgeschwindigkeit wird mittels der Gleichung (2.19) bestimmt und basiert daher auf Nusselt's Ansatz.

Mit dieser Annahme einhergehend ist die Invarianz des auf die Wand aufgegebenen Massenstroms sowie der Filmdicke  $\delta$  während des gesamten Absorptionsvorganges. Die vom Film absorbierte Masse wird durch die Annahme einer konstanten Filmgeschwindigkeit und damit auch Filmdicke inhärent vernachlässigt.

### 2.1.2 Bilanz normal über die Systemgrenzen transportierter Erhaltungsgrößen

Abbildung 2.4 zeigt ein differentielles Bilanzvolumenelement in der Filmströmung in kartesischen Koordinaten. Die Pfeile stellen hierbei die Stromdichten



**Abbildung 2.4:** Differentielles Bilanzvolumenelement im laminaren Rieselfilm in kartesischen Koordinaten für normal über die Systemgrenzen transportierte Erhaltungsgrößen

einer beliebigen Erhaltungsgröße dar, welche normal über die Systemgrenzen transportiert wird. Wie bereits bei der differentiellen Impulsbilanz erläutert, wird das Problem als zweidimensional betrachtet und alle Ströme in Filmbreite vernachlässigt. Unter Voraussetzung stationärer Verhältnisse wird die Erhaltungsgröße  $j$ , z.B. Masse oder Energie, bilanziert:

$$0 = [j(x) - j(x + dx)] \cdot dydz + [j(y) - j(y + dy)] \cdot dx dz. \quad (2.24)$$

Mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung, unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung, werden die jeweiligen Austrittsströmlichkeiten approximiert:

$$j(x + dx) = j(x) + \frac{\partial j}{\partial x} \cdot dx, \quad (2.25)$$

$$j(y + dy) = j(y) + \frac{\partial j}{\partial y} \cdot dy. \quad (2.26)$$

Werden die so approximierten Austrittsströmlichkeiten in die Bilanz (2.24) eingeführt, ergibt sich eine stationäre Bilanzformel für Erhaltungsgrößen, welche normal, d.h. vertikal in das Bilanzelement strömen:

$$0 = -\frac{\partial j_x}{\partial x} - \frac{\partial j_y}{\partial y}. \quad (2.27)$$

Eine Änderung der Strömlichkeiten in  $x$ -Richtung wird durch eine gleich große, entgegengesetzte Strömänderung in  $y$ -Richtung ausgeglichen, weil eine Akkumulation der Erhaltungsgröße im Bilanzraum aufgrund der Stationarität ausgeschlossen ist.

### 2.1.3 Gesamtmassenbilanz

Unter Verwendung der für den Rieselfilm unter diesen Bedingungen im ortsfesten Bezugssystem allgemeinen stationären Bilanzformel (2.27) werden die jeweiligen Massenstromdichten formuliert. Der Gesamtlösungsmassenstrom erfolgt konvektiv, d.h. für die Massenstromdichte der jeweiligen Raumrichtung ergibt sich:

$$\dot{j}_{m,x} = \rho \cdot u_x, \quad (2.28)$$

$$\dot{j}_{m,y} = \rho \cdot u_y. \quad (2.29)$$

Da die Dichte als konstant betrachtet wird, bleiben lediglich die Ableitungen der Filmgeschwindigkeiten als differentielle Gesamtmassenbilanz übrig:

$$0 = -\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (2.30)$$

Da wie oben erläutert von einer konstanten, homogenen Strömungsgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung ausgegangen wird, verschwindet die Ableitung  $\partial u_x / \partial x$  und somit auch die Ableitung  $\partial u_y / \partial y$ .

### 2.1.4 Komponentenbilanz

Der Massenstrom einer Komponente über die Systemgrenze kann einerseits konvektiv, andererseits diffusiv (Vgl. A.1) erfolgen. Im Folgenden wird  $c$  als der Massenanteil des Absorbats in Bezug auf die Gesamtmasse der Salzlösung verwendet:

$$c = \frac{m_{\text{Absorbat}}}{m_{\text{Lsg,ges}}}. \quad (2.31)$$

Die Transportgesetze für die Massenstromdichte an Absorbat über die Systemgrenzen lauten demnach:

$$j_{A,x} = j_{A,x,\text{konvektiv}} + j_{A,x,\text{diffusiv}} = \rho \cdot \left( u_x \cdot c(x, y) - D \cdot \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} \right), \quad (2.32)$$

$$j_{A,y} = j_{A,y,\text{konvektiv}} + j_{A,y,\text{diffusiv}} = \rho \cdot \left( u_y \cdot c(x, y) - D \cdot \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \right). \quad (2.33)$$

Wie in Abschnitt 2.1.3 beschrieben, wird von einer homogenen, konstanten Filmgeschwindigkeit  $u_x = \bar{u}$  ausgegangen und die transversale Filmgeschwindigkeit vernachlässigt  $u_y = 0$ . Des Weiteren wird der diffusive Massentransport in Strömungsrichtung  $x$  im Vergleich zum konvektiven vernachlässigt:

$$u_x \cdot c(x, y) \gg -D \frac{\partial c(x, y)}{\partial x}. \quad (2.34)$$

Werden die so vereinfachten Transportgesetze in (2.27) eingesetzt, ergibt sich die differentielle Komponentenbilanz des Absorbats im Film zu:

$$\bar{u}_x \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (2.35)$$

### 2.1.5 Energiebilanz

Der Energietransport im Film erfolgt sowohl konvektiv als auch konduktiv durch Wärmeleitung. Somit lauten die Energiestromdichten für die jeweilige Raumrichtung:

$$j_{E,x} = j_{E,x,\text{konvektiv}} + j_{E,x,\text{konduktiv}} = \rho \cdot \left( u_x \cdot h(T(x, y), c(x, y)) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2.36)$$

$$j_{E,y} = j_{E,y,\text{konvektiv}} + j_{E,y,\text{konduktiv}} = \rho \cdot \left( u_y \cdot h(T(x, y), c_p(x, y)) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (2.37)$$

Die Salzlösung wird als reine, ideale Flüssigkeit betrachtet und deren spezifische Enthalpie  $h$  deshalb über die Zustandsgleichung der reinen, idealen Flüssigkeit bestimmt und Mischungseffekte vernachlässigt. Unter der Annahme konstanten Drucks im Film ergibt sich die Enthalpie der reinen, idealen Flüssigkeit als Funktion der Temperatur mit  $c_p$  als der spezifischen Wärmekapazität der Salzlösung:

$$dh = c_p \cdot dT + \underbrace{v \cdot dp}_{=0}. \quad (2.38)$$

Aufgrund der nicht vorhandenen transversalen Geschwindigkeit  $u_y = 0$  entfällt wiederum der konvektive Energietransport in  $y$ -Richtung. Die Wärmeleitung in Strömungsrichtung  $x$  wird gegenüber dem konvektiven Energietransport vernachlässigt:

$$u_x \cdot h(T(x, y), c(x, y)) \gg -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.39)$$

Durch Einsetzen der so vereinfachten Energiestromdichten in (2.27) ergibt sich folgende differentielle Energiebilanz:

$$\bar{u}_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\underbrace{\rho \cdot c_p}_{=a}} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.40)$$

### Zusammenfassung der Modellannahmen

Das in dieser Arbeit untersuchte physikalische Filmmmodell entspricht dem von Nakoryakov et al. (1997). Es wird eine über die transversale Koordinate  $y$  konstante, mittlere Filmströmungsgeschwindigkeit  $\bar{u}$  angenommen. In transversaler Richtung wird ausschließlich molekularer Transport in Form von Diffusion und Wärmeleitung berücksichtigt. In der Filmströmungsrichtung wird ausschließlich konvektiver Stoff- und Energietransport betrachtet.

## 2.2 Entdimensionierung der Modellgleichungen

Die Einführung dimensionsloser Variablen wird üblicherweise zur Reduktion der Anzahl der unabhängigen Parameter des Problems verwendet.

Die hier verwendeten Definitionen der dimensionslosen Größen (2.41),(2.42) wurden von Nakoryakov et al. (1997) sowie (2.43),(2.44) von Grossman (1983)

übernommen, weil die Entdimensionierung mit der Temperatur  $T_0$  und dem Absorbatmassenanteil  $c_0$  am Eintritt der Salzlösung sich insbesondere für die Lösung im LAPLACE-Bereich als vorteilhaft erweisen:

$$\eta = \frac{y}{\delta}, \quad (2.41)$$

$$\xi = \frac{x}{\delta} \frac{a}{\bar{u}\delta} = \frac{x}{\delta} \frac{\lambda}{\bar{u}\delta\rho c_p} = \frac{x/\dot{w}}{\delta/\lambda} \quad \text{mit} \quad \dot{w} = \bar{u}\delta\rho c_p = \dot{\Gamma} \cdot c_p, \quad (2.42)$$

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{eq,0} - T_0}, \quad (2.43)$$

$$\gamma = \frac{c - c_0}{c_{eq,0} - c_0}. \quad (2.44)$$

In (2.41) ist die dimensionslose Filmdickenkoordinate  $\eta$  definiert und sie variiert zwischen 0 an der Filmoberfläche und 1 an der Wand. Die in (2.42) dargestellte dimensionslose Koordinate  $\xi$  in Strömungsrichtung  $x$  charakterisiert den Grad der Ausbildung des Temperaturprofils im Film an der entsprechenden Stelle  $x$ . Sie kann als das Verhältnis von konvektivem  $x/\dot{w}$  zu diffusivem  $\delta/\lambda$  thermischen Widerstand aufgefasst werden. Die Größe  $\dot{w}$  entspricht dabei einem auf die angeströmte Plattenbreite bezogenen, spezifischen Wärmekapazitätsstrom. Dabei variiert  $\xi$  von 0 am Beginn des Rieselfilms ( $x = 0$ ) bis  $\infty$  bei unendlicher Länge des Rieselfilms ( $x \rightarrow \infty$ ). Für berieselte Horizontalrohre liegen die Werte für  $\xi$  beim Abtropfen der Salzlösung typischerweise im Bereich von 0,1 bis 10.

Für die Entdimensionierung der Temperatur und des Absorbatmassenanteils werden Gleichgewichtszustände der Salzlösung benötigt. In dieser Arbeit wird der gleiche Ansatz wie bei Nakoryakov et al. (1997) einer linearen Approximation der isobaren Siedetemperatur als Funktion des Absorbatmassenanteils zur Beschreibung des Phasengleichgewichtes verwendet:

$$T_{eq} = A - B \cdot c_{eq}. \quad (2.45)$$

Je höher der Absorbatmassenanteil  $c_{eq}$  ist, desto geringer ist die zugehörige Siedetemperatur  $T_{eq}$ . Im Kapitel 6 dieser Arbeit wird diese Approximation diskutiert. Für moderate Salzlösungsunterkühlungen stellt sich diese Approximation als gute Näherung heraus (Meyer und Ziegler, 2014).

Die dimensionslose Temperatur  $\Theta$  wird als Verhältnis zweier Temperaturdifferenzen gebildet. Der Zähler in (2.43) stellt die Differenz der jeweiligen Tem-

peratur zur Eintrittstemperatur dar, welche ins Verhältnis mit einer Referenztemperaturdifferenz gesetzt wird. In gleicher Weise wird auch der Wassermassenanteil  $c$  in (2.44) entdimensioniert.

Die Temperaturdifferenz im Nenner von (2.43) stellt die Unterkühlung bzw. Überhitzung bei der jeweiligen Eintrittszusammensetzung dar. Dabei ist  $T_{eq,0}$  die zum Eintrittswassermassenanteil  $c_0$  zugehörige Gleichgewichtstemperatur. Dies gilt in gleicher Weise für den Nenner des dimensionslosen Absorbatmassenanteils. Für diese Gleichgewichtswerte ergibt sich entsprechend:

$$T_{eq,0} = A - B \cdot c_0, \quad (2.46)$$

$$c_{eq,0} = \frac{A - T_0}{B}, \quad (2.47)$$

mit  $A$  und  $B$  als anzupassenden Parametern.

Die im vorigen Abschnitt 2.1 erhaltenen Differentialgleichungen gehen durch Einführung der vorgestellten dimensionslosen Variablen in folgende Form über:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = \frac{1}{Le} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \eta^2}. \quad (2.49)$$

An dieser Stelle taucht die Lewis-Zahl (2.50) in der entdimensionierten Differentialgleichung des Absorbatmassenanteils als Verhältnis der Temperaturleitfähigkeit  $a$  und dem Diffusionskoeffizienten  $D$  auf:

$$Le = \frac{a}{D}. \quad (2.50)$$

Mit der analytischen Lösung dieser dimensionslosen partiellen Differentialgleichungen für den Wärme- und Stofftransport im laminaren Rieselfilm beschäftigten sich erstmals Grigor'eva und Nakoryakov (1977). Dieser Lösungsansatz, in der neueren Fassung von Nakoryakov et al. (1997), wird im folgenden Abschnitt vor der Zusammenfassung des Standes der Wissenschaft im Detail dargestellt.



## Kapitel 3

### Stand der Wissenschaft

In diesem Kapitel wird eine Auswahl der bisher in der Literatur veröffentlichten Modelle und Methoden für die Lösung des gekoppelten Wärme- und Stofftransportes im absorbierenden, laminaren Fallfilm vorgestellt. Grundsätzlich lassen sich analytische und numerische Lösungsmethoden unterscheiden. Die numerischen Methoden erlauben dabei wesentlich komplexere physikalische Modelle als die analytischen Methoden und haben sich daher und aufgrund der vergleichsweise günstigen Verfügbarkeit von Rechenkapazität in den vergangenen Jahren durchgesetzt. Nichtsdestotrotz haben auch analytische Ansätze ihre Berechtigung, z.B. in der Lehre und, wegen der sehr kurzen Rechenzeiten, zur Validierung neuer numerischer Lösungsverfahren oder als Referenzfall für numerische Parameterstudien. Die Möglichkeit der Verwendung einer den gesamten Filmströmungsbereich umfassenden analytischen Lösung als Baustein in einer Prozesssimulation wurde bereits in der Einleitung als Vorteil analytischer Lösungen erwähnt.

Es ist demnach nicht überraschend, dass sich je nach Zielstellung, Modellierungstiefe sowie abhängig von dem gewählten Lösungsverfahren zahlreiche Veröffentlichungen zu diesem Thema finden. In diesem Kapitel wird zu Beginn auf andere analytische Lösungsmethoden sehr detailliert eingegangen, da sowohl deren physikalische Modellgleichungen denen in dieser Arbeit gleichen (Nakoryakov et al., 1997) bzw. stark ähneln (Grossman, 1983).

## 3.1 Lösungsmethoden von Grigor'eva und Nakoryakov

### 3.1.1 Fourier-Methode

Grigor'eva und Nakoryakov (1977) veröffentlichten das erste analytische Modell für den gekoppelten Wärme- und Stofftransport im laminaren Fallfilm unter Verwendung der FOURIER-Methode. Die folgenden Ausführungen stellen eine Zusammenfassung dieser Arbeit sowie der neueren Veröffentlichungen von Nakoryakov et al. (1997) und Nakoryakov und Grigor'eva (2010) dar. Sämtliche Größen aus diesen Quellen werden an die in dieser Arbeit verwendeten dimensionslosen Größen angepasst. Des Weiteren werden aus Gründen der Nachvollziehbarkeit für den Leser weitere Zwischen- und Umrechnungsschritte eingefügt, welche in den Veröffentlichungen womöglich aus Platzgründen fehlen. Das grundsätzliche Vorgehen bei der hier angewandten FOURIER-Methode sowie einige Eigenschaften der mit dieser Methode erhaltenen Lösungen finden sich im mathematischen Anhang B.1.

Die dem Problem zu Grunde liegenden Annahmen und die sich daraus ergebenden dimensionslosen, partiellen Differentialgleichungen wurden im vorangegangenen Abschnitt aus den differentiellen Bilanzen für Impuls, Stoff und Energie hergeleitet.

Mit Hilfe des Separationsansatzes werden diese partiellen Differentialgleichungen in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt.

#### Separationsansatz

Die Einführung eines Produktansatzes für die dimensionslose Temperatur und den dimensionslosen Massenanteil ermöglicht die Trennung der Variablen:

$$\Theta(\xi, \eta) = F(\xi) \cdot G(\eta), \quad (3.1)$$

$$\gamma(\xi, \eta) = K(\xi) \cdot L(\eta). \quad (3.2)$$

Diese Produktansätze (3.1) und (3.2) werden jeweils in die partiellen Differentialgleichungen (2.48) und (2.49) eingesetzt. Es ergibt sich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche über konstante Zahlenwerte, die so

genannten Eigenwerte  $k_\Theta$  und  $k_\gamma$ , miteinander verknüpft sind:

$$\frac{1}{F(\xi)} \frac{dF(\xi)}{d\xi} = -k_\Theta^2 = \frac{1}{G(\eta)} \frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2}, \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{K(\xi)} \frac{dK(\xi)}{d\xi} = -k_\gamma^2 = \frac{1}{\text{Le} \cdot L(\eta)} \frac{d^2L(\eta)}{d\eta^2}. \quad (3.4)$$

Auf der linken Seite von (3.3) und (3.4) befinden sich die nur von der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  abhängigen Funktionen und Ableitungen dieser Funktionen. Die von der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  abhängigen Funktionen und deren Ableitungen befinden sich demzufolge auf der rechten Seite von (3.3) und (3.4).

Die formalen Lösungen der von der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  abhängigen Differentialgleichungen lauten:

$$F(\xi) = C_1 \cdot e^{-k_\Theta^2 \cdot \xi}, \quad (3.5)$$

$$K(\xi) = C_2 \cdot e^{-k_\gamma^2 \cdot \xi}. \quad (3.6)$$

Ein Sonderfall ergibt sich für  $k_\Theta = k_\gamma = 0$ , für den sich die Exponentialfunktionen in (3.5) und (3.6) unabhängig von  $\xi$  zu 1 ergeben. Dieser Fall repräsentiert den asymptotischen Endzustand des Problems.

Es ist auch ersichtlich aus welchem Grund die negativen Quadrate der Eigenwerte  $-k_\Theta^2$  und  $-k_\gamma^2$  für den Separationsansatz verwendet werden. Damit ist sichergestellt, dass für jeden reellwertigen Eigenwert die Exponentialfunktionen abklingen, was aus physikalischer Sicht zu fordern ist.

Dies führt auf der anderen Seite der Gleichungen (3.3) und (3.4) zu konjugiert-komplexen Nullstellen bei der Lösung der von der Filmdickenkoordinate  $\eta$  abhängigen Differentialgleichungen mit Hilfe des EULER-Ansatzes:

$$G(\eta) = C_3 \cdot e^{ik_\Theta \cdot \eta} + C_4 \cdot e^{-ik_\Theta \cdot \eta}, \quad (3.7)$$

$$L(\eta) = C_5 \cdot e^{ik_\gamma \cdot \sqrt{\text{Le}} \cdot \eta} + C_6 \cdot e^{-ik_\gamma \cdot \sqrt{\text{Le}} \cdot \eta}. \quad (3.8)$$

Unter Verwendung der EULER-Gleichung werden die Exponentialfunktionen mit komplexen Argumenten in eine trigonometrische Form überführt:

$$G(\eta) = \overbrace{(C_3 + C_4)}^{=C_3^*} \cdot \cos(k_\Theta \eta) + i \cdot \overbrace{(C_3 - C_4)}^{=C_4^*} \cdot \sin(k_\Theta \eta), \quad (3.9)$$

$$L(\eta) = \overbrace{(C_5 + C_6)}^{=C_5^*} \cdot \cos(k_\gamma \sqrt{\text{Le}} \eta) + i \cdot \overbrace{(C_5 - C_6)}^{=C_6^*} \cdot \sin(k_\gamma \sqrt{\text{Le}} \eta). \quad (3.10)$$

Mit Hilfe der zwei Eintrittsbedingungen und vier Randbedingungen können die Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_6^*$  bestimmt werden. Aufgrund der ebenfalls unbekanntem Eigenwerte  $k_\Theta$  und  $k_\gamma$  bedarf es zusätzlicher Hilfsbeziehungen. An dieser Stelle werden die von Nakoryakov et al. (1997) verwendeten Eintritts- und Randbedingungen für den Fall der isothermen Wand eingeführt.

### Rand- und Eintrittsbedingungen

Für den Fall der isothermen Wand ist es bei der FOURIER-Methode notwendig, die dimensionslose Temperatur mit der Differenz zur konstanten Wandtemperatur zu definieren im Gegensatz zu der in dieser Arbeit verwendeten Differenz zur Eintrittstemperatur (2.43):

$$\Theta_{Nak} = \frac{T - T_W}{T_{eq,0} - T_0} = \Theta - \Theta_W. \quad (3.11)$$

Dies ist notwendig, damit die dimensionslose Wandtemperatur für alle Werte von  $\xi$  verschwindet, was zum einen vorteilhaft bei der Vereinfachung der formalen Lösung des Temperaturfeldes ist, zum anderen jedoch zwingend erforderlich ist für die Anwendung der am Ende dieses Abschnitts eingeführten Orthogonalitätsbeziehung.

Des Weiteren definieren Nakoryakov et al. (1997) anders als in dieser Arbeit die transversale Koordinate  $\eta_{Nak}$  ausgehend von der Wand  $\eta_{Nak} = 0$  zur freien Filmoberfläche  $\eta_{Nak} = 1$  zeigend, d.h.  $\eta_{Nak} = 1 - \eta$ . Die Randbedingung der isothermen Wand vereinfacht sich demnach zu:

$$\Theta_{Nak,W}(\xi, \eta_{Nak} = 0) = \frac{T_W - T_W}{T_{eq,0} - T_0} = 0. \quad (3.12)$$

Die Wand wird als impermeabel betrachtet und somit verschwinden sämtliche Stoffgradienten an der Wand:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta}(\xi, \eta_{Nak} = 0) = 0. \quad (3.13)$$

Wie in Kap. 2.1 vorgestellt, führen Grigor'eva und Nakoryakov (1977) an der Filmoberfläche eine lineare Approximation der isobaren Siedetemperaturverminderung  $T_i$  in Abhängigkeit von dem Absorbatmassenanteil  $c_i$  in der Salzlösung zur Beschreibung des thermodynamischen Gleichgewichts ein:

$$T_i = A - B \cdot c_i. \quad (3.14)$$

Für die Entdimensionierung werden mit  $T_{eq,0}$  und  $c_{eq,0}$  ebenfalls Gleichgewichtswerte verwendet:

$$T_{eq,0} = A - B \cdot c_0, \quad (3.15)$$

$$c_{eq,0} = \frac{A - T_0}{B}. \quad (3.16)$$

Die Entdimensionierung von (3.14) unter Berücksichtigung des linear approximierten Phasengleichgewichts ergibt somit folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \Theta_i &= \frac{T_i - T_0}{A - B \cdot c_0 - T_0} = \frac{A - B \cdot c_i - T_0}{A - B \cdot c_0 - T_0} = \frac{\frac{A-T_0}{B} - c_i}{\frac{A-T_0}{B} - c_0} \\ &= \frac{c_{eq,0} - c_i}{c_{eq,0} - c_0} = \frac{c_{eq,0} - c_i + c_0 - c_0}{c_{eq,0} - c_0} = 1 - \frac{c_i - c_0}{c_{eq,0} - c_0} = 1 - \gamma_i. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Mit der von Nakoryakov et al. (1997) verwendeten Definition für die dimensionslose Temperatur  $\Theta_{Nak} = \Theta - \Theta_W$  geht (3.17) in folgende dimensionslose Form für das linearisierte Phasengleichgewicht an der Stelle  $\eta_{Nak} = 1$  über:

$$\Theta_{Nak,i} + \Theta_W = 1 - \gamma_i. \quad (3.18)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird  $\Theta_W$  im Folgenden mit der negativen dimensionslosen Eintrittstemperatur  $-\Theta_{Nak,0}$  bezeichnet, d.h. dies entspricht der Eintrittsbedingung für die Temperatur bei  $\xi = 0$  im Modell von Nakoryakov et al. (1997):

$$\Theta_{Nak,0} = \Theta_{Nak}(\xi = 0, \eta_{Nak}) = \frac{T_0 - T_W}{T_{eq,0} - T_0} = -\Theta_W. \quad (3.19)$$

Der dimensionslose Absorbatmassenanteil wird dagegen mit der Differenz zum Eintrittsmassenanteil gebildet. Aus diesem Grund ergibt sich der dimensionslose Massenanteil am Eintritt zu Null:

$$\gamma_0 = \gamma(\xi = 0, \eta_{Nak}) = \frac{c_0 - c_0}{c_{eq,0} - c_0} = 0. \quad (3.20)$$

Durch eine Energiebilanz verknüpfen Grigor'eva und Nakoryakov (1977) den Temperatur- und Stoffgradienten an der Oberfläche des Films:

$$-\dot{m}_{abs} \cdot \Delta h_{abs} = \lambda \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\delta}, \quad (3.21)$$

$$\dot{m}_{abs} = -\rho \cdot D \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=\delta}. \quad (3.22)$$

Aufgrund der Modellannahmen wird das Absorbat rein diffusiv und die bei der Absorption freigesetzte Absorptionswärme ausschließlich durch Wärmeleitung von der Filmoberfläche in den Film transportiert.

In dimensionsloser Form lautet die Energiebilanz an der Phasengrenzfläche:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta}(\xi, \eta_{Nak} = 1) = \text{Le} \cdot \tilde{\text{St}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\xi, \eta_{Nak} = 1), \quad (3.23)$$

$$\text{mit } \text{Le} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p \cdot D} = \frac{a}{D} \quad (3.24)$$

$$\text{und } \tilde{\text{St}} = \frac{c_p \cdot (T_{eq,0} - T_0)}{\Delta h_{abs} \cdot (c_{eq,0} - c_0)}. \quad (3.25)$$

In (3.23) wurde mit der spezifischen Wärmekapazität  $c_p$  erweitert, um den Zusammenhang mit den bekannten dimensionslosen Kenngrößen, d.h. der Lewis-Zahl  $\text{Le}$  und einer modifizierten Stefan-Zahl  $\tilde{\text{St}}$  in Anlehnung an Ziegler (2010) zu erhalten. Die modifizierte Stefan-Zahl setzt die spezifische Wärmekapazität der Salzlösung  $c_p$  ins Verhältnis zur Absorptionsenthalpie  $\Delta h_{abs}$  multipliziert mit dem Verhältnis einer Temperaturdifferenz zu einer Massenanteilsdifferenz, welche jeweils die Phasengleichgewichtswerte  $T_{eq,0}$  und  $c_{eq,0}$  enthalten und sich mittels des linear approximierten Phasengleichgewichts folgendermaßen vereinfacht:

$$\frac{T_{eq,0} - T_0}{c_{eq,0} - c_0} = \frac{A - B \cdot c_0 - T_0}{\frac{A - T_0}{B} - c_0} = B, \quad (3.26)$$

$$\tilde{\text{St}} = \frac{c_p \cdot B}{\Delta h_{abs}}. \quad (3.27)$$

Somit stellt die modifizierte Stefan-Zahl im Gegensatz zur Lewis-Zahl eine Kenngröße dar, welche lediglich thermodynamische Parameter und keine Transportparameter enthält.

### Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte für die isotherme Wand

Die Randbedingungen an der Wand wurden von Nakoryakov et al. (1997) so definiert, dass sich die dimensionslose Wandtemperatur sowie der Stoffgradient an der Wand zu Null ergibt, um jeweils eine der Winkelfunktionen aus den formalen Lösungen für die Filmdickenkoordinate  $\eta_{Nak}$  in (3.9) und (3.10) auszuschließen und somit jeweils eine Integrationskonstante bestimmen zu kön-

nen:

$$\Theta_{Nak}(\xi, \eta_{Nak} = 0) = 0 \Rightarrow C_3^* = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta}(\xi, \eta_{Nak} = 0) = 0 \Rightarrow C_6^* = 0. \quad (3.29)$$

Somit bleibt:

$$G_n(\eta_{Nak}) = C_4^* \cdot \sin(k_{\Theta,n} \eta_{Nak}) = C_4^* \cdot g_n(\eta_{Nak}), \quad (3.30)$$

$$L_n(\eta_{Nak}) = C_5^* \cdot \cos(k_{\gamma,n} \sqrt{L} \eta_{Nak}) = C_5^* \cdot l_n(\eta_{Nak}). \quad (3.31)$$

Außer für die später noch eingeführte Orthogonalitätsbeziehung ist demnach auch für diese Vereinfachung der trigonometrischen Funktionen die verschwindende Wandtemperatur erforderlich. Da es sich bei den formalen Lösungen in transversaler Koordinatenrichtung (3.30) und (3.31) um periodische Winkel-funktionen handelt, gibt es eine unendliche Anzahl von Eigenwerten, welche die Differentialgleichungen erfüllen.

Die formale Lösung des Temperatur- und des Absorbatmassenanteilprofils ergibt sich demnach als Superposition der Eigenfunktionen  $G_n, L_n$  für die in jeder Periode als Lösung des Problems identifizierten Eigenwerte  $k_{\Theta,n}, k_{\gamma,n}$ . Für alle Eigenwerte  $k_{\Theta,n} = k_{\gamma,n} \neq 0$  ergeben sich folgende unendliche Reihen für die Temperatur und den Absorbatmassenanteil:

$$\Theta_{Nak}(\xi, \eta_{Nak})_{k_{\Theta} \neq 0} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-k_{\Theta,n}^2 \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{C_{1,n}^* C_{4,n}^*}^{=C_{1,n}^*} \cdot \sin(k_{\Theta,n} \eta_{Nak}) e^{-k_{\Theta,n}^2 \xi}, \quad (3.32)$$

$$\gamma(\xi, \eta_{Nak})_{k_{\gamma} \neq 0} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n e^{-k_{\gamma,n}^2 \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_{2,n} C_{5,n}^*}_{=C_{2,n}^*} \cos(k_{\gamma,n} \sqrt{L} \eta_{Nak}) e^{-k_{\gamma,n}^2 \xi}. \quad (3.33)$$

Als Lösung der von der transversalen Koordinate abhängigen gewöhnlichen Differentialgleichungen ergibt sich eine Geradengleichung für  $k = 0$ :

$$G(\eta_{Nak})_{k_{\Theta}=0} = G_0 = C_{3,0} \cdot \eta_{Nak} + C_{4,0}, \quad (3.34)$$

$$L(\eta_{Nak})_{k_{\gamma}=0} = L_0 = C_{5,0} \cdot \eta_{Nak} + C_{6,0}. \quad (3.35)$$

Nach dem Ansatz (3.1) und (3.2) lautet die formale Lösung für  $\xi \rightarrow \infty$ :

$$\Theta_{Nak}(\xi \rightarrow \infty, \eta_{Nak}) = C_{1,0} \cdot (C_{3,0} \cdot \eta_{Nak} + C_{4,0}) = C_{3,0}^* \cdot \eta_{Nak} + C_{4,0}^*, \quad (3.36)$$

$$\gamma(\xi \rightarrow \infty, \eta_{Nak}) = C_{2,0} \cdot (C_{5,0} \cdot \eta_{Nak} + C_{6,0}) = C_{5,0}^* \cdot \eta_{Nak} + C_{6,0}^*. \quad (3.37)$$

Für genügend große Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi_\infty$  wird der Film die vorgegebene Wandtemperatur und den nach dem Phasengleichgewicht zu dieser Temperatur zugehörigen Absorbatmassenanteil annehmen:

$$\Theta_{Nak}(\xi \rightarrow \infty, \eta_{Nak}) = \Theta_{Nak,W} = 0 \Rightarrow C_{3,0}^* = C_{4,0}^* = 0, \quad (3.38)$$

$$\gamma(\xi \rightarrow \infty, \eta_{Nak}) = 1 + \Theta_{Nak,0} \Rightarrow C_{5,0}^* = 0 \text{ und } C_{6,0}^* = 1 + \Theta_{Nak,0}. \quad (3.39)$$

Die Überlagerung aus der stationären  $\xi$ -unabhängigen und der periodischen  $\xi$ -abhängigen Lösung ergibt die vollständige formale Lösung mit den noch unbekanntem Eigenwerten und je einer unbekanntem Integrationskonstanten pro Eigenwert:

$$\Theta_{Nak}(\xi, \eta_{Nak}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1,n}^* \cdot \sin(k_{\Theta,n} \eta_{Nak}) e^{-k_{\Theta,n}^2 \xi}, \quad (3.40)$$

$$\gamma(\xi, \eta_{Nak}) = 1 + \Theta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2,n}^* \cos(k_{\gamma,n} \sqrt{Le} \eta_{Nak}) e^{-k_{\gamma,n}^2 \xi}. \quad (3.41)$$

Nakoryakov et al. (1997) subtrahieren in (3.41) den periodischen Anteil von dem stationären Anteil  $1 + \Theta_{Nak,0}$ , weil sich dies im weiteren Verlauf als hilfreich bei der Eliminierung der Integrationskonstanten erweist. Das ist ohne Weiteres möglich, da die Werte der Integrationskonstanten  $C_{2,n}^*$  bisher noch nicht determiniert sind.

Unter Verwendung der Randbedingungen an der Phasengrenzfläche werden die formalen Lösungen für die Temperatur (3.40) und den Massenanteil (3.41) miteinander verknüpft. Nakoryakov et al. (1997) setzen für ihre Lösung voraus, dass die Randbedingungen an der Phasengrenzfläche gliedweise, d.h. für jeden Eigenwert erfüllt werden. Mit dieser Voraussetzung geht einher, dass die Eigenwerte für Temperatur und Absorbatmassenanteil gleich sind, da sich anderenfalls die Einzelglieder aufgrund der Exponentialfunktion mit  $\xi$  unterschiedlich entwickeln:

$$k_{\Theta,n} = k_{\gamma,n} = k_n. \quad (3.42)$$

Werden die formalen Lösungen (3.40) und (3.41) in die dimensionslose Phasengleichgewichtsbeziehung (3.18) an der Stelle  $\eta = 1$  eingesetzt und gliedweise verglichen, so wird folgender Zusammenhang erhalten:

$$C_{2,n}^* \cos(k_n \sqrt{\text{Le}}) = C_{1,n}^* \sin(k_n) \Rightarrow \frac{C_{2,n}^*}{C_{1,n}^*} = \frac{\sin(k_n)}{\cos(k_n \sqrt{\text{Le}})} = \frac{g_n(\eta_{Nak} = 1)}{l_n(\eta_{Nak} = 1)}. \quad (3.43)$$

Werden wiederum die Ableitungen von (3.40) und (3.41) nach der Filmdickenkoordinate an der Stelle  $\eta = 1$  in die dimensionslose Energiebilanz an der Phasengrenzfläche eingesetzt, ergibt sich ein zweiter Zusammenhang zwischen den Einzelgliedern:

$$\begin{aligned} C_{2,n}^* \sqrt{\text{Le}} \sin(k_n \sqrt{\text{Le}}) &= C_{1,n}^* \text{Le} \tilde{\text{St}} \cos(k_n) \\ \Rightarrow \frac{C_{2,n}^*}{C_{1,n}^*} &= \frac{\text{Le} \tilde{\text{St}} \cos(k_n)}{\sqrt{\text{Le}} \sin(k_n \sqrt{\text{Le}})} = \text{Le} \tilde{\text{St}} \cdot \frac{g'_n(\eta_{Nak} = 1)}{l'_n(\eta_{Nak} = 1)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Nakoryakov et al. (1997) setzen (3.43) und (3.44) gleich und formen den Term in der folgenden Weise um:

$$\frac{\sin(k_n)}{\cos(k_n \sqrt{\text{Le}})} = \frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cos(k_n)}{\sin(k_n \sqrt{\text{Le}})}, \quad (3.45)$$

$$\tan(k_n) \cdot \tan(k_n \sqrt{\text{Le}}) = \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}}. \quad (3.46)$$

Nakoryakov et al. (1997) vereinfachen (3.45) unter Verwendung der Tangensfunktion zu (3.46), um die Eigenwerte des Problems zu bestimmen. Durch die Verwendung der Tangensfunktion wird jedoch die Ermittlung von Eigenwerten erschwert, da der Tangens im Definitionsbereich eingeschränkt ist. Hierdurch können Eigenwerte verloren gehen (Meyer, 2014b). Dies führt zu diversen Auffälligkeiten und Schwingungen in der Lösung insbesondere für kleine Werte der dimensionslosen Lauflänge, die fälschlicherweise von Nakoryakov et al. (1997) mit der „Inkonsistenz“ der Eintritts- und Randbedingungen begründet werden. Da die Eigenwerte durch (3.45) (resp. (3.46) bei Nakoryakov et al. (1997)) zumindest teilweise bestimmbar sind, verbleiben als einzige Unbekannte die Integrationskonstanten  $C_{1,n}^*$  und  $C_{2,n}^*$ . Unter Verwendung der Eintrittsbedingungen sowie einer von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) hergeleiteten Orthogonalitätsbeziehung werden auch diese Unbekannten bestimmt.

### Anwendung der Eintrittsbedingungen und der Orthogonalitätsbeziehung

Wie bereits oben eingeführt, liegt am Eintritt bei  $\xi = 0$  eine homogene Verteilung der Temperatur  $\Theta_{Nak,0}$  sowie des Absorbatmassenanteils  $\gamma_0 = 0$  im Film vor:

$$\Theta_{Nak}(\xi = 0, \eta_{Nak}) = \Theta_{Nak,0} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1,n}^* \cdot \sin(k_n \eta_{Nak}), \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \gamma(\xi = 0, \eta_{Nak}) = \gamma_0 = 0 &= 1 + \Theta_{Nak,0} - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \\ &= 1 + \Theta_{Nak,0} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2,n}^* \cos(k_n \sqrt{Le} \eta_{Nak}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Gleichung (3.47) und (3.48) allein genügen jedoch nicht, um die einzelnen noch unbekanntenen Faktoren  $C_{1,n}^*$  und  $C_{2,n}^*$  zu bestimmen, da mit Hilfe der Eintrittsbedingungen lediglich die Summe aller unbekanntenen Glieder festgelegt ist, nicht aber die Einzelterme selbst. Aus diesem Grund leiten Grigor'eva und Nakoryakov (1977) eine Beziehung zwischen den einzelnen Eigenfunktionen her, um mit Hilfe dieser zusätzlichen Beziehung eine Bestimmungsvorschrift für die verbleibenden Integrationskonstanten zu erhalten. Als Ausgangspunkt für die Aufstellung dieser Beziehung verwenden Grigor'eva und Nakoryakov (1977) erneut die sich aus (3.3) und (3.4) ergebenden, von der transversalen Koordinate abhängigen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen und betrachteten jeweils zwei verschiedene Eigenfunktionen  $G_1$  und  $G_2$  sowie  $L_1$  und  $L_2$ :

$$G_1'' + k_1^2 \cdot G_1 = 0 = G_2'' + k_2^2 \cdot G_2, \quad (3.49)$$

$$L_1'' + Le \cdot k_1^2 \cdot L_1 = 0 = L_2'' + Le \cdot k_2^2 \cdot L_2. \quad (3.50)$$

Am Beispiel der Temperatureigenfunktionen  $G_n(\eta_{Nak})$  wird die Ableitung des von Nakoryakov et al. (1997) als Orthogonalitätsbeziehung bezeichneten Zusammenhangs gezeigt, weil diese analog auf die entsprechenden Eigenfunktionen für den Absorbatmassenanteil  $L_n(\eta_{Nak})$  anzuwenden ist.

Aufgrund der Homogenität dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen bleibt die Nullgleichheit auch erhalten, wenn die Differentialgleichungen mit der jeweils anderen Eigenfunktion  $G_1$  oder  $G_2$  multipliziert werden und es ergibt

sich:

$$G_1'' \cdot G_2 + k_1^2 \cdot G_1 \cdot G_2 = G_2'' \cdot G_1 + k_2^2 \cdot G_2 \cdot G_1 = 0, \quad (3.51)$$

$$G_1'' \cdot G_2 - G_2'' \cdot G_1 + (k_1^2 - k_2^2) \cdot G_1 \cdot G_2 = 0. \quad (3.52)$$

Wird (3.51) von der Wand  $\eta_{Nak} = 0$  bis zur Filmoberfläche  $\eta_{Nak} = 1$  bestimmt integriert, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\int_0^1 G_1'' \cdot G_2 \cdot d\eta_{Nak} - \int_0^1 G_2'' \cdot G_1 \cdot d\eta_{Nak} + (k_1^2 - k_2^2) \cdot \int_0^1 G_1 \cdot G_2 \cdot d\eta_{Nak} = 0. \quad (3.53)$$

Mit Hilfe der Regel der partiellen Integration werden die zweiten Ableitungen in die ersten beiden Integralen in (3.53) eliminiert:

$$\int_0^1 G_1'' \cdot G_2 \cdot d\eta_{Nak} = [G_1' \cdot G_2]_0^1 - \int_0^1 G_1' \cdot G_2' \cdot d\eta_{Nak}, \quad (3.54)$$

$$\int_0^1 G_2'' \cdot G_1 \cdot d\eta_{Nak} = [G_2' \cdot G_1]_0^1 - \int_0^1 G_2' \cdot G_1' \cdot d\eta_{Nak}. \quad (3.55)$$

Werden (3.54) und (3.55) in (3.53) eingesetzt, verschwinden die Integrale des Produktes der ersten Ableitungen und es bleibt:

$$\begin{aligned} & G_1' \cdot G_2 \Big|_{\eta_{Nak}=1} - G_2' \cdot G_1 \Big|_{\eta_{Nak}=1} \\ & - \underbrace{G_1' \cdot G_2 \Big|_{\eta_{Nak}=0}}_{=0} + \underbrace{G_2' \cdot G_1 \Big|_{\eta_{Nak}=0}}_{=0} + (k_1^2 - k_2^2) \cdot \int_0^1 G_1 \cdot G_2 \cdot d\eta_{Nak} = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Die Temperaturfunktionen  $G_1$  und  $G_2$  an der Wand bei  $\eta_{Nak} = 0$  ergeben sich für die isotherme Wand zu Null, weil die dimensionslose Temperatur mit der Differenz zur Wandtemperatur definiert wird,  $\Theta_{Nak,W} = 0$ . Hierin liegt der Grund für die abweichende Definition der dimensionslosen Temperatur für den Fall der isothermen Wand bei Nakoryakov et al. (1997). Darüber hinaus erlaubt diese Form aber auch den Grenzfall der adiabaten Wand ( $G_{1,\eta_{Nak}=0}' = G_{2,\eta_{Nak}=0}' = 0$ ), da die zugehörigen Terme für  $\eta = 0$  in (3.56) dann ebenfalls wegfallen.

Das verbleibende bestimmte Integral in (3.56) wird demnach durch die Funktionswerte der Funktionen,  $G_1$  und  $G_2$  sowie deren Ableitungen  $G_1'$  und  $G_2'$  an der Oberfläche des Films bei  $\eta = 1$  determiniert:

$$(k_1^2 - k_2^2) \cdot \int_0^1 G_1 \cdot G_2 \cdot d\eta_{Nak} = G_2' \cdot G_1 \Big|_{\eta_{Nak}=1} - G_1' \cdot G_2 \Big|_{\eta_{Nak}=1}. \quad (3.57)$$

Für die Eigenfunktionen des dimensionslosen Absorbatmassenanteils in transversaler Koordinatenrichtung,  $L_n$ , ergibt sich unter Verwendung der Randbedingung der stoffundurchlässigen Wand,  $L'_{1,\eta_{Nak}=0} = L'_{2,\eta_{Nak}=0} = 0$  analog:

$$\text{Le} \cdot (k_1^2 - k_2^2) \cdot \int_0^1 L_1 \cdot L_2 \cdot d\eta_{Nak} = L'_2 \cdot L_1 \Big|_{\eta_{Nak}=1} - L'_1 \cdot L_2 \Big|_{\eta_{Nak}=1}. \quad (3.58)$$

Bei der Herleitung der Bestimmungsgleichung der Eigenwerte wurde mit Hilfe der Randbedingungen an der Filmoberfläche ein Zusammenhang der Funktionswerte der Eigenfunktionen für die Temperatur- und den Massenanteil  $g_n$  und  $l_n$  und deren Ableitungen an der Oberfläche,  $\eta_{Nak} = 1$ , und den Integrationskonstanten in (3.43) und (3.44) hergestellt:

$$\frac{C_{2,1}^*}{C_{1,1}^*} = \frac{g_1}{l_1} \Big|_{\eta_{Nak}=1} \quad \text{und} \quad \frac{C_{2,2}^*}{C_{1,2}^*} = \frac{g_2}{l_2} \Big|_{\eta_{Nak}=1}, \quad (3.59)$$

$$\frac{C_{2,1}^*}{C_{1,1}^*} = -\text{Le}\tilde{\text{St}} \frac{g'_1}{l'_1} \Big|_{\eta_{Nak}=1} \quad \text{und} \quad \frac{C_{2,2}^*}{C_{1,2}^*} = -\text{Le}\tilde{\text{St}} \frac{g'_2}{l'_2} \Big|_{\eta_{Nak}=1}. \quad (3.60)$$

Aus diesen Zusammenhängen lassen sich durch kreuzweise Multiplikation folgende Beziehungen zwischen den unbekanntem Integrationskonstanten ableiten:

$$\frac{1}{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \frac{C_{2,1}^*}{C_{1,1}^*} \cdot \frac{C_{2,2}^*}{C_{1,2}^*} = -\frac{g_1}{l_1} \cdot \frac{g'_2}{l'_2} \Big|_{\eta_{Nak}=1} = -\frac{g'_1}{l'_1} \cdot \frac{g_2}{l_2} \Big|_{\eta_{Nak}=1}. \quad (3.61)$$

In geschickter Weise multiplizieren Grigor'eva und Nakoryakov (1977) den linken Term in (3.58) mit dem linken Term aus (3.61), den mittleren Term in (3.58) mit dem mittleren Term aus (3.61) und den rechten Term in (3.58) mit dem rechten Term aus (3.61) und erhalten somit:

$$\frac{1}{\tilde{\text{St}}} \frac{C_{2,1}^*}{C_{1,1}^*} \cdot \frac{C_{2,2}^*}{C_{1,2}^*} \cdot (k_1^2 - k_2^2) \cdot \int_0^1 l_1 \cdot l_2 \cdot d\eta_{Nak} = -g'_2 \cdot g_1 \Big|_{\eta_{Nak}=1} + g'_1 \cdot g_2 \Big|_{\eta_{Nak}=1}. \quad (3.62)$$

Der Vergleich von (3.57) mit (3.62) liefert eine Beziehung zwischen den bestimmten Integralen der jeweiligen Eigenfunktionen verknüpft mit den Integrationskonstanten:

$$-\frac{1}{\tilde{\text{St}}} \frac{C_{2,1}^*}{C_{1,1}^*} \cdot \frac{C_{2,2}^*}{C_{1,2}^*} \int_0^1 l_1 \cdot l_2 \cdot d\eta_{Nak} = \int_0^1 g_1 \cdot g_2 \cdot d\eta_{Nak}, \quad (3.63)$$

$$-C_{2,1}^* \cdot C_{2,2}^* \int_0^1 l_1 \cdot l_2 \cdot d\eta_{Nak} = \tilde{\text{St}} \cdot C_{1,1}^* \cdot C_{1,2}^* \int_0^1 g_1 \cdot g_2 \cdot d\eta_{Nak}. \quad (3.64)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung (3.64) zwischen den Integrationskonstanten der jeweiligen Eigenfunktionen sowie den Eintrittsbedingungen (3.47) und (3.48) werden die Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten hergeleitet. Hierfür werden die Eintrittsbedingungen mit  $\tilde{S}t \cdot C_{1,1}^* \cdot g_1$  bzw.  $-C_{2,1}^* \cdot l_1$  durchmultipliziert und anschließend über die dimensionslose Filmdickenkoordinate  $\eta_{Nak}$  bestimmt integriert:

$$\Theta_0 \cdot \tilde{S}t \cdot C_{1,1}^* \int_0^1 G_1 d\eta_{Nak} = \tilde{S}t \cdot C_{1,1}^{*2} \cdot \int_0^1 g_1^2 d\eta_{Nak} + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{S}t \cdot C_{1,1}^* \cdot C_{1,n}^* \cdot \int_0^1 g_1 \cdot g_n d\eta_{Nak}, \quad (3.65)$$

$$\underbrace{-\gamma_0 \cdot C_{2,1}^* \int_0^1 l_1 d\eta_{Nak}}_{=\gamma_0=0} = -(1 + \Theta_0) \cdot C_{2,1}^* \int_0^1 l_1 d\eta_{Nak} + C_{2,1}^{*2} \int_0^1 l_1^2 d\eta_{Nak} + \sum_{n=2}^{\infty} C_{2,1}^* \cdot C_{2,n}^* \int_0^1 l_1 \cdot l_n d\eta_{Nak}. \quad (3.66)$$

Die Addition von (3.65) und (3.66) unter Berücksichtigung der hergeleiteten Orthogonalitätsbeziehung (3.64) eliminiert die unendlichen Summen, da deren Einzelterme aufgrund der Querbeziehungen (3.64) verschwinden und es bleibt:

$$\Theta_0 \cdot \tilde{S}t \cdot C_{1,1}^* \int_0^1 g_1 d\eta_{Nak} = \tilde{S}t \cdot C_{1,1}^{*2} \cdot \int_0^1 g_1^2 d\eta_{Nak} - (1 + \Theta_0) \cdot C_{2,1}^* \int_0^1 l_1 d\eta_{Nak} + C_{2,1}^{*2} \int_0^1 l_1^2 d\eta_{Nak}. \quad (3.67)$$

Die zweite Integrationskonstante  $C_{2,1}^*$  lässt sich mit Hilfe der Randbedingung an der Phasengrenzfläche (3.59) ersetzen:

$$\Theta_0 \cdot \tilde{S}t \cdot C_{1,1}^* \int_0^1 g_1 d\eta_{Nak} = \tilde{S}t \cdot C_{1,1}^{*2} \cdot \int_0^1 g_1^2 d\eta_{Nak} - (1 + \Theta_0) \cdot C_{1,1}^* \cdot \frac{g_1}{l_1} \Big|_{\eta_{Nak}=1} \int_0^1 l_1 d\eta_{Nak} + C_{1,1}^{*2} \cdot \frac{g_1^2}{l_1^2} \Big|_{\eta_{Nak}=1} \int_0^1 l_1^2 d\eta_{Nak}. \quad (3.68)$$

Somit gelingt es Grigor'eva und Nakoryakov (1977), die Integrationskonstante  $C_{1,1}^*$  zu isolieren und die Bestimmungsgleichung durch Umformung von (3.68)

lautet folgendermaßen:

$$C_{1,1}^* = \frac{\Theta_0 \cdot \tilde{S}t \cdot l_1^2|_{\eta_{Nak}=1} \int_0^1 g_1 d\eta_{Nak} + (1 + \Theta_0) \cdot (l_1 \cdot g_1)|_{\eta_{Nak}=1} \int_0^1 l_1 d\eta_{Nak}}{\tilde{S}t \cdot l_1^2|_{\eta_{Nak}=1} \int_0^1 g_1^2 d\eta_{Nak} + g_1^2|_{\eta_{Nak}=1} \int_0^1 l_1^2 d\eta_{Nak}}. \quad (3.69)$$

Lediglich die bestimmten Integrale müssen noch gelöst werden, um die Integrationskonstante  $C_{1,1}^*$  bestimmen zu können:

$$\int_0^1 g_1 \cdot d\eta_{Nak} = \int_0^1 \sin(k_1 \eta_{Nak}) \cdot d\eta_{Nak} = \frac{1}{k_1} [-\cos(k_1 \eta_{Nak})]_0^1 = \frac{1}{k_1} (1 - \cos(k_1)), \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 l_1 \cdot d\eta_{Nak} &= \int_0^1 \cos(\sqrt{Le} k_1 \eta_{Nak}) \cdot d\eta_{Nak} \\ &= \frac{1}{\sqrt{Le} k_1} [\sin(\sqrt{Le} k_1 \eta_{Nak})]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{Le} k_1} \sin(\sqrt{Le} k_1), \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\int_0^1 g_1^2 \cdot d\eta_{Nak} = \int_0^1 \sin^2(k_1 \eta_{Nak}) \cdot d\eta_{Nak} = -\frac{1}{2k_1} \sin(k_1) \cos(k_1) + \frac{1}{2}, \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 l_1^2 \cdot d\eta_{Nak} &= \int_0^1 \cos^2(\sqrt{Le} k_1 \eta_{Nak}) \cdot d\eta_{Nak} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{Le} k_1} \sin(\sqrt{Le} k_1) \cos(\sqrt{Le} k_1) + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Die zugehörige Integrationskonstante des dimensionslosen Massenanteils  $C_{2,1}^*$  errechnet sich leicht aus  $C_{1,1}^*$  über die Gleichgewichtsbeziehung an der Phasengrenzfläche (3.59):

$$C_{2,1}^* = C_{1,1}^* \cdot \frac{\sin(k_1)}{\cos(\sqrt{Le} \cdot k_1)}. \quad (3.74)$$

Mit Hilfe dieser Bildungsvorschrift werden sämtliche Integrationskonstanten bestimmt und in die Lösungsfunktionen für die dimensionslose Filmtemperatur (3.40) und den dimensionslosen Massenanteil (3.41) eingesetzt.

### 3.1.2 Lösung für den halbunendlichen Körper bzw. für die ungestörte Phasengrenzfläche

Durch die Verwendung der Tangensfunktion für die Eigenwertbestimmung bei der FOURIER-Methode finden Grigor'eva und Nakoryakov (1977) nicht alle Eigenwerte, was zu physikalisch nicht sinnvollen Schwingungen bei kleinen Werten der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  führt. Nakoryakov und Grigor'eva (1977) und Nakoryakov und Grigor'eva (1980) nehmen diese Probleme zum Anlass eine weitere analytische Lösungsmethode für die nicht-isotherme Dampfaborption im Eintrittsbereich der Salzlösung vorzustellen. Diese ist auf sehr kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate, d.h. auf die von der Wand nicht gestörte Phasengrenzfläche beschränkt. Nakoryakov und Grigor'eva (1977) haben diese Betrachtung der ungestörten Phasengrenzfläche für Temperatur und Massenanteil zuerst in einem Lösungstropfen in Polarkoordinaten durchgeführt. Für die Filmströmung an der vertikalen Wand nehmen Nakoryakov und Grigor'eva (1977) ein lineares Temperaturprofil und lediglich für den Stofftransport das Modell der ungestörten Phasengrenzfläche an. Erst in einer späteren Veröffentlichung haben Nakoryakov und Grigor'eva (1980) das Modell der gänzlich ungestörten Phasengrenzfläche auf die Filmströmung für sehr kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate angewendet. Notwendigerweise verwenden Nakoryakov und Grigor'eva (1980) für die Entdimensionierung der Temperatur für dieses Modell ebenfalls die Eintrittstemperatur, weil eine Wandtemperatur modellbedingt nicht existiert. Außerdem wurde der Ursprung der Filmdickenkoordinate wie auch in dieser Arbeit in die Phasengrenzfläche gelegt, mit positiver Koordinatenrichtung in den Film zeigend.

Im Vergleich zur FOURIER-Methode werden die Wandrandbedingungen durch die des halbunendlichen Körpers ersetzt:

$$\Theta(\xi, \eta \rightarrow \infty) = \frac{T_0 - T_0}{T_{eq,0} - T_0} = 0, \quad (3.75)$$

$$\gamma(\xi, \eta \rightarrow \infty) = \frac{c_0 - c_0}{c_{eq,0} - c_0} = 0. \quad (3.76)$$

An der Filmoberfläche nehmen Nakoryakov und Grigor'eva (1980) einen unveränderlichen Sprung von der Eintrittstemperatur und dem Eintrittsmassenan-

teil auf die zugehörigen, noch unbekanntes Gleichgewichtswerte an:

$$\Theta(\xi \geq 0, \eta = 0) = \frac{T_i - T_0}{T_{eq,0} - T_0} = \Theta_i, \quad (3.77)$$

$$\gamma(\xi \geq 0, \eta = 0) = \frac{c_i - c_0}{c_{eq,0} - c_0} = \gamma_i. \quad (3.78)$$

Als Lösung erhalten Nakoryakov und Grigor'eva (1980) das komplementäre Fehlerintegral (Baehr, 2008) (error function complement):

$$\Theta = \Theta_i \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{y \cdot \sqrt{u_i}}{2 \cdot \sqrt{a \cdot x}}\right), \quad (3.79)$$

$$\gamma = \gamma_i \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{y \cdot \sqrt{u_i}}{2 \cdot \sqrt{D \cdot x}}\right). \quad (3.80)$$

Die Verwendung der in dieser Arbeit verwendeten Definition der dimensionslosen Variablen in (3.79) und (3.80) unter Berücksichtigung der Nusselt'schen Filmoberflächengeschwindigkeit  $u_i = 3/2 \cdot \bar{u}$  führt zu:

$$\Theta = \Theta_i \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \xi}\right), \quad (3.81)$$

$$\gamma = \gamma_i \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{Le}} \eta}{\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \xi}\right). \quad (3.82)$$

Die bis hierhin noch unbekanntes Temperatur  $\Theta_i$  und der unbekanntes Absorbatmassenanteil  $\gamma_i$  an der Filmoberfläche werden über die Kopplungsbeziehungen an der Oberfläche erhalten. Diese sind identisch mit denen bei der FOURIER-Methode, d.h. der linearisierten isobaren Siedetemperatur der Salzlösung als Funktion des Massenanteils an Absorbat (3.14) sowie der Energiebilanz an der Phasengrenzfläche (3.21). Für die hier notwendigerweise gewählte Definition der dimensionslosen Temperatur und dem Ursprung sowie der Ausrichtung der Filmdickenkoordinate lauten diese Randbedingungen an der Filmoberfläche bei  $\eta = 0$ :

$$\Theta_i + \gamma_i = 1, \quad (3.83)$$

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \operatorname{Le} \cdot \tilde{\operatorname{St}} \cdot \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}. \quad (3.84)$$

Nach Baehr (2008) lautet das komplementäre Fehlerintegral einer Variablen  $\psi$ :

$$\operatorname{erfc}(\psi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\psi e^{-w^2} dw. \quad (3.85)$$

Mit Blick auf (3.81) und (3.82) ergibt sich die Variable  $\psi$  des komplementären Fehlerintegrals an der Oberfläche für  $\eta = 0$  sowohl für die Temperatur als auch für den Massenanteil zu  $\psi(\eta = 0) = 0$ . Entsprechend verschwindet das bestimmte Integral in (3.85) für  $\psi = 0$ . Das komplementäre Fehlerintegral ergibt sich zu  $\operatorname{erfc}(\psi = 0) = 1$ . Somit ist die dimensionslose Gleichgewichtsbeziehung (3.83) inhärent erfüllt nach dem Einsetzen der Funktionen (3.81) und (3.82) an der Filmoberfläche  $\eta = 0$ .

Die partielle Ableitung des komplementären Fehlerintegrals nach der dimensionslosen Filmdickenkoordinate, welche für (3.84) benötigt wird, erfolgt nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial \operatorname{erfc}}{\partial \eta} = \frac{\partial \operatorname{erfc}}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\psi^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta}. \quad (3.86)$$

Die Exponentialfunktion  $e^{-\psi^2}$  ergibt sich an der Filmoberfläche für  $\psi(\eta = 0) = 0$  zu 1 und die Energiebilanz ergibt nach Einsetzen der jeweiligen Ableitungen zu:

$$\gamma_i \cdot \sqrt{Le} = \Theta_i \cdot Le \cdot \tilde{St}. \quad (3.87)$$

Mit Hilfe von (3.83) und (3.87) sind die zuvor unbekanntenen Gleichgewichtswerte  $\Theta_i$  und  $\gamma_i$  an der ungestörten Oberfläche bestimmbar und lauten wie folgt:

$$\Theta_i = \frac{1}{1 + \sqrt{Le} \cdot \tilde{St}}, \quad (3.88)$$

$$\gamma_i = \frac{\sqrt{Le} \cdot \tilde{St}}{1 + \sqrt{Le} \cdot \tilde{St}}. \quad (3.89)$$

Dementsprechend erhalten Nakoryakov et al. (1997) die Lösungen der ungestörten Phasengrenzfläche in der folgenden Form:

$$\Theta(\xi, \eta) = \frac{1}{1 + \sqrt{Le} \cdot \tilde{St}} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \xi} \right), \quad (3.90)$$

$$\gamma(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{Le} \cdot \tilde{St}}{1 + \sqrt{Le} \cdot \tilde{St}} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{Le} \eta}{\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \xi} \right). \quad (3.91)$$

## 3.2 Modell und Lösungsmethode von Grossman

Ein sehr bekanntes und viel zitiertes Modell für den gekoppelten Wärme- und Stofftransport im laminaren Rieselfilm präsentiert Grossman (1983). Grossman (1983) erweitert dabei das Modell von Grigor'eva und Nakoryakov (1977), indem er die konstante mittlere Filmgeschwindigkeit  $\bar{u}$  durch das als Lösung der stationären Impulsbilanz am Rieselfilm erhaltene Geschwindigkeitsprofil von Nusselt (1923) ersetzt:

$$u_x(y) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3.92)$$

$$u_x(y) \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (3.93)$$

Da auch Grossman (1983) den Ursprung der transversalen Koordinate in die Wand legt, verwendet er folgende Gleichung für das Geschwindigkeitsprofil der stationären, laminaren Rieselfilmströmung:

$$u_x(y) = \frac{3}{2} \cdot \bar{u} \left[ 2 \cdot \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (3.94)$$

Anders als Nakoryakov et al. (1997) verwendet Grossman (1983) für die Entdimensionierung der Temperatur für den Fall der isothermen Wand die Filmeintrittstemperatur (2.43). Aufgrund dieser Definition der dimensionslosen Temperatur und der angewendeten Lösungsmethode, d.h. insbesondere der Anwendung der Orthogonalitätsbeziehung, ist seine Lösung beschränkt auf Wandtemperaturen der isothermen Wand, die gleich der Filmeintrittstemperatur  $T_W = T_0$  sind.

Die entdimensionierten partiellen Differentialgleichungen mit nicht-konstanten Koeffizienten bei Grossman (1983) lauten wie folgt:

$$\Omega^* \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta_{Nak}^2}, \quad (3.95)$$

$$\Omega^* \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = \frac{1}{Le} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \eta_{Nak}^2}, \quad (3.96)$$

$$\text{mit } \Omega^* = \frac{u_x(y)}{\bar{u}} = \frac{3}{2} \cdot (2\eta_{Nak} - \eta_{Nak}^2). \quad (3.97)$$

Die Eintritts- und Randbedingungen sind identisch mit denen von Grigor'eva und Nakoryakov (1977). Grossman (1983) wendete wie Grigor'eva und Nakoryakov (1977) ebenfalls die FOURIER-Methode auf (3.95) und (3.96) an. Auf

die sich durch die nicht-konstanten Koeffizienten ergebenden Unterschiede in der Lösungsmethodik wird an dieser Stelle kurz eingegangen.

### Separationsansatz und Rekursionsvorschrift

Auf die gleiche Art und Weise wie Grigor'eva und Nakoryakov (1977) erhält Grossman (1983) durch den Separationsansatz folgenden allgemeinen Ansatz für die dimensionslose Temperatur und den dimensionslosen Massenanteil:

$$\Theta(\xi, \eta_{Nak}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot E_n(\eta_{Nak}) e^{-k_n^2 \cdot \xi}, \quad (3.98)$$

$$\gamma(\xi, \eta_{Nak}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot F_n(\eta_{Nak}) e^{-k_n^2 \cdot \xi}. \quad (3.99)$$

Für die Eigenfunktionen  $E_n$  und  $F_n$  ergeben sich folgende homogene, gewöhnliche Differentialgleichungen mit nicht-konstanten Koeffizienten:

$$\frac{d^2 E_n}{d\eta_{Nak}^2} + \frac{3}{2}(2\eta_{Nak} - \eta_{Nak}^2) \cdot k_n^2 \cdot E_n = 0, \quad (3.100)$$

$$\frac{d^2 F_n}{d\eta_{Nak}^2} + \frac{3}{2}(2\eta_{Nak} - \eta_{Nak}^2) \cdot k_n^2 \cdot Le \cdot F_n = 0. \quad (3.101)$$

Ein gängiger Lösungsansatz für diese Form der Differentialgleichungen, den auch Grossman (1983) verwendet, ist die unendliche Potenzreihe, deren Koeffizienten durch Rekursionsvorschriften an die Differentialgleichung angepasst werden:

$$E_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i} \cdot \eta_{Nak}^i, \quad (3.102)$$

$$F_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_{n,i} \cdot \eta_{Nak}^i. \quad (3.103)$$

Durch die Anwendung der Wandrandbedingungen erhält Grossman (1983) die ersten Koeffizienten der unendlichen Potenzreihen:

$$\Theta(\eta_{Nak} = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_n(\eta_{Nak} = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n,0} = 0, \quad (3.104)$$

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_{Nak}} \right|_{\eta_{Nak}=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad G'_n(\eta_{Nak} = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{n,1} = 0. \quad (3.105)$$

Durch Einsetzen der unendlichen Potenzreihen (3.102) und (3.103) in die zu lösenden Differentialgleichungen (3.100) und (3.101):

$$\sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdot a_{n,i} \cdot \eta_{Nak}^{i-2} + \frac{3}{2} \cdot k_n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i} [2 \cdot \eta_{Nak}^{i+1} - \eta_{Nak}^{i+2}] = 0, \quad (3.106)$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdot b_{n,i} \cdot \eta_{Nak}^{i-2} + \frac{3}{2} \cdot k_n^2 \cdot \text{Le} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_{n,i} [2 \cdot \eta_{Nak}^{i+1} - \eta_{Nak}^{i+2}] = 0, \quad (3.107)$$

bestimmt Grossman (1983) weitere Koeffizienten und leitet die Rekursionsformel für die noch unbekanntenen Faktoren  $a_{n,i}$  und  $b_{n,i}$  durch den Vergleich der Koeffizienten vor den jeweiligen transversalen Variablen  $\eta_{Nak}$  mit gleicher Potenz ab:

$$\begin{aligned} a_{n,1} &\neq 0, \quad a_{n,2} = 0, \quad a_{n,3} = 0, \\ a_{n,i} &= \frac{3}{2} \cdot k_n^2 \cdot \frac{a_{n,i-4} - 2 \cdot a_{n,i-3}}{i \cdot (i-1)} \quad \text{für } i \geq 4, \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} b_{n,0} &\neq 0, \quad b_{n,2} = 0, \quad b_{n,3} = -\frac{k_n^2}{2} \cdot \text{Le} \cdot b_{n,0}, \\ b_{n,i} &= \frac{3}{2} \cdot k_n^2 \cdot \text{Le} \cdot \frac{b_{n,i-4} - 2 \cdot b_{n,i-3}}{i \cdot (i-1)} \quad \text{für } i \geq 4. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Grossman (1983) setzt die nicht verschwindenden Koeffizienten  $a_{n,1} = b_{n,0} = 1$ . Dies ist zulässig, da mit Hilfe der Rekursionsformel sämtliche weitere noch unbekanntene Koeffizienten abhängig von diesen Werten ermittelt werden. Somit werden Eigenfunktionen  $E_n$  und  $F_n$  mit weiterhin noch unbekanntenen Eigenwerten  $k_n$  erhalten, welche jedoch formal die Differentialgleichung und die Wandrandbedingungen erfüllen. Als nächstes verwendet Grossman (1983) genau wie Grigor'eva und Nakoryakov (1977) die Randbedingungen an der Phasengrenzfläche, um die Eigenwerte  $k_n$  zu bestimmen.

### Ermittlung der Eigenwerte

Durch Einsetzen von (3.102) und (3.103) in die Randbedingungen (3.83) und (3.23) an der Phasengrenzfläche bei  $\eta_{Nak} = 1$  lassen sich folgende Beziehungen zwischen den Eigenfunktionen für die dimensionslose Temperatur und den dimensionslosen Massenanteil ermitteln:

$$\frac{A_n}{B_n} = -\text{Le} \cdot \tilde{\text{St}} \cdot \frac{F_n(1)}{E_n(1)} = \frac{F'_n(1)}{E'_n(1)}. \quad (3.110)$$

Grossman (1983) verwendet den mittleren und rechten Term von (3.110) für die iterative Bestimmung der Eigenwerte:

$$0 = F'_n(1)E_n(1) - \text{Le} \cdot \tilde{\text{St}} \cdot F_n(1)E'_n(1). \quad (3.111)$$

Die Eigenfunktionen  $E_n$  und  $F_n$  sind unendliche Potenzreihen, (3.102) und (3.103). Bei Grigor'eva und Nakoryakov (1977) sind die Eigenfunktionen trigonometrische Funktionen, was den Rechenaufwand bei Grossman (1983) im Vergleich deutlich steigert.

### Orthogonalitätsbeziehung für die Bestimmung der Integrationskonstanten $A_n$ und $B_n$ der Eigenfunktionen

In der gleichen Weise wie Grigor'eva und Nakoryakov (1977) leitet Grossman (1983) ausgehend von den homogenen Differentialgleichungen der Eigenfunktionen, (3.100) und (3.101), unter Verwendung der partiellen Integration und der Eintrittsbedingungen sowie der verschwindenden Wandrandbedingungen eine Beziehung für die Integrationskonstante  $B_n$  her:

$$B_n = \frac{\int_0^1 (2\eta_{Nak} - \eta_{Nak}^2) G_n(\eta_{Nak}) d\eta_{Nak}}{\int_0^1 (2\eta_{Nak} - \eta_{Nak}^2) \left[ \tilde{\text{St}} \cdot \frac{F_n^2(1)}{E_n^2(1)} \cdot E_n^2(\eta_{Nak}) + F_n^2(\eta_{Nak}) \right] d\eta_{Nak}}. \quad (3.112)$$

Die Integrale der einfachen Potenzreihen werden gliedweise integriert. Die Integrale der quadratischen Potenzreihen müssen zuvor ausmultipliziert werden:

$$F_n^2(\eta_{Nak}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{m \leq i} a_{n,j} \cdot a_{n,j-i} \right) \cdot \eta_{Nak}^i, \quad (3.113)$$

$$E_n^2(\eta_{Nak}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{m \leq i} b_{n,j} \cdot b_{n,j-i} \right) \cdot \eta_{Nak}^i. \quad (3.114)$$

Über den Zusammenhang der Integrationskonstanten, welcher sich aus der Phasengleichgewichtsbeziehung ableiten lässt, ermittelt Grossman (1983) die Integrationskonstante  $A_n$ :

$$A_n = B_n \cdot \frac{G_n(1)}{F_n(1)}. \quad (3.115)$$

Grossman (1983) verwendet jedoch numerische Methoden, um das gekoppelte Wärme- und Stofftransportproblem zu lösen, da für kleine Werte von  $\xi$  sehr viele Eigenwerte benötigt werden, was zu Konvergenzproblemen bei den Potenzreihen, (3.102) und (3.103) führt.

### 3.3 Überblick über weitere Modelle und Methoden

In dem folgenden chronologisch geordneten Überblick werden weitere physikalische Modelle und deren Lösungsmethoden kurz vorgestellt. Bei der Literaturauswahl liegt das Hauptaugenmerk auf anderen analytischen Verfahren sowie der Ähnlichkeit des zu Grunde liegenden physikalischen Modells zu dem in dieser Arbeit angewendeten. Unter Umständen erfordern jedoch kleine Änderungen am physikalischen Modell bereits die Anwendung numerischer Verfahren, weshalb auch diese in der hier vorgestellten Literaturauswahl zur Sprache kommen.

Kholpanov et al. (1982) untersuchen den Einfluss eines sich ausbildenden Geschwindigkeitsprofils bei der Filmströmung auf den Wärme- oder Stofftransport für kleine Werte der Koordinate in Strömungsrichtung. Sie verwenden zur Lösung der physikalischen Modellgleichungen das numerische Runge-Kutta Verfahren. Des Weiteren untersuchen sie den Einfluss einer Schubspannung an der Filmoberfläche durch z.B. eine starke Gas-/Dampfströmung auf den gekoppelten Wärme- und Stofftransport. Sie konstatieren ohne Angabe von Zahlenwerten eine erhebliche Abhängigkeit des Wärme- und Stoffübergangs von den an der Phasengrenzfläche angreifenden Schubspannungen und Oberflächenspannungsgradienten.

Le Goff et al. (1985) wenden auf das in dieser Arbeit verwendete und von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) aufgestellte physikalische Modell des gekoppelten Wärme- und Stofftransportes und der thermischen Randbedingungen der adiabaten Wand die LAPLACE-Transformation an und lösen das Problem im LAPLACE-Bereich. Aufgrund fehlender Äquivalenzen in den Korrespondenztabelle wenden sie für die Rücktransformation die schnelle FOURIER-Transformation an. Die so erhaltenen numerischen Ergebnisse weisen jedoch teilweise physikalisch nicht erklärbare Schwingungen auf.

Ebenfalls für die adiabate Wand teilen Le Goff et al. (1986) die Filmströmung je nach Eindringtiefe des Temperatur- und des Konzentrationsprofils in den Film in vier verschiedene Zonen ein. Sie wenden für die verschiedenen Zonen jeweils ein stark vereinfachtes lineares Temperatur- und Konzentrationsprofil an. Zur Abschätzung des Fehlers der Linearisierung vergleichen sie die Lösung

mit den sich ausbildenden Profilen für den halbunendlichen Körper sowie für deren numerische Lösung der Differentialgleichungen mittels schneller Fourier Transformation (Le Goff et al., 1985). Dabei stellen sie fest, dass das stark vereinfachte Modell der linearen Profile für große Werte der Strömungskordinate repräsentative Ergebnisse liefert.

Mit Hilfe der numerischen Methode der Finiten Differenzen lösen van der Wekken und Wassenaar (1988) das gekoppelte Wärme- und Stofftransportproblem für die diabate Wand. Die von ihnen angewendeten Modellgleichungen sind mit denen von Grossman (1983) identisch, d.h. auch sie wenden das ausgebildete parabolische Filmströmungsprofil an. Neben der im Vergleich zu Grossman (1983) veränderten thermischen Wandrandbedingung der diabaten Wand berücksichtigen sie den durch den diffusiven Salzmassenstrom zur Filmoberfläche induzierten konvektiven Rückstrom in den Film über eine veränderte Randbedingung für den absorbierten Massenstrom in der Energiebilanz an der Phasengrenzfläche:

$$\dot{m}_{abs} = \frac{\rho \cdot D}{1 - c_i} \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_i, \quad (3.116)$$

$$\lambda \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_i = \frac{\rho \cdot D}{1 - c_i} \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_i \cdot \Delta h_{abs}. \quad (3.117)$$

In dem Modell von van der Wekken und Wassenaar (1988) wird jedoch innerhalb der Filmströmung keine transversale Geschwindigkeit und die einseitige Diffusion ausschließlich als Randbedingung berücksichtigt.

Für das gekoppelte Wärme- und Stofftransportproblem ist eine einfache Abschätzung des durch die Berücksichtigung der einseitigen Diffusion veränderten absorbierten Massenstroms, wie z.B. die Betrachtung des Verstärkungsfaktors beim Stefan-Strom, nicht direkt möglich. Die Wärmefreisetzung durch Absorption wird eingeschränkt vom dem durch die Wärmeleitung begrenzten Wärmeabtransport von der Filmoberfläche in den Film, was dämpfend auf einen Anstieg des absorbierten Massenstroms wirkt. In einer dimensionslosen Darstellung geht diese die einseitige Diffusion beinhaltende Energiebilanz (3.117) in folgende Form über:

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \underbrace{(1 - c_i) \cdot \tilde{St}}_{=\tilde{St}_{einseitig}} \cdot Le \cdot \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}. \quad (3.118)$$

Es ist demnach möglich mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell, welches lediglich äquimolare Diffusion berücksichtigt, über eine Anpassung der modifizierten Stefan Zahl  $\tilde{St}$  mit dem zu erwartenden Oberflächenabsorptionsmassenanteil  $1 - c_i$  zu  $\tilde{St}_{einseitig}$  zumindest den Effekt einseitiger Diffusion an der Filmoberfläche abzuschätzen. Bei einem Absorbatanteil von  $c_i = 0,5$  halbiert sich dementsprechend der Wert der modifizierten Stefan Zahl. Die Auswirkungen einer Variation der modifizierten Stefan Zahl werden im Ergebnisteil dieser Arbeit diskutiert.

Nach Aussage von van der Wekken und Wassenaar (1988) erlaubt die von ihnen angewendete numerische Methode lediglich Randbedingungen mit konstanten Koeffizienten. Aus diesem Grund wird von ihnen anstelle des variablen Oberflächenabsorbatanteils  $c_i$  in (3.117) der konstante Absorbatmassenanteil am Eintritt der Lösung  $c_0$  verwendet. Als Ergebnis geben van der Wekken und Wassenaar (1988) Verläufe der Mitteltemperaturen sowie der Oberflächen-temperaturen und -massenanteile für eine Auswahl dimensionsloser Parameter an. Des Weiteren definieren sie folgende lokale Sherwood- und Nusselt-Zahlen, deren Verlauf sie als Funktion der FOURIER-Zahl, d.h. der dimensionslosen Strömungskordinate, angeben:

$$\text{Sh} = \frac{\beta \cdot \delta}{D} = \frac{\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}}{(\gamma_i - \bar{\gamma})}, \quad (3.119)$$

$$\text{Nu}_i = \frac{\alpha_i \cdot \delta}{\lambda} = \frac{\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}}{(\Theta_i - \bar{\Theta})}, \quad (3.120)$$

$$\text{Nu}_W = \frac{\alpha_W \cdot \delta}{\lambda} = \frac{\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}}{(\bar{\Theta} - \Theta_W)}. \quad (3.121)$$

Diese physikalisch durchaus sinnvollen und nachvollziehbaren Definitionen der dimensionslosen Kennzahlen führen allerdings zu Problemen, da in der Regel in der Praxis die Werte von Temperatur und Absorbatmassenanteil weder an der Phasengrenzfläche noch die mittleren Werte in der Filmströmung bekannt sind. Allerdings sind diese im theoretischen Modell zugänglich und werden daher von van der Wekken und Wassenaar (1988) zum Vergleich ihrer Ergebnisse des gekoppelten Transportproblems mit den Korrelationen des reinen Wärme- bzw. Stofftransportes herangezogen und dementsprechend definiert. Wenig überraschend stellen van der Wekken und Wassenaar (1988) fest, dass die Anwendung der Korrelationen für den Wärme- bzw. Stofftransport für sich

genommen zu fehlerhaften Ergebnissen führt. Sie schlagen daher vor, mit Hilfe ihrer numerischen Ergebnisse vereinfachte Beziehungen und Korrelationen für den gekoppelten Wärme- und Stofftransport als Funktion der relevanten dimensionslosen Parameter zu erstellen, welche wiederum für einfachere und leichter anwendbare Modelle zur Auslegung und Simulation der Wärme- und Stoffübertrager verwendet werden können. Sie geben diese Korrelationen bedauerlicherweise nicht selbst an und schlagen vor, diese mit Hilfe der von ihnen angegebenen Diagramme zu ermitteln.

Brauner (1991) erweitert einerseits das Modell von van der Wekken und Wasenaar (1988), indem sie die transversale Geschwindigkeit im Film nicht vernachlässigt, den tatsächlichen Oberflächenmassenanteil für die Verstärkung der einseitigen Diffusion verwendet und eine variable Filmdicke in Strömungsrichtung erlaubt. Andererseits wendet Brauner (1991) dieses Modell ähnlich wie Grossman (1983) lediglich für die adiabate bzw. für die isotherme Wand an, wobei die Filmeintrittstemperatur gleich der Wandtemperatur gesetzt ist. Brauner (1991) stellt fest, dass durch die Erweiterung des Filmmodells um die Berücksichtigung der einseitigen Diffusion eine analytische Lösung der partiellen Differentialgleichungen für die gesamte Filmströmung nicht mehr zugänglich ist. Für die von der Wand ungestörte Phasengrenzfläche in der Nähe des Eintritts der Salzlösung ermitteln Brauner et al. (1989) eine analytische Lösung, die für ähnlich große Massenanteile des Absorbats und des Absorbens einen nicht vernachlässigbaren Effekt der transversalen Geschwindigkeit aufzeigt.

Für die Lösung des Problems für die gesamte Filmströmung integriert Brauner (1991) formal die partiellen Differentialgleichungen über die dimensionslose Filmdickenkoordinate, um gewöhnliche Differentialgleichungen in der Filmströmungsrichtung zu erhalten. Um diese Integrale bestimmen zu können, setzt Brauner (1991) *a priori* einfache analytische Funktionen, z.B. quadratische Polynomansätze für das Geschwindigkeits-, Massenanteils- und Temperaturprofil im Film an, welche sämtlich die jeweiligen Randbedingungen erfüllen. Hierfür ist es allerdings erforderlich das Transportproblem, wie bereits bei Le Goff et al. (1986), in verschiedene Zonen einzuteilen. Brauner (1991) unterscheidet dabei drei Zonen. In der ersten Zone, der ungestörten Phasengrenzfläche, sind weder die thermische noch die stoffliche Grenzschicht von der Phasengrenzfläche an der Wand angekommen. In Zone zwei hat die thermische Grenzschicht die

Wand erreicht, die stoffliche jedoch noch nicht. Entsprechend haben in Zone drei sowohl die thermische als auch die stoffliche Grenzschicht die Wand erreicht. Das verbleibende gewöhnliche Differentialgleichungssystem löst Brauner (1991) mit Hilfe der Runge-Kutta Methode, d.h. einem numerischen Anfangswertlösalgorithmus. Ähnlich wie van der Wekken und Wassenaar (1988) gibt auch Brauner (1991) die dimensionslosen Phasengrenzflächentemperaturen und -massenanteile an und definiert die lokalen Sherwood- und die Nusselt-Zahlen mit den physikalisch nachvollziehbaren treibenden Massenanteils- und Temperaturdifferenzen. Allerdings verändert sich durch die Berücksichtigung der einseitigen Diffusion bei Brauner (1991) dementsprechend die Sherwood-Zahl im Vergleich zu van der Wekken und Wassenaar (1988) (3.119). In gleicher Weise wie in Brauner et al. (1989) schlussfolgert Brauner (1991), dass bei ähnlich großen Absorbent- und Absorbatmassenanteilen die transversale Filmgeschwindigkeitskomponente berücksichtigt werden sollte ohne die dadurch verursachte Abweichung im absorbierten Massenstrom für typische Absorberbedingungen genau zu quantifizieren.

Yang und Wood (1992) wenden das von Grossman (1983) eingeführte physikalische Filmmodell an. Im Gegensatz zu Grossman (1983) lösen sie die Bedingung gleicher Wand- und Filmeintrittstemperatur für die Randbedingung der isothermen Wand auf und lösen die partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe der numerischen Methode der Finiten Differenzen. Außerdem verzichten Yang und Wood (1992) auf eine Entdimensionierung des Problems und auf die Linearisierung des Phasengleichgewichts an der Filmoberfläche. Sie vergleichen ihre so berechneten Ergebnisse mit eigens ermittelten Messwerten allerdings unter Einfluss von Wellen und einem Anteil von 5% nicht kondensierbarer Gase. Nichtsdestotrotz stellen Yang und Wood (1992) trotz der sehr einfachen Modellierung und der vereinfachenden Annahmen eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und experimentell ermittelten Ergebnisse fest und behaupten daher, dass auch das laminare, nicht wellige Filmmodell realistische Ergebnisse vorhersagt.

Hajji und Worek (1992) untersuchen den transienten Wärme- und Stofftransport im unbewegten dünnen Film eines Absorbens, welches für den mitbewegten Beobachter dem Modell von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) des Films mit konstanter Filmgeschwindigkeit identisch ist. Sie wenden die im vorange-

gangenen Abschnitt detailliert vorgestellte FOURIER-Methode von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) und Nakoryakov et al. (1997) an, erwähnen jedoch auch, dass die LAPLACE-Transformation prinzipiell zur Lösung dieses Problems geeignet wäre. Allerdings wenden sie weniger restriktive Randbedingungen an der Wand an, indem sie einen beliebigen Wärme- und Stoffstrom an der Wand zulassen, der anders als bei Nakoryakov et al. (1997) nicht zwingend Null sein muss. Hajji und Worek (1992) zeigen jedoch nicht, wie die ebenfalls von ihnen verwendete Orthogonalitätsbeziehung ohne die Annahmen von Nakoryakov et al. (1997) hergeleitet wurde.

Ibrahim und Vinnicombe (1993) verwenden im Prinzip das gleiche Modell sowie die gleichen Randbedingungen wie van der Wekken und Wassenaar (1988). Aus Gründen der numerischen Stabilität sowie der Begrenzung der Rechenzeit benötigt sie die analytische Lösung der ungestörten Phasengrenzfläche am Eintritt der Salzlösung in den Absorber in ähnlicher Weise wie Grossman (1983). Ibrahim und Vinnicombe (1993) erweitern die analytische Lösung für kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate für die Wandseite, indem sie dort eine Wärmedurchgangsbeziehung als Randbedingung verwenden. Für größere Werte benutzen sie die numerische Methode der impliziten Finiten Differenzen.

Patnaik et al. (1993) verwenden empirische Ansätze für den Wärme- und Stofftransport. Sie begründen dieses Vorgehen damit, dass die bisherigen theoretischen Modelle und deren Lösung auf laminarer Filmströmung basieren und zu einer Unterschätzung des absorbierten Massenstroms tendieren. Das von Patnaik et al. (1993) betrachtete Vertikalrohr stellt einen Gegenstromwärme- und -stoffübertrager dar. In Strömungsrichtung des Lösungsfilms wird differentiell und quer zur Strömungsrichtung integral bilanziert. Die Übergangskoeffizienten für Wärme und Stoff erhalten sie aus einschlägigen empirischen Korrelationen. Für den filmseitigen Wärmeübergangskoeffizienten verwenden sie eine Korrelation für den welligen Film (Seban, 1978). Den Stoffübergangskoeffizienten ermitteln Patnaik et al. (1993) aus einer Kombination von Korrelationen aus der Penetrationstheorie (Hobler, 1966) und einer Korrelation für Gasabsorption in welligen, turbulenten Fallfilmen von Yih und Chen (1982). Das Gleichungssystem aus gewöhnlichen Differentialgleichungen lösen Patnaik et al. (1993) mit Hilfe eines Runge-Kutta Verfahrens vierter Ordnung zur In-

tegration (Davis und Polonsky, 1970). Bei überhitzten Eintrittszuständen der Lösung berichten Patnaik et al. (1993) von Schwingungen in der Nähe des Eintritts der Lösung, welche sie sehr pragmatisch mit einem mit zunehmender Lauflänge abklingenden Dämpfungsfaktor unterdrücken. Als Ergebnis erhalten sie die Temperaturverläufe des Kühlwassers und der Lösung sowie den absorbierten Wassermassenstrom und den an das Kühlwasser abgegebenen Wärmestrom als Funktion der Strömungskordinate für variable Salzlösungs- und Kühlwassermassenströme. Patnaik et al. (1993) schlussfolgern, dass die von ihnen erstellten Diagramme zur Auslegung von Absorbern verwendet werden können, solange die Bedingungen für die von ihnen verwendeten Korrelationen gelten. Ein Vergleich mit experimentell ermittelten Daten erfolgt durch Patnaik et al. (1994) mit einer relativen Abweichung zwischen theoretischem Modell und dem Experiment von kleiner als 20% für die untersuchten Fälle. Conlisk (1992) untersucht wie Patnaik et al. (1993) das gekoppelte Wärme- und Stofftransportproblem an einem außen berieselten Vertikalrohr. Das dimensionslose Filmmodell von Conlisk (1992) ist dem von Grossman (1983) sehr ähnlich, nachdem Conlisk (1992) die bei der Modellierung angenommene variable Filmstärke sowie die transversale Geschwindigkeitskomponente zumindest für die differentielle Energiebilanz vernachlässigt. Auch Conlisk (1992) wendet wie Le Goff et al. (1985) die LAPLACE-Transformation auf die erhaltenen partiellen Differentialgleichungen, welche die variable Filmgeschwindigkeit berücksichtigen, an. Im LAPLACE-Bereich löste Conlisk (1992) die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten unter Anwendung der parabolischen Zylinderfunktion. Allerdings stellt Conlisk (1992) fest, dass die erhaltenen Lösungen im LAPLACE-Bereich für eine Rücktransformation in den reellen Zahlenbereich zu kompliziert sind. Aus diesem Grund wendet Conlisk (1992) numerische Methoden für die Rücktransformation aus dem LAPLACE-Bereich an (Honig und Hirdes, 1984). Auf diese Weise erhält Conlisk (1992) Lösungen für die isotherme Wand und eine von ihm aufgeprägte sich mit der Wurzel der Strömungskordinate verändernden Wandtemperatur. Er berichtet von sehr guten Übereinstimmungen mit experimentellen Werten (persönliche Mitteilungen von Miller 1991 und 1992) und dass dieses numerische Vorgehen sich sehr robust gegen große Gradienten zeigt. Nichtsdestotrotz spricht Conlisk (1992) auch von einer starken Abweichung zwischen einem experimentellen

Datensatz und der berechneten Salzlösungstemperatur im Kern, deren Ursache ihm unklar ist. Bei seinem Vorgehen geht Conlisk aufgrund des Vergleichs der dimensionslosen Kennzahlen davon aus, dass der Stofftransport lediglich in einer oberflächennahen Schicht abläuft. Diese Hypothese bewegt ihn dazu, in einer weiteren Veröffentlichung (Conlisk, 1995) ein komplett analytisches Lösungsverfahren für das gekoppelte Wärme- und Stofftransportproblem vorzuschlagen, um einerseits den Rechenaufwand im Vergleich zu numerischen Methoden zu verringern und andererseits keine freien Parameter wie empirische Wärme- und Stofftransportkoeffizienten zu benötigen. Dafür nimmt er neben der oberflächennahen Grenzschicht für den Stofftransport das Temperaturprofil im Film als ausgebildetes und von dem strömenden Film unbeeinträchtigt und daher lineares Temperaturprofil über der Filmdickenkoordinate an, was er mit den Ergebnissen seiner Vorarbeiten (Conlisk, 1992) begründet. Für den lediglich an der Filmoberfläche stattfindenden Stofftransport wendet Conlisk (1995) die analytische Lösung des Problems der singulären Störung für das dimensionslose Massenanteilsprofil in der stofflichen Grenzschicht an. Somit erhält er einen analytischen Ausdruck für den an der Filmoberfläche absorbierten Massenstrom unter den getroffenen Annahmen und für eine konstante Wandtemperatur. Aus seinen Ergebnissen schlussfolgert er, dass die Absorption vom Stofftransportwiderstand dominiert wird, wobei genau dies eine Grundannahme für die von ihm vorgestellte analytische Lösung ist. Eine Erweiterung dieses Modells um den Stofftransport im Dampfraum, wie z.B. für das Stoffgemisch Wasser-Ammoniak, stellen Conlisk und Mao (1996) vor. Darüber hinaus betrachten sie die Strömung des Salzlösungsfilms über ein horizontales Rohr im Gegensatz zu den zuvor betrachteten Filmströmungen am Vertikalrohr. Über eine Massenbilanz an der Phasengrenzfläche stellen Conlisk und Mao (1996) einen Zusammenhang zwischen den Massenanteilsprofilen im Dampf und im Film her und verwenden diesen Zusammenhang als veränderte Randbedingung für die Lösung des Massenanteilsprofils im Film. Mit Hilfe einer von ihnen als FOURIER-Kosinus Transformation bezeichneten Umformung lösen sie das Problem im Bildbereich und nach der Rücktransformation erhalten sie algebraische Gleichungen, jedoch mit noch zu lösenden Integralen in der Zeit. Conlisk und Mao (1996) sprechen von einer punktweisen Lösung des absorbierten Massenstroms, ohne dies genau zu spezifizieren.

Die hier vorgestellten Modelle und analytischen sowie numerischen Lösungsmethoden für die Absorption im laminaren Rieselfilm stellen eine Auswahl dar. Diese Darstellung soll einen Überblick insbesondere über die Bestrebungen und Entwicklungen der analytischen Methoden geben. Auf den Stand zur numerischen Simulation der Filmströmung ist an dieser Stelle bewusst verzichtet worden, da das hier vorgestellte Modell aufgrund der starken hydrodynamischen Vereinfachungen keinen Erkenntnisbeitrag in diesem Gebiet liefern kann. Allerdings kann die hier vorgestellte einfach zu implementierende Lösung mit stark vereinfachter Hydrodynamik als Referenz für kompliziertere numerische Wärme- und Stofftransportsimulationen dienen.

Die Anwendung der LAPLACE-Transformation und die Lösung der Modellgleichungen für verschiedene thermische Wandrandbedingungen wird im nun folgenden Kapitel vorgestellt.

## Kapitel 4

# Analytische Lösung mit Hilfe der LAPLACE-Transformation

In diesem Abschnitt wird eine vielseitige analytische Lösungsmethode für die partiellen Differentialgleichungen des gekoppelten Wärme- und Stofftransportes (2.48) und (2.49) bei der laminaren Rieselfilmabsorption vorgestellt. Hierzu werden die partiellen Differentialgleichungen mittels der LAPLACE-Transformation, wie im Anhang B.2 am Beispiel des Temperaturfeldes beschrieben, zunächst in gewöhnliche Differentialgleichungen umgeformt, dann im LAPLACE-Bereich gelöst und schließlich werden diese Lösungen in den reellen Zahlenbereich zurück transformiert. Bei der LAPLACE-Transformation handelt es sich um eine Integraltransformation. Die allgemeine Transformationsvorschrift lautet:

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-z \cdot x} \cdot dx \quad x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

Die allgemeine Vorschrift für die Rücktransformation einer Funktion aus dem Bildbereich lautet:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{\omega - i \cdot \infty}^{\omega + i \cdot \infty} e^{z \cdot x} \cdot F(z) \cdot dz. \quad (4.2)$$

Die mathematischen Umformungen zur Durchführung der LAPLACE-Transformation sind weithin bekannt und finden insbesondere in der Regelungstechnik zur Transformation physikalischer Streckenmodelle häufig Anwendung.

Weitaus weniger bekannt und geläufig ist die Anwendung der Rücktransformation. Diese wird daher in dieser Arbeit nach dem von Baehr (1955) präsentierten Verfahren ausführlich dargestellt. Die mathematischen Grundlagen für die Anwendung dieses Verfahrens bei der Rücktransformation sind zusammengefasst im Anhang B.3 zu finden.

## 4.1 LAPLACE-Transformation der partiellen Differentialgleichungen

Die LAPLACE-Transformierten der dimensionslosen partiellen Differentialgleichungen (2.48) und (2.49) aus Abschnitt 2.2 lauten wie folgt:

$$-\Theta_0 = \frac{\partial^2 \Theta(z, \eta)}{\partial \eta^2} - z \cdot \Theta(z, \eta), \quad (4.3)$$

$$-\gamma_0 = \frac{1}{\text{Le}} \frac{\partial^2 \gamma(z, \eta)}{\partial \eta^2} - z \cdot \gamma(z, \eta). \quad (4.4)$$

Die reelle dimensionslose Strömungskordinate  $\xi$  geht im LAPLACE-Bereich in die komplexe Variable  $z$  über. Die partiellen Ableitungen nach  $\xi$  im Bereich der reellen Zahlen gehen im komplexen LAPLACE-Bereich in einen algebraischen Zusammenhang (vgl. (B.10)) über.

Da die Entdimensionierung als Differenz zu den jeweiligen Eintrittswerten  $T_0, c_0$  erfolgt, sind  $\Theta_0 = \gamma_0 = 0$  und die formalen Lösungen dieser beiden dadurch homogenen, gewöhnlichen Differentialgleichungen lauten wie folgt:

$$\Theta(z, \eta) = C_1 \cdot e^{\sqrt{z} \cdot \eta} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{z} \cdot \eta}, \quad (4.5)$$

$$\gamma(z, \eta) = C_3 \cdot e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}} \cdot \eta} + C_4 \cdot e^{-\sqrt{z \cdot \text{Le}} \cdot \eta}. \quad (4.6)$$

Die formalen Lösungen (4.5) und (4.6) stellen den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit dar.

Diese formalen Lösungen im LAPLACE-Bereich beinhalten bereits die Anfangsbedingungen  $\Theta_0 = \gamma_0 = 0$ . Die noch unbekanntenen vier Integrationskonstanten werden durch vier Randbedingungen bestimmt. Diese Randbedingungen müssen zuvor jedoch ebenfalls in den LAPLACE-Bereich transformiert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene thermische Randbedingungen an der Wand angewendet und mit Lösungen aus der Literatur sowie untereinander verglichen. Im Gegensatz zur FOURIER-Methode ergeben sich durch

das hier verwendete Lösungsverfahren keinerlei Beschränkungen bei der Auswahl der thermischen Wandrandbedingungen. Die Randbedingungen an der Phasengrenzfläche und die Randbedingung der impermeablen Wand für den Stofftransport bleiben identisch mit denen von Nakoryakov et al. (1997).

Um das hier vorgestellte Lösungsverfahren mit den Lösungen der FOURIER-Methode vergleichen und validieren zu können, werden zuerst die von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) verwendeten thermischen Wandrandbedingungen angewendet, d.h. die isotherme oder die adiabate Wand.

Anschließend wird die für technische Anwendungen realistischere Randbedingung der diabaten Wand mit konstanten thermischen Widerständen der Wand und des externen Fluids angewendet. Die erhaltene Lösung wird mit den zwei Grenzfällen für den thermischen Widerstand verglichen. Zum einen für einen unendlichen thermischen Widerstand (adiabate Wand) und zum anderen für einen verschwindenden thermischen Widerstand (isotherme Wand).

## 4.2 Anwendung der transformierten Randbedingungen

An dieser Stelle werden die von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) eingeführten Randbedingungen noch einmal aufgelistet und in den LAPLACE-Bereich transformiert. Dabei befindet sich der Ursprung der dimensionslosen transversalen Koordinate  $\eta$  an der Filmoberfläche und zeigt zur Wand, wie in Abbildung 2.1 dimensionsbehafet eingezeichnet.

Für den Stofftransport nehmen Grigor'eva und Nakoryakov (1977) die Wand als impermeabel an:

$$\frac{\partial c}{\partial y}(y = \delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}(\eta = 1) = 0 \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}(\eta = 1) = \frac{0}{z} = 0. \quad (4.7)$$

Als Randbedingung an der Phasengrenzfläche,  $y = 0$  (Index ,i'), approximieren Grigor'eva und Nakoryakov (1977) das Phasengleichgewicht über einen linearen Zusammenhang der isobaren Siedetemperatur der Salzlösung in Ab-

hängigkeit vom Absorbatmassenanteil:

$$\begin{aligned}
 T(x, y = 0) &= A - B \cdot c(x, y = 0) \\
 \Rightarrow \Theta(\xi, \eta = 0) &= 1 - \gamma(\xi, \eta = 0) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \Theta(z, \eta = 0) = \frac{1}{z} - \gamma(z, \eta = 0).
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Des Weiteren nehmen sie an, dass die gesamte, an der Filmoberfläche freigesetzte Absorptionswärme durch reine Wärmeleitung in den Lösungsfilm geleitet wird:

$$\begin{aligned}
 \lambda \frac{\partial T}{\partial y}(x, y = 0) &= \rho D \frac{\partial c}{\partial y}(x, y = 0) \Delta h_{abs} \\
 \Rightarrow \text{LeSt} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\xi, \eta = 0) &= \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}(\xi, \eta = 0) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{LeSt} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(z, \eta = 0) = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}(z, \eta = 0).
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Diese beiden Randbedingungen an der Filmoberfläche stellen in diesem Modell die einzige Kopplung zwischen der Filmtemperatur und dem Absorbatmassenanteil im Film dar.

Die thermische Wandrandbedingung wird von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) aufgrund des mathematischen Lösungsverfahrens entweder als isotherm oder als adiabat gesetzt. Für die isotherme Wand ergibt sich folgende Randbedingung im LAPLACE-Bereich:

$$T(x, y = \delta) = T_W = \text{const.} \Rightarrow \Theta(\xi, \eta = 1) = \Theta_W \quad \circ \text{---} \bullet \quad \Theta(z, \eta = 1) = \frac{\Theta_W}{z}.
 \tag{4.10}$$

Im Falle der adiabaten Wand verschwindet der Temperaturgradient an der Wand:

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y = \delta) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\xi, \eta = 1) = 0 \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(z, \eta = 1) = \frac{0}{z} = 0.
 \tag{4.11}$$

Im Folgenden werden durch Anwendung dieser Randbedingungen die Lösungen des Problems im LAPLACE-Bereich sowohl für die isotherme, als auch für die adiabate Wand hergeleitet. Anschließend wird die Lösung für die diabate Wandrandbedingung vorgestellt.

### 4.2.1 Anwendung der Randbedingungen im LAPLACE-Bereich

Zu Beginn werden drei der vier unbekanntenen Integrationskonstanten ermittelt. Dies geschieht mit Hilfe der für alle thermischen Wandmodelle gleichen Randbedingungen, d.h. mittels der Randbedingung der impermeablen Wand sowie der beiden Randbedingungen an der Phasengrenzfläche. Somit werden allgemeine Lösungen für das Temperatur- und Absorbatmassenanteilsprofil erhalten, die allerdings eine noch zu bestimmende Integrationskonstante enthalten. Diese Integrationskonstante wird durch die Vorgabe der thermischen Wandrandbedingung ermittelt.

Es werden auch die Ableitungen der allgemeinen Lösungsfunktionen benötigt:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \sqrt{z} \cdot (C_1 \cdot e^{\sqrt{z} \cdot \eta} - C_2 \cdot e^{-\sqrt{z} \cdot \eta}), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \sqrt{z \cdot \text{Le}} \cdot (C_3 \cdot e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}} \cdot \eta} - C_4 \cdot e^{-\sqrt{z \cdot \text{Le}} \cdot \eta}). \quad (4.13)$$

Mit Hilfe der Randbedingung der impermeablen Wand (4.7) wird die Integrationskonstante  $C_4$  eliminiert:

$$C_4 = C_3 \cdot \frac{e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}}}}{e^{-\sqrt{z \cdot \text{Le}}}} \text{ eingesetzt in (4.6),} \quad (4.14)$$

$$\gamma(z, \eta) = 2 \cdot C_3 \cdot e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}}} \cdot \cosh\left(\sqrt{z \cdot \text{Le}}(\eta - 1)\right). \quad (4.15)$$

Unter Verwendung der beiden Randbedingungen an der Phasengrenzfläche bei  $\eta = 0$  können zwei weitere Beziehungen zwischen den drei verbleibenden Integrationskonstanten aufgestellt werden. Hierzu werden (4.5) und (4.15) in die Randbedingungen (4.8) und (4.9) eingesetzt:

$$\frac{1}{z} = C_1 + C_2 + 2 \cdot C_3 \cdot e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}}} \cdot \cosh\left(\sqrt{z \cdot \text{Le}}\right), \quad (4.16)$$

$$-2 \cdot C_3 \cdot e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}}} \cdot \sinh\left(\sqrt{z \cdot \text{Le}}\right) = \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cdot (C_1 - C_2). \quad (4.17)$$

Dabei wurde die Achsensymmetrie des Kosinus Hyperbolicus sowie die Punktsymmetrie des Sinus Hyperbolicus bereits angewendet und die Vorzeichen entsprechend angepasst. Um das Temperaturfeld weiter vereinfachen zu können und eine Beziehung zwischen den beiden Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  herzustellen,

werden (4.16) und (4.17) jeweils nach  $2 \cdot C_3 \cdot e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}}}$  umgestellt und gleichgesetzt:

$$\frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cdot (C_2 - C_1)}{\sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})} = \frac{\left(\frac{1}{z} - C_1 - C_2\right)}{\cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})}, \quad (4.18)$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})}{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})} \cdot C_2 - \frac{\sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})}{z \cdot \left(\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})\right)}. \quad (4.19)$$

Mit Hilfe des Zusammenhangs (4.19) kann auch  $2 \cdot C_3 \cdot e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}}}$  in Abhängigkeit von der letzten verbleibenden Integrationskonstanten  $C_2$  ausgedrückt werden, indem (4.19) in Gleichung (4.17) eingesetzt wird:

$$2 \cdot C_3 \cdot e^{\sqrt{z \cdot \text{Le}}} = \frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} (1 - 2 \cdot C_2 \cdot z)}{z \cdot \left(\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})\right)}. \quad (4.20)$$

Durch Einsetzen von (4.19) in (4.5) sowie von (4.20) in (4.15) werden die allgemeinen Lösungen für das Temperatur- (4.21) und Massenanteilsfeld (4.22) mit nur noch einer unbekanntem Integrationskonstanten  $C_2$  erhalten:

$$\begin{aligned} \Theta(z, \eta) = & 2 \cdot C_2 \cdot \frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z} \eta) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z} \eta)}{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})} \\ & - \frac{\sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cdot e^{\sqrt{z} \eta}}{z \cdot \left(\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})\right)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\gamma(z, \eta) = \frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} (1 - 2 \cdot C_2 \cdot z) \cdot \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}(\eta - 1))}{z \cdot \left(\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})\right)}. \quad (4.22)$$

Die noch unbekanntem Integrationskonstante  $C_2$  wird im Folgenden durch die Anwendung der thermischen Wandrandbedingung festgelegt. Es werden erst die thermischen Grenzfälle der adiabaten und der isothermen Wand angewendet, um anschließend die Lösung für eine diabate Wand im LAPLACE-Bereich zu ermitteln.

### 4.2.2 Adiabate Wand

Im Fall der adiabaten Wand verschwindet der Temperaturgradient an der Wand (4.11). Gleichung (4.21) wird nach der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  abgeleitet und diese Ableitung an der Stelle  $\eta = 1$  entsprechend der Randbedingung zu Null gesetzt. Für  $2 \cdot C_2$  ergibt sich folgender Zusammenhang für die adiabate Wand:

$$2 \cdot C_2 = \frac{\sinh(\sqrt{z \cdot Le}) \cdot e^{\sqrt{z}}}{z \cdot \left( \sqrt{Le} \tilde{St} \cosh(\sqrt{z \cdot Le}) \sinh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z \cdot Le}) \cosh(\sqrt{z}) \right)}. \quad (4.23)$$

Dieser Ausdruck für  $2 \cdot C_2$  wird in (4.21) eingesetzt, sämtliche Terme auf einen Hauptnenner gebracht und so weit wie möglich zusammengefasst. Dies wird an dieser Stelle für den Fall der adiabaten Wand ausführlich erläutert und mit Nebenrechnungen exemplarisch gezeigt. Für die darauffolgenden thermischen Randbedingungen wird dies analog durchgeführt und lediglich im Text beschrieben.

Durch Einsetzen von  $2 \cdot C_2$  in die formale Lösung des Temperaturfeldes (4.21) wird folgender Ausdruck erhalten:

$$\begin{aligned} \Theta(z, \eta) = & \left[ e^{\sqrt{z}} \sinh(\sqrt{zLe}) \left( \sqrt{Le} \tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) \cosh(\sqrt{z}\eta) + \sinh(\sqrt{zLe}) \right. \right. \\ & \cdot \left. \sinh(\sqrt{z}\eta) \right) - e^{\sqrt{z}\eta} \sinh(\sqrt{zLe}) \left( \sqrt{Le} \tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) \sinh(\sqrt{z}) \right. \\ & \left. \left. + \sinh(\sqrt{zLe}) \cosh(\sqrt{z}) \right) \right] \cdot \left[ z \left( \sqrt{Le} \tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) - \sinh(\sqrt{zLe}) \right) \right. \\ & \left. \cdot \left( \sqrt{Le} \tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) \sinh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{zLe}) \cosh(\sqrt{z}) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Hyperbolicus Funktionen im Zähler werden mit den jeweiligen Exponentialfunktionen multipliziert, um die Terme weiter zusammenfassen zu können. Dadurch ergeben sich folgende Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned} & e^{\sqrt{z}} \cosh(\sqrt{z}\eta) - e^{\sqrt{z}\eta} \sinh(\sqrt{z}) \\ &= \frac{e^{\sqrt{z}}}{2} \left( e^{\sqrt{z}\eta} + e^{-\sqrt{z}\eta} \right) - \frac{e^{\sqrt{z}\eta}}{2} \left( e^{\sqrt{z}} - e^{-\sqrt{z}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{\sqrt{z}(\eta+1)} + e^{-\sqrt{z}(\eta-1)} - e^{\sqrt{z}(\eta+1)} + e^{\sqrt{z}(\eta-1)} \right) \\ &= \cosh(\sqrt{z}(\eta-1)) \end{aligned} \quad (4.25)$$

und

$$\begin{aligned}
& e^{\sqrt{z}} \sinh(\sqrt{z}\eta) - e^{\sqrt{z}\eta} \cosh(\sqrt{z}) \\
&= \frac{e^{\sqrt{z}}}{2} \left( e^{\sqrt{z}\eta} - e^{-\sqrt{z}\eta} \right) - \frac{e^{\sqrt{z}\eta}}{2} \left( e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( e^{\sqrt{z}(\eta+1)} - e^{-\sqrt{z}(\eta-1)} - e^{\sqrt{z}(\eta+1)} - e^{\sqrt{z}(\eta-1)} \right) \\
&= -\cosh(\sqrt{z}(\eta-1)).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Der Zähler von (4.24) kann dadurch folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
\Theta(z, \eta) &= \\
& \left[ \sinh(\sqrt{zLe}) \cdot \cosh(\sqrt{z}(\eta-1)) \left( \sqrt{Le}\tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) - \sinh(\sqrt{zLe}) \right) \right] \\
& \cdot \left[ z \left( \sqrt{Le}\tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) - \sinh(\sqrt{zLe}) \right) \left( \sqrt{Le}\tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) \sinh(\sqrt{z}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \sinh(\sqrt{zLe}) \cosh(\sqrt{z}) \right) \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Durch Kürzen des ersten Klammersausdrucks im Nenner wird die Lösung des Temperaturfeldes für die adiabate Wandrandbedingung im LAPLACE-Bereich erhalten:

$$\Theta(z, \eta) = \frac{\sinh(\sqrt{zLe}) \cdot \cosh(\sqrt{z}(\eta-1))}{z \left( \sqrt{Le}\tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) \sinh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{zLe}) \cosh(\sqrt{z}) \right)}. \tag{4.28}$$

Die Lösung für den dimensionslosen Absorbatmassenanteil wird erhalten, indem (4.23) in (4.22) eingesetzt, der Klammersausdruck im Zähler  $(1 - 2 \cdot C_2 \cdot z)$  auf den gleichen Nenner gebracht wird und wiederum sämtliche Terme zusammengefasst werden. Der nach dem Einsetzen auf den gleichen Nenner gebrachte Klammersausdruck  $(1 - 2 \cdot C_2 \cdot z)$  lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
& (1 - 2 \cdot C_2 \cdot z) \\
&= \frac{\sqrt{Le}\tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) \sinh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{zLe}) \cosh(\sqrt{z})}{\sqrt{Le}\tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) \sinh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{zLe}) \cosh(\sqrt{z})} \\
&- \frac{\sinh(\sqrt{zLe}) \cdot e^{\sqrt{z}}}{\sqrt{Le}\tilde{St} \cosh(\sqrt{zLe}) \sinh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{zLe}) \cosh(\sqrt{z})}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Die letzten beiden Terme im Zähler lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \cosh(\sqrt{z}) - e^{\sqrt{z}} &= \frac{e^{\sqrt{z}}}{2} + \frac{e^{-\sqrt{z}}}{2} - e^{\sqrt{z}} \\ &= -\frac{e^{\sqrt{z}}}{2} + \frac{e^{-\sqrt{z}}}{2} = -\sinh(\sqrt{z}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Somit lässt sich der Klammerausdruck  $(1 - 2 \cdot C_2 \cdot z)$  wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} (1 - 2 \cdot C_2 \cdot z) &= \frac{\sinh(\sqrt{z}) \left( \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cosh(\sqrt{z\text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z\text{Le}}) \right)}{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cosh(\sqrt{z\text{Le}}) \sinh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z\text{Le}}) \cosh(\sqrt{z})}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Wird der so vereinfachte Klammerausdruck (4.31) in (4.22) eingesetzt und die Summe im Zähler von (4.31) mit der Summe im Nenner von (4.22) gekürzt, ergibt sich die Lösung für den dimensionslosen Absorbatmassenanteil für die adiabate Wandrandbedingung im LAPLACE-Bereich wie folgt:

$$\gamma(z, \eta) = \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \sinh(\sqrt{z}) \cosh(\sqrt{z}(\eta - 1))}{z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cosh(\sqrt{z\text{Le}}) \sinh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z\text{Le}}) \cosh(\sqrt{z}) \right)}. \quad (4.32)$$

### 4.2.3 Isotherme Wand

Die Randbedingung der isothermen Wand wurde bereits in den LAPLACE-Bereich transformiert (4.10). Die Integrationskonstante  $C_2$  wird analog zum Vorgehen bei der adiabaten Wandrandbedingung durch Anwendung von (4.10) auf (4.21) erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_W}{z} &= 2 \cdot C_2 \cdot \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}})} \\ &\quad - \frac{\sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cdot e^{\sqrt{z}}}{z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \right)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Somit lässt sich  $2 \cdot C_2$  für die isotherme Wand folgendermaßen ausdrücken:

$$2 \cdot C_2 = \frac{\Theta_W}{z} \frac{\left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \right)}{\left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z}) \right)} + \frac{\sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cdot e^{\sqrt{z}}}{z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z}) \right)}. \quad (4.34)$$

Wird (4.34) in (4.21) eingesetzt, der so erhaltene Ausdruck auf einen Hauptnenner gebracht und analog zum Vorgehen bei der adiabaten Wand die Hyperbolicusfunktionen mit den jeweiligen Exponentialfunktionen multipliziert und zusammengefasst, geht das Temperaturfeld der isothermen Wand im LAPLACE-Bereich in die folgende Form über:

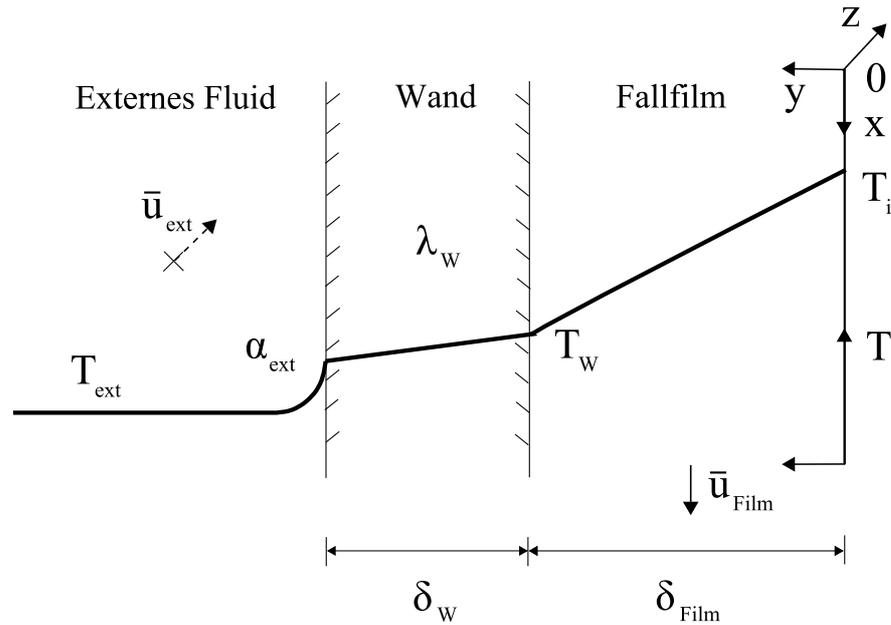
$$\Theta(z, \eta) = \frac{\Theta_W}{z} \frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z} \eta) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z} \eta)}{\left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z}) \right)} - \frac{\sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cdot \sinh(\sqrt{z}(\eta - 1))}{z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z}) \right)}. \quad (4.35)$$

Auch die Lösung für den dimensionslosen Absorbatmassenanteil im LAPLACE-Bereich wird durch Einsetzen von (4.34) in (4.22) erhalten und lautet nach einigen Umformungen und Vereinfachungen wie folgt:

$$\gamma(z, \eta) = \frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} (\cosh(\sqrt{z}) - \Theta_W) \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}(\eta - 1))}{z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z}) + \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z}) \right)}. \quad (4.36)$$

#### 4.2.4 Diabate Wand

Abbildung 4.1 zeigt schematisch eine Nahansicht einer einseitig berieselten und auf der anderen Seite gekühlten Platte als Modell einer typischen technischen Realisierung eines von Kühlwasser durchströmten und von Salzlösung berieselten Horizontalrohrs mit dem qualitativ dargestellten Temperaturprofil. Auf der rechten Seite des Bildes wird die Filmoberfläche durch die freigesetzte Absorptionswärme auf die Oberflächentemperatur  $T_i$  erhitzt. Diese Wärme wird



**Abbildung 4.1:** Schematische Darstellung des Modells der diabaten Wand und eines qualitativen Temperaturverlaufs während des Absorptionsprozesses

in dem hier verwendeten physikalischen Modell durch Wärmeleitung durch den Fallfilm zur Wand transportiert, während der Film, der Schwerkraft folgend, senkrecht an der Wand mit der konstanten Filmgeschwindigkeit  $\bar{u}_{Film}$  herunterfließt. Ebenfalls durch Wärmeleitung wird die Wärme durch die Wand transportiert und konvektiv an das auf der linken Bildseite horizontal strömende externe Fluid abgegeben. Dieser Wärmeleitvorgang in der Wand findet ausschließlich quer zur Filmströmungsrichtung statt. Eine Wärmeleitung in die anderen Raumrichtungen wird vernachlässigt.

Als thermische Wandrandbedingung wird im Folgenden ein partieller Wärmedurchgang durch die Wand und an das externe Medium modelliert:

$$U' \cdot (T_{ext} - T(y = \delta_{Film}, x)) = \lambda_{Film} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}(y = \delta_{Film}, x). \quad (4.37)$$

Der partielle Wärmedurchgangskoeffizient  $U'$  beinhaltet den Wärmewiderstand der Wand sowie den Wärmewiderstand des Wärmeübergangs an das externe Medium:

$$U' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{ext}} + \frac{\delta_w}{\lambda_w}}. \quad (4.38)$$

Bei der Anwendung von (4.37) werden sämtliche thermische Trägheitseffekte der Wand sowie des externen Mediums nicht berücksichtigt, da es sich bei

dieser Form der Wärmedurchgangsbetrachtung um eine eindimensionale, stationäre Modellierung handelt.

Aufgrund der Anordnung im Kreuzstrom wird die externe Fluidtemperatur  $T_{ext}$  als konstant und unabhängig von der Filmströmungskordinate  $x$  angenommen.

Die Wandtemperatur  $T_W$  ändert sich jedoch in Abhängigkeit von der vom externen Fluid aufgenommenen Wärme im Vergleich zu der filmseitig herantransportierten Wärme, die lediglich vom filmseitigen Wandtemperaturgradienten abhängt.

Die Entdimensionierung von (4.37) bringt einen weiteren dimensionslosen Term zum Vorschein, welcher im Weiteren als modifizierte Biot-Zahl,  $\tilde{\text{Bi}}$ , bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Bi}} \cdot (\Theta_{ext} - \Theta(\eta = 1, \xi)) &= \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\eta = 1, \xi) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \tilde{\text{Bi}} \cdot \left( \frac{\Theta_{ext}}{z} - \Theta(\eta = 1, z) \right) \\ &= \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\eta = 1, z), \end{aligned} \quad (4.39)$$

mit

$$\tilde{\text{Bi}} = \frac{\frac{\delta_{Film}}{\lambda_{Film}}}{\frac{1}{U'}}. \quad (4.40)$$

Die modifizierte Biot-Zahl,  $\tilde{\text{Bi}}$ , ist das Verhältnis aus dem Wärmeleitungswiderstand des Films  $\delta_{Film}/\lambda_{Film}$  und dem partiellen Wärmedurchgangswiderstand der Wand  $1/U'$ . Eine große modifizierte Biot-Zahl bedeutet demnach, dass der Wärmeleitungswiderstand des Films gegenüber dem thermischen Widerstand der Wand samt des externen Mediums dominiert. Für  $\tilde{\text{Bi}} \rightarrow \infty$  geht diese Randbedingung in den Grenzfall der isothermen Wand über. Umgekehrt bedeutet eine sehr kleine modifizierte Biot-Zahl, dass der thermische Widerstand der Wand gegenüber dem des Films dominiert. Dementsprechend wird für  $\tilde{\text{Bi}} = 0$  die Randbedingung der adiabaten Wand erhalten.

Die umgestellte transformierte Randbedingung der diabaten Wand:

$$\tilde{\text{Bi}} \cdot \frac{\Theta_{ext}}{z} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\eta = 1, z) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \Theta(\eta = 1, z), \quad (4.41)$$

wird auf (4.21) angewendet

$$\begin{aligned}
\tilde{\text{Bi}} \cdot \frac{\Theta_{ext}}{z} &= 2 \cdot C_2 \cdot \frac{\left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \left( \sqrt{z} \sinh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \cosh(\sqrt{z}) \right) \right)}{\left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \right)} \\
&+ 2 \cdot C_2 \cdot \frac{\sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \left( \sqrt{z} \cosh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \sinh(\sqrt{z}) \right)}{\left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \right)} \\
&- \frac{\sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) e^{\sqrt{z}} \left( \sqrt{z} + \tilde{\text{Bi}} \right)}{z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \cdot \text{Le}}) \right)}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Die noch unbekannte Integrationskonstante  $2 \cdot C_2$  ergibt sich für die diabate Wandrandbedingung zu:

$$\begin{aligned}
2 \cdot C_2 &= \left[ \tilde{\text{Bi}} \cdot \Theta_{ext} \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \text{Le}}) - \sinh(\sqrt{z \text{Le}}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sinh(\sqrt{z \text{Le}}) e^{\sqrt{z}} \left( \sqrt{z} + \tilde{\text{Bi}} \right) \right] \\
&\cdot \left[ z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \text{Le}}) \left( \sqrt{z} \sinh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \cosh(\sqrt{z}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sinh(\sqrt{z \text{Le}}) \left( \sqrt{z} \cosh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \sinh(\sqrt{z}) \right) \right) \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Wird (4.43) in (4.21) eingesetzt, der so erhaltene Ausdruck auf einen Hauptnenner gebracht und zusammengefasst, ergibt sich die Lösung des dimensionslosen Temperaturfeldes für die diabate Wandrandbedingung im LAPLACE-Bereich zu:

$$\begin{aligned}
\Theta(z, \eta) &= \\
&\left[ \tilde{\text{Bi}} \cdot \Theta_{ext} \cdot \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \text{Le}}) \cosh(\sqrt{z} \eta) + \sinh(\sqrt{z \text{Le}}) \sinh(\sqrt{z} \eta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sinh(\sqrt{z \text{Le}}) \cdot \left( \sqrt{z} \cosh(\sqrt{z} (\eta - 1)) - \tilde{\text{Bi}} \sinh(\sqrt{z} (\eta - 1)) \right) \right] \\
&\cdot \left[ z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh(\sqrt{z \text{Le}}) \left( \sqrt{z} \sinh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \cosh(\sqrt{z}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sinh(\sqrt{z \text{Le}}) \left( \sqrt{z} \cosh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \sinh(\sqrt{z}) \right) \right) \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Für die Lösung des Massenanteilsfeld im LAPLACE-Bereich für die diabate Wand ergibt sich durch Einsetzen von (4.43) in (4.22) und einigen Zusammenfassungen folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \gamma(z, \eta) = & \\ & \left[ \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \left( \sqrt{z} \sinh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cosh(\sqrt{z}) - \tilde{\text{Bi}} \cdot \Theta_{ext} \right) \cdot \cosh \left( \sqrt{z \text{Le}} (\eta - 1) \right) \right] \\ & \cdot \left[ z \cdot \left( \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cosh \left( \sqrt{z \text{Le}} \right) \left( \sqrt{z} \sinh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \cosh(\sqrt{z}) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sinh \left( \sqrt{z \text{Le}} \right) \left( \sqrt{z} \cosh(\sqrt{z}) + \tilde{\text{Bi}} \cdot \sinh(\sqrt{z}) \right) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ein Vergleich der im LAPLACE-Bereich erhaltenen Lösungen für die adiabate, isotherme und der diabaten Wandrandbedingung zeigt, dass der Nennerterm in (4.44) der diabaten Wand rein mathematisch eine Überlagerung der beiden Nennerterme der thermischen Grenzfälle, d.h. der adiabaten (4.28) und der isothermen (4.35) Wand darstellt. Dabei wird in (4.44) der isotherme Nennerterm mit der modifizierten Biot-Zahl,  $\tilde{\text{Bi}}$ , und der adiabate Nennerterm mit  $\sqrt{z}$  skaliert.

Im folgenden Abschnitt werden die Lösungen für die unterschiedlichen Wandrandbedingungen im LAPLACE-Bereich nach einer Anleitung von Baehr (1955) zurück in den reellen Zahlenbereich transformiert.

### 4.3 Rücktransformation in den reellen Bereich

Im Anhang B.3 sind die mathematischen Grundlagen für Rücktransformation nach Baehr (1955) zusammengefasst. Mit Hilfe des Residuensatzes wird das komplexe Integral (4.2) für die Rücktransformation in den Bereich der reellen Zahlen durch die Summe der Residuen gelöst:

$$F(\eta, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Res} [e^{z \cdot \xi} \cdot F(\eta, z)]_{z=z_k} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{\omega-i \cdot \infty}^{\omega+i \cdot \infty} e^{z \cdot \xi} \cdot F(\eta, z) \cdot dz. \quad (4.46)$$

Die Rücktransformation läuft dabei folgendermaßen ab:

1. Bestimmung aller Polstellen der Funktionen im LAPLACE-Bereich,

2. Bestimmung der Residuen dieser Polstellen,
3. Aufsummierung aller Residuen gemäß (4.46).

### 4.3.1 Bestimmung der Polstellen

Das Vorgehen bei der Polstellensuche orientiert sich an der von Baehr (1955) vorgeschlagenen Methode. Hierzu wird die Lösung im LAPLACE-Bereich als gebrochene rationale Funktion dargestellt:

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}. \quad (4.47)$$

In den weiteren Ausführungen wird die Zählerfunktion mit  $f(z)$  und die Nennerfunktion entsprechend mit  $g(z)$  gekennzeichnet. Die Nullstellen der jeweiligen Nennerfunktion  $g(z)$  sind die Polstellen der Funktion  $F(z)$ . Für die unterschiedlichen Wandrandbedingungen in Bezug auf den Wärmetransport ergeben sich jeweils andere Nennerfunktionen  $g(z)$ , die aber für das Massenanteilsprofil und das Temperaturprofil für die entsprechende thermische Randbedingung jeweils gleich sind.

#### Nennernullstellen für die adiabate Wand

Der Nennerterm der Lösung des Massenanteilsprofils (4.32) sowie des Temperaturprofils (4.28) für die adiabate Wand lautet:

$$g_{adia}(z) = z \cdot \left( \cosh(\sqrt{z}) \sinh(\sqrt{zLe}) + \sqrt{Le\tilde{St}} \cdot \sinh(\sqrt{z}) \cosh(\sqrt{zLe}) \right). \quad (4.48)$$

Unter Verwendung der im Anhang B.4 aufgeführten Zusammenhänge wird der Nennerterm (4.48) folgendermaßen umgeformt:

$$g_{adia}(z) = z \cdot \left( \frac{\sqrt{Le\tilde{St}} + 1}{2} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{Le})) + \frac{\sqrt{Le\tilde{St}} - 1}{2} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{Le})) \right). \quad (4.49)$$

Werden die hyperbolischen Funktionen durch äquivalente komplexe trigonometrische Funktionen ersetzt, ergibt sich:

$$g_{adia}(z) = -i \cdot z \cdot \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} + 1}}{2} \sin(i\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} - 1}}{2} \sin(i\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right). \quad (4.50)$$

Es existieren somit nach (4.50) unendlich viele Nullstellen des Nennerterms und somit auch unendlich viele Polstellen von  $F(z)$ . Das zur Polstelle  $z = 0$  zugehörige Residuum ergibt den asymptotischen Endzustand des Systems, da sich die Exponentialfunktion in (4.46) für  $z_0 = 0$  zu eins ergibt und die Abhängigkeit von der Strömungskordinate für dieses Residuum entfällt. Die Residuen der periodischen Nullstellen, die sich aus der Überlagerung der beiden Sinusschwingungen ergeben, stellen den  $\xi$ -abhängigen Anteil der Lösung im reellen Zahlenbereich dar.

Für  $\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \neq 1$  werden die Nullstellen der überlagerten Sinusschwingungen numerisch bestimmt. Für den Spezialfall  $\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} = 1$  verschwindet der zweite Sinusterm und die periodischen Nullstellen sind analytisch bestimmbar:

$$z_k = -\frac{k^2 \pi^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2} \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{und } \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} = 1. \quad (4.51)$$

### Nennernullstellen für die isotherme Wand

Der Nennerterm für die Randbedingung der isothermen Wand nach (4.35) und (4.36) wird ebenfalls in dessen komplexe trigonometrische Form überführt, um sämtliche Polstellen ermitteln zu können:

$$\begin{aligned} g_{iso}(z) &= z \cdot \left( \sinh(\sqrt{z}) \sinh(\sqrt{z\text{Le}}) + \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \cosh(\sqrt{z}) \cosh(\sqrt{z\text{Le}}) \right) \\ &= z \cdot \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} + 1}}{2} \cdot \cosh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} - 1}}{2} \cdot \cosh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \\ &= z \cdot \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} + 1}}{2} \cdot \cos(i\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} - 1}}{2} \cdot \cos(i\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Die periodischen Nullstellen sind ebenfalls nur für den Sonderfall  $\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} = 1$  analytisch bestimmbar:

$$z_{k+1} = -\frac{\left((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und } \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} = 1. \quad (4.53)$$

Für den Fall  $\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \neq 1$  wird die trigonometrische Form von (4.52) verwendet, um die periodischen Nullstellen numerisch zu finden.

### Nennernullstellen für die diabate Wand

Die Nullstellensuche mittels der komplexen trigonometrischen Form des Nennerterms der diabaten Wand (vgl. (4.44) und (4.45)) wird numerisch durchgeführt, da der Nennerterm eine Überlagerung von vier trigonometrischen Funktionen darstellt:

$$\begin{aligned}
g_{dia}(z) &= z \left( \tilde{\text{Bi}} \cdot \left( \sinh(\sqrt{z}) \sinh(\sqrt{z\text{Le}}) + \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \cosh(\sqrt{z}) \cosh(\sqrt{z\text{Le}}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{z} \left( \cosh(\sqrt{z}) \sinh(\sqrt{z\text{Le}}) + \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \sinh(\sqrt{z}) \cosh(\sqrt{z\text{Le}}) \right) \right) \\
&= z \left( \tilde{\text{Bi}} \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1}{2} \cosh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1}{2} \cosh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{z} \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1}{2} \sinh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1}{2} \sinh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right) \\
&= z \left( \tilde{\text{Bi}} \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1}{2} \cos(i\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1}{2} \cos(i\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right. \\
&\quad \left. - i\sqrt{z} \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1}{2} \sin(i\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1}{2} \sin(i\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right). \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Auch für den Fall  $\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} = 1$  bleibt eine Überlagerung aus einer Kosinus- und einer Sinusschwingung übrig, welche numerisch gelöst wird.

### 4.3.2 Bestimmung der Residuen der Polstellen

Für alle einfachen Polstellen  $z_k$  wird die von Baehr (1955) präsentierte Gleichung (4.55) für die Bestimmung der Residuen verwendet:

$$\text{Res} [e^{z \cdot \xi} \cdot F(z, y)]_{z=z_k} = \frac{f(z_k) \cdot e^{z_k \cdot \xi}}{[dg(z)/dz]_{z=z_k}}. \tag{4.55}$$

Für Polstellen höherer Ordnung, meist für  $z_0 = 0$ , kann (4.55) nicht verwendet werden. Für diesen mehrfachen Pol muss eine LAURENT-Reihe entwickelt

werden (Baehr, 1955):

$$e^{z\xi} \cdot F(z) = \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 \cdot z + \dots \quad (4.56)$$

Das Residuum für eine mehrfache Polstelle für  $z_0 = 0$  ist der Koeffizient  $a_{-1}$  aus der LAURENT-Reihe. Im Folgenden werden die Residuen sämtlicher Polstellen für die jeweiligen thermischen Randbedingungen der Wand bestimmt.

### Residuen für die adiabate Wand

Die zum asymptotischen Endwert gehörige Polstelle  $z_0 = 0$  für die adiabate Wand ist aufgrund der komplexen Sinusfunktionen im Nenner eine mehrfache Polstelle. Daher muss das zugehörige Residuum durch eine LAURENT-Reihenentwicklung bestimmt werden.

Hierfür werden die Zählerfunktionen  $f_{\gamma,adia}(z)$  und  $f_{\Theta,adia}(z)$  sowie die Nennerfunktion  $g_{adia}(z)$  und die Exponentialfunktionen als Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} f_{\gamma,adia}(z) &= \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \sinh(\sqrt{z}) \cosh(\sqrt{z\text{Le}}(\eta - 1)) \\ &= \sqrt{z\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \left( \left(1 + \frac{\sqrt{z}^2}{3!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{(\sqrt{z\text{Le}}(\eta - 1))^2}{2!} + \dots\right) \right), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} f_{\Theta,adia}(z) &= \sinh(\sqrt{z\text{Le}}) \cosh(\sqrt{z}(\eta - 1)) \\ &= \sqrt{z\text{Le}} \left(1 + \frac{\sqrt{z\text{Le}}^2}{3!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{(\sqrt{z}(\eta - 1))^2}{2!} + \dots\right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} g_{adia}(z) &= \\ &= z \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1}{2} \sinh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1}{2} \sinh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \\ &= z \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1}{2} \cdot \left( (\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}}))^3}{3!} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1}{2} \cdot \left( (\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) + \frac{(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}}))^3}{3!} + \dots \right) \right) \\ &= z\sqrt{z\text{Le}}(\tilde{\text{St}} + 1) \\ &\quad \cdot \left( 1 + \frac{\sqrt{z}^2}{3!} \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})^3}{2\sqrt{\text{Le}}(\tilde{\text{St}} + 1)} + \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})^3}{2\sqrt{\text{Le}}(\tilde{\text{St}} + 1)} \right) + \dots \right), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$e^{z\xi} = 1 + z \cdot \xi + \frac{(z \cdot \xi)^2}{2!} + \frac{(z \cdot \xi)^3}{3!} + \dots \quad (4.60)$$

Die entwickelten Reihen werden zusammengeführt und der Koeffizient  $a_{-1}$  als der zu  $1/z$  zuzuordnende Faktor wird ermittelt:

$$e^{z\xi} \cdot \gamma(z, \eta) = \frac{\tilde{S}t}{\tilde{S}t + 1} \frac{1}{z} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{z^2}}{3!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{zLe^2}(\eta-1)^2}{2!} + \dots\right) (1 + z\xi + \dots)}{1 + \frac{\sqrt{z^2}}{3!} \left( \frac{(\sqrt{Le}\tilde{S}t+1)(1+\sqrt{Le})^3}{2\sqrt{Le}(\tilde{S}t+1)} + \frac{(\sqrt{Le}\tilde{S}t-1)(1-\sqrt{Le})^3}{2\sqrt{Le}(\tilde{S}t+1)} \right) + \dots}, \quad (4.61)$$

$$e^{z\xi} \cdot \Theta(z, \eta) = \frac{1}{\tilde{S}t + 1} \frac{1}{z} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{zLe^2}}{3!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{z^2}(\eta-1)^2}{2!} + \dots\right) (1 + z\xi + \dots)}{1 + \frac{\sqrt{z^2}}{3!} \left( \frac{(\sqrt{Le}\tilde{S}t+1)(1+\sqrt{Le})^3}{2\sqrt{Le}(\tilde{S}t+1)} + \frac{(\sqrt{Le}\tilde{S}t-1)(1-\sqrt{Le})^3}{2\sqrt{Le}(\tilde{S}t+1)} \right) + \dots}. \quad (4.62)$$

Als Residuen für die asymptotischen Endwerte der adiabaten Wand ergeben sich folgende Werte für das Massenanteils- und das Temperaturprofil:

$$\text{Res}[e^{z\xi} \cdot \gamma(z, \eta)]_{z_0=0} = \frac{\tilde{S}t}{\tilde{S}t + 1}, \quad (4.63)$$

$$\text{Res}[e^{z\xi} \cdot \Theta(z, \eta)]_{z_0=0} = \frac{1}{\tilde{S}t + 1}. \quad (4.64)$$

Diese asymptotischen Werte lassen sich rein physikalisch aus einer integralen Filmenergiebilanz unter den getroffenen Annahmen herleiten, was im Anhang A.2 durchgeführt wird.

Nachdem die Residuen für die mehrfache Polstelle bei  $z_0 = 0$  bestimmt sind, müssen lediglich die Residuen der periodischen Polstellen mit Hilfe von (4.55) ermittelt werden. Hierfür ist die Ableitung der Nennerfunktion  $g_{adia}(z)$  nach der komplexen LAPLACE-Variable  $z$  erforderlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{adia}(z)}{\partial z} = & \left[ \frac{\sqrt{Le}\tilde{S}t + 1}{2} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{Le})) + \frac{\sqrt{Le}\tilde{S}t - 1}{2} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{Le})) \right] \\ & + z \cdot \left( \frac{(\sqrt{Le}\tilde{S}t + 1)(1 + \sqrt{Le})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot \cosh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{Le})) \right. \\ & \left. + \frac{(\sqrt{Le}\tilde{S}t - 1)(1 - \sqrt{Le})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot \cosh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{Le})) \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Werden die periodischen Polstellen  $z_k$  in die Ableitung (4.65) eingesetzt, so verschwindet der Term in den eckigen Klammern, da dies exakt der Teil des

Nennerterms  $g_{adia}(z)$  (4.59) ist, dessen Nullstellen die periodischen Polstellen darstellen. Für das Residuum der periodischen Polstellen bleibt demnach folgender Term:

$$\begin{aligned} \text{Res}[e^{z\xi} \cdot \gamma(z, \eta)]_{z=z_k} = & \\ & \left[ \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \sinh(\sqrt{z_k}) \cosh(\sqrt{z_k\text{Le}}(\eta - 1)) \cdot e^{z_k\xi} \right] \\ & \cdot \left[ \sqrt{z_k} \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \cosh(\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \cosh(\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \text{Res}[e^{z\xi} \cdot \Theta(z, \eta)]_{z=z_k} = & \\ & \left[ \sinh(\sqrt{z_k\text{Le}}) \cosh(\sqrt{z_k}(\eta - 1)) \cdot e^{z_k\xi} \right] \\ & \cdot \left[ \sqrt{z_k} \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \cosh(\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \cosh(\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

In ihrer trigonometrischen Form lauten die Gleichungen (4.66) und (4.67):

$$\begin{aligned} \text{Res}[e^{z\xi} \cdot \gamma(z, \eta)]_{z=z_k} = & \\ & \left[ -i\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \sin(i\sqrt{z_k}) \cos(i\sqrt{z_k\text{Le}}(\eta - 1)) \cdot e^{z_k\xi} \right] \\ & \cdot \left[ \sqrt{z_k} \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \text{Res}[e^{z\xi} \cdot \Theta(z, \eta)]_{z=z_k} = & \\ & \left[ -i \sin(i\sqrt{z_k\text{Le}}) \cos(i\sqrt{z_k}(\eta - 1)) \cdot e^{z_k\xi} \right] \\ & \cdot \left[ \sqrt{z_k} \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Für den Spezialfall  $\sqrt{Le}\tilde{St} = 1$  vereinfachen sich (4.68) und (4.69) durch Einsetzen der analytisch ermittelten Polstellen (4.51) folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\text{Res}\left[e^{z\xi} \cdot \gamma(z, \eta)\right]_{z=z_k} &= \\
& \stackrel{=i^2 \frac{k\pi}{1+\sqrt{Le}} = -\frac{k\pi}{1+\sqrt{Le}}}{=} \\
& \left[ -i \cdot \sin\left(i\sqrt{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}}\right) \cos\left(i\sqrt{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}}Le(\eta-1)\right) \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}\xi} \right] \\
& \cdot \left[ \sqrt{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{Le}}{2}\right) \cdot \cos\left(i\sqrt{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}}(1+\sqrt{Le})\right) \right]^{-1} \\
& \stackrel{=i \frac{k\pi}{1+\sqrt{Le}}}{=} \stackrel{=-k\pi}{=} \\
& = \frac{2 \cdot (-1)^k}{k\pi} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{1+\sqrt{Le}}\right) \cos\left(k\pi \frac{\sqrt{Le}}{1+\sqrt{Le}}(\eta-1)\right) \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}\xi},
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
\text{Res}\left[e^{z\xi} \cdot \Theta(z, \eta)\right]_{z=z_k} &= \\
& \frac{2 \cdot (-1)^k}{k\pi} \cdot \sin\left(k\pi \frac{\sqrt{Le}}{1+\sqrt{Le}}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{1+\sqrt{Le}}(\eta-1)\right) \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}\xi}.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

### Residuen für die isotherme Wand

Für die isotherme Wandrandbedingung sind alle Polstellen einfache Polstellen und daher werden alle Residuen unter Verwendung von (4.55) erhalten. Die Zählerfunktionen  $f_{\gamma,iso}(z)$  und  $f_{\Theta,iso}(z)$  sowie die Ableitung der Nennerfunktion  $\partial g_{iso}(z)/\partial z$  lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} f_{\gamma,iso}(z) &= \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot [\cosh(\sqrt{z}) - \Theta_W] \cdot \cosh(\sqrt{z\text{Le}}(\eta - 1)) \\ &= \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot [\cos(i\sqrt{z}) - \Theta_W] \cdot \cos(i\sqrt{z\text{Le}}(\eta - 1)), \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} f_{\Theta,iso}(z) &= \\ \Theta_W &[\sinh(\sqrt{z\text{Le}}) \cdot \sinh(\sqrt{z}\eta) + \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \cosh(\sqrt{z\text{Le}}) \cdot \cosh(\sqrt{z}\eta)] \\ &- \sinh(\sqrt{z\text{Le}}) \cdot \sinh(\sqrt{z}(\eta - 1)) \\ &= \Theta_W [i \sin(i\sqrt{z\text{Le}}) \cdot i \sin(i\sqrt{z}\eta) + \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot \cos(i\sqrt{z\text{Le}}) \cdot \cos(i\sqrt{z}\eta)] \\ &- i \sin(i\sqrt{z\text{Le}}) \cdot i \sin(i\sqrt{z}(\eta - 1)), \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{iso}(z)}{\partial z} &= \\ &\frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1}{2} \cdot \cosh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1}{2} \cdot \cosh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \\ &+ z \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{(\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \\ &= \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1}{2} \cdot \cos(i\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1}{2} \cdot \cos(i\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \\ &- z \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot i \sin(i\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{(\text{Le}\tilde{\text{St}}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot i \sin(i\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Die Residuen der periodischen Polstellen  $z_k \neq 0$  für die isotherme Wandrandbedingung ergeben sich nach (4.55) zu:

$$\begin{aligned} \text{Res}[e^{z\xi}\gamma(z, \eta)]_{z=z_k} &= \left[ \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cdot [\cos(i\sqrt{z_k}) - \Theta_W] \cdot \cos(i\sqrt{z_k}\text{Le}(\eta - 1)) \right] e^{z_k\xi} \\ &\cdot \left[ \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} + 1}}{2} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} - 1}}{2} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right. \\ &- \sqrt{z_k} \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} + 1})(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \\ &\left. \left. + \frac{\sqrt{(\text{Le}\tilde{\text{St}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}}{4} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \text{Res}[e^{z\xi}\Theta(z, \eta)]_{z=z_k} &= \left[ \Theta_W [i \sin(i\sqrt{z_k}\text{Le}) \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}\eta) \right. \\ &\left. + \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} \cos(i\sqrt{z_k}\text{Le}) \cos(i\sqrt{z_k}\eta)] - i \sin(i\sqrt{z_k}\text{Le}) i \sin(i\sqrt{z_k}(\eta - 1)) \right] e^{z_k\xi} \\ &\cdot \left[ \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} + 1}}{2} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} - 1}}{2} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right. \\ &- \sqrt{z_k} \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} + 1})(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4} i \sin(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \\ &\left. \left. + \frac{\sqrt{(\text{Le}\tilde{\text{St}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}}{4} i \sin(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Als asymptotischer Endwert für  $z_0 = 0$  ergeben sich für die isotherme Wand folgende Residuen:

$$\text{Res}[e^{z\xi}\gamma(z, \eta)]_{z_0=0} = \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}} \cdot (1 - \Theta_W)}{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} = 1 - \Theta_W, \quad (4.77)$$

$$\text{Res}[e^{z\xi}\Theta(z, \eta)]_{z_0=0} = \frac{\Theta_W \sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}}{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}}} = \Theta_W. \quad (4.78)$$

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, sind für den Sonderfall  $\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}} = 1$  die periodischen Nullstellen (4.53) explizit gegeben und führen somit zu den folgenden periodischen Residuen:

$$\begin{aligned} \text{Res}[e^{z\xi}\gamma(z, \eta)]_{z=z_k} &= \overbrace{\sqrt{\text{Le}\tilde{\text{St}}}}^{=1} \cdot \left[ \cos \left( i \sqrt{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2}} \right) - \Theta_W \right] \\ &\cdot \cos \left( i \sqrt{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2}} \text{Le}(\eta - 1) \right) \cdot e^{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2} \xi} \\ &\cdot \left[ -\sqrt{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{\text{Le}})}{2} \right. \\ &\cdot \left. i \sin \left( i \sqrt{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2}} (1 + \sqrt{\text{Le}}) \right) \right]^{-1} \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(2 \cdot k + 1)} \cdot \left[ \cos \left( \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + \sqrt{\text{Le}}} \right) - \Theta_W \right] \\ &\cdot \cos \left( (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{\text{Le}}}{1 + \sqrt{\text{Le}}} (\eta - 1) \right) \cdot e^{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2} \xi}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \text{Res}[e^{z\xi}\Theta(z, \eta)]_{z=z_k} &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(2 \cdot k + 1)} \left[ \Theta_W \cdot \cos \left( \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + \sqrt{\text{Le}}} \cdot (\sqrt{\text{Le}} + \eta) \right) \right. \\ &\left. + \sin \left( \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + \sqrt{\text{Le}}} \sqrt{\text{Le}} \right) \cdot \sin \left( \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + \sqrt{\text{Le}}} (\eta - 1) \right) \right] \cdot e^{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{\text{Le}})^2} \xi}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

### Residuen für die diabate Wand

Außer für den Grenzfall der adiabaten Wand, d.h. für den Grenzfall einer modifizierten Biot-Zahl von  $\tilde{B}i = 0$ , ist der Pol für  $z_0 = 0$  ein einfacher Pol

und alle Residuen lassen sich in diesem Fall mit (4.55) bestimmen. Für  $\tilde{B}i = 0$  geht die Lösung der diabaten Wand in die der adiabaten Wand über, welche im vorangegangenen Abschnitt bestimmt wurde. Die Zählerfunktionen  $f_{\gamma, dia}$  und  $f_{\Theta, dia}$  sowie die Ableitung der Nennerfunktion  $\partial g_{dia}/\partial z$  lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
 f_{\gamma, dia}(z) &= \\
 & \cosh(\sqrt{zLe}(\eta - 1)) \left[ \sqrt{Le}\tilde{St}(\tilde{B}i \cdot \cosh(\sqrt{z}) + \sqrt{z} \cdot \sinh(\sqrt{z})) - \tilde{B}i \cdot \Theta_{ext} \right] \\
 &= \cos(i\sqrt{zLe}(\eta - 1)) \left[ \sqrt{Le}\tilde{St}(\tilde{B}i \cdot \cos(i\sqrt{z}) - i\sqrt{z} \cdot \sin(i\sqrt{z})) - \tilde{B}i \cdot \Theta_{ext} \right],
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\Theta, dia}(z) &= \\
 & \Theta_{ext} \cdot \tilde{B}i \left( \sinh(\sqrt{z}\eta) \sinh(\sqrt{zLe}) + \sqrt{Le}\tilde{St} \cosh(\sqrt{z}\eta) \cosh(\sqrt{zLe}) \right) \\
 & - \sinh(\sqrt{zLe}) \left( \tilde{B}i \sinh(\sqrt{z}(\eta - 1)) - \sqrt{z} \cosh(\sqrt{z}(\eta - 1)) \right) \\
 &= \Theta_{ext} \cdot \tilde{B}i \left( i \sin(i\sqrt{z}\eta) i \sin(i\sqrt{zLe}) + \sqrt{Le}\tilde{St} \cos(i\sqrt{z}\eta) \cos(i\sqrt{zLe}) \right) \\
 & + i \sin(i\sqrt{zLe}) \left( -\tilde{B}i \cdot i \sin(i\sqrt{z}(\eta - 1)) - \sqrt{z} \cos(i\sqrt{z}(\eta - 1)) \right).
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{dia}(z)}{\partial z} = & \\
& \tilde{B}i \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} + 1}{2} \cosh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} - 1}{2} \cosh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \\
& + \sqrt{z} \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} + 1}{2} \sinh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} - 1}{2} \sinh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \\
& + z \cdot \left( \tilde{B}i \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \right. \\
& + \left. \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \\
& + \sqrt{z} \cdot \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot \cosh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \\
& + \left. \frac{(\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4 \cdot \sqrt{z}} \cdot \cosh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \\
& + \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \left( \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} + 1}{2} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t} - 1}{2} \cdot \sinh(\sqrt{z}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right).
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Als asymptotische Endwerte für den Pol  $z_0 = 0$  und  $\tilde{B}i \neq 0$  ergeben sich folgende Residuen:

$$\text{Res}[e^{z\xi}\gamma(z, \eta)]_{z_0=0} = \frac{\tilde{B}i\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t}}{\tilde{B}i\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t}}(1 - \Theta_{ext}) = 1 - \Theta_{ext}, \tag{4.84}$$

$$\text{Res}[e^{z\xi}\Theta(z, \eta)]_{z_0=0} = \frac{\tilde{B}i\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t}}{\tilde{B}i\sqrt{\text{Le}\tilde{S}t}}\Theta_{ext} = \Theta_{ext}. \tag{4.85}$$

Für die periodischen Polstellen  $z_k$  ergeben sich für die diabate Wand folgende Residuen (Vgl. (4.55)):

$$\begin{aligned}
\text{Res}[e^{z\xi}\gamma(z, \eta)]_{z=z_k} &= \cos(i\sqrt{z_k}\overline{\text{Le}}(\eta - 1)) \\
&\cdot \left[ \sqrt{\overline{\text{Le}}}\tilde{\text{St}} \cdot \left( \tilde{\text{Bi}} \cdot \cos(i\sqrt{z_k}) - i\sqrt{z_k} \cdot \sin(i\sqrt{z_k}) \right) - \tilde{\text{Bi}} \cdot \Theta_{ext} \right] \cdot e^{z_k\xi} \\
&\cdot \left[ \left( \frac{(\sqrt{\overline{\text{Le}}}\tilde{\text{St}} + 1)(1 + \sqrt{\overline{\text{Le}}})}{4} \cdot \left( -\tilde{\text{Bi}} \cdot \sqrt{z_k} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\overline{\text{Le}}})) \right) \right. \right. \\
&+ z_k \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\overline{\text{Le}}})) \left. \left. + \frac{(\sqrt{\overline{\text{Le}}}\tilde{\text{St}} - 1)(1 - \sqrt{\overline{\text{Le}}})}{4} \cdot \left( -\tilde{\text{Bi}} \cdot \sqrt{z_k} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\overline{\text{Le}}})) \right) \right. \right. \\
&+ z_k \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\overline{\text{Le}}})) \left. \left. + \left( -\frac{\sqrt{\overline{\text{Le}}}\tilde{\text{St}} + 1}{4} \cdot \sqrt{z_k} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\overline{\text{Le}}})) \right) \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{\sqrt{\overline{\text{Le}}}\tilde{\text{St}} - 1}{4} \cdot \sqrt{z_k} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\overline{\text{Le}}})) \right) \right]^{-1}, \tag{4.86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Res} \left[ e^{z\xi} \Theta(z, \eta) \right]_{z=z_k} = \\
& \left[ \Theta_{ext} \cdot \tilde{\text{Bi}} \left( i \sin(i\sqrt{z}\eta) \cdot i \sin(i\sqrt{z}\text{Le}) + \sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} \cos(i\sqrt{z}\eta) \cos(i\sqrt{z}\text{Le}) \right) \right. \\
& \left. + i \sin(i\sqrt{z}\text{Le}) \cdot \left( -\tilde{\text{Bi}} \cdot i \sin(i\sqrt{z}(\eta-1)) - \sqrt{z} \cdot \cos(i\sqrt{z}(\eta-1)) \right) \right] e^{z_k \xi} \\
& \cdot \left[ \left( \frac{(\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} + 1)(1 + \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \left( -\tilde{\text{Bi}} \cdot \sqrt{z_k} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + z_k \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right) \right. \\
& \left. + \frac{(\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} - 1)(1 - \sqrt{\text{Le}})}{4} \cdot \left( -\tilde{\text{Bi}} \cdot \sqrt{z_k} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right. \\
& \left. + z_k \cdot \cos(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \\
& \left. + \left( -\frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} + 1}{4} \cdot \sqrt{z_k} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 + \sqrt{\text{Le}})) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sqrt{\text{Le}} \tilde{\text{St}} - 1}{4} \cdot \sqrt{z_k} \cdot i \sin(i\sqrt{z_k}(1 - \sqrt{\text{Le}})) \right) \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

### 4.3.3 Aufsummierung aller Residuen

#### Lösung für die adiabate Wand

Gemäß der von Baehr (1955) angegebenen Formel des inversen LAPLACE-Integrals (4.46) ergeben sämtliche Residuen, d.h. asymptotische und periodische, aufsummiert die Lösung im Bereich der reellen Zahlen. Die allgemeine Lösung für die adiabate Wand lautet dementsprechend:

$$\gamma(\xi, \eta) = \frac{\tilde{\text{St}}}{\tilde{\text{St}} + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res} \left[ e^{z \cdot \xi} \cdot \gamma_{adia}(z, \eta) \right]_{z=z_k}, \tag{4.88}$$

$$\Theta(\xi, \eta) = \frac{1}{\tilde{\text{St}} + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res} \left[ e^{z \cdot \xi} \cdot \Theta_{adia}(z, \eta) \right]_{z=z_k}. \tag{4.89}$$

Für den Sonderfall  $\sqrt{Le}\tilde{St} = 1$  lässt sich eine komplett analytische Funktion ohne numerische Polstellensuche angeben:

$$\begin{aligned} \gamma(\xi, \eta) &= \frac{\tilde{St}}{\tilde{St} + 1} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{1 + \sqrt{Le}}\right) \cos\left(k\pi \frac{\sqrt{Le}}{1 + \sqrt{Le}}(\eta - 1)\right) \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}\xi}, \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta) &= \frac{1}{\tilde{St} + 1} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \sin\left(k\pi \frac{\sqrt{Le}}{1 + \sqrt{Le}}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{1 + \sqrt{Le}}(\eta - 1)\right) \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2}{(1+\sqrt{Le})^2}\xi}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

### Lösung für die isotherme Wand

Die allgemeine Lösung für die Randbedingung der isothermen Wand ergibt sich nach (4.46) zu:

$$\gamma(\xi, \eta) = 1 - \Theta_W + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res} \left[ e^{z \cdot \xi} \cdot \gamma_{iso}(z, \eta) \right]_{z=z_k}, \quad (4.92)$$

$$\Theta(\xi, \eta) = \Theta_W + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res} \left[ e^{z \cdot \xi} \cdot \Theta_{iso}(z, \eta) \right]_{z=z_k}. \quad (4.93)$$

Auch für die isotherme Wand lässt sich eine komplett analytische Lösung für den Sonderfall  $\sqrt{Le}\tilde{St} = 1$  angeben:

$$\begin{aligned} \gamma(\xi, \eta) &= 1 - \Theta_W \\ &+ \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2 \cdot k + 1)} \cdot \left[ \cos\left(\frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + \sqrt{Le}}\right) - \Theta_W \right] \\ &\cdot \cos\left((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{Le}}{1 + \sqrt{Le}}(\eta - 1)\right) \cdot e^{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{Le})^2}\xi}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned}
\Theta(\xi, \eta) &= \Theta_W \\
&+ \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2 \cdot k + 1)} \left[ \Theta_W \cdot \cos \left( \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + \sqrt{Le}} \cdot (\sqrt{Le} + \eta) \right) \right. \\
&+ \left. \sin \left( \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + \sqrt{Le}} \sqrt{Le} \right) \cdot \sin \left( \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + \sqrt{Le}} (\eta - 1) \right) \right] \cdot e^{-\frac{((2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2})^2}{(1 + \sqrt{Le})^2} \xi}.
\end{aligned} \tag{4.95}$$

### Lösung für die diabate Wand

Die Polstellen für die Lösung der diabaten Wandrandbedingung lassen sich nur numerisch ermitteln, so dass für diese Lösung anders als für die beiden thermischen Grenzfälle zuvor mit  $\sqrt{Le}\tilde{St} = 1$  keine komplett analytische Lösung angegeben werden kann. Daher lassen sich lediglich allgemeine Lösungen für die dimensionslose Temperatur und den dimensionslosen Absorbatanteil angeben, in welche die numerisch bestimmten Polstellen eingesetzt werden. Diese lauten wie folgt:

$$\gamma(\xi, \eta) = 1 - \Theta_{ext} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res} [e^{z \cdot \xi} \cdot \gamma_{dia}(z, \eta)]_{z=z_k}, \tag{4.96}$$

$$\Theta(\xi, \eta) = \Theta_{ext} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res} [e^{z \cdot \xi} \cdot \Theta_{dia}(z, \eta)]_{z=z_k}. \tag{4.97}$$

## Kapitel 5

# Ergebnisse der analytischen Lösung

Die in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten analytischen Lösungen werden in diesem Kapitel verwendet, um technisch relevante Größen bei der laminaren Rieselfilmabsorption zu berechnen. Diese werden zunächst für eine konstante Lewis-Zahl und modifizierte Stefan-Zahl,  $Le = 100$  und  $\tilde{St} = 0,1$ , betrachtet. Den Abschluss bildet die Diskussion des Einflusses einer veränderten Lewis bzw. modifizierten Stefan-Zahl auf den absorbierten Massenstrom. Im anschließenden Kapitel werden diese Ergebnisse mit in der Literatur vorhandenen experimentellen Daten für vergleichbare dimensionslose Kennzahlen verglichen und ausgewertet.

Zu den technisch relevanten Größen gehören z.B. der absorbierte Massenstrom, die Unterkühlung der austretenden Salzlösung sowie die an das externe Medium abgegebene Wärme. Zuvor werden jedoch die dimensionslosen Temperatur- und Massenanteilsprofile im Film für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  präsentiert und diskutiert, weil sich aus diesen Profilen die gesuchten technischen Größen ableiten lassen. Die gesamte Diskussion erfolgt ausschließlich mit dimensionslosen Größen. Sofern dimensionsbehaftete Größen in der Diskussion verwendet werden, ist dies ausdrücklich im Text erwähnt.

## 5.1 Filmtemperaturprofil

Als Erstes werden die Temperaturprofile der thermischen Grenzfälle, d.h. der adiabaten und der isothermen Wand präsentiert. Im Anschluss wird die diabate Wand mit verschiedenen modifizierten Biot-Zahlen gezeigt.

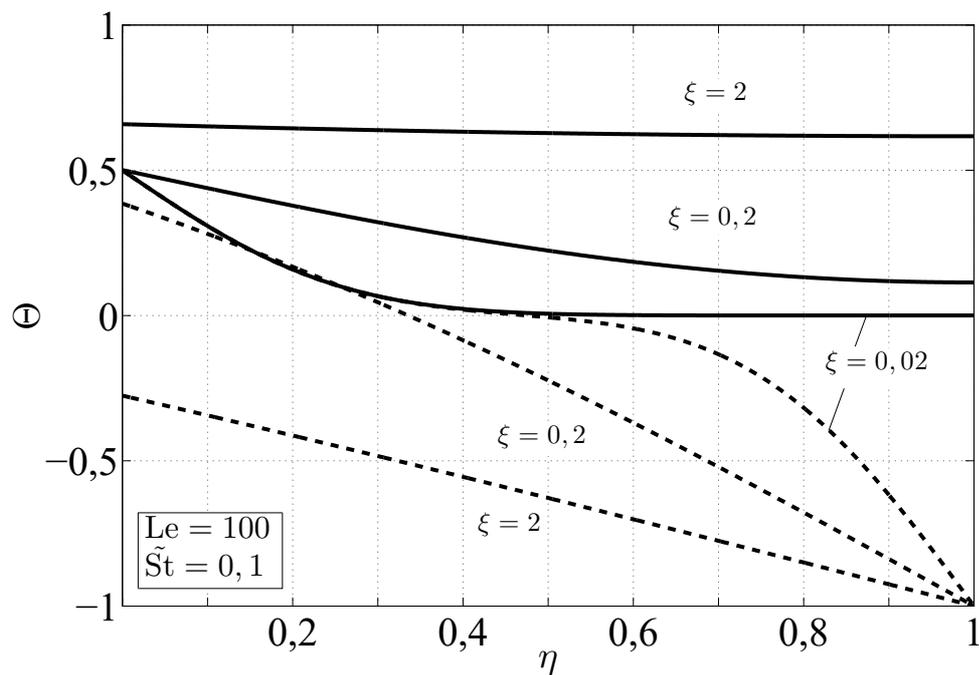
### 5.1.1 Adiabate und isotherme Wand

Abbildung 5.1 zeigt die Filmtemperaturprofile für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  und einer Lewis-Zahl von  $Le = 100$  sowie einer modifizierten Stefan-Zahl von  $\tilde{St} = 0, 1$ . Die dimensionslose Wandtemperatur beträgt  $\Theta_W = -1$  für die isotherme Wand. Die Differenz zwischen der Filmeintritts- und der Wandtemperatur  $T_0 - T_W$  ist gleich dem Betrag der Unterkühlung des Films,  $T_{eq,0} - T_0$ , am Eintritt:

$$\Theta_W = \frac{T_W - T_0}{T_{eq,0} - T_0} = -1. \quad (5.1)$$

Die Temperatur an der Filmoberfläche bei  $\eta = 0$  springt von Beginn an, d.h. ab  $\xi = 0$ , für beide Fälle (adiabat und isotherm) durch die freigesetzte Absorptionswärme auf den Wert  $\Theta_i = 0, 5$ , was bei  $\xi = 0, 02$  zu sehen ist. Dieser Wert entspricht dem Ergebnis der ungestörten Phasengrenzfläche bzw. des halbinendlichen Körpers von Nakoryakov et al. (1997) für die gegebenen dimensionslosen Kenngrößen, welches im Abschnitt 3 vorgestellt wurde. Für diesen geringen Wert der dimensionslosen Strömungskordinate von  $\xi = 0, 02$  unterscheiden sich die Temperaturprofile der adiabaten und isothermen Wand von der Phasengrenzfläche bei  $\eta = 0$  bis etwa zur Filmmitte bei  $\eta = 0, 5$  nicht. Der Film hat dort noch die dimensionslose Filmeintrittstemperatur von  $\Theta_0 = 0$  und somit ist die Phasengrenzfläche noch ungestört von der Wandrandbedingung bei  $\xi = 0, 02$ .

Für einen zehnmal größeren Wert der dimensionslosen Strömungskordinate von  $\xi = 0, 2$  ist das Temperaturprofil der isothermen Wand bereits annähernd linear und die Temperatur an der Phasengrenzfläche  $\Theta_i$  ist bereits niedriger als der Wert der ungestörten Filmoberflächengrenzschicht. Bei der adiabaten Wandrandbedingung breitet sich im Gegensatz zur isothermen Wand lediglich eine thermische Grenzschicht von der Filmoberfläche in den Film aus. Diese thermische Grenzschicht hat bei  $\xi = 0, 2$  die adiabate Wand bereits erreicht,



**Abbildung 5.1:** Profile der dimensionslosen Temperatur  $\Theta$  über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linien für die adiabate Wand und gestrichelte Linien für die isotherme Wand mit einer Wandtemperatur von  $\Theta_W = -1$

was zu einem Anstieg der Wandtemperatur auf etwa  $\Theta_W \cong 0,12$  bei  $\eta = 1$  führt. Allerdings wird die Temperatur an der Phasengrenzfläche durch diesen Anstieg der Wandtemperatur noch nicht beeinflusst und beträgt nach wie vor  $\Theta_i = 0,5$ . Abhängig von der Art und Stärke der thermischen Wandrandbedingung beginnt demnach deren Rückwirkung auf die Filmoberfläche bei unterschiedlichen Werten der Strömungskordinate  $\xi$ .

Eine weitere Verzehnfachung auf  $\xi = 2$  verstärkt die Unterschiede der Temperaturprofile für die beiden thermischen Grenzfälle. Durch die Abfuhr der Wärme bei der isothermen Wand wird die Filmoberfläche weiter gekühlt. Die Temperatur an Filmoberfläche sinkt und mit ihr die Steigung des Temperaturprofils. Aufgrund der Modellannahme von reiner Wärmeleitung quer zur Strömungsrichtung repräsentiert diese Steigung den in dieser Richtung durch den Film transportierten Wärmestrom. Dieser nimmt mit zunehmender Strömungslänge des Films aufgrund der abklingenden Absorption ab, worauf bei der Diskussion der Massenanteilsprofile eingegangen wird.

Im Fall der adiabaten Wand kommt es durch den Verbleib der Absorptionswärme im Film zum Anstieg der Filmtemperatur. Die Steigung des Temperaturprofils an der Filmoberfläche repräsentiert die freigesetzte Absorptionswärme. Offensichtlich ist diese sehr viel geringer im Vergleich zur isothermen Wand. Nach der Diskussion der thermischen Grenzfälle wird im Folgenden die Randbedingung der diabaten Wand und deren Auswirkung auf den Wärme- und Stofftransport diskutiert.

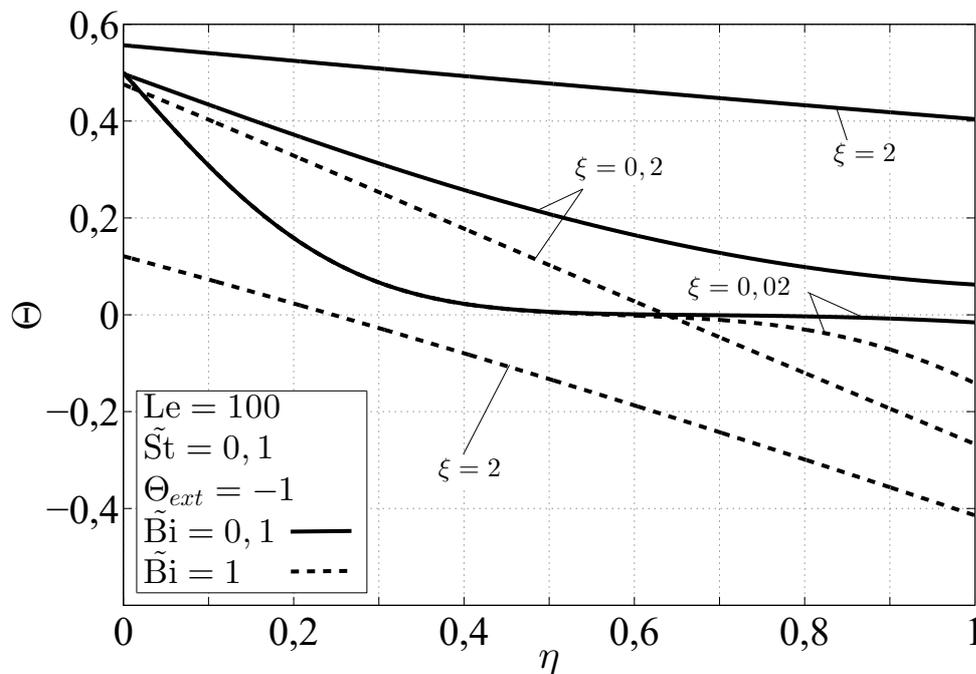
### 5.1.2 Diabate Wand

Erläuterungen zum Lösungsverfahren sowie einige Ergebnisse der Lösung für die diabate Wand wurden bereits veröffentlicht (Meyer, 2015). Abbildung 5.2 zeigt die Temperaturprofile aufgetragen über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für zwei verschiedene modifizierte Biot-Zahlen von  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\tilde{Bi} = 0,1$ . Für eine modifizierte Biot-Zahl von  $\tilde{Bi} = 1$  ist der thermische Widerstand der Wand sowie des externen Mediums genau so groß wie der Wärmewiderstand des Films. Entsprechend hat für  $\tilde{Bi} = 0,1$  die Wand einen zehnfach größeren thermischen Widerstand als der Film. Die externe Fluidtemperatur

beträgt:

$$\Theta_{ext} = \frac{T_{ext} - T_0}{T_{eq,0} - T_0} = -1. \quad (5.2)$$

Bei  $\xi = 0,02$  wird die Filmoberfläche wie bereits gezeigt noch nicht von der



**Abbildung 5.2:** Profile der dimensionslosen Temperatur  $\Theta$  für die diabate Wand über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linien für  $\tilde{Bi} = 0,1$  und gestrichelte Linien für  $\tilde{Bi} = 1$  mit einer externen Fluidtemperatur von  $\Theta_{ext} = -1$

Wandrandbedingung beeinflusst. Allerdings erreichen die Temperaturprofile im Vergleich zur isothermen Wand noch nicht die Filmmitte bei  $\eta = 0,5$ . Dort hat der Film noch die Anfangstemperatur von  $\Theta_0 = 0$ .

Die unterschiedlichen thermischen Widerstände der Wand für die verschiedenen modifizierten Biot-Zahlen werden am Verlauf des Temperaturprofils in Wandnähe deutlich. Je größer die modifizierte Biot-Zahl, desto näher rückt die Wandtemperatur an die extern vorgegebene Fluidtemperatur und desto größer ist der Gradient des Temperaturprofils an der Wand, da mehr Wärme durch die Wand transportiert wird.

Für  $\tilde{Bi} = 1$  ist der Verlauf der Temperaturprofile dem der isothermen Wand

ähnlich, allerdings verschoben zu höheren Filmtemperaturen bei gleichen Werten der dimensionslosen Strömungskordinate. So ist die Filmoberflächentemperatur bei  $\xi = 2$  für  $\tilde{Bi} = 1$   $\Theta_i \approx 0,15$  und bei der isothermen Wand, d.h. für  $\tilde{Bi} \rightarrow \infty$ , bereits bei  $\Theta_i \approx -0,25$ .

Demgegenüber ähneln die Temperaturprofile für  $\tilde{Bi} = 0,1$  für kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate eher dem adiabaten Fall. Es kommt zum Anstieg der Wand- und Filmtemperatur sowie der Filmoberflächentemperatur auf  $\Theta_i \approx 0,55$ .

Bei  $\xi = 2$  bildet sich jedoch im Gegensatz zum adiabaten Fall ein fast lineares Temperaturprofil mit einer kleinen aber für größere Strömungslängen ausreichenden Steigung, um die Wärme des abklingenden Absorptionsprozesses aus dem Film über die Wand an das Kühlmedium abzuführen. Dies geschieht für alle noch so kleinen, aber von Null verschiedenen modifizierten Biot-Zahlen. Das bedeutet jedoch auch, dass je kleiner die modifizierte Biot-Zahl ist, desto größer sind die Werte der dimensionslosen Strömungskordinate, um die Absorptionswärme aus dem Film abzuführen.

## 5.2 Filmmassenanteilsprofil

### 5.2.1 Adiabate und isotherme Wand

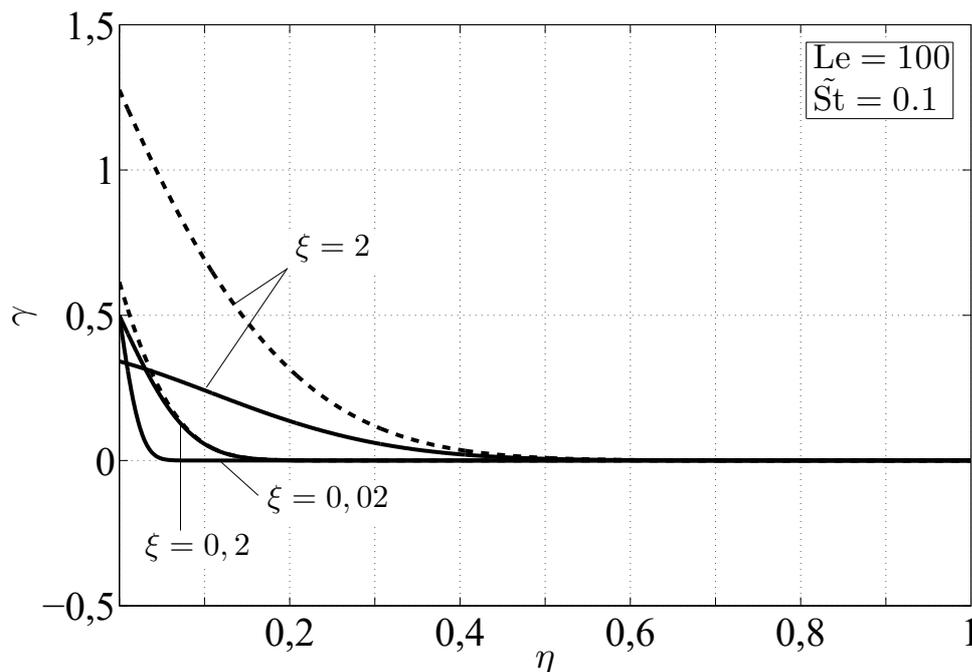
Der Absorptionsprozess findet an der Filmoberfläche bei  $\eta = 0$  statt, d.h. es gibt für das Massenanteilsprofil lediglich eine Grenzschicht, die sich von der Filmoberfläche in den Film hinein ausbreitet. Zu Beginn des Absorptionsprozesses, d.h. für sehr kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ , kommt es durch Absorption an der von der thermischen Randbedingung der Wand noch ungestörten Filmoberfläche zu einem Sprung des dimensionslosen Absorbatmassenanteils auf  $\gamma_i = 0,5$ . Dieser Sprung wird auch für das mathematische Modell des halbumendlichen Körpers für die hier verwendeten dimensionslosen Kenngrößen von Nakoryakov et al. (1997) erhalten (Vgl. Abschnitt 3).

Abbildung 5.3 zeigt den Verlauf des dimensionslosen Absorbatmassenanteils für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ . Wie bereits festgestellt, unterscheiden sich die Massenanteilsprofile für  $\xi = 0,02$  nicht,

da die thermische Wandrandbedingung die Filmoberfläche noch nicht beeinflusst.

Eine Verzehnfachung auf  $\xi = 0,2$  lässt die Auswirkung der isothermen Wandrandbedingung auf das Massenanteilsprofil erkennen. Das leichte Absinken der Filmoberflächentemperatur in Abbildung 5.1 für die isotherme Wand bei  $\xi = 0,2$  führt aufgrund der Randbedingung des thermischen und thermodynamischen Gleichgewichts zu einem Anstieg des Absorbatanteils an der Filmoberfläche. Dieser Anstieg bedeutet auch einen Anstieg des dimensionslosen Absorbatgradienten an der Filmoberfläche und somit einen erhöhten Massenstrom an Absorbat im Vergleich zum adiabaten Fall. Das zur adiabaten Wand gehörige Profil entwickelt sich noch ungestört von der thermischen Wandrandbedingung für  $\xi = 0,2$ .

Die Erhöhung der dimensionslosen Strömungskordinate auf  $\xi = 2$  offenbart die unterschiedlichen Profilverläufe der beiden thermischen Grenzfälle. Durch



**Abbildung 5.3:** Profile des dimensionslosen Absorbatmassenanteils  $\gamma$  über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linien für die adiabate Wand und gestrichelte Linien für die isotherme Wand mit einer Wandtemperatur von  $\Theta_W = -1$

die weitere Absenkung der Filmoberflächentemperatur für die isotherme Wand,

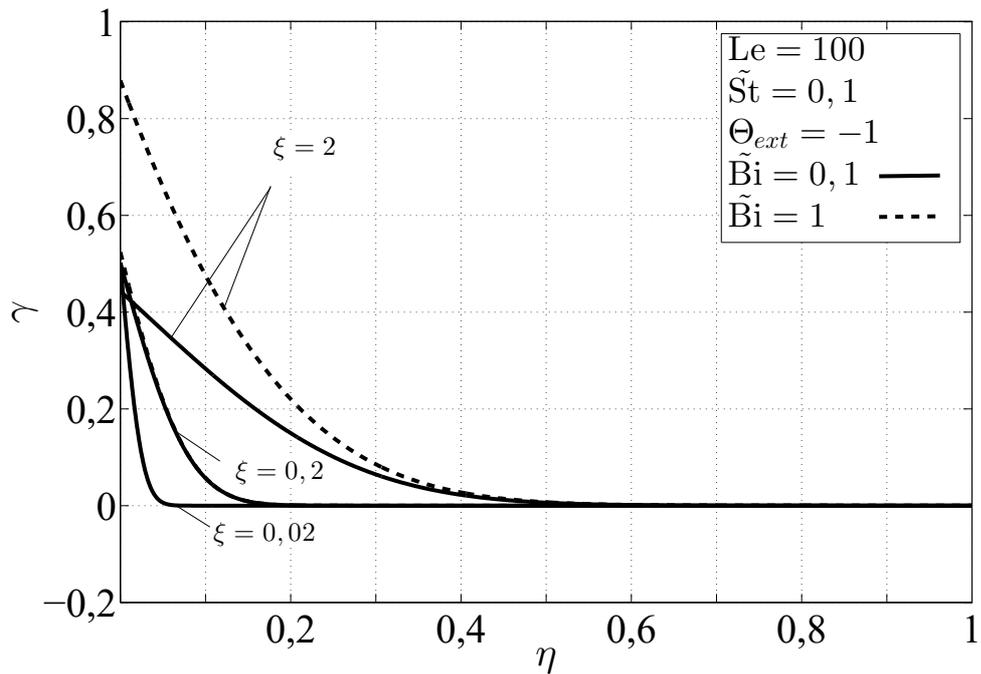
wird auch der Massenanteil an der Filmoberfläche weiter erhöht. Dadurch wird der Abfall des Gradienten des Absorbatmassenanteils an der Filmoberfläche aufgrund der Ausbreitung des Absorbats teilweise ausgeglichen und gebremst. Im Fall der adiabaten Wand passiert das Gegenteil, denn durch die Erwärmung des Films und das Ansteigen der Filmoberflächentemperatur kommt es zu einem Absinken des Absorbatmassenanteils an der Filmoberfläche. Dieses Absinken führt zu einer drastischen Reduzierung des Gradienten des Massenanteils an der Filmoberfläche und somit zu einem starken Absinken des absorbierten Massenstroms, welcher in Abschnitt 5.3 diskutiert wird. Zuvor werden die Massenanteilsprofile der diabaten Wand für zwei modifizierte Biot-Zahlen und deren Unterschiede zu den hier diskutierten thermischen Grenzfällen erläutert.

### 5.2.2 Diabate Wand

Wie auch bei den thermischen Grenzfällen als Wandrandbedingung ändert sich verständlicherweise der Profilverlauf des Massenanteils nicht für  $\xi = 0,02$  in Abbildung 5.4, da dieser Verlauf der ungestörten Filmoberfläche unabhängig von der jeweiligen thermischen Randbedingung ist.

Für die höhere modifizierte Biot-Zahl von  $\tilde{Bi} = 1$  kommt es zu einem leichten Anstieg des Massenanteils an der Filmoberfläche für  $\xi = 0,2$ , was wiederum mit dem leichten Absinken der Filmoberflächentemperatur in Abbildung 5.2 beim gleichen Wert der dimensionslosen Strömungskordinate zu erklären ist. Allerdings ist dieser Anstieg deutlich geringer im Vergleich zum Grenzfall der isothermen Wand. Erwartungsgemäß ist der Kühleffekt einer Wand mit endlicher Wärmedurchlässigkeit geringer als der einer Wand mit einem verschwindenden Wärmewiderstand, d.h. der isothermen Wand.

Für die kleine modifizierte Biot-Zahl  $\tilde{Bi} = 0,1$  hat die thermische Grenzschicht der Wand die Filmoberfläche, ähnlich wie bei der adiabaten Wand, noch nicht erreicht und die Filmoberfläche entwickelt sich für  $\xi = 0,2$  noch ungestört. Die unterschiedliche Entwicklung der Massenanteilsprofile bei  $\xi = 2$  ist durch die Abschwächung des jeweiligen thermischen Grenzfalles für die Wand weniger stark ausgeprägt als in Abbildung 5.3. Der Anstieg und das Absinken des Absorbatmassenanteils an der Filmoberfläche fallen für die modifizierten Biot-Zahlen von  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\tilde{Bi} = 0,1$  weniger stark aus im Vergleich zur isothermen



**Abbildung 5.4:** Profile des dimensionslosen Absorbatmassenanteils  $\gamma$  für die diabate Wand über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für verschiedene Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linien für  $\tilde{Bi} = 0,1$  und gestrichelte Linien für  $\tilde{Bi} = 1$  mit einer externen Fluidtemperatur von  $\Theta_{ext} = -1$

und adiabaten Wand.

Der gedämpfte Anstieg bzw. das gedämpfte Absinken wirkt sich dementsprechend auch auf die Entwicklung des Gradienten des Absorbatmassenanteils an der Filmoberfläche aus. Dieser Gradient bestimmt in dem hier verwendeten physikalischen Filmmodell direkt die absorbierte Absorbatmassenstromdichte, welche im folgenden Abschnitt untersucht wird.

### 5.3 Absorbierte Massenstromdichte

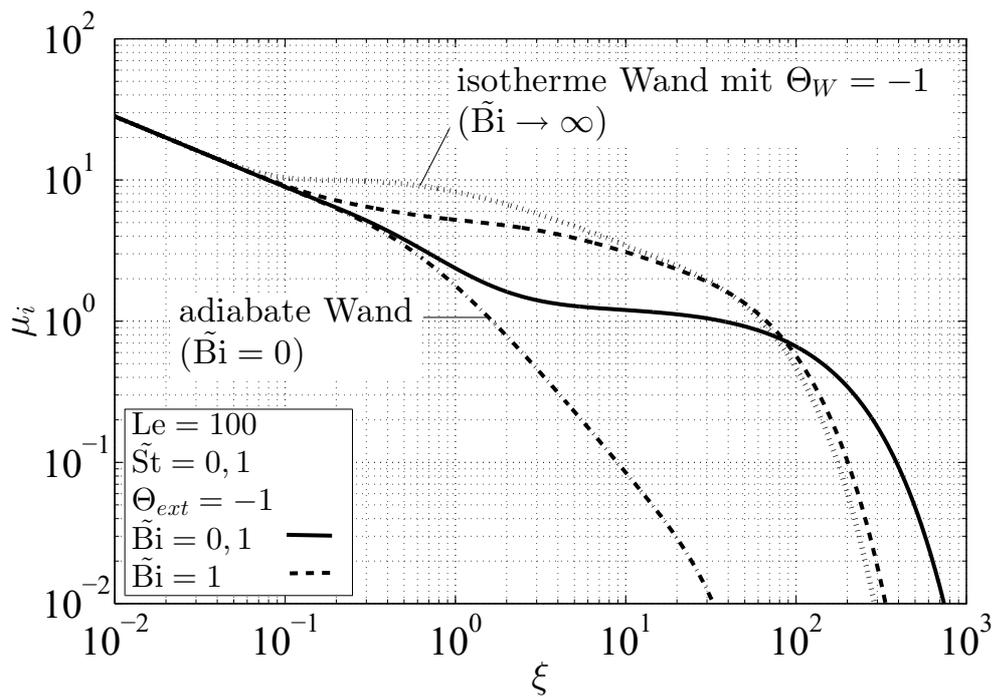
In dem in dieser Arbeit angewendeten physikalischen Filmmodell werden konvektive Strömungen quer zur Filmströmungsrichtung vernachlässigt und somit skaliert der Absorbatgradient an der Phasengrenzfläche nach dem 1. Fick'schen Gesetz über den Diffusionskoeffizienten und der Annahme einer konstanten Salzlösungsdichte (Vgl. Anhang A.1) die lokal an der Phasengrenzfläche absorbierte Massenstromdichte:

$$\dot{m}_{abs} = -\rho \cdot D \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_i. \quad (5.3)$$

Durch die Einführung dimensionsloser Variablen geht (5.3) in die folgende Form über:

$$\mu_i = -\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \dot{m}_{abs} \cdot \frac{\delta}{\rho \cdot D \cdot (c_{eq,0} - c_0)}. \quad (5.4)$$

Bei Grossman (1983) ist  $\mu_i$  der dimensionslose Stoffmengenvolumenkonzentrationsgradient. In dieser Arbeit ist  $\mu_i$  der dimensionslose Absorbatmassenanteilsgradient an der Phasengrenzfläche und ist nach (5.4) proportional zu der absorbierten Absorbatmassenstromdichte bei gegebenen Eintrittsbedingungen. Abbildung 5.5 zeigt den Verlauf dieses dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten  $\mu_i$  als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für die verschiedenen thermischen Wandrandbedingungen. Am Eintritt des Films, d.h. für sehr kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi < 0, 1$ , unterscheiden sich die Gradienten der jeweiligen thermischen Randbedingungen nicht, da die thermische Grenzschicht der Wand die der Filmoberfläche noch nicht beeinflusst und somit auch nicht die Entwicklung des Absorbatgradienten an der Filmoberfläche. Der Absorbatmassenanteilsgradient breitet sich in diesem Bereich ungestört in den Film aus. Am Eintritt des Films ist



**Abbildung 5.5:** Entwicklung des lokalen dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten  $\mu_i$  an der Filmoberfläche für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linie für  $\tilde{Bi} = 0, 1$ , gestrichelte Linie für  $\tilde{Bi} = 1$  mit  $\Theta_{ext} = -1$ , Punktlinie für die isotherme Wand mit  $\Theta_W = -1$  und Strichpunktlinie für die adiabate Wand

der Gradient unendlich groß, da die Ausdehnung der Grenzschicht des Absorbatmassenanteils gegen Null geht, es jedoch an der Phasengrenzfläche zu einem Sprung des Absorbatmassenanteils auf  $\gamma_i = 0,5$  kommt. Mit zunehmender Strömungslänge diffundiert das Absorbat tiefer in den Film und die Absorbatgrenzschicht dehnt sich aus. Da sich zu Beginn der Absorbatanteil an der Filmoberfläche nicht ändert, sinkt der Gradient aufgrund der wachsenden Grenzschichtdicke.

Trifft die sich von der Wand entwickelnde Grenzschicht der isothermen Wand auf die sich von der Phasengrenzfläche entwickelnde, so wird aufgrund der unbeschränkten Wärmeabfuhr aus dem Film das Sinken des Absorbatgradienten durch das Ansteigen des Absorbatanteils an der Phasengrenzfläche in einem Bereich von  $0,1 < \xi < 1$  annähernd gestoppt.

Ein ähnlicher Effekt ist zu erkennen für die modifizierte Biot-Zahl von  $\tilde{Bi} = 1$ , d.h. bei einem moderaten Wärmewiderstand der Wand. Allerdings wird durch die Beschränkung der Wärmeabfuhr aus dem Film der Abfall des Absorbatgradienten erst bei einer größeren Strömungslänge und somit auf niedrigerem Niveau im Vergleich zur isothermen Wand gebremst.

Für eine modifizierte Biot-Zahl von  $\tilde{Bi} = 0,1$ , d.h. einer Wand mit einem zehnmal größeren Wärmetransportwiderstand als der Film, tritt der gegenteilige Effekt auf und der Abfall des Absorbatgradienten ähnelt anfänglich noch dem der adiabaten Wand bis  $\xi \approx 0,5$ . Wenn das Temperaturprofil den annähernd linearen Verlauf erreicht und die Absorptionswärme aus dem Film durch die Wand abtransportiert werden kann, tritt ab  $\xi \approx 2$  der gleiche Effekt ein, wie bei der isothermen Wand bzw. für  $\tilde{Bi} = 1$ . Durch Absinken der Filmoberflächentemperatur wird der Absorbatanteil an der Filmoberfläche erhöht und das Absinken des Absorbatgradienten an der Oberfläche durch die Grenzschichtausdehnung wird teilweise kompensiert. Dieser den Stofftransport steigernde Effekt findet jedoch für  $\tilde{Bi} = 0,1$  einerseits statt bei größeren Werten der dimensionslosen Strömungskordinate und andererseits bei einem annähernd um den Faktor zehn geringeren Wert des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten im Vergleich zum isothermen Fall.

Im Fall der adiabaten Wand setzt sich das durch den Temperaturanstieg an der Filmoberfläche induzierte verstärkte Absinken des Absorbatgradienten bei  $\xi \approx 0,5$  weiter fort. Erreicht der Absorbatgradient die Wand, was bei  $\xi \approx 10$

der Fall ist, so sinkt der Gradient nicht mehr durch die Ausbreitung der Grenzschicht, sondern durch den Anstieg des Absorbatmassenanteils im Film.

Die Verschiebung der Verläufe zu höheren Werten der dimensionslosen Strömungskordinate mit sinkenden modifizierten Biot-Zahlen wird im Anhang A.3 anhand einer integralen Absorbatmassenbilanz weiter erläutert. Kurz gesagt ist der indifferente finale Gleichgewichtswert des Absorbatmassenanteils für eine von Null verschiedene modifizierte Biot-Zahl lediglich von der externen Fluidtemperatur abhängig. Demzufolge führen die unterschiedlichen lokalen Massenstromdichten für die jeweiligen modifizierten Biot-Zahlen zwangsweise zur Verschiebung der für die Erreichung dieses Gleichgewichtswertes erforderlichen Strömungslänge  $\xi_\infty$ .

## 5.4 Wärmestromdichte und mittlere Filmtemperatur

An dieser Stelle wird die vom Film an die Wand übertragene Wärmestromdichte sowie die mittlere Salzlösungsaustrittstemperatur für die verschiedenen thermischen Randbedingungen als Funktion der Filmströmungskordinate untersucht.

Die vom Film an die Wand übertragene, dimensionsbehaftete Wärmestromdichte ist nach FOURIER proportional zu dem Filmtemperaturgradienten an der Wand:

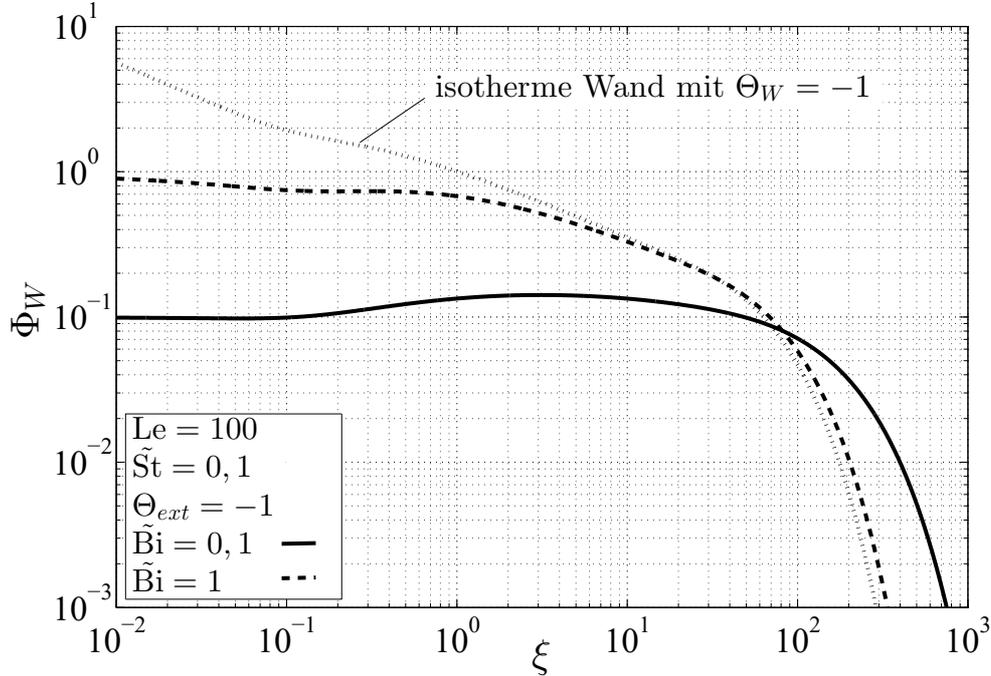
$$\dot{q}_W = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}(y = \delta). \quad (5.5)$$

In dimensionsloser Form lautet (5.5):

$$\Phi_W = -\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\eta = 1) = \dot{q}_W \cdot \frac{\delta}{\lambda \cdot (T_{eq,0} - T_0)}. \quad (5.6)$$

Somit skaliert die Wärmestromdichte an der Wand lediglich mit dem dimensionslosen Temperaturgradienten an der Wand bei gegebenen und als konstant angenommenen Eintrittsbedingungen. Ein ähnlicher Zusammenhang des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten für den Stofftransport an der Phasengrenzfläche wurde in (5.4) hergestellt. Abbildung 5.6 zeigt den Verlauf dieses dimensionslosen Temperaturgradienten an der Wand für die verschiedenen thermischen Wandrandbedingungen.

Für die isotherme Wand kommt es durch die Festlegung der Wandtemperatur insbesondere beim Eintritt des Films und einer Wandtemperatur niedriger als



**Abbildung 5.6:** Entwicklung des lokalen dimensionslosen Wandtemperaturgradienten  $\Phi_W$  für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linie für  $\tilde{\text{Bi}} = 0,1$ , gestrichelte Linie für  $\tilde{\text{Bi}} = 1$  mit  $\Theta_{ext} = -1$ , gepunktete Linie für die isotherme Wand mit  $\Theta_W = -1$

die Filmeintrittstemperatur zu einer sehr großen Wärmestromdichte an der Wand. Im Gegensatz dazu wird bei der Vorgabe des thermischen Widerstandes der Wand der Wärmestrom an die Wand begrenzt. Die Randbedingung der diabaten Wand lautet in dimensionsloser Form:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\xi, \eta = 1) = \tilde{\text{Bi}} \cdot (\Theta_{ext} - \Theta(\xi, \eta = 1)). \quad (5.7)$$

Für kleine Werte der Strömungskordinate  $\xi$  beträgt die Wandtemperatur nahezu der Filmeintrittstemperatur  $\Theta(\xi, \eta = 1) \approx \Theta_0 = 0$ . Zu Beginn des Absorptionsprozesses, d.h. für  $\xi \rightarrow 0$  nähert sich der dimensionslose Temperaturgradient an der Wand demzufolge folgendem Eintrittsgrenzwert an:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\xi \rightarrow 0, \eta = 1) = \tilde{\text{Bi}} \cdot \Theta_{ext}. \quad (5.8)$$

Diese Grenzwerte am Eintritt sind in Abbildung 5.6 für die unterschiedlichen modifizierten Biot-Zahlen deutlich erkennbar.

Mit zunehmender Strömungslänge sinkt die Wärmestromdichte für die isotherme Wand, was durch die Ausbreitung der thermischen Grenzschicht in den Film hervorgerufen wird, da die Wandtemperatur konstant gesetzt ist.

Sobald die beiden thermischen Grenzschichten der Filmoberfläche und der Wand sich beeinflussen, kommt es durch die durch Absorption erhöhte Salzlösungstemperatur zu einer Verlangsamung dieses Abfalls des Temperaturgradienten an der Wand bei  $\xi \approx 0,1$ . Da jedoch die Absorption an der Filmoberfläche mit zunehmender Strömungslänge abklingt, sinkt die Wärmefreisetzung an der Filmoberfläche und dementsprechend auch die Wärmeabfuhr an die Wand.

Für  $\tilde{Bi} = 1$  sinkt die Wandtemperatur für kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate in Abbildung 5.2 leicht ab, was auch in Abbildung 5.6 zu einem leicht sinkenden Temperaturgradienten führt. Sobald die thermische Grenzschicht der Filmoberfläche mit der der Wand wechselwirkt, wird dieses Absinken der Wandtemperatur und somit auch des Temperaturgradienten (vgl.(5.7)) ähnlich dem isothermen Fall gebremst und örtlich sogar gestoppt. Bei weiterer Steigerung der Strömungslänge klingt die Absorption durch die Annäherung an den Gleichgewichtszustand ab. Die Filmtemperatur und somit auch die Wandtemperatur nähern sich der externen Fluidtemperatur  $\Theta(\xi \rightarrow \infty, \eta = 1) = \Theta_{ext}$ . Das bedeutet nach (5.7), dass auch der Wandtemperaturgradient verschwindet.

Bei sehr großen thermischen Widerständen der Wand, wie z.B. für  $\tilde{Bi} = 0,1$ , führt demnach der Anstieg der Wandtemperatur in Abbildung 5.2, sobald die thermische Grenzschicht der Filmoberfläche die der Wand erreicht, auch zu einem Anstieg der anfänglichen Wärmestromdichte, da die Wandtemperatur über die Filmeintrittstemperatur steigt. Die Wärmefreisetzung an der Oberfläche klingt jedoch ab bis die Wärme über die Wand abgegeben werden kann, so dass die Wandtemperatur ab  $\xi \approx 3$  wieder sinkt.

Für die im nächsten Abschnitt untersuchte Entwicklung der Unterkühlung der Salzlösung wird die mittlere Filmaustrittstemperatur benötigt. Diese wird ähnlich dem Vorgehen im Anhang A.2 über eine integrale Energiebilanz um

den Film erhalten:

$$\dot{M}_{Lsg,0} \cdot c_{Lsg} \cdot (\bar{T}_{Lsg} - T_0) = -\lambda \left( \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_i - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w \right) \cdot B \cdot x. \quad (5.9)$$

Dem Film wird an der Oberfläche Wärme durch die Absorption von Absorbat zugeführt und durch Wärmeleitung in den Film transportiert. An der Wandseite wird der Film gekühlt und daher Wärme durch Wärmeleitung aus dem Film an die Wand abgegeben. Sind diese beiden Wärmeströme über der Filmströmungslänge  $x$  im Mittel gleich groß, so verschwindet die rechte Seite der Gleichung (5.9) und die Filmtemperatur ändert sich nicht. Der Film tritt in diesem Fall mit der Eintrittstemperatur  $T_0$  aus. Zu beachten ist, dass in dem hier vorgestellten Modell eine Massenänderung des Films durch Absorption vernachlässigt wird. Die mittlere Austrittstemperatur des Films  $\bar{T}_{Lsg}$  steigt entsprechend, wenn die über die betrachtete Strömungslänge gemittelte in den Film geleitete Wärmestromdichte von der Filmoberfläche größer ist als die an die Wand übertragene mittlere Wärmestromdichte.

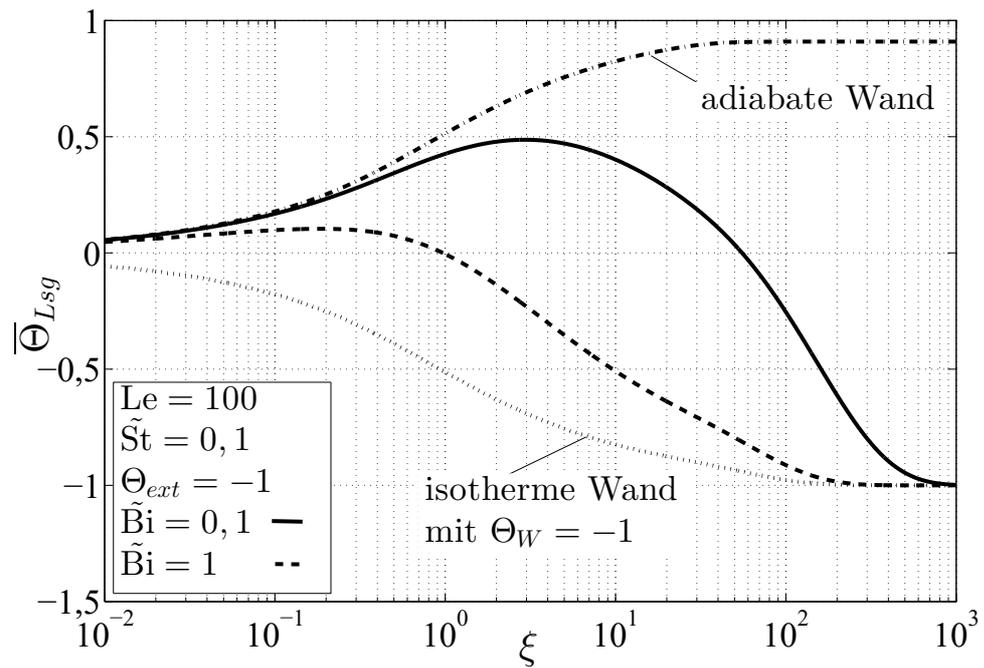
Die Einführung dimensionsloser Variablen liefert folgenden Zusammenhang für die mittlere dimensionslose Filmaustrittstemperatur:

$$\bar{\Theta}_{Lsg} = -\xi \cdot \left( \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} \right). \quad (5.10)$$

Abbildung 5.7 zeigt den Verlauf der mittleren Filmaustrittstemperaturen als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für die verschiedenen thermischen Wandrandbedingungen. Da der Wandtemperaturgradient bei der adiabaten Wand verschwindet, kommt es in diesem Fall zu keiner Wärmeabfuhr und die mittlere Filmtemperatur steigt auf den asymptotischen Endwert, der lediglich von der modifizierten Stefan-Zahl abhängt:

$$\bar{\Theta}_{Lsg,\infty} = \frac{1}{1 + \tilde{St}} \approx 0,91 \quad \text{für} \quad \tilde{St} = 0,1. \quad (5.11)$$

Für den großen thermischen Widerstand der Wand mit  $\tilde{Bi} = 0,1$  kommt es zu Beginn des Absorptionsprozesses durch die intensive Wärmefreisetzung aufgrund großer Stoffgradienten zu einem Anstieg der Salzlösungstemperatur, was in Abbildung 5.7 deutlich erkennbar ist. Klingt der Absorptionsprozess mit zunehmender Strömungslänge ab, so ist die Wand in der Lage diese Wärme aus dem Film abzuführen und die Salzlösungstemperatur sinkt bis auf die extern



**Abbildung 5.7:** Entwicklung der über die Filmdickenkoordinate gemittelten dimensionslosen Austrittstemperatur  $\bar{\Theta}_{Lsg}$  für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ ; durchgezogene Linie für  $\tilde{Bi} = 0,1$ , gestrichelte Linie für  $\tilde{Bi} = 1$  mit  $\Theta_{ext} = -1$ , gepunktete Linie für die isotherme Wand mit  $\Theta_W = -1$  und Strichpunktlinie für die adiabate Wand

vorgegebene Fluidtemperatur.

Eine im Vergleich zur Eintrittstemperatur der Salzlösung leicht erhöhte mittlere Salzlösungstemperatur ist auch für den kleineren Wärmewiderstand der Wand mit  $\tilde{\text{Bi}} = 1$  erkennbar, allerdings deutlich weniger ausgeprägt als für  $\tilde{\text{Bi}} = 0, 1$ .

Nur für die Randbedingung der isothermen Wand kommt es von Beginn an zu einer stärkeren Kühlung des Films als Erwärmung durch Absorption für die hier vorgegebene Wandtemperatur von  $\Theta_W = -1$ . Dadurch ist die mittlere Salzlösungstemperatur für alle hier betrachteten Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  geringer als die Eintrittstemperatur der Salzlösung.

## 5.5 Unterkühlung des Films

Bei der Auslegung und dem Betrieb von Absorptionswärmepumpen stellt die Unterkühlung der aus einem Wärme- und Stoffübertrager austretenden Salzlösung eine wichtige Größe für die Bewertung des Übertragers dar. Sie ist definiert als die Temperaturdifferenz zwischen der über die Filmdickenkoordinate gemittelte Salzlösungstemperatur  $\bar{T}_{Lsg}$  und der zum mittleren Absorbatmassenanteil  $\bar{c}_{Lsg}$  und dem jeweiligen Druck im Übertrager zugehörigen Gleichgewichtstemperatur  $T_{eq,x}$ :

$$\Delta T_{UK} = \bar{T}_{Lsg} - T_{eq,x}. \quad (5.12)$$

Wird die lineare Approximation für die isobare Siedetemperatur für die Bestimmung von  $T_{eq,x}$  verwendet, so ergibt sich folgender Zusammenhang für die Salzlösungsunterkühlung:

$$\Delta T_{UK} = \bar{T}_{Lsg} - A + B \cdot \bar{c}_{Lsg}. \quad (5.13)$$

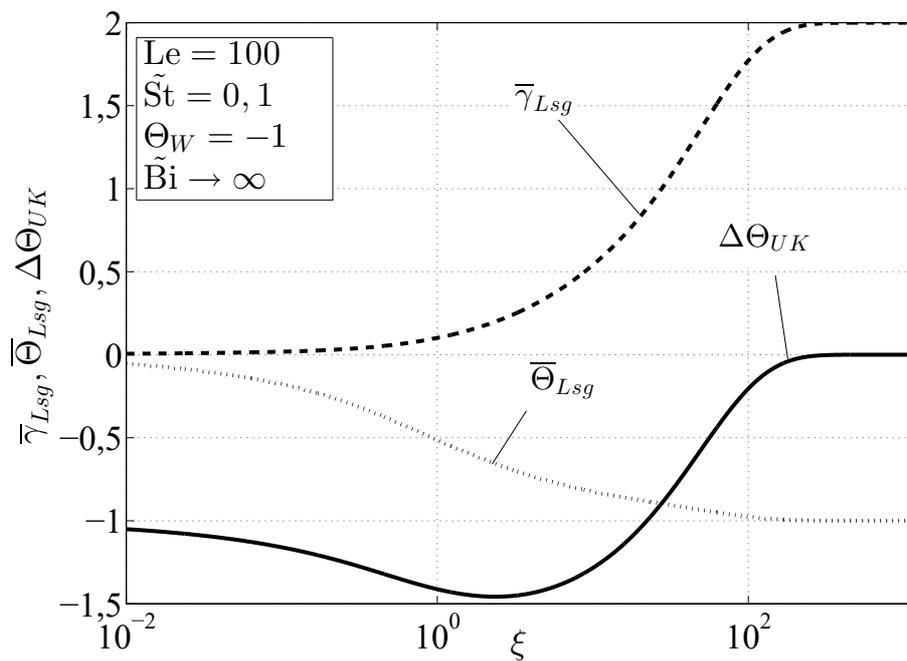
Eine große Unterkühlung am Austritt eines Übertragers bedeutet, dass die Salzlösung zwar gekühlt wurde, jedoch die Gleichgewichtstemperatur  $T_{eq,x}$  aufgrund eines gehemmten Stofftransportes weiterhin groß ist. Für den Betrieb von Absorptionswärmepumpen wird daher die Unterkühlung häufig als ein Maß für das Vorhandensein nicht kondensierbarer Gase, wie z.B. Luft oder Wasserstoff in den Behältern herangezogen, da diese Gase den Stofftransport in der Dampfphase zusätzlich beeinträchtigen.

Durch Umformung der Salzlösungsunterkühlung  $\Delta T_{UK}$  aus (5.12) in eine dimensionslose Form und der Anwendung der linearen Approximation der isobaren Siedetemperatur der Salzlösung ergibt sich folgender dimensionsloser Zusammenhang für die Salzlösungsunterkühlung:

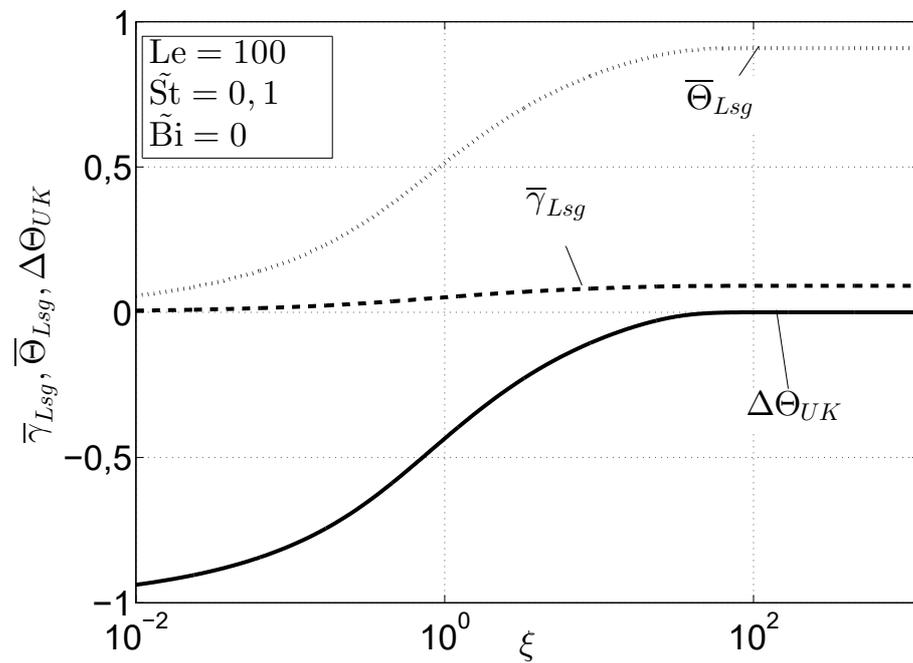
$$\Delta\Theta_{UK} = \frac{\bar{T}_{Lsg} - T_{eq,x}}{T_{eq,0} - T_0} = \bar{\Theta}_{Lsg} - \Theta_{i,\bar{\gamma}_{Lsg}} = \bar{\Theta}_{Lsg} - 1 + \bar{\gamma}_{Lsg}. \quad (5.14)$$

Am Eintritt der Salzlösung ist die mittlere Salzlösungstemperatur gleich der Eintrittstemperatur  $\bar{\Theta}_{Lsg} = \Theta_0 = 0$ , ebenso wie der Absorbatmassenanteil  $\bar{\gamma}_{Lsg} = \gamma_0 = 0$ . Demzufolge beträgt die dimensionslose Unterkühlung des Films am Eintritt  $\Theta_{UK,0} = -1$ , da die betragsmäßige Anfangsunterkühlung  $T_{eq,0} - T_0$  für die Entdimensionierung der Temperatur verwendet wurde. Je nach Wandrandbedingung sowie der jeweiligen Geschwindigkeit des Wärme- und Stofftransportes kann die Unterkühlung des Films auch über die Anfangsunterkühlung hinausgehen. Das ist der Fall bei Wandtemperaturen, welche geringer sind als die Filmeintrittstemperatur  $T_W < T_0$  und bei gleichzeitig sehr langsamem Stofftransport.

Abbildung 5.8 und 5.9 zeigen die Entwicklung der Salzlösungsunterkühlung für die thermischen Grenzfälle der isothermen und adiabaten Wand. Des Weiteren sind in den Abbildungen jeweils auch die Entwicklung der mittleren Filmtemperatur und des mittleren Absorbatanteils dargestellt, da diese beiden Größen allein den Verlauf der dimensionslosen Unterkühlung (5.14) beeinflussen. Aufgrund der unbeschränkten Wärmeabfuhr im Fall der isothermen Wand, kommt es zu einer Steigerung der Salzlösungsunterkühlung im Vergleich zur Unterkühlung am Eintritt der Salzlösung  $\Delta\Theta_{UK} < -1$ . Erst wenn sich die mittlere Salzlösungstemperatur der vorgegebenen Wandtemperatur annähert und auch der Stofftransport für einen merklichen Anstieg des mittleren Absorbatmassenanteils sorgt, sinkt die Salzlösungsunterkühlung. Sie erreicht bei  $\xi \approx 300$  den Gleichgewichtswert von  $\Delta\Theta_{UK} = 0$ . Die adiabate Wand stellt den entgegengesetzten thermischen Grenzfall zur isothermen Wand dar. Die gesamte durch Absorption freigesetzte Wärme verbleibt im Film und sorgt für einen stetigen Anstieg der mittleren Filmtemperatur in Abbildung 5.9. Aufgrund dieses Temperaturanstiegs im Film nimmt auch die Unterkühlung des Films ab. Der Stofftransport wird durch diesen Temperaturanstieg im Film stark beeinträchtigt und der Gleichgewichtswert des adiabaten Grenzfalles be-



**Abbildung 5.8:** Entwicklung der dimensionslosen Unterkühlung des Films  $\Delta\Theta_{UK}$  (durchgezogene Linie) für die isotherme Wand mit  $\Theta_W = -1$  über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{Bi} \rightarrow \infty$  (gestrichelte Linie  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  und gepunktete Linie  $\bar{\Theta}_{Lsg}$ )



**Abbildung 5.9:** Entwicklung der dimensionslosen Unterkühlung des Films  $\Delta\Theta_{UK}$  (durchgezogene Linie) für die adiabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{Bi} = 0$  (gestrichelte Linie  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  und gepunktete Linie  $\bar{\Theta}_{Lsg}$ )

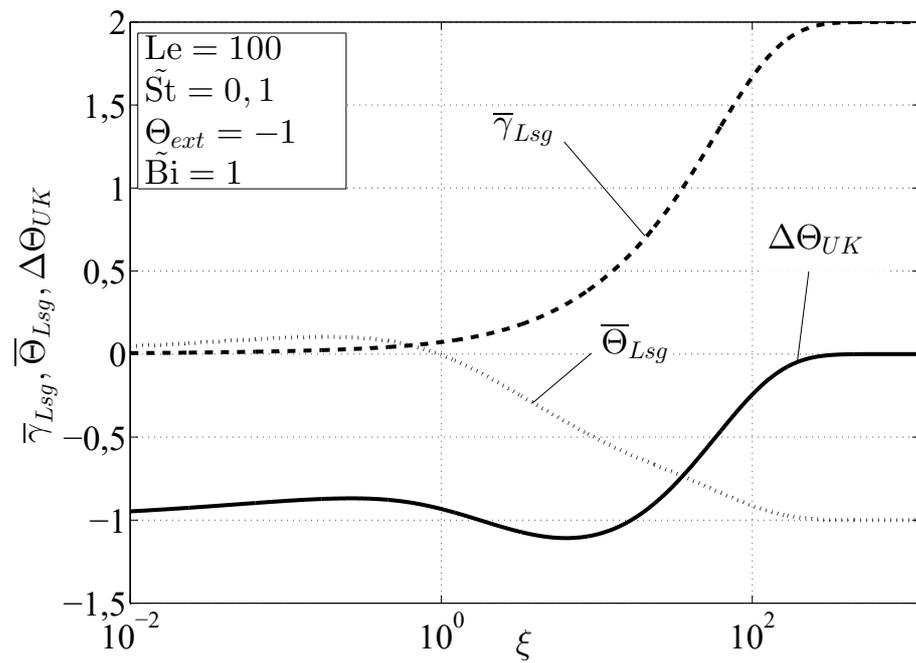
trägt mit  $\bar{\gamma}_{Lsg,adia,\infty} \approx 0,1$  lediglich einen Bruchteil des Wertes der isothermen Wand mit  $\bar{\gamma}_{Lsg,iso,\infty} = 2$ . Daher ist der Anteil des Stofftransportes am Abbau der Anfangsfilmunterkühlung bei der adiabaten Wand und einer modifizierten Stefan-Zahl von  $\tilde{St} = 0,1$  eher gering. Die Filmunterkühlung kann auch durch einen Temperaturanstieg abgebaut werden, was an der erhöhten Austrittstemperatur des Films in Abbildung 5.9 zu erkennen ist.

Abbildung 5.10 zeigt den Verlauf der Filmunterkühlung für eine modifizierte Biot-Zahl  $\tilde{Bi} = 1$ , d.h. gleicher thermischer Widerstände des Films und der Wand. Zu Beginn des Absorptionsprozesses sinkt die Unterkühlung allerdings durch den Anstieg der mittleren Filmtemperatur leicht. Ab  $\xi \approx 0,5$  ermöglicht das Nachlassen der Intensität der Absorption eine Abfuhr der Absorptionswärme und ein Sinken der mittleren Filmtemperatur. Dieses Sinken der Filmtemperatur sorgt wiederum für eine Zunahme der Filmunterkühlung. Die Erhöhung des mittleren Absorbatanteils führt ab  $\xi \approx 3$  zum Abbau der Filmunterkühlung.

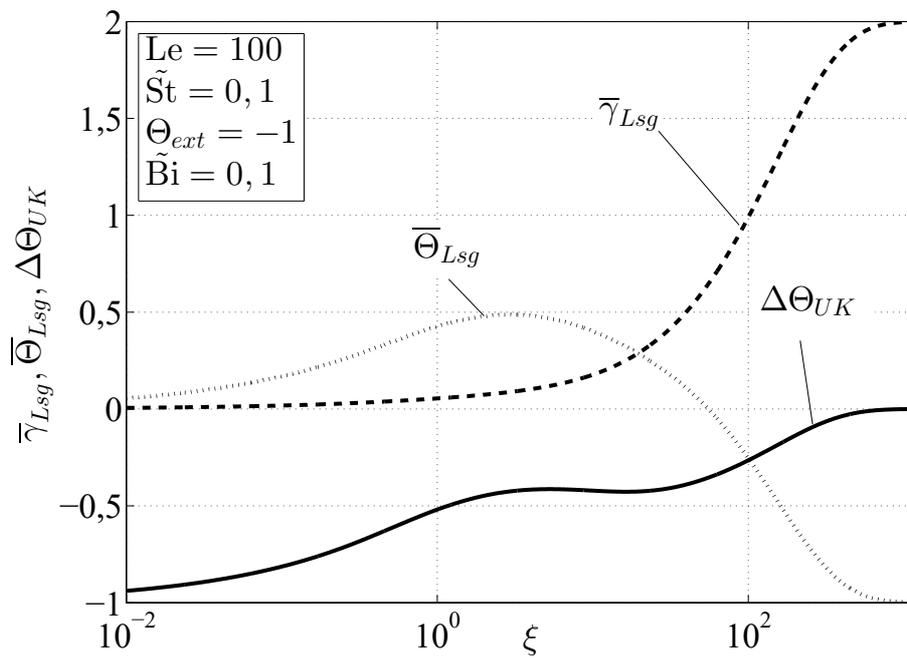
Für eine modifizierte Biot-Zahl von  $\tilde{Bi} = 0,1$ , d.h. einem zehnmal größeren thermischen Widerstand der Wand als der des Films, ergibt sich der in Abbildung 5.11 gezeigte Verlauf der Filmunterkühlung. Der Anfangsverlauf der Unterkühlung wird wie bei den vorigen Beispielen maßgeblich durch den Verlauf der Salzlösungstemperatur beeinflusst. Der anfängliche Salzlösungstemperaturanstieg sorgt für ein Sinken der Salzlösungsunterkühlung. Das ab  $\xi \approx 3$  einsetzende Sinken der Salzlösungstemperatur sorgt für einen Stopp des Abbaus der Unterkühlung. Allerdings führt der ab  $\xi \approx 5$  stärker einsetzende Anstieg des mittleren Absorbatmassenanteils für den finalen Abbau der Unterkühlung der Salzlösung ab  $\xi \approx 50$ .

## 5.6 Variation der modifizierten Stefan- und der Lewis-Zahl

Die Lewis- und modifizierte Stefan-Zahl verknüpfen über die entdimensionierte Energiebilanz (3.23) an der Phasengrenzfläche den Stoff- und Wärmestrom miteinander, welcher von der Filmoberfläche in den Salzlösungsfilm diffundiert bzw. geleitet wird. Die modifizierte Stefan-Zahl beschreibt dabei den thermischen Effekt, der durch die Absorption an der Filmoberfläche hervorgerufen



**Abbildung 5.10:** Entwicklung der dimensionslosen Unterkühlung des Films  $\Delta\Theta_{UK}$  (durchgezogene Linie) für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$  (gestrichelte Linie  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  und gepunktete Linie  $\bar{\Theta}_{Lsg}$ )



**Abbildung 5.11:** Entwicklung der dimensionslosen Unterkühlung des Films  $\Delta\Theta_{UK}$  (durchgezogene Linie) für die diabate Wand über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{Bi} = 0,1$  und  $\Theta_{ext} = -1$  (gestrichelte Linie  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  und gepunktete Linie  $\bar{\Theta}_{Lsg}$ )

wird und stellt somit eine Randbedingung dar. Hingegen beschreibt die Lewis-Zahl in der dimensionslosen Energiebilanz (3.23) das Verhältnis des molekularen Wärmetransportes im Vergleich zum molekularen Stofftransport auch am Rand. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Kennzahlen besteht jedoch darin, dass die Lewis-Zahl als Stoffparameter das Transportproblem nicht nur an der Filmoberfläche, sondern auch über der gesamten Filmdicke beeinflusst. Die modifizierte Stefan-Zahl hingegen beeinflusst das Transportproblem nur am Rand über die in diesem Filmodell lediglich an der Filmoberfläche freigesetzte Absorptionsenthalpie. Aus diesem Grund ist eine getrennte Betrachtung dieser beiden Kennzahlen sinnvoll. Eine mathematisch praktische Zusammenfassung des Produktes dieser Kennzahlen zur dimensionslosen Absorptionsenthalpie wie dies z.B. Grossman (1983) vorschlägt, wird an dieser Stelle aus den oben genannten Gründen nicht durchgeführt.

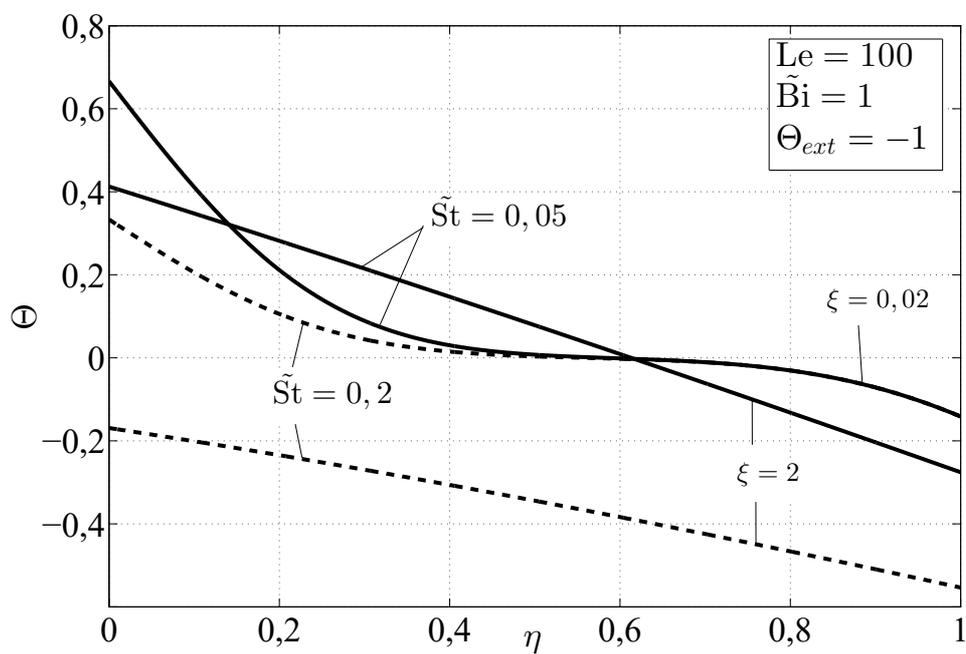
Im Folgenden werden die zwei weiteren bisher variierten Parameter, d.h. die modifizierte Biot-Zahl sowie die dimensionslose externe Mediumstemperatur  $\Theta_{ext}$  auf typischen Werten konstant gehalten und lediglich die Auswirkungen der beiden Kennzahlen  $\tilde{St}$  und  $Le$  nacheinander betrachtet und die Auswirkungen auf die Profilverläufe und absorbierten Massenstromdichten diskutiert.

### 5.6.1 Variation der modifizierten Stefan-Zahl

Eine Variation der modifizierten Stefan-Zahl (5.15) kann durch die Wärmekapazität der Salzlösung, die Absorptionsenthalpie sowie den Steigungsparameter der Gleichgewichtstemperaturen mit der Veränderung der Salzlösungszusammensetzung hervorgerufen werden:

$$\tilde{St} = \frac{c_p \cdot (T_{eq,0} - T_0)}{\Delta h_{abs} \cdot (c_{eq,0} - c_0)}. \quad (5.15)$$

In (3.118) wurde gezeigt, dass die von van der Wekken und Wassenaar (1988) lediglich an der Phasengrenzfläche berücksichtigte einseitige Diffusion über eine veränderte modifizierte Stefan-Zahl durch den Verstärkungsfaktor an der Phasengrenzfläche auch mit diesem Modell abgeschätzt werden kann. Abbildung 5.12 zeigt die Temperaturprofile für zwei verschiedene modifizierte Stefan-Zahlen bei zwei verschiedenen Werten der dimensionslosen Strömungskordinate. Je kleiner die modifizierte Stefan-Zahl ist, umso größer ist die latente im Vergleich zur sensiblen Wärme, die der Film als thermische Energie aufnehmen



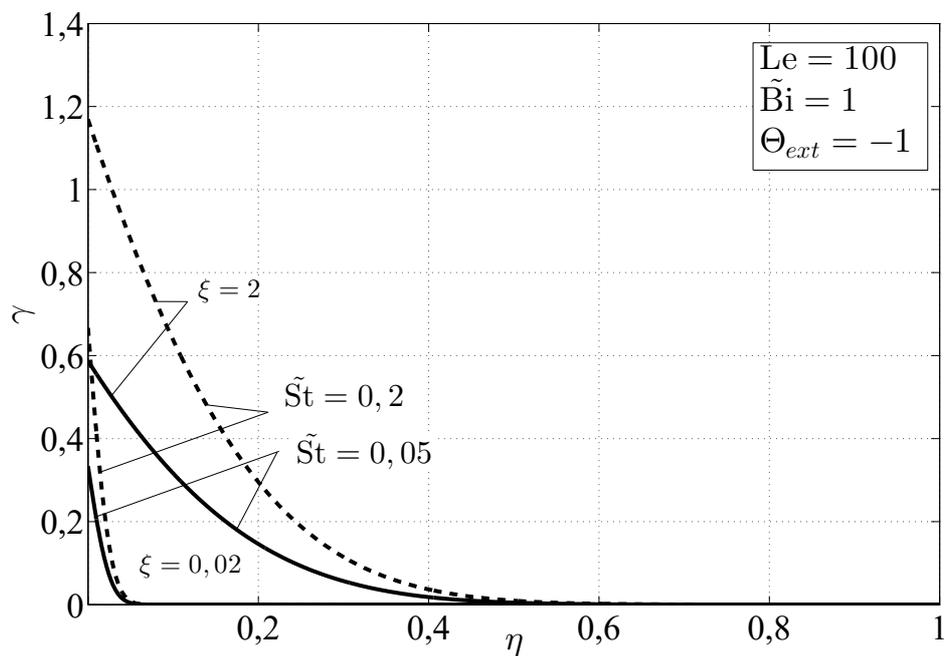
**Abbildung 5.12:** Entwicklung des dimensionslosen Filmtemperaturprofils über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für  $Le = 100$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $\tilde{St} = 0,2$  und durchgezogene Linie  $\tilde{St} = 0,05$

kann. Aus ebendiesem Grund steigt für  $\tilde{St} = 0,05$  in Abb. 5.12 die dimensionslose Filmoberflächentemperatur auf einen höheren Wert  $\Theta(\eta = 0, \xi = 0,02) \approx 0,67$  als für  $\tilde{St} = 0,2$ , für welche lediglich  $\Theta(\eta = 0, \xi = 0,02) \approx 0,33$  erreicht wird.

Weil die modifizierte Stefan-Zahl lediglich die Oberflächenwerte verändert, sind die Ausdehnungen der thermischen Filmoberflächengrenzschichten nahezu unabhängig vom Wert der modifizierten Stefan-Zahl. Für  $\xi = 0,02$  hat die thermische Filmoberflächengrenzschicht die Hälfte der dimensionslosen Filmdicke bei  $\eta = 0,5$  für beide Stefan-Zahlen erreicht. Bei  $\xi = 2$  unterscheiden sich die Temperaturprofile deutlich. Durch den erhöhten latenten thermischen Anteil für  $\tilde{St} = 0,05$  befindet sich das quasi-lineare Temperaturprofil auf einem höheren Filmtemperaturniveau und hat eine größere Steigung als das zu  $\tilde{St} = 0,2$  gehörige dimensionslose Filmtemperaturprofil. Für die modifizierte Stefan-Zahl  $\tilde{St} = 0,2$  wird der gesamte Film samt Filmoberfläche bei  $\xi = 2$  bereits auf eine geringere Temperatur als die Filmeintrittstemperatur gekühlt,  $\Theta < 0$ . Die zugehörigen Filmoberflächentemperaturen unterscheiden sich mit  $\Theta(\eta = 0, \xi = 2)_{\tilde{St}=0,05} \approx 0,41$  und  $\Theta(\eta = 0, \xi = 2)_{\tilde{St}=0,2} \approx -0,18$  deutlich.

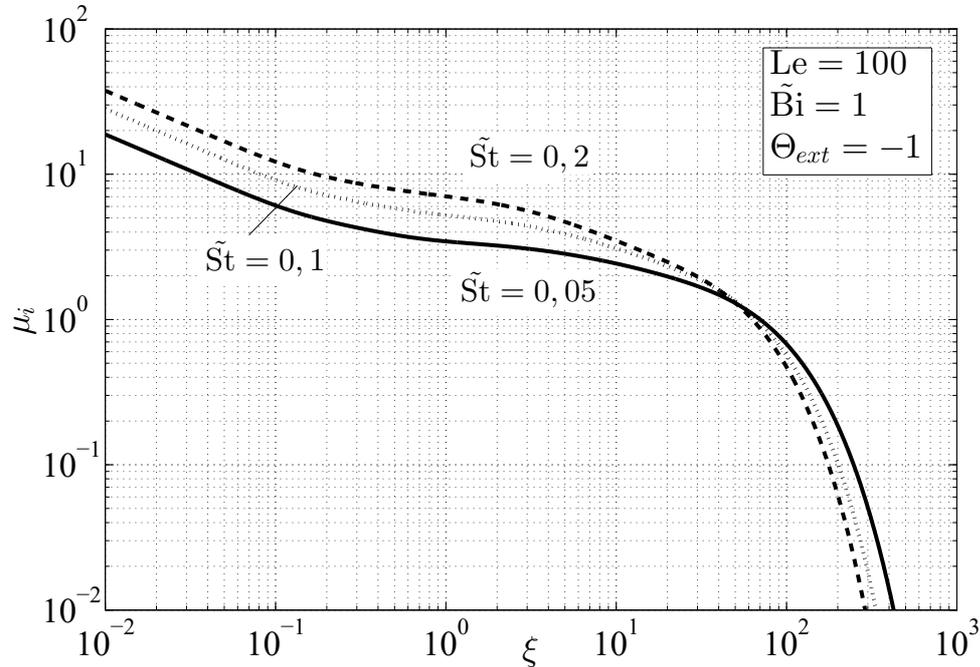
In Abbildung 5.13 sind die zugehörigen dimensionslosen Massenanteilsprofile dargestellt. Durch die veränderte Stefan-Zahl verändern sich die Temperaturen an der Filmoberfläche und dadurch über die Phasengleichgewichtsbeziehung der Absorbatmassenanteil an der Filmoberfläche. Ebendieser Effekt stellt den Unterschied zwischen den Massenanteilsprofilen für die zwei betrachteten modifizierten Stefan-Zahlen in Abb. 5.13 dar. Für  $\xi = 0,02$  stellt sich durch die niedrigere Filmoberflächentemperatur für  $\tilde{St} = 0,2$  ein höherer dimensionsloser Absorbatmassenanteil an der Filmoberfläche von  $\gamma(\eta = 0, \xi = 0,02)_{\tilde{St}=0,2} = 0,67$  ein als für  $\tilde{St} = 0,05$  von  $\gamma(\eta = 0, \xi = 0,02)_{\tilde{St}=0,05} = 0,33$ .

Bei  $\xi = 2$  nimmt der Unterschied in den Absorbatmassenanteilen für die unterschiedlichen Stefan-Zahlen aufgrund der sehr unterschiedlichen Oberflächentemperaturen in Abb. 5.12 weiter zu. Wie auch bei den Temperaturprofilen hängen die Grenzschichtdicken der Massenanteilsprofile nicht von der modifizierten Stefan-Zahl ab. Aus Abb. 5.13 geht ebenfalls deutlich hervor, dass für die größere modifizierte Stefan-Zahl auch der Gradient des dimensionslosen Absorbatmassenanteils an der Filmoberfläche für die betrachteten dimensionslosen Strömungskordinaten größer ist. Der Verlauf dieses dimensionslosen



**Abbildung 5.13:** Entwicklung des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsprofils über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für Lewis = 100,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $\tilde{St} = 0,2$  und durchgezogene Linie  $\tilde{St} = 0,05$

Absorbatmassenanteilsgradienten an der Filmoberfläche über der dimensionslosen Strömungskordinate ist in Abb. 5.14 dargestellt. Für geringe Werte



**Abbildung 5.14:** Entwicklung des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten an der Filmoberfläche über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für Lewis = 100,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $\tilde{St} = 0,2$ , gepunktete Linie  $\tilde{St} = 0,1$  und durchgezogene Linie  $\tilde{St} = 0,05$

der dimensionslosen Strömungskordinate steigt der dimensionslose Absorbatmassenanteilsgradient an der Filmoberfläche und somit auch die dimensionslose Absorbatmassenstromdichte nach (5.4) mit steigender modifizierter Stefan-Zahl. Bei großen Werten von  $\xi$  kehrt sich dies um und der Schnittpunkt des Verlaufs dieser lokalen Gradienten erfolgt aus Massenerhaltungsgründen, wie bereits für die Variation der modifizierten Biot-Zahl in Abb. 5.5 diskutiert und im Anhang A.3 erläutert.

Als Vergleich ist in Abb. 5.14 die für wässrige Lithiumbromidlösung typische modifizierte Stefan-Zahl von  $\tilde{St} = 0,1$  eingezeichnet. Typische Werte der dimensionslosen Strömungskordinate für mit wässriger Lithiumbromidlösung horizontal berieselte Rohre liegen im Bereich von  $\xi = 0,5 - 5$ .

Ein Vergleich der Absorbatgradienten zeigt, dass eine Verdopplung der Stefan-Zahl von  $\tilde{St} = 0,05$  auf  $\tilde{St} = 0,1$  für  $\xi = 1$  mit  $\mu_i(\xi = 1)_{\tilde{St}=0,05} \approx 3,5$  auf

$\mu_i(\xi = 1)_{\bar{S}t=0,1} \approx 5,1$  zu einem Anstieg des Gradienten, jedoch nicht zu einer Verdopplung führen.

Für den oben erörterten Fall der Verringerung der modifizierten Stefan-Zahl durch die Berücksichtigung der einseitigen Diffusion in Form einer veränderten Randbedingung an der Filmoberfläche ergibt sich folgendes Verhältnis der lokal absorbierten Massenströme an der Filmoberfläche:

$$\frac{\dot{m}_{qui}}{\dot{m}_{einseitig}} = \frac{1 - c_0}{1} \frac{\mu_{i,qui}}{\mu_{i,einseitig}} = 0,5 \cdot \frac{5,1}{3,5} \approx 0,73. \quad (5.16)$$

Bei  $\xi = 1$  würde bei Vernachlässigung der einseitigen Diffusion der lokal absorbierte Massenstrom nur 73% des absorbierten Massenstroms bei Berücksichtigung der einseitigen Diffusion als Randbedingung betragen. Ähnliche Verhältnisse haben auch Brauner et al. (1989) festgestellt. Allerdings berücksichtigten sie im Gegensatz zu van der Wekken und Wassenaar (1988) die durch einseitige Diffusion induzierte transversale Geschwindigkeit im gesamten Film. Diese Form der Berücksichtigung der einseitigen Diffusion kann im Rahmen des vorliegenden Modells ebenfalls durch eine Zusammenfassung des durch einseitige Diffusion hervorgerufenen Verstärkungsfaktors mit dem Diffusionskoeffizienten und einer dadurch veränderten Lewis-Zahl der Salzlösung abgeschätzt werden, was im Folgenden untersucht wird.

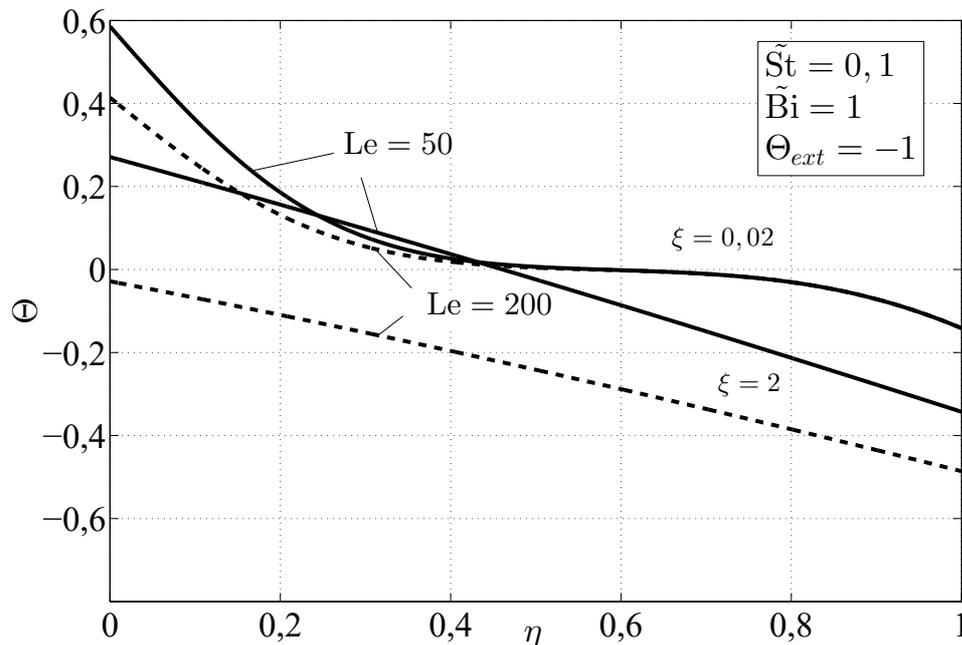
### 5.6.2 Variation der Lewis-Zahl

Die Lewis-Zahl beschreibt das Verhältnis des molekularen thermischen Energietransportes zum molekularen Stofftransport. Je größer die Lewis-Zahl, desto größer ist die Temperaturleitfähigkeit im Vergleich zum Diffusionskoeffizienten. Da es sich bei der Lewis-Zahl um ein Verhältnis handelt, sagt deren Wert nichts über die Absolutwerte der jeweiligen Transportparameter aus. Im Gegensatz zur modifizierten Stefan-Zahl wirkt sich eine Veränderung der Lewis-Zahl über die molekularen Transportparameter im gesamten Film aus.

Abbildung 5.15 zeigt den Verlauf der dimensionslosen Filmtemperatur über der Filmdickenkoordinate bei zwei verschiedenen Werten der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi = 0,02$  und  $\xi = 2$ . Für  $\xi = 0,02$  in der Nähe des Salzlösungseintritts ist der Temperaturverlauf für die geringere Lewis-Zahl in der thermischen Grenzschicht der Filmoberfläche zu einer höheren dimensionslosen Filmtemperatur verschoben. Eine kleinere Lewis-Zahl, verursacht durch einen

doppelt so hohen Diffusionskoeffizienten, bewirkt durch den dadurch induzierten höheren absorbierten Massenstrom eine größere Wärmefreisetzung an der Filmoberfläche und damit einen Temperaturanstieg.

Wird die Verringerung der Lewis-Zahl durch Halbierung der Temperaturleitfähigkeit hervorgerufen, kann bei gleichem Diffusionskoeffizienten die freigesetzte Wärme schlechter in den Film geleitet werden, was ebenfalls einen Temperaturanstieg in der Filmoberflächengrenzschicht zur Folge hat. Allerdings hätte eine Veränderung der Temperaturleitfähigkeit auch Auswirkungen auf den Wert der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$ . Eine Halbierung der Temperaturleitfähigkeit würde bei sonst konstanten Parametern und dem gleichen Wert für  $\xi$  eine Verdopplung der tatsächlichen Strömungskordinate  $x$  zur Folge haben. Das bedeutet, dass bei Halbierung der Temperaturleitfähigkeit  $a$  die Ausdehnung der thermischen Grenzschichten bei gleichem Wert der Strömungskordinate  $x$  deutlich geringer ist, worauf an dieser Stelle nur hingewiesen wird. Bei  $\xi = 2$  bleibt die Filmtemperatur für die geringere Lewis-Zahl höher als für

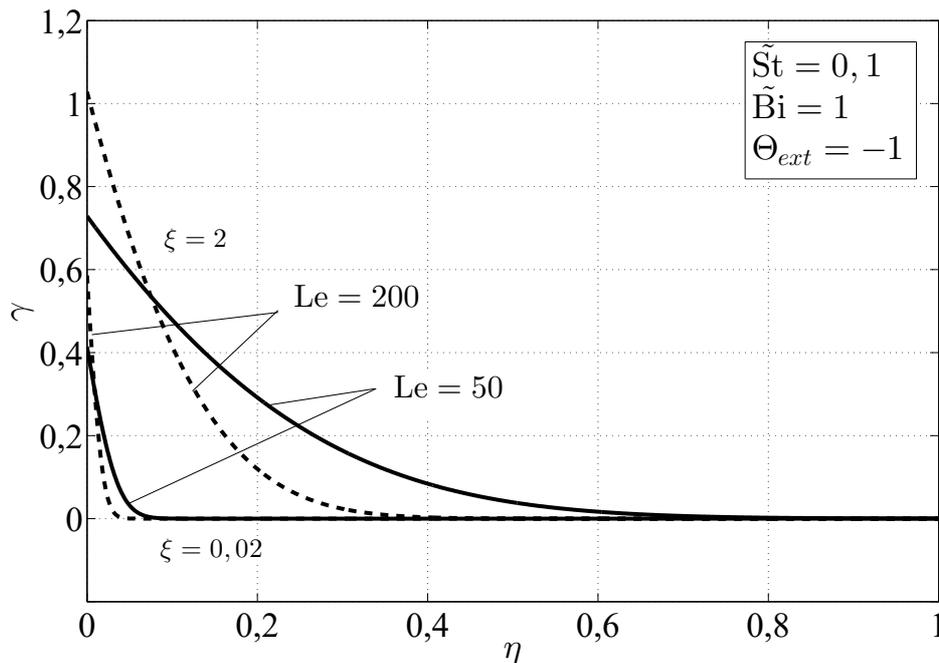


**Abbildung 5.15:** Entwicklung des dimensionslosen Filmtemperaturprofils über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für  $\tilde{St} = 0,1$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $Le = 200$ , durchgezogene Linie  $Le = 50$

die größere Lewis-Zahl aus den gleichen oben genannten Gründen. Einerseits

kann die erhöhte Filmtemperatur durch erhöhten Stofftransport und Wärme-freisetzung an der Filmoberfläche hervorgerufen werden. Andererseits kann durch verminderte Temperaturleitfähigkeit bei gleichbleibendem Diffusionskoeffizienten die Wärme schlechter durch den Film geleitet werden, was ebenfalls eine Erhöhung der Filmtemperatur nach sich zieht, jedoch auch den Wert der dimensionslosen Strömungskordinate wie oben beschrieben verändert. Ein Vergleich bei identischen tatsächlichen Strömungslängen  $x$  kann daher für diesen Fall nur bei unterschiedlichen Werten der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  erfolgen, worauf aus Gründen der Übersichtlichkeit in Abb. 5.15 verzichtet wird.

Die zu den in Abb. 5.15 gezeigten Temperaturprofilen gehörigen Profile des dimensionslosen Massenanteils sind in Abbildung 5.16 dargestellt. Die verän-

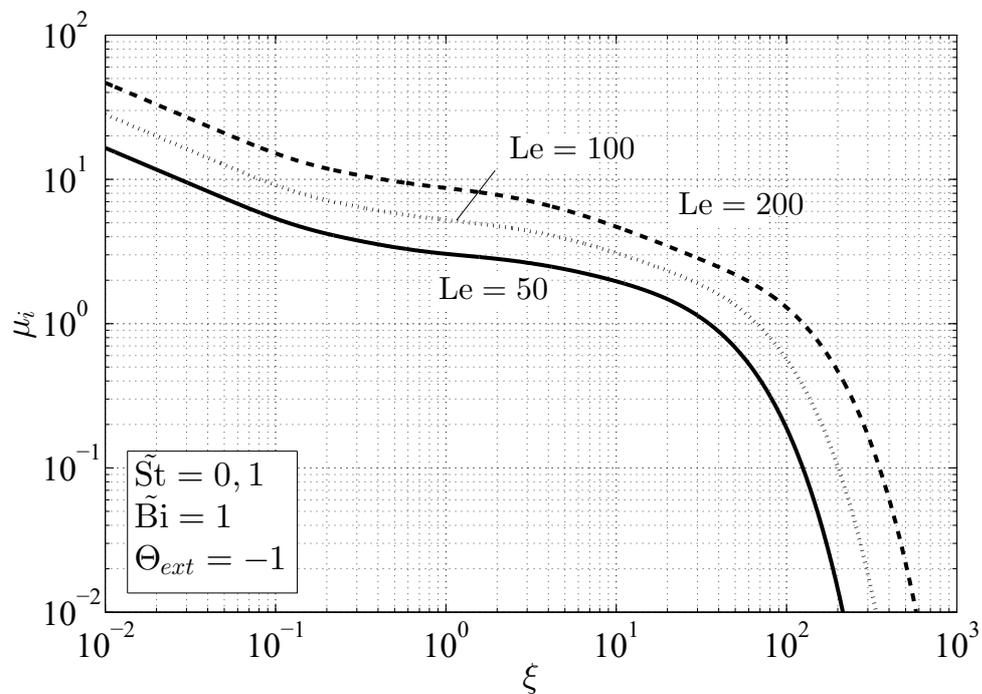


**Abbildung 5.16:** Entwicklung des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsprofils über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$  für  $\tilde{St} = 0,1$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $Le = 200$  durchgezogene Linie  $Le = 50$

dernten Oberflächentemperaturen des Films verschieben über das Phasengleichgewicht auch den dimensionslosen Absorbatmassenanteil an der Filmoberfläche. Für die geringere Lewis-Zahl  $Le = 50$  ist dieser Oberflächenabsorbatmas-

senanteil aufgrund der erhöhten Filmoberflächentemperatur geringer als für  $Le = 200$ . Darüber hinaus ist die Ausdehnung der Grenzschicht des Massenanteilsprofils für  $Le = 50$  deutlich größer als für  $Le = 200$ . Ursache hierfür ist der erhöhte Diffusionskoeffizient oder, im Fall verminderter Temperaturleitfähigkeit, die größere tatsächliche Strömungslänge bei gleichem  $\xi$ .

Die Veränderung des Oberflächenwertes und die unterschiedlichen Eindringtiefen führen zu einem deutlich geringeren Absorbatmassenanteilsgradienten an der Filmoberfläche für die geringere Lewis-Zahl  $Le = 50$  im Vergleich zu  $Le = 200$ . Die Entwicklung dieses Gradienten des dimensionslosen Absorbatmassenanteils mit der dimensionslosen Strömungskordinate zeigt Abbildung 5.17 für verschiedene Lewis-Zahlen. Mit zunehmender Lewis-Zahl steigt auch



**Abbildung 5.17:** Entwicklung des dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten an der Filmoberfläche über der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $\tilde{St} = 0,1$ ,  $\tilde{Bi} = 1$  und  $\Theta_{ext} = -1$ , gestrichelte Linie  $Le = 200$  und durchgezogene Linie  $Le = 50$

der dimensionslose Absorbatmassenanteilsgradient an der Filmoberfläche und fällt durch fortschreitende Ausbreitung des Massenanteilsprofils im gesamten Film mit zunehmender dimensionsloser Strömungslänge  $\xi$  ab. Bei Erreichen

der zur externen Temperatur gehörigen Gleichgewichtszusammensetzung fällt der Gradient und damit auch der absorbierte Massenstrom an der Filmoberfläche stark ab.

Mit Hilfe der hier vorgestellten Lösung lässt sich ebenfalls die Auswirkung der durch einseitige Diffusion hervorgerufenen transversalen Geschwindigkeitskomponente zumindest abschätzen. Für eine 50%ige wässrige Lithiumbromidlösung ( $Le \approx 100$ ) ergibt sich ein Verstärkungsfaktor von zwei und somit ein doppelt so hoher effektiver Diffusionskoeffizient, d.h.  $Le_{einseitig} = 50$ . Für einen typischen Wert der dimensionslosen Strömungskordinate von  $\xi = 1$  ergeben sich aus Abb. 5.17  $\mu_i(\xi = 1)_{Le=100} \approx 5,2$  und  $\mu_i(\xi = 1)_{Le=50} \approx 3$  und somit für das Verhältnis der absorbierten Massenstromdichten:

$$\frac{\dot{m}_{qui}}{\dot{m}_{einseitig}} = \frac{1 - c_0}{1} \frac{\mu_{i,qui}}{\mu_{i,einseitig}} = 0,5 \cdot \frac{5,2}{3} \approx 0,87. \quad (5.17)$$

Die Berücksichtigung der transversalen Geschwindigkeit über einen effektiven Diffusionskoeffizienten führt zu einer geringeren Unterschätzung des Massenstroms durch Vernachlässigung der einseitigen Diffusion als in Form der Randbedingung und Anpassung der modifizierten Stefan-Zahl in (5.16) ähnlich dem Modell von van der Wekken und Wassenaar (1988).

## 5.7 Charakterisierung des Wärmeübertragers

Der physikalische Effekt der nicht-isothermen Dampfabsorption wird in Absorptionswärmewandlern in verschiedenen Anwendungen ausgenutzt, z.B. beim Einsatz als thermisch angetriebene Wärmepumpe oder als Wärmetransformator. Diesen Anwendungen gemein ist die Übertragung von Wärme zwischen der Umgebung und der Anlage. Die jeweiligen Wärme- und Stoffübertrager in diesen Anlagen werden typischerweise mit Hilfe des für Wärmeübertrager üblichen Ansatzes für den stationär übertragenen Wärmestrom charakterisiert:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \overline{\Delta T}. \quad (5.18)$$

Diese Reduzierung des gekoppelten Wärme- und Stoffübergangs auf (5.18), welcher noch mit der Angabe einer Salzlösungsunterkühlung am Austritt zur Bewertung des Stoffübergangs versehen werden muss, bereitet jedoch einige Schwierigkeiten, auf die auch Beutler (1997) in seiner Arbeit eingeht. Es stellt

sich die Frage, welche mittlere Temperaturdifferenz  $\overline{\Delta T}$  für diesen Ansatz verwendet wird.

Die ursprüngliche Idee des im Jahre 1701 anonym und in Latein (Anonymous, 1701) veröffentlichten und NEWTON zugeschriebenen Abkühlungsgesetzes (5.18) (O'Sullivan, 1990) teilt den Wärmeübergangsprozess in drei wesentliche Faktoren.

Der zwischen einem Körper und seiner Umgebung übertragene Wärmestrom  $\dot{Q}$  hängt proportional von der den Körper umgebenden und mit der Umgebung in Kontakt stehenden Oberfläche, d.h. der Wärmeübertragungsfläche  $A$  ab. Des Weiteren ist der Wärmestrom  $\dot{Q}$  zur Temperaturdifferenz zwischen dem Körper und seiner Umgebung,  $\Delta T = T_K - T_U$ , proportional. Die Proportionalitätskonstante  $k$  wird je nach Übertragungsproblem als Wärmeüber- bzw. Wärmedurchgangskoeffizient bezeichnet und beinhaltet alle weiteren den Übergangsprozess beeinflussenden Parameter, wie z.B. fluiddynamische Effekte.

Die Proportionalitätskonstante  $k$  wird demnach durch die Vorgabe der treibenden Temperaturdifferenz  $\overline{\Delta T}$  festgelegt, sofern die Übertragungsfläche  $A$  in (5.18) bekannt ist. Beschreibt die vorgegebene treibende Temperaturdifferenz lokal sowie integral den physikalischen Verlauf der Temperatur des „Körpers“, ist die Proportionalitätskonstante  $k$  unabhängig von der Entwicklung der Temperatur des Körpers. Trotz dieser klaren und auf den ersten Blick einleuchtenden Formulierung des Abkühlungsgesetzes ergeben sich gewisse Schwierigkeiten, insbesondere für Anwendungsfälle bei denen die Temperatur des jeweiligen „Körpers“  $T_K$  durch Messung nicht eindeutig zugeordnet oder bestimmt werden kann, lokal stark variiert bzw. von anderen Effekten wie z.B. der Intensität des Stofftransportes abhängt.

In der experimentellen Praxis bei der Vermessung von Absorptionskälteanlagen ist die lokale und somit auch mittlere tatsächliche Filmoberflächentemperatur,  $T_i$  und  $\overline{T}_i$ , durch Messung meist nicht zugänglich. Daher wird in diesem Fall meist auf Behelfstemperaturen am Wärmeübertragerein- und -austritt zurückgegriffen. Diese Behelfstemperaturen sind z.B. die zu den Absorbatmassenanteilen am Ein- und Austritt des Absorbers sowie zum Absorberdruck zugehörigen Gleichgewichtstemperaturen. Als mittlere treibende Temperaturdifferenz

über den Absorber wird entsprechend die folgende Definition häufig verwendet:

$$\overline{\Delta T} = \frac{(T_{eq}(c_0, p_{Abs}) - T_{ext,aus}) - (T_{eq}(\bar{c}_{aus}, p_{Abs}) - T_{ext,ein})}{\ln\left(\frac{T_{eq}(c_0, p_{Abs}) - T_{ext,aus}}{T_{eq}(\bar{c}_{aus}, p_{Abs}) - T_{ext,ein}}\right)}. \quad (5.19)$$

Diese Definition der treibenden Temperaturdifferenz am Absorber überschätzt die Temperaturdifferenz, da aufgrund von Absorption an der Filmoberfläche der tatsächliche Absorbatanteil höher und die zugehörige Gleichgewichtstemperatur entsprechend geringer ist als die Gleichgewichtstemperatur bei der Mischzusammensetzung des gesamten Films, welche in Gleichung (5.19) verwendet wird. Diese aus praktikablen Erwägungen herrührende Abweichung von der tatsächlich vorliegenden treibenden Temperaturdifferenz sorgt dafür, dass der Proportionalitätsfaktor  $k$  einen verfälschenden Effekt aufgrund der den Stofftransport vernachlässigenden Definition der treibenden Temperaturdifferenz enthält und dementsprechend im Wert mit den jeweiligen Prozessbedingungen und eingesetzten Stoffen variiert.

Nichtsdestotrotz wird diese in experimentellen Untersuchungen von Absorptionsprozessen oft verwendete Definition des logarithmischen Mittelwertes der treibenden Temperaturdifferenz beibehalten, um den Vergleich mit den aus Messwerten ermittelten Wärmedurchgangskoeffizienten zu ermöglichen.

### Dimensionsloser logarithmischer Mittelwert der treibenden Temperaturdifferenz

Der weit verbreitete Ansatz für den Wärmedurchgang in Absorptionswärmeübertragern wird, wie oben erwähnt, mit Hilfe des logarithmischen Mittelwertes der Temperaturdifferenz zwischen den externen Mediumstemperaturen und den Gleichgewichtstemperaturen bei den entsprechenden mittleren Salzlösungszusammensetzungen gebildet:

$$\dot{q} = k \cdot \Delta T_{\ln} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}(x, y = \delta), \quad (5.20)$$

$$\Delta T_{\ln} = \frac{T_{eq,0} - \bar{T}_{ext} - (T_{eq,aus} - \bar{T}_{ext})}{\ln\left(\frac{T_{eq,0} - \bar{T}_{ext}}{T_{eq,aus} - \bar{T}_{ext}}\right)}. \quad (5.21)$$

Zu beachten ist hierbei, dass bei der Verwendung der in dieser Arbeit vorgestellten analytischen Lösung für den mittleren Wandtemperaturgradienten,

welche lediglich rohrweise (oder plattenweise) gültig ist, die Wärmeübertragungsbeziehung jeweils rohrweise betrachtet werden muss. Allerdings ist diese rohrweise Auslegung auch physikalisch begründet, da ein Wärmeübertrager gleicher Fläche mit sehr vielen untereinander liegenden Rohren kleinen Durchmessers und häufigen Durchmischungen des Films beim Auftropfen sich anders verhält als ein Wärmeübertrager bestehend aus wenigen untereinanderliegenden Rohren größeren Durchmessers. Des Weiteren wird in Gleichung (5.21) für jedes Rohr eine mittlere externe Mediumstemperatur  $\bar{T}_{ext}$  verwendet.

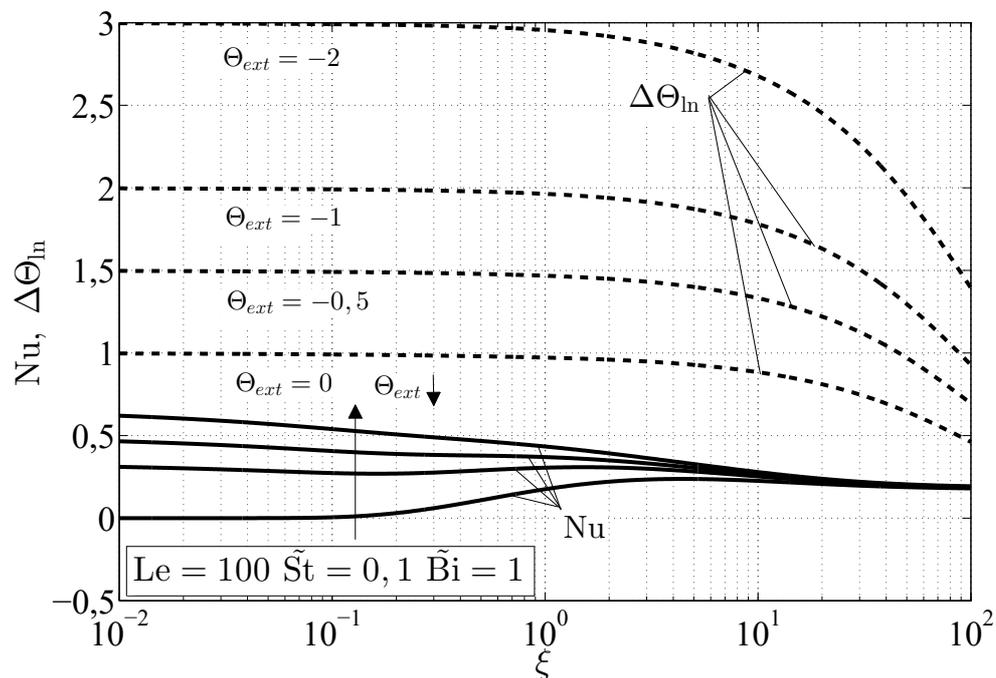
Die Einführung dimensionsloser Größen in Gleichung (5.20) führt zum dimensionslosen logarithmischen Mittelwert der treibenden Temperaturdifferenz (5.22). Die so definierte treibende Differenz hängt bei gegebener mittlerer externer Mediumstemperatur  $\bar{T}_{ext}$  lediglich vom Stofftransport von Absorbat, d.h. der Veränderung des mittleren dimensionslosen Absorbatanteils  $\bar{\gamma}_{Lsg}$  im Film, ab:

$$\Delta\Theta_{ln} = \frac{\bar{\gamma}_{Lsg}}{\ln \frac{1-\bar{\Theta}_{ext}}{1-\bar{\gamma}_{Lsg}-\bar{\Theta}_{ext}}}. \quad (5.22)$$

Durch die Entdimensionierung von (5.20) wird eine mittlere Nusselt-Zahl für den Wärmedurchgang (5.23) erhalten:

$$\text{Nu} = \frac{k \cdot \delta}{\lambda} = \frac{1}{\Delta\Theta_{ln}} \cdot \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \eta} (\eta = 1). \quad (5.23)$$

Mit Hilfe der analytischen Lösung für die diabate Wandrandbedingung wird der in Abbildung 5.18 gezeigte Verlauf dieser so definierten Nusselt-Zahl sowie der Verlauf des dimensionslosen logarithmischen Mittelwertes der treibenden Temperaturdifferenz (5.22) als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  erhalten. Für  $\xi < 1$  hängt die dimensionslose treibende Temperaturdifferenz lediglich von der vorgegebenen externen Mediumstemperatur  $\Theta_{ext}$  ab, da der mittlere dimensionslose Absorbatanteil im Film für diese Strömungslängen unwesentlich von der Eintrittszusammensetzung  $\bar{\gamma}_{Lsg}(\xi < 1) \approx \gamma_0 = 0$  abweicht. Erst ab  $\xi > 1$  beginnt sich die mittlere Salzlösungszusammensetzung nennenswert zu verändern, wodurch die zugehörige Gleichgewichtstemperatur sinkt und somit die Differenz zur externen Mediumstemperatur, d.h. auch die mittlere treibende Temperaturdifferenz abnimmt. Die mit dieser mittleren treibenden Temperaturdifferenz definierte Nusselt-Zahl zeigt abhängig von der externen Mediumstemperatur in der Nähe des Salzlösungseintrittes für  $\xi < 0, 1$



**Abbildung 5.18:** Verlauf der mittleren Nusselt-Zahl  $Nu$  sowie des dimensionslosen logarithmischen Mittelwertes der Temperaturdifferenz  $\Delta\Theta_{ln}$  als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für verschiedene externe Temperaturen

unterschiedliche Verläufe. Insbesondere für  $\Theta_{ext} = 0$  ist auch die Nusselt-Zahl aufgrund des verschwindenden Wandtemperaturgradienten Null. Dieser ungewöhnliche Fall eines verschwindenden Wärmedurchgangskoeffizienten ist der Definition der treibenden Temperaturdifferenz geschuldet. Mit einer für diesen Strömungsbereich ebenfalls verschwindenden Temperaturdifferenz würde der Wärmedurchgangskoeffizient einen endlichen Wert erreichen, was mit der hier angewendeten Differenz jedoch nicht erfolgt.

### Ermittlung mittlerer Stoffübergangskoeffizienten

Für die Definition eines integralen Wertes des Stoffübergangskoeffizienten findet ein ähnlicher Ansatz wie für den Wärmedurchgang häufig Anwendung. Es wird ein logarithmischer Mittelwert der treibenden Absorbatmassenanteilsdifferenz definiert, um die im Mittel an der Filmoberfläche absorbierte Massenstromdichte zu beschreiben:

$$\dot{m}_{abs} = \beta \cdot \Delta c_{ln} = -\rho \cdot D \cdot \overline{\frac{\partial c}{\partial y}}(x, y = 0), \quad (5.24)$$

$$\Delta c_{ln} = \frac{c_{eq,0} - c_0 - (c_{eq,aus} - \bar{c}_{aus})}{\ln \frac{c_{eq,0} - c_0}{c_{eq,aus} - \bar{c}_{aus}}}. \quad (5.25)$$

Durch Einführung dimensionsloser Variablen in (5.24) wird ein dimensionsloser Ausdruck des logarithmischen Mittelwertes der treibenden Absorbatmassenanteilsdifferenz (5.26) erhalten, der nur von der dimensionslosen Salzlösungsunterkühlung abhängt:

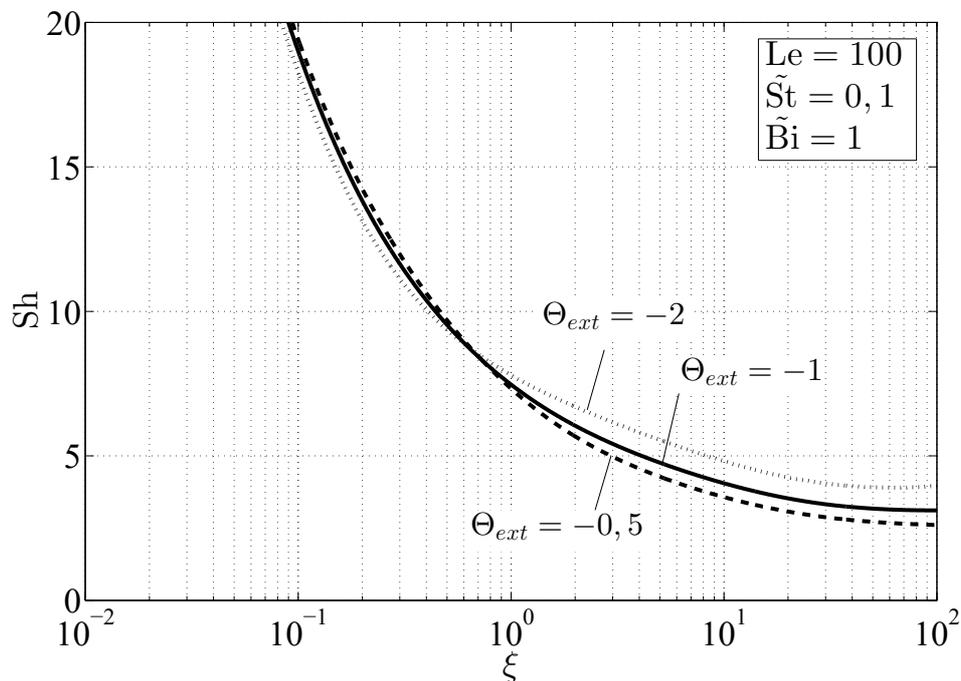
$$\Delta \gamma_{ln} = \frac{1 - (1 - \bar{\Theta}_{Lsg} - \bar{\gamma}_{Lsg})}{\ln \frac{1}{1 - \bar{\Theta}_{Lsg} - \bar{\gamma}_{Lsg}}}. \quad (5.26)$$

Die Entdimensionierung von (5.24) führt auch zu einer mittleren Sherwood-Zahl:

$$\text{Sh} = \frac{\beta \cdot \delta}{\rho \cdot D} = \frac{1}{\Delta \gamma_{ln}} \cdot \overline{\frac{\partial \gamma}{\partial \eta}}(\xi, \eta = 0). \quad (5.27)$$

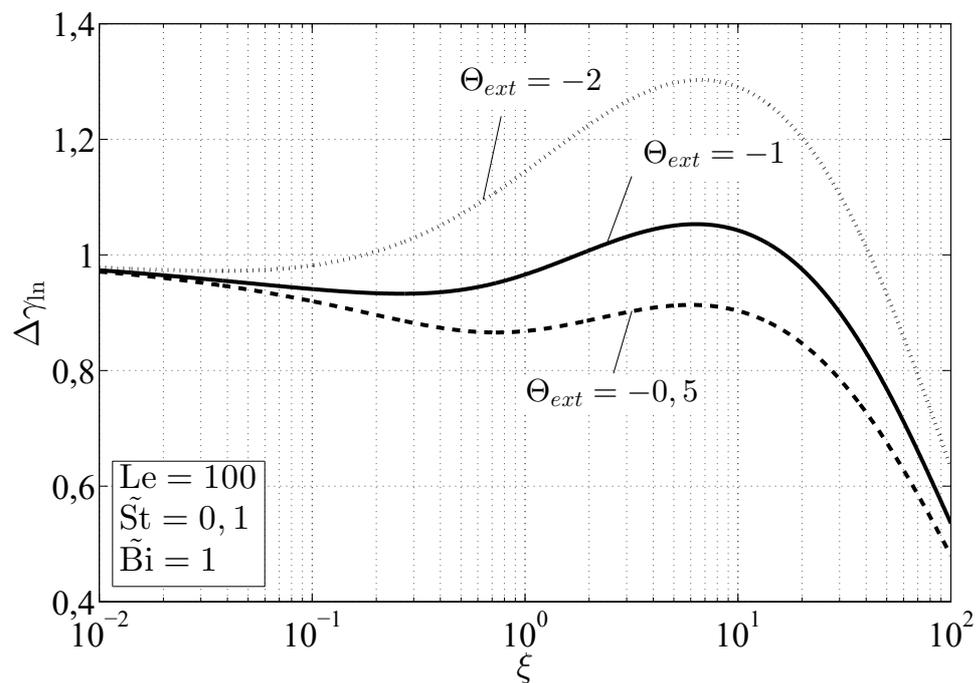
Mit Hilfe der analytischen Lösung für die diabate Wandrandbedingung wird der Verlauf dieser Sherwood-Zahl als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate erhalten und ist in Abbildung 5.19 dargestellt. Den zugehörigen Verlauf des dimensionslosen, logarithmischen Mittelwertes der treibenden Massenanteilsdifferenz  $\Delta \gamma_{ln}$  zeigt Abbildung 5.20. Im Unterschied zur vorher diskutierten mittleren Nusselt-Zahl für realistische thermische Widerstände von

$\tilde{Bi} = 1$  der Wand variiert die mittlere Sherwood-Zahl des Films über eine Größenordnung vom Auftropfen der Salzlösung bei  $\xi \rightarrow 0$  bis zum typischen Bereich der dimensionslosen Strömungskordinate für horizontal berieselte Rohre von  $\xi = 0,5 - 5$ . Die abhängig von der externen Mediumstemperatur unterschiedlichen Werte der Sherwood-Zahlen für sehr kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate von  $\xi < 0,1$  trotz gleichen an der Oberfläche übertragenen Massenstroms rühren von der unterschiedlichen Entwicklung der mittleren Absorbatdifferenz  $\Delta\gamma_{ln}$  in diesem Strömungsbereich her, wie in Abbildung 5.20 zu sehen. Sobald der dimensionslose Absorbatmassenanteilsgra-



**Abbildung 5.19:** Verlauf der mittleren Sherwood-Zahl  $Sh$  als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für verschiedene externe Temperaturen

dient an der Filmoberfläche durch die externe Temperatur ab  $\xi > 0,1$  beeinträchtigt wird, verändert sich der Verlauf der Sherwood-Zahl stärker. In diesem Strömungsbereich nimmt die Sherwood-Zahl zu, je größer die Temperaturdifferenz des externen Mediums zur Salzlösungseintrittstemperatur ist. Der dimensionslose logarithmische Mittelwert der treibenden Absorbatmassenanteilsdifferenz zeigt den Verlauf der Salzlösungsunterkühlung, welche zu Beginn leicht sinkt und abhängig vom Wert der externen Medientemperatur mit der Beeinflussung des Temperaturgradienten an der Filmoberfläche durch



**Abbildung 5.20:** Verlauf des dimensionslosen logarithmischen Mittelwertes der treibenden Absorbatmassenanteilsdifferenz  $\Delta\gamma_{\ln}$  als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für verschiedene externe Temperaturen

die thermische Grenzschicht der Wand unterschiedlich stark ansteigt. Für die größere Temperaturdifferenz des Kühlwassers zur Salzlösung steigt auch die Unterkühlung der Salzlösung und somit die treibende dimensionslose Absorbatmassenanteilsdifferenz entsprechend stärker an. Sobald der Stofftransport zur Abnahme der Salzlösungsunterkühlung führt, sinkt auch die mittlere treibende Absorbatmassenanteilsdifferenz  $\Delta\gamma_{ln}$  bei  $\xi > 8$ .

### Bestimmung der Übergangskoeffizienten für typische Absorberbedingungen und wässriger Lithiumbromidlösung

In den Tabellen 5.1 und 5.2 sind exemplarisch typische Absorberbedingungen und die zu diesen Bedingungen zugehörigen Stoffdaten wässriger Lithiumbromidlösung aufgelistet. Mit Hilfe der System- und Stoffdaten lassen sich die dimensionslosen Kennzahlen für den beschriebenen Fall, wie in Tabelle 5.3 gezeigt, ermitteln.

Offensichtlich ist tatsächlich  $Le \approx 100$  und  $\tilde{St} \approx 0,1$ , so dass für eine Abschät-

**Tabelle 5.1:** Exemplarische Bedingungen für einen mit wässriger Lithiumbromidlösung berieselten Horizontalrohrabsorber

Größe	Wert	Einheit
Rohraussendurchmesser	22	mm
Wassermassenanteil	0,45	$\text{kg}_W \text{kg}_{Lsg}^{-1}$
Kühlwassereintrittstemperatur	27	$^{\circ}\text{C}$
Salzlösungseintrittstemperatur	32	$^{\circ}\text{C}$
Absorberdruck	1000	Pa
Berieselungsdichte	0,015	$\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$
Wärmedurchgangskoeffizient $k'$	2000	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$

zung der Übergangskoeffizienten die zuvor gezeigten Diagramme für  $Le = 100$  und  $\tilde{St} = 0,1$  herangezogen werden können. Die Filmdicke lässt sich aus der Berieselungsdichte und der Salzlösungsviskosität und -dichte mit Hilfe von Gleichung (2.18) zu  $\delta_{Film} \approx 0,2 \text{ mm}$  bestimmen. Aus diesen Diagrammen lassen sich folgende dimensionslose Zahlen ablesen und damit die den Wärme- und Stoffübertrager charakterisierenden Größen bestimmen:

**Tabelle 5.2:** Stoffdaten der wässrigen Lithiumbromidlösung für die in 5.1 gegebenen Bedingungen basierend auf den experimentell ermittelten Stoffdaten von Löwer (1960); Diffusionskoeffizient aus der Berechnungsgleichung von Kim (1992) (siehe Anhang A.5)

Größe	Wert	Einheit
Gleichgewichtstemperatur $T_{eq,0}$	$\sim 37$	$^{\circ}\text{C}$
Gleichgewichtszusammensetzung $c_{eq,0}$	$\sim 0,485$	$\text{kgkg}^{-1}$
dynamische Salzlösungsviskosität $\eta_{Lsg}$	4,1	$\text{mPas}$
Salzlösungsdichte $\rho_{Lsg}$	1611	$\text{kgm}^{-3}$
kinematische Salzlösungsviskosität $\nu_{Lsg}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$
spezifische Wärmekapazität $c_{p,Lsg}$	2	$\text{kJ}(\text{kgK})^{-1}$
Absorptionsenthalpie $\Delta h_{abs}$	2660	$\text{kJkg}^{-1}$
Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{Lsg}$	0,38	$\text{W}(\text{mK})^{-1}$
Temperaturleitfähigkeit $a_{Lsg}$	$1,17 \cdot 10^{-7}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$
Diffusionskoeffizient $D_{Lsg}$	$1,24 \cdot 10^{-9}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$

**Tabelle 5.3:** Dimensionslose Kennzahlen auf Basis der in Tabelle 5.1 und 5.2 gezeigten Daten

Größe	Wert
Lewis-Zahl (2.50)	94,4
modifizierte Stefan-Zahl (5.15)	0,107
modifizierte Biot-Zahl (4.40)	1,01
dimensionslose Strömungskordinate $\xi$ (2.42)	2,3
dimensionslose Kühlwassertemperatur $\Theta_{ext}$ (5.2)	-1

$$\text{Nu}(\xi = 2, 3, \Theta_{ext} = -1) \simeq 0,35 \quad \rightarrow \quad k = 690 \frac{W}{m^2 K} \quad (5.28)$$

$$\text{Sh}(\xi = 2, 3, \Theta_{ext} = -1) \simeq 5,4 \quad \rightarrow \quad \beta = 0,056 \frac{kg}{m^2 s} \quad (5.29)$$

$$\Delta\Theta_{UK}(\xi = 2, 3, \Theta_{ext} = -1) \simeq -1,05 \quad \rightarrow \quad \Delta T_{UK,aus} = 5,3 K. \quad (5.30)$$

Die mittels der analytischen Lösung der diabaten Wand für typische Absorberbedingungen abgeschätzten Werte für die Übertragungskoeffizienten spiegeln die Größenordnung der experimentell ermittelten Werte wider. Im folgenden Kapitel werden mit Hilfe der analytischen Lösung Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten für typische experimentelle Parametervariationen ermittelt. Die aus der analytischen Lösung ermittelten Werte werden mit den jeweiligen experimentellen Daten aus der Literatur verglichen, um deren Aussagekraft und Anwendbarkeit für eine Übertragerauslegung sowie eine Prozesssimulation einschätzen zu können.

## Kapitel 6

# Vergleich mit experimentellen Daten

In diesem Kapitel werden experimentell bestimmte Daten zur Rieselfilmabsorption von Wasserdampf in wässriger Lithiumbromidlösung herangezogen, um diese mit den Ergebnissen der in dieser Arbeit vorgestellten analytischen Lösung zu vergleichen. Diese Messdaten werden aus der Literatur entnommen, da keine eigenen Messungen am Einzelrohr bzw. am Rohrbündel durchgeführt wurden. Die veröffentlichten Daten zu den durchgeführten Experimenten beschränken sich häufig lediglich auf die aus den jeweiligen Messdaten berechneten integralen Werte für die Wärmedurchgangs- und Stoffübertragungskoeffizienten. In wenigen Quellen finden sich umfassende Angaben zu den direkt gemessenen Daten, wie z.B. dem Absorberdruck, der Salzlösungstemperatur oder der Zusammensetzung der Salzlösung am Austritt des Absorbers. Des Weiteren werden die Untersuchungen meist auch nicht an einem einzelnen Rohr durchgeführt, sondern an mehreren untereinander angeordneten Rohren, da diese Bedingungen dem typischen technischen Anwendungsfall eines Horizontalrohrbündelabsorbers ähneln.

Vorab werden die Stoffdaten wässriger Lithiumbromidlösung in einem typischen Temperatur- und Massenanteilsbereich eines Absorbers angegeben. Die sich aus diesen Stoffdaten und den gegebenen typischen Systemparametern, wie z.B. der Rohrmaße, der Berieselungsdichte, des Kühlwasservolumenstroms usw. ergebenden Bereiche der dimensionslosen Kenngrößen werden anhand von Diagrammen im folgenden Abschnitt erläutert.

## 6.1 Stoffeigenschaften wässriger Lithiumbromid- lösung

Wässrige Lithiumbromidlösung ist ein weit verbreitetes Absorbens für Wasserdampf in Absorptionskälteanlagen für Klimatisierungsanwendungen. In diesem Kapitel werden für einen typischen Temperatur- und Massenanteilsbereich im Absorber von  $30^{\circ}\text{C}$  bis  $60^{\circ}\text{C}$  und  $0,4 - 0,65$  die Stoffdaten dieses Arbeitsmediums präsentiert. Sie werden mit Funktionen erhalten, welche von Arnold Wohlfeil im Rahmen seiner Dissertation an die Messdaten von Löwer (1960) angepasst wurden. Diese Stofffunktionen befinden sich im Anhang A.4.

Einzig der Diffusionskoeffizient der wässrigen Lithiumbromidlösung wird mit Hilfe einer von Kim (1992) ermittelten Funktion bestimmt. Diese Funktion ist im Anhang A.5 gegeben.

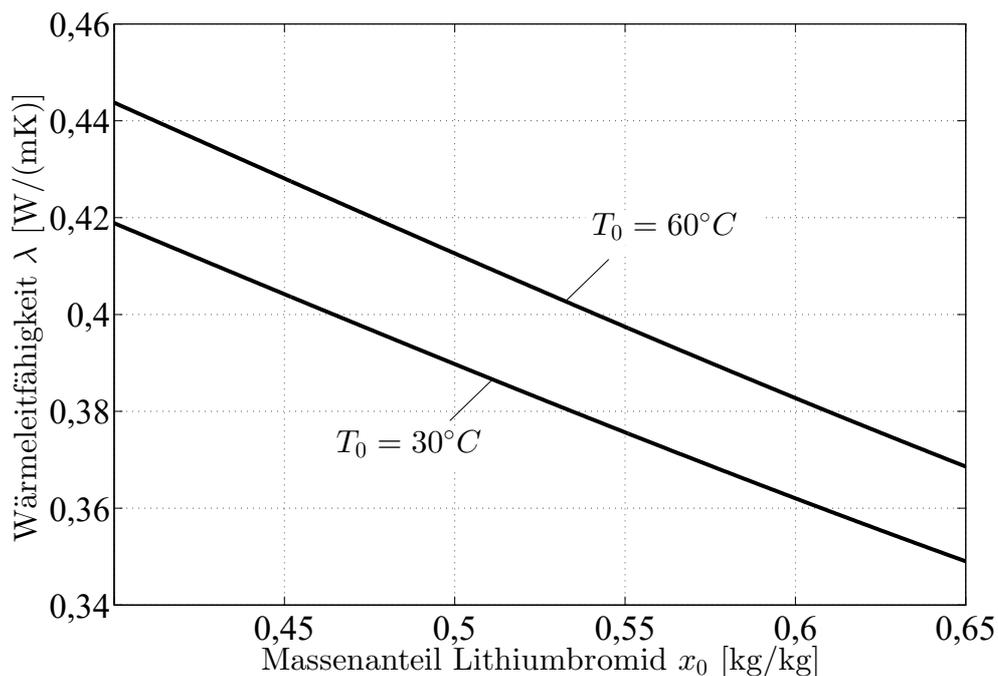
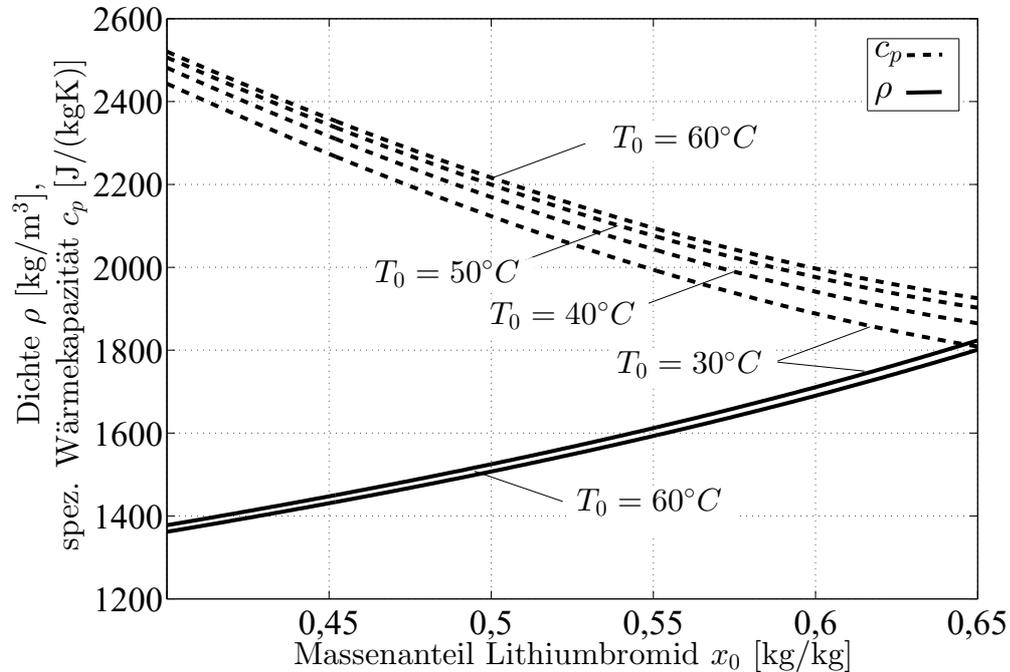


Abbildung 6.1: Wärmeleitfähigkeit wässriger Lithiumbromidlösung

Die Wärmeleitfähigkeit der wässrigen Lithiumbromidlösung, dargestellt in Abbildung 6.1, sinkt nahezu linear mit zunehmenden Massenanteil an Lithiumbromid. In dem angegebenen Temperatur- und Massenanteilsbereich variiert die Wärmeleitfähigkeit von ca.  $0,35\text{W}/(\text{mK})$  bei  $x_0 = 0,65$  und  $T_0 = 30^{\circ}\text{C}$

bis  $0,44W/(mK)$  bei  $x_0 = 0,4$  und  $T_0 = 60^\circ C$ .

Abbildung 6.2 zeigt den Verlauf der Dichte sowie der spezifischen Wärmekapazität



**Abbildung 6.2:** Dichte und spezifische Wärmekapazität wässriger Lithiumbromidlösung

zität der wässrigen Lithiumbromidlösung. Mit zunehmendem Salzmassenanteil steigt die Dichte von ca.  $1400kg/m^3$  bei  $x_0 = 0,4$  auf  $1800kg/m^3$  bei  $x_0 = 0,65$ . Mit zunehmender Temperatur nimmt die Dichte der Salzlösung leicht ab.

Die spezifische Wärmekapazität zeigt das entgegengesetzte Verhalten. Sie nimmt mit zunehmendem Salzmassenanteil ab und steigt mit zunehmender Temperatur. Der zu erwartende Bereich der spezifischen Wärmekapazität reicht dabei von ca.  $1800J/(kgK)$  bei  $T_0 = 30^\circ C$  und  $x_0 = 0,65$  bis  $2500J/(kgK)$  bei  $T_0 = 60^\circ C$  und  $x_0 = 0,4$ .

In Abbildung 6.3 ist der Verlauf der Temperaturleitfähigkeit über dem Salzmassenanteil für  $T_0 = 30^\circ C$  und  $T_0 = 60^\circ C$  aufgetragen. Die Temperaturleitfähigkeit nimmt mit steigendem Salzmassenanteil ab und mit steigender Temperatur zu. Die Werte bewegen sich von  $1,06 \cdot 10^{-7}m^2/s$  bei  $T_0 = 30^\circ C$  und  $x_0 = 0,65$  bis zu  $1,29 \cdot 10^{-7}m^2/s$  bei  $T_0 = 60^\circ C$  und  $x_0 = 0,4$ .

In Abbildung 6.4 ist der Verlauf der kinematischen Viskosität der wässrigen Li-

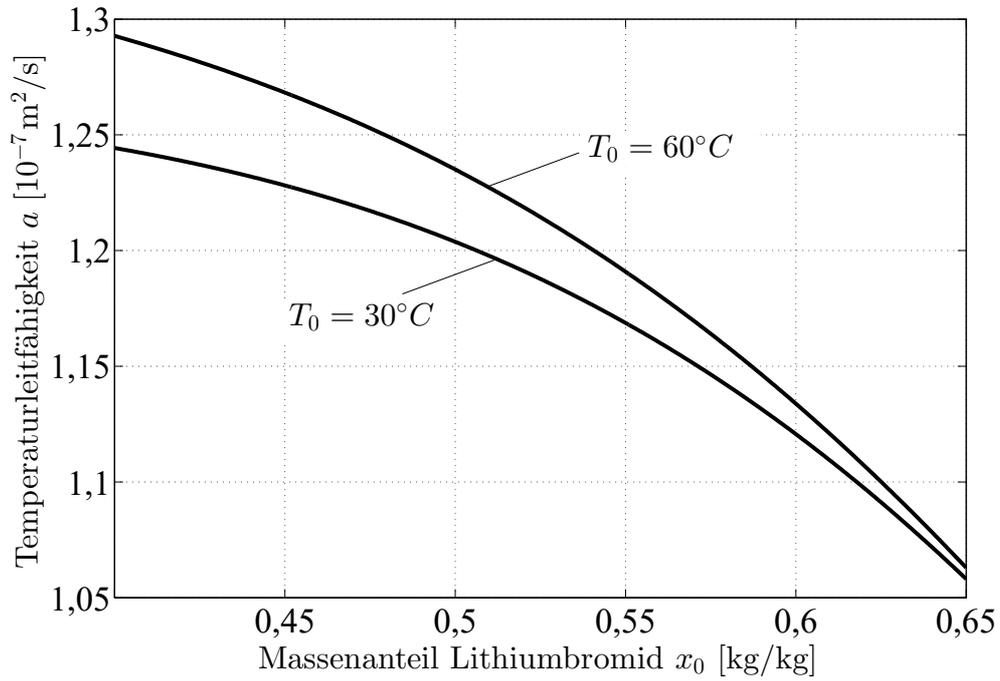


Abbildung 6.3: Temperaturleitfähigkeit wässriger Lithiumbromidlösung

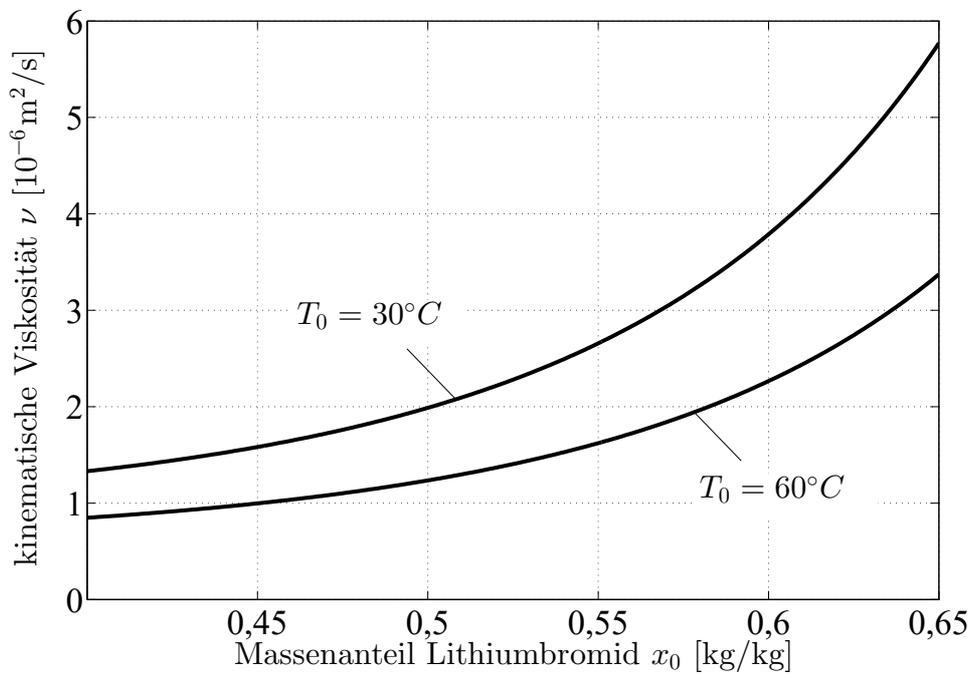
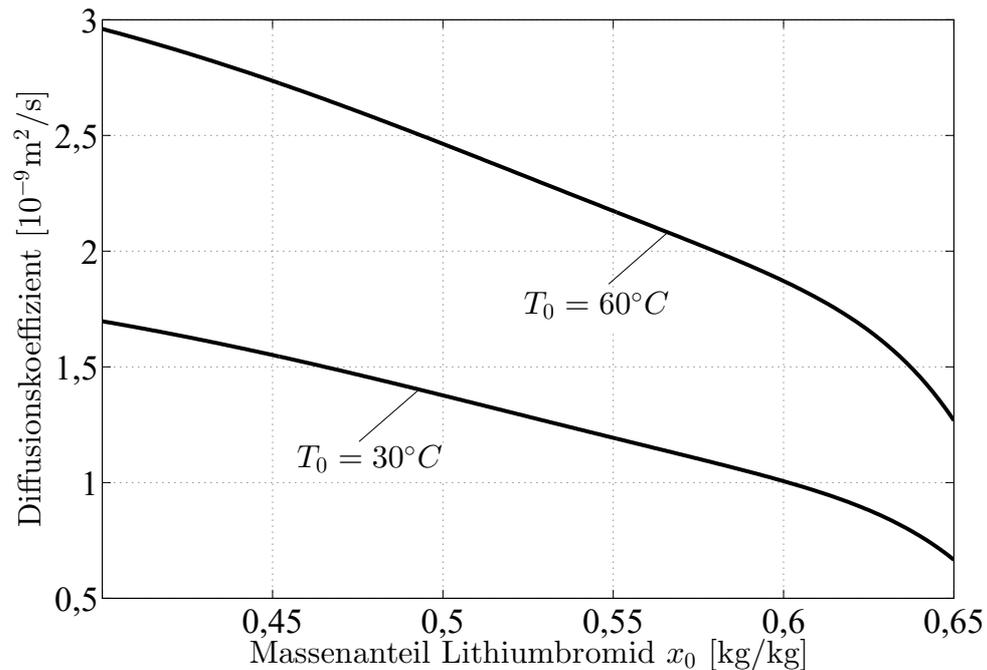


Abbildung 6.4: Kinematische Viskosität wässriger Lithiumbromidlösung

thiumbromidlösung über dem Salzmassenanteil aufgetragen. Die Salzlösungsviskosität nimmt mit steigendem Salzmassenanteil überproportional zu und mit steigender Temperatur ab. Die Werte reichen von ca.  $0,9 \cdot 10^{-6} m^2/s$  bei  $T_0 = 60^\circ C$  und  $x_0 = 0,4$  bis ca.  $5,8 \cdot 10^{-6} m^2/s$  bei  $T_0 = 30^\circ C$  und  $x_0 = 0,65$ .

Den Verlauf des Diffusionskoeffizienten der wässrigen Lithiumbromidlösung

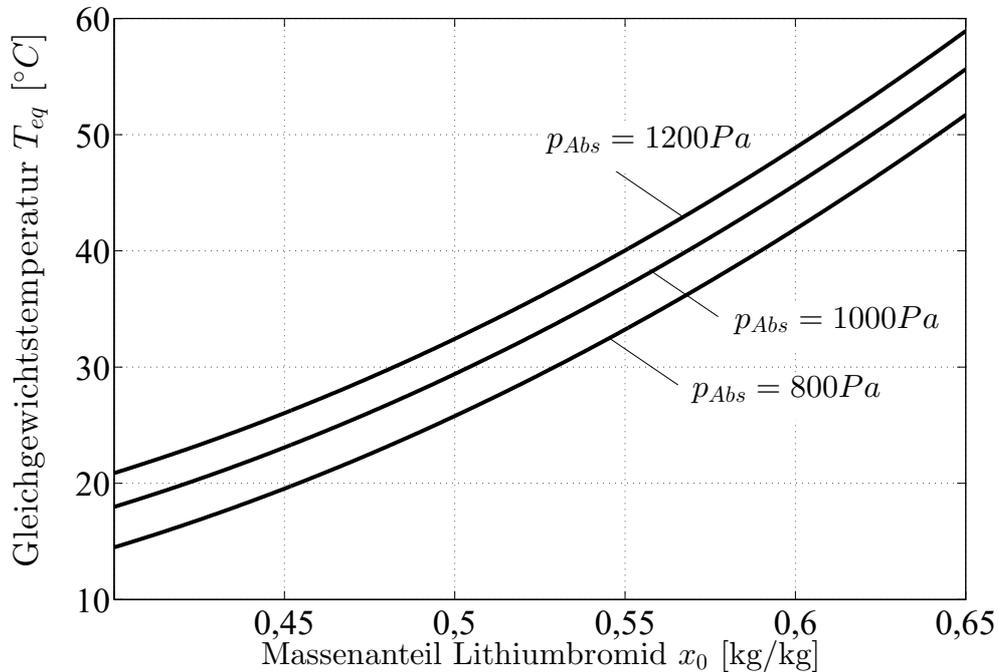


**Abbildung 6.5:** Diffusionskoeffizient wässriger Lithiumbromidlösung

zeigt Abbildung 6.5. Die experimentellen Daten von Kashiwagi et al. (1984), auf welchen die Funktion von Kim (1992) beruht, liegen im Bereich von  $x_0 = 0,4$  bis  $x_0 = 0,6$ . Die Funktion wird in Abb. 6.5 über ihren Gültigkeitsbereich hinaus bis zu einem Massenanteil von  $x_0 = 0,65$  extrapoliert.

Es ist eine starke Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von dem Salzmassenanteil sowie von der Temperatur zu erkennen. Bei einer Steigerung des Salzmassenanteils von  $x_0 = 0,4$  auf  $x_0 = 0,6$  fällt der Diffusionskoeffizient um bis zu 40% seines Wertes von ca.  $2,9 \cdot 10^{-9} m^2/s$  auf  $1,8 \cdot 10^{-9} m^2/s$  bei  $T_0 = 60^\circ C$  und von ca.  $1,7 \cdot 10^{-9} m^2/s$  auf  $1 \cdot 10^{-9} m^2/s$  bei  $T_0 = 30^\circ C$ . Die Erhöhung der Temperatur von  $T_0 = 30^\circ C$  auf  $T_0 = 60^\circ C$  führt in dem Modell von Kim (1992) nahezu zur Verdopplung des Wertes des Diffusionskoeffizienten bei gleichem Massenanteil.

Abbildung 6.6 zeigt Verläufe der Gleichgewichtstemperaturen wässriger Lithi-



**Abbildung 6.6:** Gleichgewichtstemperatur wässriger Lithiumbromidlösung

umbromidlösungen für verschiedene Absorberdrücke. Die Verläufe werden mit einer an die Gleichgewichtsdampfdruckmessdaten von Löwer (1960) angepassten Funktion berechnet. Das Vorgehen bei der Erstellung dieser Funktion ist im Anhang A.6 erläutert.

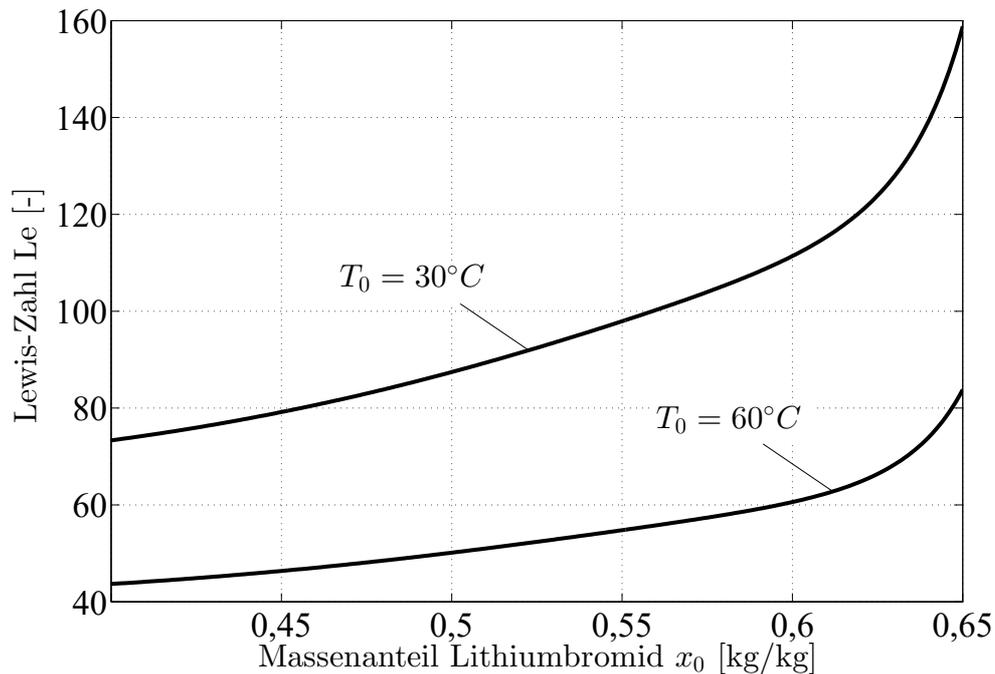
Mit zunehmendem Salzmassenanteil und steigendem Druck nimmt auch die Siedetemperatur der Salzlösung zu. Bei dem verhältnismäßig hohen Salzmassenanteil von  $x_0 = 0,65$  steigen die zugehörigen Gleichgewichtstemperaturen bei den angegebenen Drücken über  $T_{eq} > 50^\circ C$ . Abbildung 6.6 zeigt, dass die von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) vorgeschlagene Approximation der isobaren Siedetemperatur in Form einer linearen Funktion des Absorbatanteils nicht schlecht ist, weshalb auch in dieser Arbeit dieser Ansatz verwendet wird. Nichtsdestotrotz können sich bei sehr großen und wenig realistischen Eintrittsunterkühlungen im Bereich von  $T_{eq,0} - T_0 \approx 30K$  Abweichungen von mehreren Kelvin in der Gleichgewichtstemperatur ergeben (Meyer und Ziegler, 2014).

## 6.2 Wertebereich der dimensionslosen Kenngrößen für typische Absorberbetriebsbedingungen

In den durchgeführten Experimenten werden die Eintrittsbedingungen der Salzlösung, d.h. Temperatur, Zusammensetzung, Massenstrom sowie die Eintrittsbedingungen des Kühlwassers, d.h. Temperatur und Massenstrom häufig variiert, was entsprechend Einfluss auf die dimensionslosen Parameter hat.

In diesem Abschnitt werden deswegen die in dieser Arbeit verwendeten dimensionslosen Kenngrößen als Funktion der in den Experimenten variierten Betriebsbedingungen dargestellt und über dem typischen Wertebereich dieser Bedingungen aufgetragen, um die Größenordnung und Wertebereiche dieser dimensionslosen Kenngrößen für wässrige Lithiumbromidlösung abzuschätzen. Die in dieser Arbeit vorgestellte analytische Lösung wird durch insgesamt fünf dimensionslose Parameter bestimmt. Die Lewis-, die modifizierte Stefan- und die modifizierte Biot-Zahl sowie die dimensionslose externe Kühlwassertemperatur und die dimensionslose Strömungslänge.

Die Lewis- und modifizierte Stefan-Zahl hängen ausschließlich von Stoffgrößen der wässrigen Lithiumbromidlösung ab. Die Biot-Zahl, die dimensionslose Kühlwassertemperatur und die dimensionslose Strömungslänge hängen maßgeblich von einstellbaren Betriebsparametern, wie dem aufgegebenen Salzlösungsmassenstrom, dem Kühlwassermassenstrom und deren Temperaturen ab. In Abbildung 6.7 ist der Verlauf der Lewis-Zahl als Funktion des Lithiumbromidmassenanteils für zwei Salzlösungstemperaturen  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  und  $T_0 = 60^\circ\text{C}$  dargestellt. Die Lewis-Zahl steigt mit zunehmendem Salzmassenanteil, da der Diffusionskoeffizient der Salzlösung (Abb.6.5) mit steigendem Salzanteil stärker abnimmt als deren Temperaturleitfähigkeit (Abb.6.3). Mit steigender Salzlösungstemperatur sinkt die Lewis-Zahl, da der Diffusionskoeffizient mit zunehmender Temperatur der Salzlösung stärker steigt als deren Temperaturleitfähigkeit. Die Werte der Lewis-Zahl reichen von rund  $Le \approx 45$  bei niedrigen Salzmassenanteilen von  $x_0 = 0,4$  und einer hohen Salzlösungstemperatur von  $T_0 = 60^\circ\text{C}$  bis zu  $Le \approx 160$  bei  $x_0 = 0,65$  und  $T_0 = 30^\circ\text{C}$ . Allerdings befindet sich der Bereich der hohen Salzmassenanteile von  $x_0 > 0,6$  außerhalb



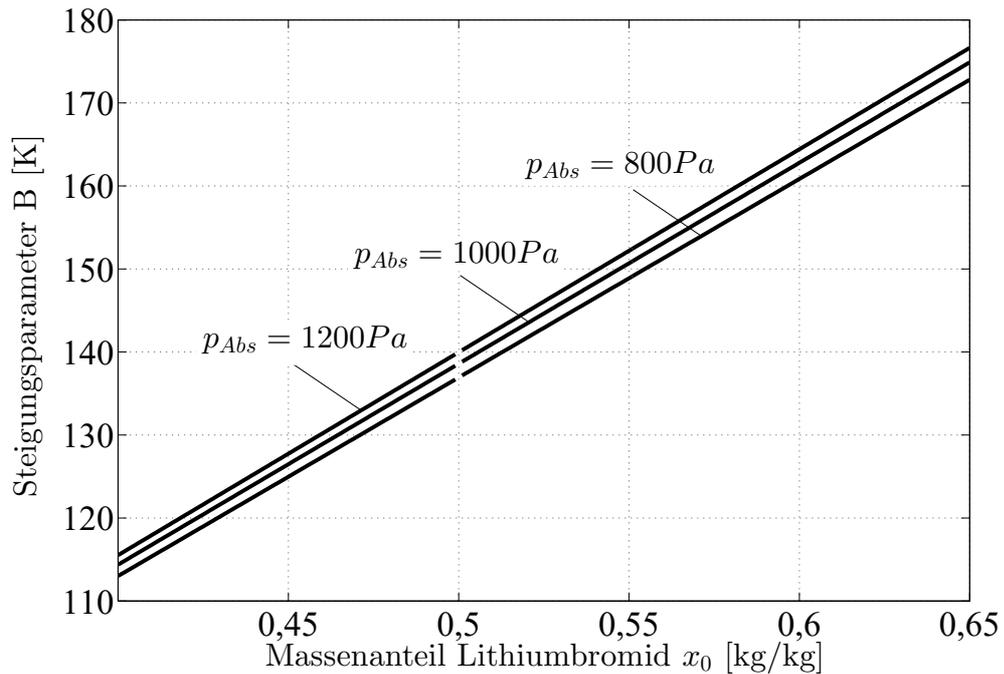
**Abbildung 6.7:** Verlauf der Lewis-Zahl für wässrige Lithiumbromidlösung bei typischen Absorberbedingungen

des Bereiches der für die Erstellung der Stoffdatenfunktion verwendeten experimentellen Daten und ist daher nicht durch Experimente validiert.

Den Verlauf des Steigungsparameters  $B$  der linearisierten isobaren Siedetemperaturen (Vgl. Gleichung (4.8)) zeigt Abbildung 6.8 über dem Salzmassenanteil der Salzlösung. Der Steigungsparameter  $B$  wird hier mit Hilfe der in Abbildung 6.6 aufgetragenen Gleichgewichtstemperaturen ermittelt aus der Steigung einer Sekante zwischen der Gleichgewichtstemperatur bei einem zu wählenden Referenzpunkt und der Gleichgewichtstemperatur bei dem tatsächlichen Salzmassenanteil. Als Referenzpunkt für die Ermittlung des Steigungsparameters werden in dieser Arbeit die zu  $x_0 = 0,5$  und dem entsprechend vorgegebenen Druck  $p_{Abs}$  zugehörigen Gleichgewichtstemperaturen verwendet. Dies ist eine willkürliche Festlegung und wird hier gewählt, um den breiten Massenanteilsbereich von  $x_0 = 0,4 - 0,65$  gut abbilden zu können. Der so ermittelte Steigungsparameter  $B$  steigt nahezu linear mit zunehmendem Lithiumbromidmassenanteil. Auch mit steigendem Druck nimmt  $B$  zu. Dabei variiert  $B$  von  $\approx 112$  bei  $x_0 = 0,4$  und  $p_{Abs} = 800\text{Pa}$  bis  $B \approx 175$  bei  $x_0 = 0,65$  und

$$p_{Abs} = 1200 Pa.$$

Mit Hilfe dieses Steigungsparameters wird die modifizierte Stefan-Zahl wässriger Lithiumbromidlösung ermittelt. Abbildung 6.9 zeigt den Verlauf der modifizierten Stefan-Zahl über dem Lithiumbromidmassenanteil. Die Unterbrechung der Linien rührt von der verschwindenden Temperaturdifferenz an dem festgelegten Referenzpunkt von  $x_0 = 0,5$  her. Für die linear approximierten isobaren



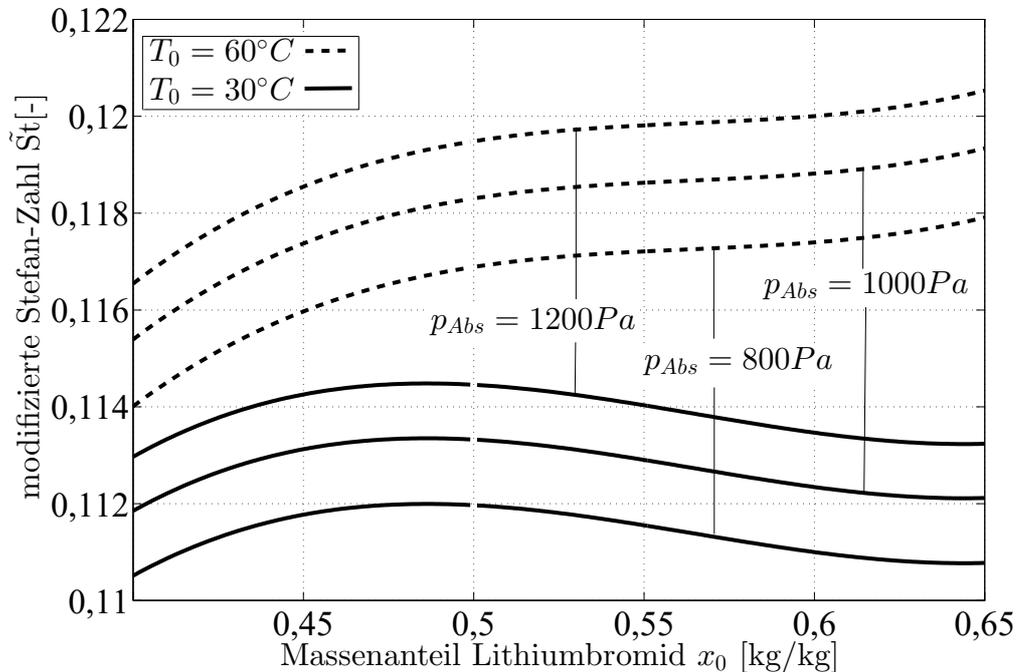
**Abbildung 6.8:** Verlauf des Steigungsparameters B für wässrige Lithiumbromidlösung als Sekante durch den Punkt  $x_0 = 0,5$  in Abbildung 6.6

Siedetemperaturen der Salzlösung vereinfacht sich die modifizierte Stefan-Zahl zu:

$$\tilde{S}t = \frac{c_p \cdot B}{\Delta h_{Abs}}. \quad (6.1)$$

Die spezifische Wärmekapazität der wässrigen Lithiumbromidlösung (vgl. Abb. A.5) fällt und die spezifische Absorptionenthalpie (vgl. Abb. A.5) steigt mit zunehmendem Lithiumbromidmassenanteil. Der Quotient aus spezifischer Wärmekapazität und Absorptionenthalpie sinkt demnach mit steigendem Salzmassenanteil. Der Steigungsparameter gleicht bei  $T_0 = 30^\circ C$  diesen Abfall aus und die modifizierte Stefan-Zahl bleibt nahezu konstant auf Werten von

$\tilde{St} \approx 0,112$  Mit steigendem Druck nimmt auch die modifizierte Stefan-Zahl zu, aufgrund des mit dem Druck zunehmenden Steigungsparameters  $B$ . Die



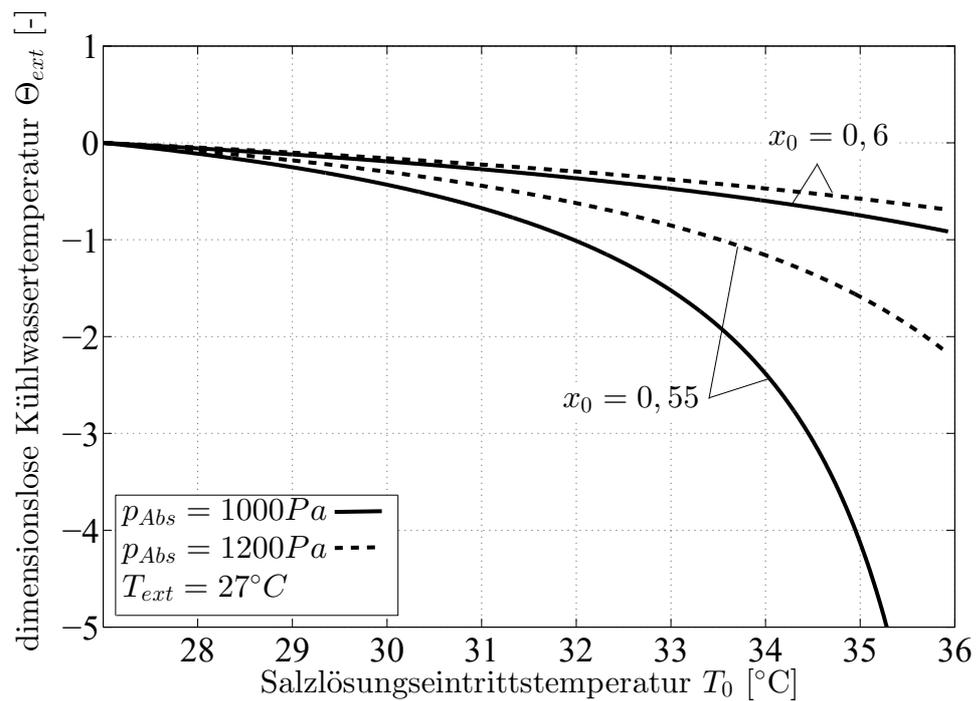
**Abbildung 6.9:** Verlauf der modifizierten Stefan-Zahl für wässrige Lithiumbromidlösung unter Verwendung der in Abb. 6.8 gezeigten Steigungsparameter  $B$

Zunahme der spezifischen Wärmekapazität der Salzlösung mit steigender Temperatur führt zu einer steigenden modifizierten Stefan-Zahl mit steigendem Salzmassenanteil für  $T_0 = 60^\circ C$  aufgrund des somit größeren Vorfaktors vor dem Steigungsparameter  $B$  in 6.1.

Eine weitere Kenngröße stellt die dimensionslose externe Mediumstemperatur  $\Theta_{ext}$  dar, welche im Falle des Absorbers der dimensionslosen Kühlwassertemperatur entspricht:

$$\Theta_{ext} = \frac{T_{ext} - T_0}{T_{eq,0} - T_0}. \quad (6.2)$$

Sie stellt die Differenz zwischen der externen Medientemperatur und der Eintrittstemperatur der Salzlösung ins Verhältnis zur Unterkühlung der Salzlösung am Eintritt. Die Gleichgewichtstemperatur der Salzlösung am Eintritt wird bei gegebenem Druck durch den Salzmassenanteil bestimmt. Je höher der Salzmassenanteil, desto höher ist die Siedetemperatur der Salzlösung (vgl.



**Abbildung 6.10:** Verlauf der dimensionslosen Kühlwassertemperatur  $\Theta_{ext}$  im Absorber für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Salzlösungseintrittstemperatur

Abb. 6.6). Im Absorber ist die externe Kühlwassertemperatur meist geringer als die Salzlösungseintrittstemperatur, so dass für den Absorber meist  $\Theta_{ext} < 0$  gilt.

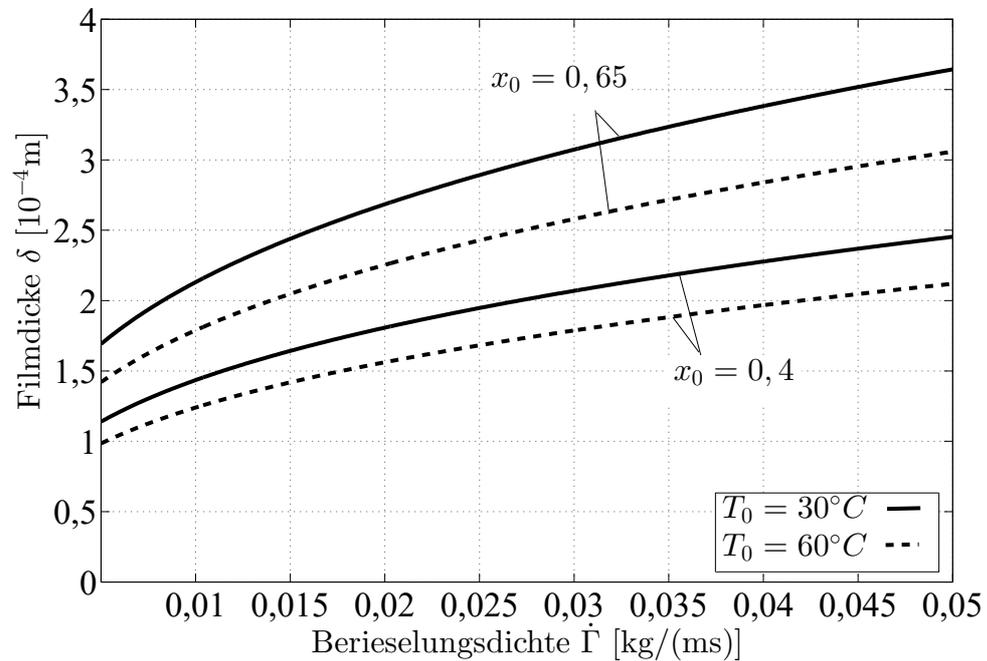
Entspricht die Eintrittstemperatur der Salzlösung der Siedetemperatur bei gegebenem Druck, so ist Unterkühlung am Eintritt gleich null und die dimensionslose externe Temperatur wird betragsmäßig unendlich groß. Das bedeutet, dass die Lösung mit den in dieser Arbeit verwendeten dimensionslosen Parametern nicht ohne Weiteres für im Gleichgewicht aufgegebene Absorbentien verwendbar ist. In einer Vielzahl der technischen Anwendungsfälle findet jedoch die Berieselung mit unterkühlter bzw. im Falle der Desorption mit überhitzter Salzlösung statt. Prinzipiell ist die analytische Lösung auch mit abweichenden Definitionen der dimensionslosen Temperatur und des dimensionslosen Massenanteils durchführbar, allerdings verändert sich dadurch insbesondere die dimensionslose Beschreibung des thermodynamischen Gleichgewichts an der Filmoberfläche.

In Abbildung 6.10 ist der Verlauf der dimensionslosen externen Temperatur als Funktion der Salzlösungseintrittstemperatur für zwei Drücke und Massenanteile dargestellt. Deutlich zu erkennen ist der starke Abfall der dimensionslosen externen Temperatur für  $p_{Abs} = 1000Pa$  und  $x_0 = 0,55$  für eine Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 > 35^\circ C$ . In Abbildung 6.6 ist für den Lithiumbromidmassenanteil von  $x_0 = 0,55$  und einem Druck von  $p_{Abs} = 1000Pa$  eine Gleichgewichtstemperatur von  $T_{eq} \approx 37^\circ C$  ablesbar, weshalb die dimensionslose externe Temperatur für diese Salzlösungseintrittstemperatur ins negativ Unendliche strebt.

Sämtliche dimensionslosen externen Medientemperaturen starten für  $T_0 = 27^\circ C$  bei null, da auch die Kühlwassertemperatur mit  $T_{ext} = 27^\circ C$  vorgegeben ist und der Zähler sich deshalb zu null ergibt. Mit steigendem Salzmassenanteil und Druck erhöht sich die Unterkühlung der Salzlösung am Eintritt, weshalb durch den steigenden Nenner bei gleicher Salzlösungseintrittstemperatur die externe dimensionslose Temperatur betragsmäßig abnimmt.

Die dimensionslose externe Temperatur variiert für typische Absorberbedingungen demzufolge je nach Größe der Unterkühlung der Salzlösung am Eintritt von  $\Theta_{ext} = 0$  bis zu sehr niedrigen Werten von  $\Theta_{ext} < -5$  bei sehr geringen Unterkühlungen der Salzlösung am Eintritt.

Durch die Anwendung der diabaten Wandrandbedingung wird das gekoppelte



**Abbildung 6.11:** Verlauf der Filmdicke für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte

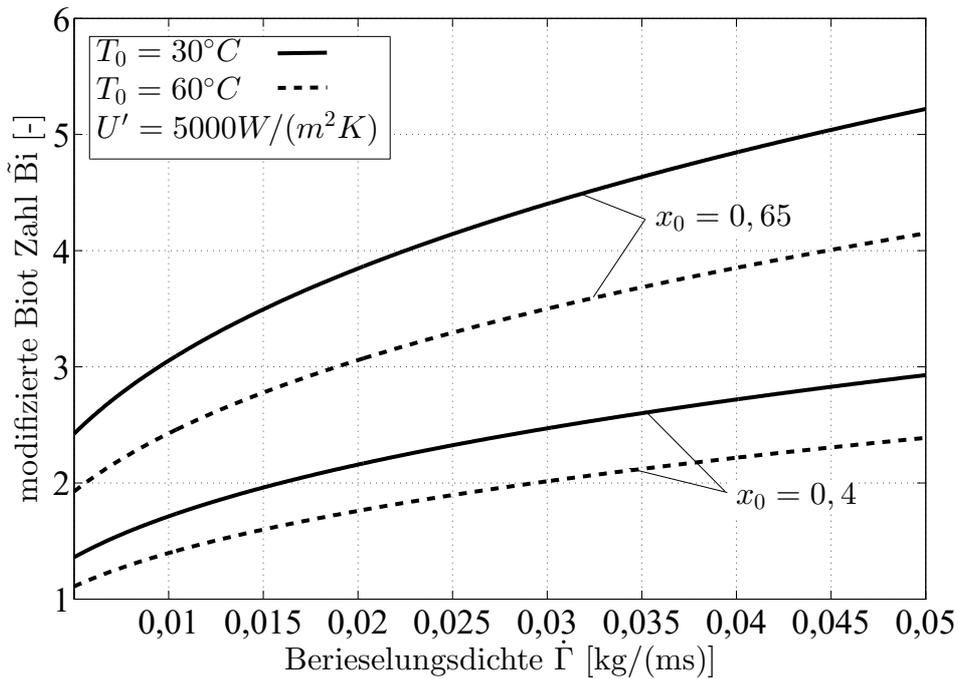
Wärme- und Stofftransportproblem durch eine weitere dimensionslose Kenngröße beeinflusst. Diese Kenngröße ist die modifizierte Biot-Zahl und ist gegeben durch das Verhältnis des thermischen Widerstands der Filmströmung zu dem thermischen Widerstand der Rohrwand, welcher den konvektiven Wärmeübergangswiderstand des strömenden externen Mediums beinhaltet:

$$\tilde{\text{Bi}} = \frac{\delta/\lambda}{1/U}. \quad (6.3)$$

Der thermische Widerstand der Filmströmung wird maßgeblich durch die Filmdicke des strömenden Films beeinflusst. Abbildung 6.11 zeigt den mit Hilfe von (2.18) ermittelten Verlauf der Filmdicke in Abhängigkeit von der spezifischen Berieselungsdichte mit der Salzlösungszusammensetzung und -temperatur als Parameter. Die Filmdicke steigt mit der dritten Wurzel aus der Berieselungsdichte an, was in Abb. 6.11 gut zu erkennen ist. Außerdem steigt sie mit zunehmendem Salzmassenanteil über die Zunahme der kinematischen Viskosität. Aufgrund der mit steigender Temperatur sinkenden kinematischen

Viskosität nimmt die Filmdicke entsprechend ab. In dem hier betrachteten typischen Betriebsbereich von Absorbern mit wässriger Lithiumbromidlösung variiert die Filmdicke von  $\delta_{Film} \approx 0,1mm$  bei geringer Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} = 0,005kg/(ms)$  und  $x_0 = 0,4$  und  $T_0 = 60^\circ C$  bis auf das nahezu vierfache von  $\delta_{Film} \approx 0,37mm$  bei der vergleichsweise hohen Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} = 0,05kg/(ms)$  sowie  $x_0 = 0,65$  und  $T_0 = 30^\circ C$ .

Durch die Vorgabe des thermischen Widerstandes des externen Fluids und



**Abbildung 6.12:** Verlauf der modifizierten Biot-Zahl für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte

der Wand von  $1/U' = 1/5000 m^2 \cdot K/W$  in Abbildung 6.12 wird der Verlauf der modifizierten Biot-Zahl lediglich durch die Veränderung der Filmdicke mit der Berieselungsdichte beeinflusst, da für gegebene Eintrittsbedingungen der Salzlösung die Wärmeleitfähigkeit konstant ist und nicht von der Berieselungsdichte abhängt. Die modifizierte Biot-Zahl variiert von  $\tilde{Bi} \approx 1$  bei den geringen Filmdicken für  $\dot{\Gamma} = 0,005kg/(ms)$  und  $x_0 = 0,4$  und  $T_0 = 60^\circ C$  bis zu  $\tilde{Bi} \approx 5,3$  für die hohe Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} = 0,05kg/(ms)$  und  $x_0 = 0,65$  sowie  $T_0 = 30^\circ C$ .

Eine weitere Kenngröße stellt die dimensionslose Strömungskordinate  $\xi$  dar.

Wie in Kapitel 2.1 eingeführt, ergibt sich  $\xi$  wie folgt:

$$\xi = \frac{x \cdot a}{\delta \bar{u} \delta}, \quad (6.4)$$

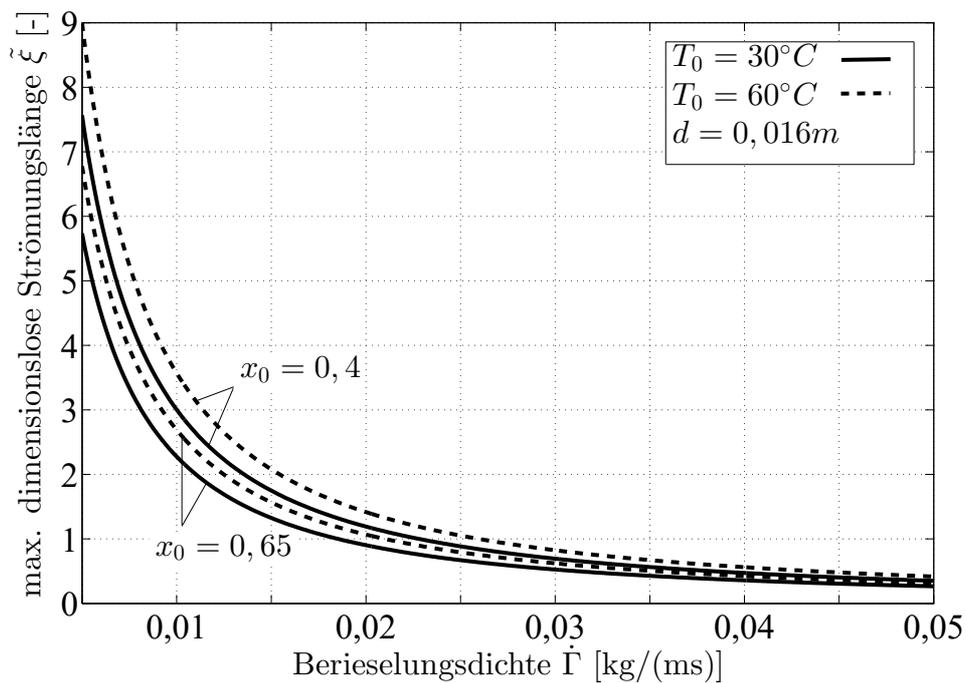
und lässt sich folgendermaßen in eine Funktion der Berieselungsdichte umformen:

$$\xi = \frac{x \cdot a}{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot \nu}{g}}} \left( \frac{\rho}{\dot{\Gamma}} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (6.5)$$

Bei gegebenem Rohrdurchmesser ist die maximal vom Film überströmte Länge gegeben durch den halben Rohrumfang  $x = \pi \cdot d/2$ . Die Stoffwerte in (6.5) sind konstant bei den vorgegebenen Eintrittsgrößen der Salzlösung. Das bedeutet, dass bei gegebenem Salzlösungseintrittszustand und gegebenem Rohrdurchmesser der Wert dieser Kenngröße beim Abtropfen der Salzlösung vom Rohr an der Stelle  $x = \pi \cdot d/2$  noch mit der Berieselungsdichte  $\dot{\Gamma}$  variiert. Dieser für jedes Rohr charakteristische Maximalwert der dimensionslosen Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  wird im Folgenden untersucht und wie folgt berechnet:

$$\tilde{\xi} = \frac{\pi \cdot d/2 \cdot a}{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot \nu}{g}}} \left( \frac{\rho}{\dot{\Gamma}} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (6.6)$$

In Abbildung 6.13 ist der Verlauf dieser maximalen dimensionslosen Strömungslänge für einen gegebenen Rohraußendurchmesser von  $d = 0,016m$  als Funktion der Berieselungsdichte mit der Salzlösungstemperatur und deren Zusammensetzung als Parameter dargestellt. Deutlich zu erkennen ist das starke Ansteigen der maximalen dimensionslosen Strömungslänge für sehr kleine Berieselungsdichten von  $\dot{\Gamma} < 0,01 \text{ kg}/(ms)$ . Für Berieselungsdichten von  $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$  tendiert die maximale dimensionslose Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  (6.6) gegen unendlich. In diesem Fall ergibt sich ein unendlich dünner Film unendlich kleiner Masse. Diese unendlich kleine Masse hat beim Abtropfen vom Rohr ( $\tilde{\xi} \rightarrow \infty$ ) seinen Gleichgewichtszustand erreicht, da einerseits nur eine unendlich kleine Masse an Absorbat dafür notwendig ist und andererseits die Strömungsgeschwindigkeit des Films unendlich klein ist. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass mit steigender Berieselungsdichte der Film dicker und schneller wird und mehr Absorbat zur Erreichung des Gleichgewichtszustandes benötigt wird. Aus diesem Grund nimmt die maximale dimensionslose Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  mit steigender



**Abbildung 6.13:** Verlauf der maximalen dimensionslosen Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  (6.6) für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für einen Rohraußendurchmesser von  $d = 0,016\text{m}$

Berieselungsdichte ab.

Bei gegebenem Durchmesser wird  $\tilde{\xi}$  außer durch die Berieselungsdichte lediglich von den Stoffdaten der Salzlösung beeinflusst. Je dicker der Salzlösungsfilm bei steigender kinematischer Viskosität und je geringer die Temperaturleitfähigkeit, desto kleiner ist die maximale dimensionslose Strömungslänge bei gegebener Berieselungsdichte.

Für den angegebenen praktisch relevanten Bereich der Berieselungsdichten von  $0,005 < \dot{\Gamma} < 0,05 \text{ kg}/(ms)$  variiert die maximale dimensionslose Lauflänge von  $\tilde{\xi} \approx 0,2$  bei  $\dot{\Gamma} = 0,05 \text{ kg}/(ms)$  bis  $\tilde{\xi} \approx 9$  bei  $\dot{\Gamma} = 0,005 \text{ kg}/(ms)$  bei einer hohen Salzlösungstemperatur von  $T_0 = 60^\circ C$  und geringem Salzmassenanteil von  $x_0 = 0,4$ .

### 6.3 Ergebnisse der analytischen Lösung

In diesem Abschnitt wird die in dieser Arbeit eingeführte analytische Lösung verwendet, um die Wärme- und Massenstromdichten eines Wasserdampf absorbierenden Rieselfilms wässriger Lithiumbromidlösung für verschiedene Betriebsbedingungen zu berechnen. Wie in Kapitel 2.1 erläutert fließt der betrachtete Rieselfilm an einer vertikalen, gekühlten Platte. Um den Vergleich mit berieselten Horizontalrohren zu ermöglichen, beträgt die überströmte Plattenlänge den halben Rohrumfang. Die Angriffsrichtung der Schwerkraft wirkt, wie in der Modellierung beschrieben, an der vertikalen Platte über der gesamten Strömungslänge  $x$  gleich und zu 100%.

Die Bestimmungsgleichungen der lokalen Massen- und Wärmestromdichte wurden im vorangegangenen Kapitel 5 eingeführt. In den experimentellen Untersuchungen werden jedoch die integralen Werte gemessen und daher müssen für den Vergleich die mittlere Massen- und Wärmestromdichte mit Hilfe der analytischen Lösung ermittelt werden. Dafür werden die über die dimensionslose Strömungskordinate von  $\xi = 0$  bis  $\tilde{\xi}$  gemittelten Gradienten benötigt. Im Anhang B.5 ist das Vorgehen für die Bestimmung dieser mittleren Gradienten erläutert.

Die an der Filmoberfläche im Mittel absorbierte Massenstromdichte ist im vor-

liegenden Modell gegeben durch:

$$\dot{m}_{Abs} = \frac{\rho \cdot D \cdot (c_{eq} - c_0)}{\delta} \cdot \overline{\frac{\partial \gamma}{\partial \eta}}(\tilde{\xi}, \eta = 0). \quad (6.7)$$

Für die vom Film an die Wand im Mittel übertragene Wärmestromdichte gilt in ähnlicher Weise:

$$\dot{q}_W = \frac{\lambda \cdot (T_{eq} - T_0)}{\delta} \cdot \overline{\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}}(\tilde{\xi}, \eta = 1). \quad (6.8)$$

Der dimensionslose Absorbatmassenanteil- in (6.7) und Temperaturgradient in (6.8) sind über die dimensionslose Filmströmungskordinate von  $\xi = 0$  bis zur maximalen Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  gemittelte Gradienten.

Für die folgende Diskussion der Ergebnisse ist es notwendig, die Abhängigkeit der in den Gleichungen (6.7) und (6.8) vorkommenden Größen von den in den Experimenten veränderten Versuchsparametern herauszuarbeiten.

Die Stoffparameter  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $D$  hängen in diesem Modell ausschließlich von der Anfangszusammensetzung  $c_0$  und der Anfangstemperatur  $T_0$  der Salzlösung ab.

Die die Massen- und Wärmestromdichte skalierenden Differenzen,  $c_{eq} - c_0$  und  $T_{eq} - T_0$ , hängen außer von den Eintrittszuständen der Salzlösung,  $c_0$  und  $T_0$ , auch vom Druck,  $p_{Abs}$ , ab. Bei konstantem  $c_0$  und  $T_0$  steigen mit steigendem Absorptionsdruck  $p_{Abs}$  auch die Differenzen zu den Eintrittswerten, da sowohl der Gleichgewichtsabsorbatmassenanteil  $c_{eq}(T_0, p_{Abs})$ , als auch die Gleichgewichtstemperatur  $T_{eq}(c_0, p_{Abs})$  zunehmen.

In vielen Experimenten wird die Eintrittstemperatur der Salzlösung  $T_0$  bei sonst konstanten Bedingungen variiert. Bei diesen Versuchen verringert sich mit steigender Eintrittstemperatur der Salzlösung die Differenz  $T_{eq}(c_0, p_{Abs}) - T_0$ , weil die Gleichgewichtstemperatur sich nicht verändert.

Bei einer Erhöhung des Eintrittssalzmassenanteils  $x_0$  bei sonst konstanten Versuchsbedingungen, steigt die Differenz,  $c_{eq}(T_0, p_{Abs}) - c_0$ , durch den dadurch sinkenden Absorbatmassenanteil am Eintritt  $c_0 = 1 - x_0$ .

Die Filmdicke  $\delta$  in (6.7) und (6.8) hängt, wie oben besprochen, von der Berieselungsdichte, der kinematischen Viskosität und der Dichte der Salzlösung ab:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \nu}{\rho \cdot g} \cdot \dot{G}}. \quad (6.9)$$

Wie in Abbildung 6.11 gezeigt, steigt die Filmdicke bei typischen Absorberbetriebsbedingungen von  $100\mu\text{m}$  bei kleinen Berieselungsdichten, erhöhten Filmtemperaturen und -absorbatmassenanteilen auf bis zu  $360\mu\text{m}$  bei hohen Berieselungsdichten, niedrigen Filmtemperaturen und -absorbatmassenanteilen.

Die mittleren dimensionslosen Gradienten werden über sämtliche im vorangegangenen Abschnitt diskutierten dimensionslosen Kenngrößen und somit von sämtlichen Betriebsparametern beeinflusst. Eine einfache Abschätzung der quantitativen Entwicklung des Verlauf dieser mittleren Gradienten in Abhängigkeit von den jeweiligen Betriebsparametern ist daher nicht ohne Weiteres möglich. Nichtsdestotrotz wird an dieser Stelle der Einfluss einzelner Betriebsparameter auf die Entwicklung dieser mittleren Gradienten vorab qualitativ diskutiert.

Prinzipiell handelt es sich bei dem hier betrachteten Filmmodell um einen Diffusionsvorgang von Absorbat in ein sich nicht im Phasengleichgewicht befindliches Absorbens. Dieser Diffusionsvorgang beginnt beim Auftropfen mit einer homogenen Massenanteilsverteilung an Absorbat. An der Filmoberfläche kommt es zu einem Sprung des Absorbatanteils auf den Gleichgewichtsabsorbatmassenanteil zur zugehörigen Filmoberflächentemperatur, welche im Falle unterkühlter Salzlösung ebenfalls an der Filmoberfläche auf einen höheren Wert springt. Ausgehend von diesem anfänglich sehr großen Absorbatgradienten beim Auftropfen der Salzlösung auf das Rohr nimmt dieser Gradient durch den einsetzenden Diffusionsvorgang in den Film mit zunehmender Strömungslänge, die der Film zurücklegt, ab. Lediglich durch die Erhöhung des Gleichgewichtsabsorbatmassenanteils an der Filmoberfläche ist diese Abnahme des Absorbatgradienten zu verlangsamen. Diese Erhöhung ist über die Absenkung der Filmoberflächentemperatur erreichbar. Aus diesem Grund wird der Rieselfilm an der Wand gekühlt. Allerdings ist diese Kühlung nicht sofort an der Filmoberfläche wirksam, denn während der Ausbreitung der thermischen Grenzschicht von der Wand durch den Film bis zur thermischen Grenzschicht der Filmoberfläche strömt der Film entlang der Wand. Erst ab einer bestimmten Strömungslänge des Films, wenn die thermische Grenzschicht der Wand die der Filmoberfläche beeinflusst, kommt es zu einer Veränderung der Temperatur des Films an der Filmoberfläche. Bei ausreichender Kühlung durch die Wand, sinkt die Filmoberflächentemperatur, der Absorbatmassenanteil an der

Filmoberfläche steigt und somit fällt der zugehörige Absorbatmassenanteilsgradient weniger schnell.

Bevor sich die thermischen Grenzschichten der Wand und der Filmoberfläche beeinflussen, hat die thermische Wandrandbedingung keinen Einfluss auf den Absorptionsprozess an der Filmoberfläche. Die Filmoberfläche entwickelt sich in diesem Fall unbeeinflusst von der Wand.

In Abbildung 5.5 ist der unterschiedliche Verlauf der lokalen dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten für verschiedene Wandrandbedingungen ab einem Wert der dimensionslosen Strömungskordinate von knapp  $\xi > 0,05$  für die stark gekühlte isotherme Wand deutlich zu sehen. Je geringer die Kühlung durch die Wand für sinkende modifizierte Biot-Zahlen ist, desto größer wird der Wert der dimensionslosen Strömungskordinate, bei der die Kühlung durch die Wand zu einer Absenkung der Filmoberflächentemperatur führt.

Für einen gegebenen Rohrdurchmesser ergibt sich, wie oben erörtert, je nach Größe der Berieselungsdichte beim Abtropfen der Salzlösung vom Rohr ein bestimmter Wert der maximalen dimensionslosen Strömungslänge  $\tilde{\xi}$ .

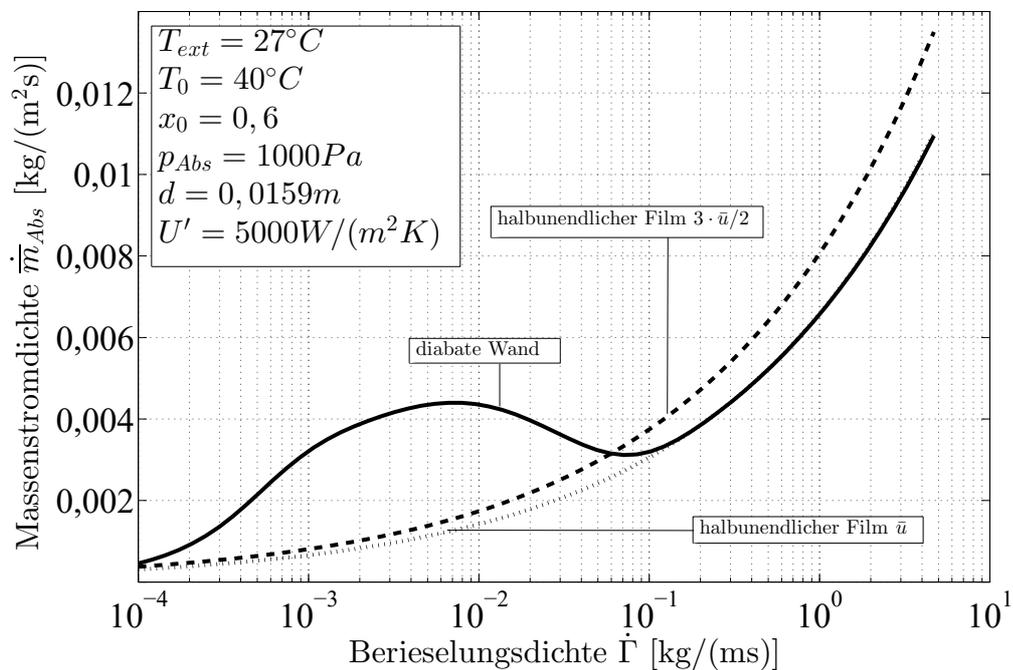
In Abbildung 6.13 ist der Verlauf der maximalen dimensionslosen Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  als Funktion der Berieselungsdichte für typische Absorberbedingungen und einen typischen Rohrdurchmesser gezeigt. Für eine vergleichsweise hohe Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} = 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$  werden beim Abtropfen der Salzlösung maximale dimensionslose Strömungslängen von  $\tilde{\xi} \approx 0,2 - 0,3$  erreicht. Für das Einzelrohr dieses Rohrdurchmessers nimmt der Effekt der gekühlten Wand auf den Stofftransport an der Filmoberfläche für hohe Berieselungsdichten ab und die Filmoberfläche verhält sich zunehmend wie eine von der Wand ungestörte Phasengrenzfläche. Aus Abb. 6.13 geht weiterhin hervor, dass sich die Abnahme der maximalen dimensionslosen Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  mit zunehmenden Berieselungsdichten verlangsamt und der Verlauf zu hohen Berieselungsdichten abflacht. Somit erstreckt sich der Übergangsbereich zwischen der ungestörten und der von der Wand gekühlten Phasengrenzfläche über einen großen Berieselungsdichtenbereich.

Für die sehr kleinen Berieselungsdichten  $\dot{\Gamma} < 0,01 \text{ kg}/(\text{ms})$  kommt es durch die starke Abnahme der Filmstärke zu einem starken Anstieg der maximalen dimensionslosen Strömungslänge  $\tilde{\xi}$ , so dass einerseits die gekühlte Wand großen Einfluss auf den Absorptionsprozess an der Filmoberfläche hat, andererseits

jedoch der Diffusionsprozess des Absorbats in den Film bereits weit fortgeschritten ist und dadurch der mittlere Absorbatmassenanteilsgradient sehr viel kleiner ist als bei höheren Berieselungsdichten.

Exemplarisch zeigt Abbildung 6.14 den Verlauf der mittleren Massenstromdichte (6.7) als Funktion der Berieselungsdichte für typische Absorberbedingungen. Die Abbildung zeigt die Ergebnisse von drei verschiedenen mathematischen Modellen zur Beschreibung des dimensionslosen mittleren Absorbatmassenanteilsgradienten. Die durchgezogene Linie zeigt die in dieser Arbeit vorgestellte Lösung der diabaten Wand. Die gestrichelte und gepunktete Linie zeigen die mathematische Lösung für den halbunendlichen Film ohne Wand Einfluss. Die Strichlinie zeigt dabei die von Nakoryakov et al. (1997) vorgeschlagene Lösung, bei der sich der halbunendliche Film mit der Filmoberflächengeschwindigkeit  $u_i = 3 \cdot \bar{u}/2$  bewegt. Die Punktlinie zeigt die Lösung für den halbunendlichen Film, welcher sich mit der mittleren Filmgeschwindigkeit,  $\bar{u}$ , bewegt.

Für sehr große Berieselungsdichten  $\dot{\Gamma} > 0,1 \text{ kg}/(\text{ms})$  ist die Filmoberfläche



**Abbildung 6.14:** Verlauf der mittleren absorbierten Massenstromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung für einen sehr großen Bereich der Berieselungsdichte und eine Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 = 40^{\circ}C$

aus den oben beschriebenen Gründen unbeeinflusst von der thermischen Wandrandbedingung. Die maximale dimensionslose Strömungslänge für das Rohr ist klein und die thermischen Grenzschichten der Wand und der Phasengrenzfläche beeinflussen sich noch nicht. Aus diesem Grund beschreibt die mathematische Lösung für die diabate Wand für größere Berieselungsdichten einen ähnlichen Verlauf wie die Lösungen des halbunendlichen Films für einen abklingenden Diffusionsprozess ausgehend von einem anfänglichen Massenanteilsprung an der Filmoberfläche.

Die mit Hilfe der Lösung für den halbunendlichen Film nach Nakoryakov et al. (1997) mit einer Filmoberflächengeschwindigkeit  $u_i = 3 \cdot \bar{u}/2$  ermittelte Massenstromdichte (gestrichelte Linie) liegt für große Berieselungsdichten  $\dot{\Gamma} > 0,1 \text{ kg}/(\text{ms})$  über der Lösung der diabaten Wand. Der Grund hierfür liegt in der im Vergleich kleineren maximalen dimensionslosen Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  für einen sich schneller bewegendem Film (vgl. Gleichung 2.42). Aus diesem Grund ist die Massenstromdichte bei gleicher Berieselungsdichte für den halbunendlichen Film mit mittlerer Filmgeschwindigkeit  $\bar{u}$  entsprechend kleiner als für die maximale Filmgeschwindigkeit.

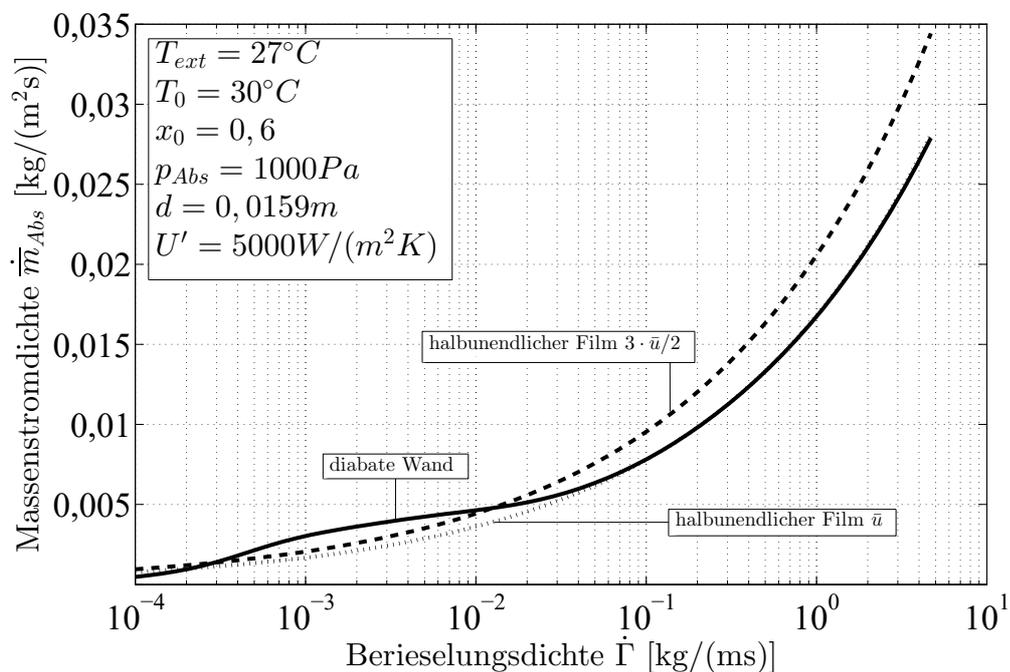
Die Lösung der diabaten Wand für sehr große Berieselungsdichten fällt erwartungsgemäß zusammen mit der Lösung des halbunendlichen Films bei mittlerer Filmgeschwindigkeit  $\bar{u}$ . Zur weiteren Validierung der hier vorgestellten analytischen Lösung wurden die ermittelten dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten mit Hilfe einer numerischen Lösung für die Randbedingung der isothermen Wand bei sonst identischen Rand- und Anfangsbedingungen in sehr guter Übereinstimmung verglichen (Mittermaier et al., 2014), (Meyer et al., 2014).

Für sinkende Berieselungsdichten nimmt die maximale dimensionslose Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  des Films zu und die Diffusionsprozesse für die Modelle des halbunendlichen Films klingen monoton ab, was zu monoton fallenden mittleren absorbierten Massenstromdichten führt. Die Lösung der diabaten Wand führt jedoch ab Berieselungsdichten von  $\dot{\Gamma} < 0,1 \text{ kg}/(\text{ms})$  durch den ab diesem Punkt einsetzenden Kühleffekt der Filmoberfläche durch die Wand bis zu einer Vervierfachung der mittleren Massenstromdichte im Vergleich zu den Ergebnissen der Modelle des halbunendlichen Films.

Bemerkenswert ist das Maximum der mit der Lösung der diabaten Wand er-

mittelten Massenstromdichte bei  $\dot{\Gamma} \approx 0,007 \text{ kg}/(\text{ms})$ . Dieses ausgeprägte Maximum hängt mit den Eintrittsbedingungen der Salzlösung zusammen. Ob sich ein Verlauf mit einem Maximum einstellt, hängt maßgeblich von dem Niveau der mittleren Massenstromdichten in dem von der Wand unbeeinträchtigten Bereich zusammen. Die absorbierte Massenstromdichte skaliert in diesem Bereich im Wesentlichen mit der Absorbatmassenanteilsdifferenz am Eintritt  $c_{eq}(T_0, p_{Abs}) - c_0$ . Je höher die Eintrittstemperatur der Salzlösung  $T_0$ , desto niedriger ist der zugehörige Gleichgewichtsabsorbatmassenanteil  $c_{eq}(T_0, p_{Abs})$  und desto geringer ist die Massenstromdichte bei sonst konstanten Bedingungen.

Dies zeigt Abbildung 6.15, in der die mittlere Massenstromdichte für eine geringere Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  aufgetragen ist. Durch die Verringerung der Salzlösungseintrittstemperatur erhöht sich die mittlere Massenstromdichte im von der Wand unbeeinflussten Bereich für  $\dot{\Gamma} > 0,1 \text{ kg}/(\text{ms})$  deutlich im Vergleich zu Abbildung 6.14 (man beachte die andere Skalierung). Dies ist der Grund, weshalb der die Massenstromdichte steigernde Kühleffekt



**Abbildung 6.15:** Verlauf der mittleren absorbierten Massenstromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung bei typischen Absorberbedingungen für einen sehr großen Bereich der Berieselungsdichte und  $T_0 = 30^\circ\text{C}$

in diesem Fall nicht zu einem Maximum, sondern lediglich zu einem den abklingenden Diffusionsvorgang verlangsamenden Effekt führt.

Außerdem ist in Abb. 6.15 gut zu erkennen, dass die mittlere Massenstromdichte für die Lösung der diabaten Wand für sehr kleine Berieselungsdichten  $\dot{\Gamma} < 0,00025 \text{ kg}/(ms)$  unter die Lösungen des halbbunendlichen Films fällt. Wie oben beschrieben, tendiert die maximale dimensionslose Strömungslänge für  $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$  gegen unendlich  $\tilde{\xi} \rightarrow \infty$ . Der Film endlicher Ausdehnung benötigt nur eine endliche Masse an Absorbat, um in seinen Gleichgewichtszustand zu gelangen. Für unendliche maximale dimensionslose Strömungslängen und endlicher Absorbatmasse tendiert die mittlere Massenstromdichte gegen null. Dies gilt jedoch nicht für den halbbunendlichen Film, welcher unabhängig von der Berieselungsdichte unendlich viel Absorbatmasse aufnehmen kann.

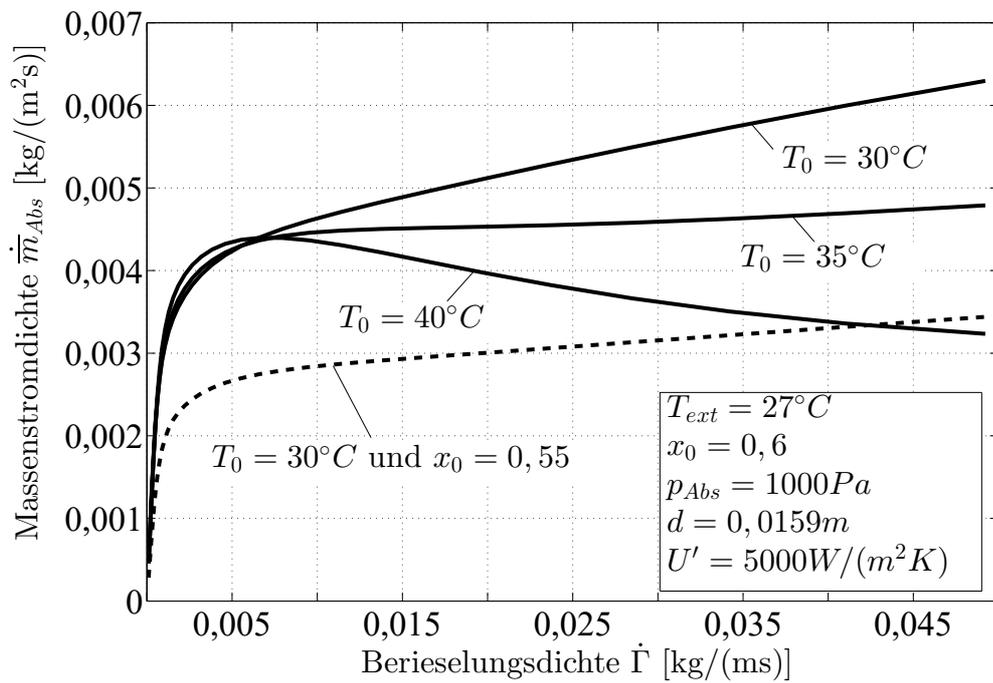
Im folgenden Abschnitt werden die an dieser Stelle gewonnenen Erkenntnisse dazu verwendet, um die technisch relevanten Bereiche der Berieselungsdichte und deren Einfluss auf die an der Filmoberfläche absorbierte Massenstromdichte sowie die an der Wand übertragene Wärmestromdichte zu diskutieren.

### 6.3.1 Variation der Berieselungsdichte

In Abbildung 6.16 ist ein Ausschnitt der im vorigen Abschnitt gezeigten Abbildungen im technisch relevanten Bereich experimenteller Berieselungsdichten gezeigt. Für kleinere Berieselungsdichten von  $\dot{\Gamma} < 0,01 \text{ kg}/(ms)$  wird die im Mittel absorbierte Massenstromdichte sehr klein, weil wenig Salzlösungsmassenstrom auf die Rohre verteilt wird, ein sehr dünner Film auf den Rohren langsam fließt, welcher zwar gut gekühlt wird, dessen Diffusionsvorgang durch die große maximale dimensionslose Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  beim Abtropfen der Salzlösung an der Oberfläche im Mittel jedoch bereits stark abgeklungen ist.

Die leicht erhöhte Massenstromdichte für  $T_0 = 40^\circ C$  und  $\dot{\Gamma} = 0,006 \text{ kg}/(ms)$  rührt von einem größeren Diffusionskoeffizienten her, welcher mit den Eintrittsbedingungen der Salzlösung ermittelt wird.

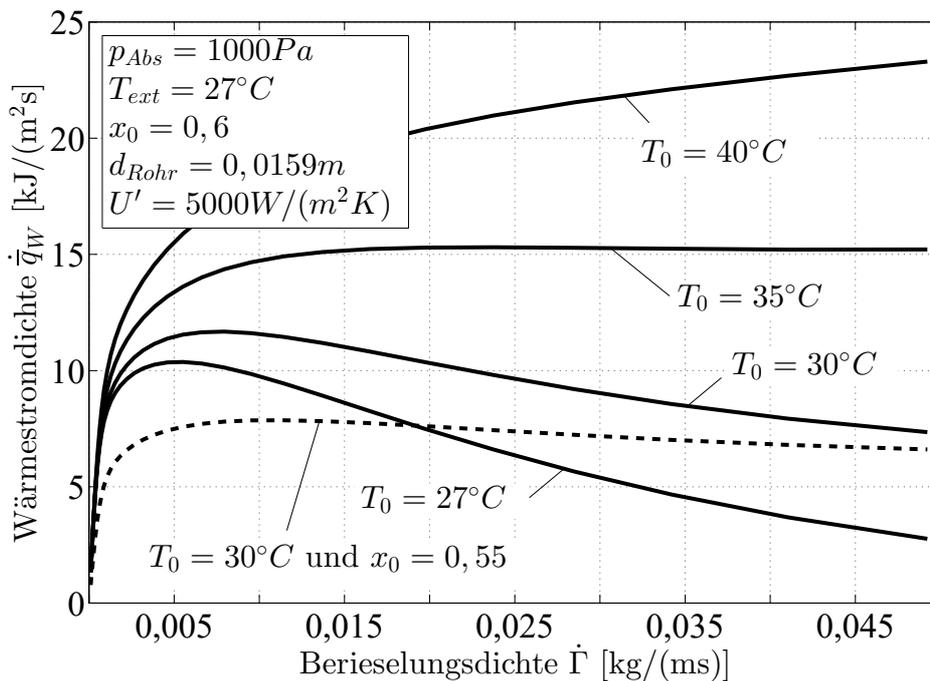
Ab einer Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} > 0,01 \text{ kg}/(ms)$  gewinnt die Eintrittstemperatur der Salzlösung an Bedeutung für die an der Filmoberfläche im Mittel absorbierte Massenstromdichte. Der unterschiedliche Verlauf in Abhängigkeit von den Eintrittstemperaturen zu hohen Berieselungsdichten wurde im vorangegangenen Abschnitt diskutiert und hängt mit der zunehmenden Entkopp-



**Abbildung 6.16:** Verlauf der mittleren absorbierten Massenstromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für verschiedene Eintrittstemperaturen der Salzlösung

lung von der thermischen Wandrandbedingung zusammen. Des Weiteren ist der Verlauf der mittleren absorbierten Massenstromdichte für einen geringeren Eintrittssalzmassenanteil von  $x_0 = 0,55$  und einer Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  als gestrichelte Linie dargestellt. Die treibende Absorbatmassenanteilsdifferenz in (6.7) sinkt und somit auch die mittlere Massenstromdichte bei  $\dot{\Gamma} = 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$  um knapp 50% im Vergleich zu  $x_0 = 0,6$ .

Die an die Wand übertragene Wärmestromdichte zeigt Abbildung 6.17 als



**Abbildung 6.17:** Verlauf der mittleren an die Wand abgegebenen Wärmestromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für verschiedene Eintrittstemperaturen der Salzlösung

Funktion der Berieselungsdichte mit der Eintrittstemperatur der Salzlösung als Parameter. Im Bereich  $\dot{\Gamma} < 0,005 \text{ kg}/(\text{ms})$ , d.h. der sehr kleinen Berieselungsdichten nimmt die maximale dimensionslose Strömungslänge  $\tilde{\xi}$  sehr große Werte an und, wie zuvor gezeigt, sind der mittlere Stoffgradient an der Filmoberfläche und der mittlere Temperaturgradient an der Wand dementsprechend klein. Bei Steigerung der Berieselungsdichte steigt die mittlere absorbierte Massenstromdichte an und in dem Bereich, in dem sich die thermischen Grenzschichten der Wand und der Phasengrenzfläche treffen, hat diese Steigerung

der im Mittel absorbierten Massenstromdichte auch steigernde Wirkung auf die an der Wand übertragene Wärmestromdichte.

Bereits bei einer Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} = 0,005 \text{ kg}/(\text{ms})$  ist ein deutlicher Unterschied in den mittleren Wärmestromdichten für die unterschiedlichen Salzlösungseintrittstemperaturen zu erkennen. Bei der Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 = 27^\circ\text{C}$ , welche gleich der externen Kühlwassertemperatur ist, nimmt die mittlere Wärmestromdichte ab dieser Berieselungsdichte wieder ab. Durch die Erhöhung der Berieselungsdichte gelangt, wie zuvor bereits erläutert, von dem an der Filmoberfläche übertragenen Wärmestrom weniger bis zur Wand. Dies wird für die Salzlösungseintrittstemperatur, welche gleich der Kühlwassertemperatur ist, besonders deutlich, weil ohne den Wärmestrom von der Filmoberfläche für die völlig entkoppelten thermischen Grenzschichten an der Wand kein Wärmestrom an das Kühlwasser übertragen würde. Bei weiterer Steigerung der Berieselungsdichte würde die mittlere Wärmestromdichte für  $T_0 = 27^\circ\text{C}$  auf null absinken.

Für Salzlösungseintrittstemperaturen, die größer sind als die Kühlwassereintrittstemperatur ergeben sich von null verschiedene Wärmestromdichten für größere Berieselungsdichten.

In Kapitel 5 wird der dimensionslose Wandtemperaturgradient für  $\dot{\Gamma} \rightarrow \infty$  in (5.8) als dem Produkt der modifizierten Biot-Zahl mit der dimensionslosen externen Temperatur angegeben. Je größer die Differenz der Eintrittstemperatur der Salzlösung zur Kühlwassertemperatur, desto größer die mittleren Wärmestromdichten im Bereich hoher Berieselungsdichten. Die für  $\dot{\Gamma} \rightarrow \infty$  an die Wand übertragbare Wärmestromdichte wird erreicht, wenn die filmseitige Wandtemperatur der Salzlösungseintrittstemperatur entspricht. Somit lässt sich dieser Grenzwert der Wärmestromdichte mit dem gegebenen partiellen Wärmedurchgangskoeffizienten  $U'$  folgendermaßen berechnen:

$$\bar{q}_{W,\dot{\Gamma} \rightarrow \infty} = U' \cdot (T_0 - T_{ext}) \quad (6.10)$$

Aus diesem Grund steigen in Abbildung 6.17 die Wärmestromdichten für sehr große Berieselungsdichten  $\dot{\Gamma} \gg 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$  für sämtliche Salzlösungseintrittstemperaturen, welche größer als die Kühlwassertemperatur bis auf den jeweiligen Grenzwert (6.10) an. Für die Salzlösungseintrittstemperatur  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  ergibt sich für  $T_{ext} = 27^\circ\text{C}$  und  $U' = 5000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  eine Grenzwärmestromdichte von  $\bar{q}_{W,\dot{\Gamma} \rightarrow \infty} = 15 \text{ kW}/\text{m}^2$ .

Auch hier zeigt die gestrichelte Linie den Verlauf der Wärmestromdichte für einen geringeren Eintrittssalzmassenanteil von  $x_0 = 0,55$ . Im Vergleich zum Eintrittssalzmassenanteil von  $x_0 = 0,6$  sinkt die Wärmestromdichte nur für kleine Berieselungsdichten von  $\dot{\Gamma} \approx 0,005 \text{ kg}/(\text{ms})$  auf knapp die Hälfte. Bei hohen Berieselungsdichten nähern sich die Wärmestromdichten wieder an, da die Absorptionswärme von der Filmoberfläche dort nur noch bedingt zur Wand transportiert wird und in diesem Bereich lediglich die Temperaturdifferenz zwischen der Salzlösungseintritts- und der externen Temperatur die Wärmestromdichte bestimmt.

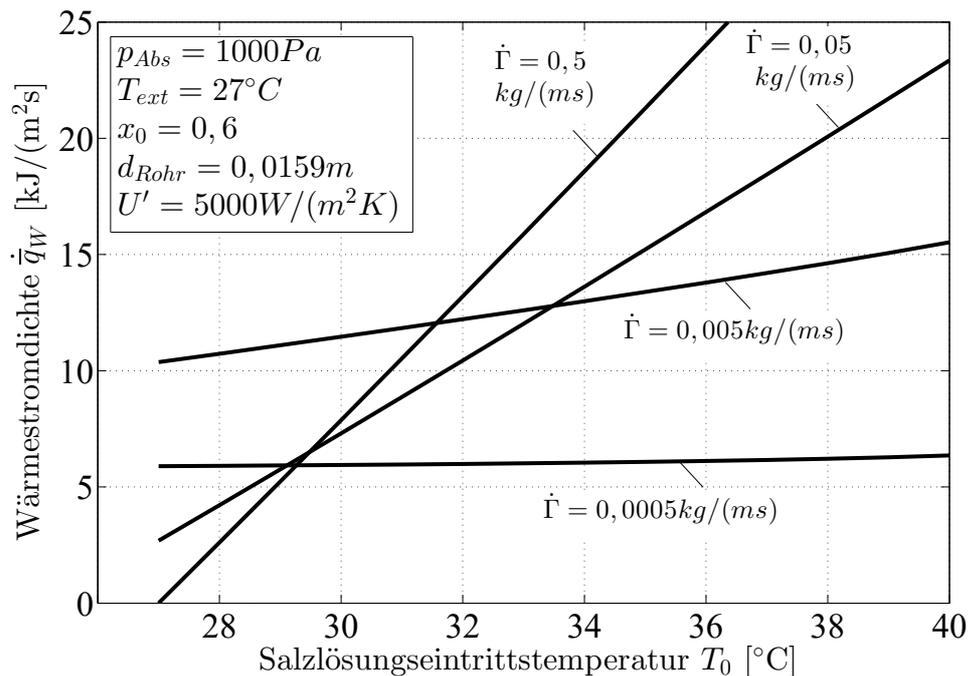
Für die Einzelrohrbetrachtung bleibt festzuhalten, dass für sehr große Berieselungsdichten die an die Rohrwand übertragene Wärmestromdichte weniger von der an der Filmoberfläche durch Absorption freigesetzte Wärme, als vielmehr von der Temperaturdifferenz zwischen Salzlösungseintritts- und Kühlwassertemperatur beeinflusst wird. Allerdings würde bei der Betrachtung eines Rohrbündels mit sehr großer Berieselungsdichte und Salzlösungstemperatur durch die sehr hohen Wärmestromdichten an die Wand auch die Salzlösungseintrittstemperatur auf dem darunterliegenden Rohr entsprechend verringert. Diese Absenkung der Salzlösungseintrittstemperaturen der auf die darunter liegenden Rohrreihen tropfenden Salzlösung führt dort entsprechend zu höheren absorbierten Massenstromdichten.

### 6.3.2 Variation der Salzlösungseintrittstemperatur

Ein weiterer häufig variiertes Parameter in den Experimenten ist die Eintrittstemperatur der Salzlösung bei sonst konstanten Bedingungen. Abbildung 6.18 zeigt den Verlauf der mittleren, an die Wand übertragenen Wärmestromdichte über der Eintrittstemperatur der Salzlösung mit der Berieselungsdichte als Parameter. Es sind deutliche Unterschiede im Verlauf für die unterschiedlichen Berieselungsdichten zu erkennen. Für zunehmende Berieselungsdichten nimmt die Abhängigkeit der an der Wand übertragenen mittleren Wärmestromdichte von der Eintrittstemperatur der Salzlösung zu. Bei sehr hohen Berieselungsdichten entwickeln sich die beiden thermischen Grenzschichten der Wand und der Filmoberfläche unbeeinflusst voneinander. Gut zu erkennen ist dies für die sehr hohe Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} = 0,5 \text{ kg}/(\text{ms})$ , weil die mittlere Wärme-

stromdichte bei Gleichheit der Salzlösungseintritts- und Kühlwassertemperatur von  $T_0 = T_{ext} = 27^\circ\text{C}$  null ist. Die Absorptionswärme, die an der Filmoberfläche freigesetzt wird, gelangt für diese hohe Berieselungsdichte nicht bis zur Wand. Wie bereits oben erwähnt, würde die an der Filmoberfläche zugeführte Wärme jedoch zur Erhöhung der Salzlösungstemperatur führen und demnach wird die Salzlösung mit einer höheren Temperatur von dem Rohr abtropfen. Für eine unendlich große Berieselungsdichte ergibt sich eine Gerade durch die jeweiligen mittleren Grenzärmestromdichten (6.10), d.h. mit der Steigung  $U'$  und  $-U' \cdot T_{ext}$  als Achsenabschnitt.

Für geringere und technisch relevantere Berieselungsdichten beeinflussen sich die thermischen Grenzschichten, was zu der Steigerung der mittleren Wärmestromdichte an der Wand für eine Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 = 27^\circ\text{C}$  bei Veränderung der Berieselungsdichten von  $\dot{\Gamma} = 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$  auf  $\dot{\Gamma} = 0,005 \text{ kg}/(\text{ms})$  führt. Für die sehr geringe Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} =$



**Abbildung 6.18:** Verlauf der mittleren an die Wand abgegebenen Wärmestromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung bei typischen Absorberbedingungen als Funktion der Eintrittstemperatur der Salzlösung

$0,0005 \text{ kg}/(\text{ms})$  kommt es im Vergleich zu  $\dot{\Gamma} = 0,005 \text{ kg}/(\text{ms})$  jedoch wie-

der zu einem Abfall der Wärmestromdichte von  $\dot{q}_W \approx 10 \text{ kJ}/(\text{m}^2\text{s})$  auf  $\dot{q}_W \approx 6 \text{ kJ}/(\text{m}^2\text{s})$  bei  $T_0 = 27^\circ\text{C}$ . Die mittlere Wärmestromdichte wird für diese kleinen Berieselungsdichten vom Absorptionsprozess dominiert, der für  $\dot{\Gamma} = 0,0005 \text{ kg}/(\text{ms})$  nahezu unabhängig von der Salzlösungseintrittstemperatur ist. Die Abnahme der mittleren Wärmestromdichte für die sehr geringen Berieselungsdichten hängt also mit der nachlassenden Absorption an der Filmoberfläche zusammen. Bei weiterer Absenkung der Berieselungsdichte sinkt auch die mittlere Wärmestromdichte und tendiert im Grenzfall für  $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$ , wie bereits in Abbildung 6.17 dargestellt, unabhängig von der Salzlösungseintrittstemperatur gegen Null.

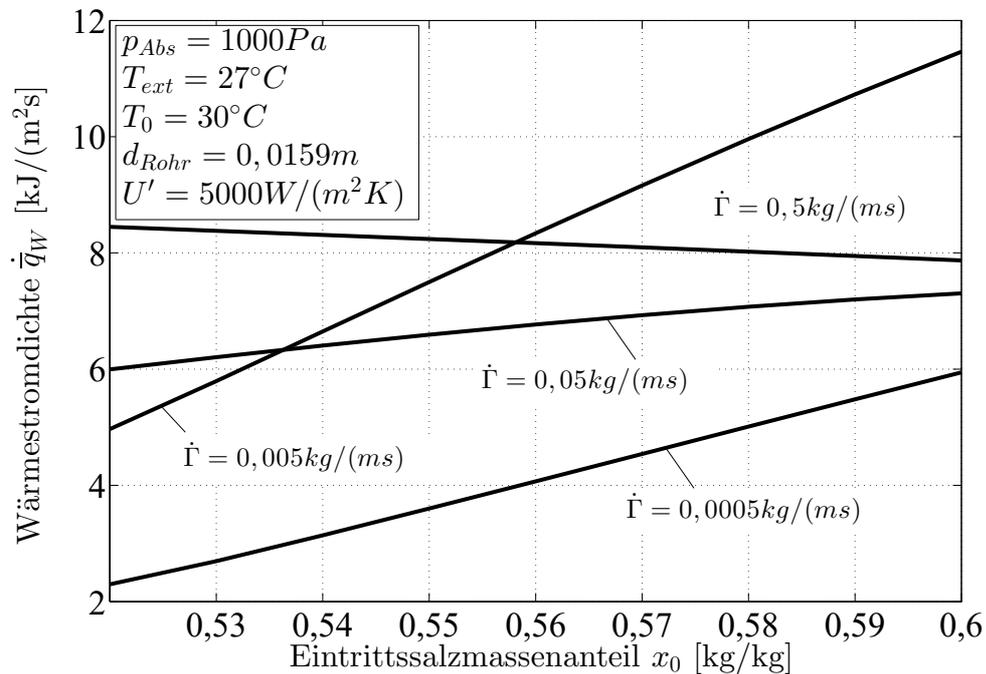
### 6.3.3 Variation der Salzlösungseintrittszusammensetzung

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Salzlösungszusammensetzung am Eintritt auf die an der Wand übertragene mittlere Wärmestromdichte anhand von Abbildung 6.19 exemplarisch diskutiert.

Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, ist für eine Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} = 0,5 \text{ kg}/(\text{ms})$  oder größer die an der Wand übertragene Wärmestromdichte unabhängig von der an der Filmoberfläche ablaufenden Absorption, da sich die thermischen Grenzschichten nicht beeinflussen. Bei vorgegebener konstanter Eintrittstemperatur der Salzlösung von  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  sollte daher die mittlere Wärmestromdichte für  $\dot{\Gamma} = 0,5 \text{ kg}/(\text{ms})$  unabhängig von dem Salzmassenanteil der Salzlösung am Eintritt sein. Mit zunehmendem Salzmassenanteil nimmt jedoch die Wärmeleitfähigkeit der Salzlösung ab und die kinematische Viskosität nimmt zu. Dies führt bei steigendem Salzmassenanteil zu einer leichten Abnahme der mittleren Wärmestromdichte für  $\dot{\Gamma} = 0,5 \text{ kg}/(\text{ms})$ . Da es sich für diese hohen Berieselungsdichten um ein nicht von der Absorption an der Filmoberfläche überlagertes Wärmeübergangsproblem handelt, lässt sich die Aussage zu den Stoffdaten an dieser Stelle so eindeutig formulieren. Sobald für kleinere Berieselungsdichten die thermische Grenzschicht der Filmoberfläche mit der der Wand interagiert, kommt es zu einer Zunahme der mittleren Wärmestromdichte an der Wand mit zunehmendem Salzmassenanteil der Salzlösung. Wie in Abbildung 6.16 exemplarisch für  $x_0 = 0,55$  und  $x_0 = 0,6$  gezeigt, steigt die mittlere an der Filmoberfläche absorbierte Massenstromdichte bei sonst gleichen Bedingungen mit zunehmendem Salzmassenanteil. Je

stärker die mittlere Wärmestromdichte an der Wand von der Absorption dominiert wird, d.h. je geringer die Berieselungsdichte wird, umso stärker setzt sich die durch Erhöhung des Eintrittssalzmassenanteils erhöhte Wärmestromdichte an der Filmoberfläche zur Wand durch. Dies ist in Abbildung 6.19 deutlich erkennbar.

Für die sehr geringe Berieselungsdichte  $\dot{\Gamma} = 0,0005 \text{ kg}/(\text{ms})$  führt der insgesamt abgeklungene Absorptionsprozess zur Verringerung der mittleren Wärmestromdichte.



**Abbildung 6.19:** Verlauf der mittleren an die Wand abgegebenen Wärmestromdichte für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Eintrittszusammensetzung der Salzlösung

### 6.3.4 mittlere Stoffüber- und Wärmedurchgangskoeffizienten

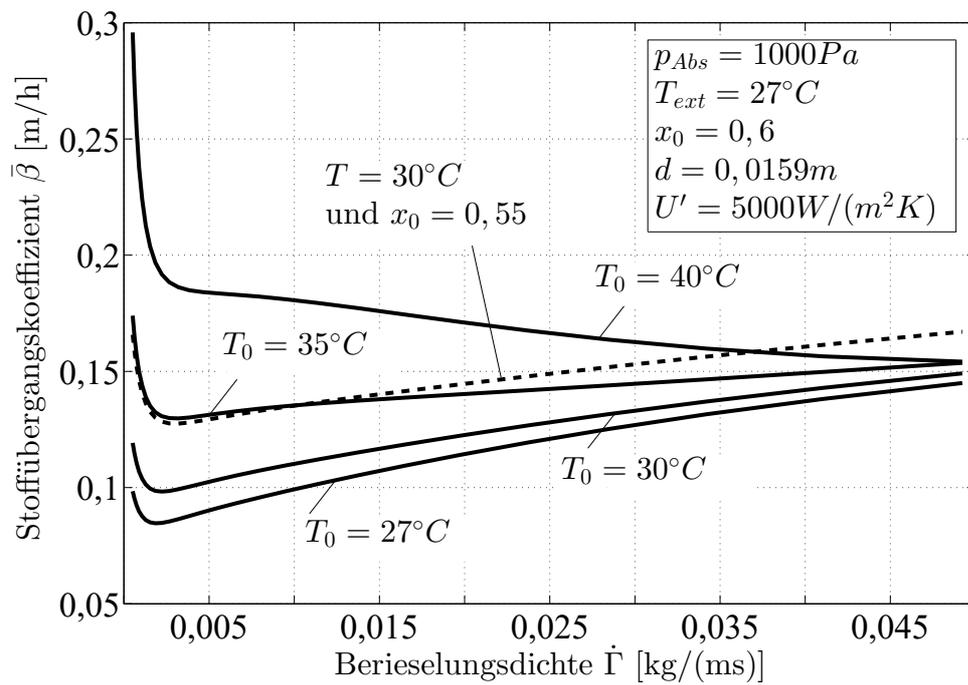
In der Literatur verfügbare Messdaten beschränken sich meist auf die Angabe mittlerer Stoffüber- und Wärmedurchgangskoeffizienten. Daher ist es für den Vergleich notwendig, die mit der analytischen Lösung ermittelten mittleren Massen- und Wärmestromdichten mit Hilfe der entsprechenden treibenden

Massensanteils- und Temperaturdifferenzen zu berechnen. Ein typischer Ansatz ist die Verwendung der logarithmischen Mittelwerte für die Massenanteils- und Temperaturdifferenzen. In Kapitel 5 ist bereits für eine Beispielrechnung auf die Definition dieser logarithmischen Mittelwerte eingegangen worden.

Unter Verwendung dieser logarithmischen Mittelwerte der Massenanteils- (5.25) und Temperaturdifferenz (5.21) und den zuvor ermittelten mittleren Massen- und Wärmestromdichten werden die Abbildungen 6.20 und 6.21 erhalten. Sie zeigen den Verlauf der mittleren Stoffüber- und Wärmedurchgangskoeffizienten über der Berieselungsdichte mit der Salzlösungseintrittstemperatur als Parameter.

Die für dieses Beispiel gezeigten mittleren Stoffübergangswerte unterscheiden sich je nach Eintrittstemperatur der Salzlösung in ihrem Verlauf. Abgesehen von dem anfänglichen Abfall für sehr kleine Berieselungsdichten steigen bei Salzlösungseintrittstemperaturen nahe der Kühlwassertemperatur die mittleren Stoffübergangskoeffizienten mit steigender Berieselungsdichte. Für eine Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 = 40^\circ C$  sinkt jedoch der mittlere Stoffübergangskoeffizient von seinem anfänglich vergleichsweise hohen Wert von  $\bar{\beta} \approx 0,18 \text{ m/h}$  bei  $\dot{\Gamma} = 0,005 \text{ kg/(ms)}$  bis auf  $\bar{\beta} \approx 0,15 \text{ m/h}$  bei  $\dot{\Gamma} \approx 0,05 \text{ kg/(ms)}$ . Die für diese Absorberbedingungen ermittelten mittleren Stoffübergangskoeffizienten für praktisch realisierbare Berieselungsdichten von  $\dot{\Gamma} > 0,005 \text{ kg/(ms)}$  variieren von  $\bar{\beta} \approx 0,08 \text{ m/h}$  bei  $\dot{\Gamma} > 0,005 \text{ kg/(ms)}$  und  $T_0 = 27^\circ C$  bis zu  $\bar{\beta} \approx 0,18 \text{ m/h}$  für  $\dot{\Gamma} = 0,005 \text{ kg/(ms)}$  und hohen Salzlösungseintrittstemperaturen von  $T_0 = 40^\circ C$ .

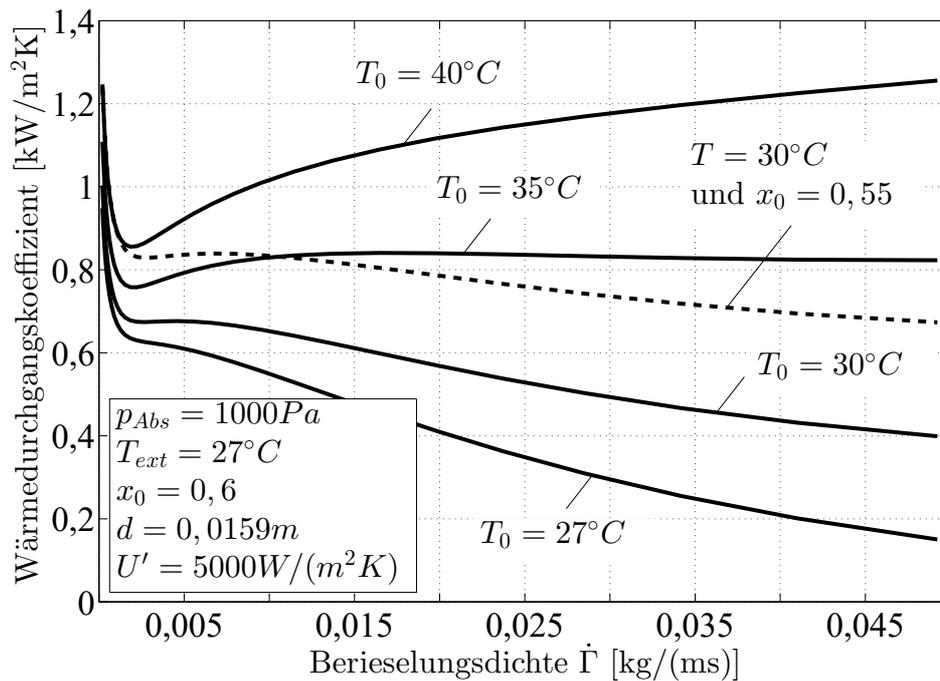
Die ermittelten mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten zeigen einen umgekehrten Verlauf über der Berieselungsdichte im Vergleich zum mittleren Stoffübergangskoeffizienten. Abgesehen vom anfänglichen Abfall für sehr kleine Berieselungsdichten sinkt der Wärmedurchgangskoeffizient mit steigender Berieselungsdichte, falls die Temperaturdifferenz zwischen Salzlösungseintrittstemperatur und der Kühlwassertemperatur nicht groß ist. Bei einer Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 = 35^\circ C$  bleibt der mittlere Wärmedurchgangskoeffizient bei  $\bar{k} \approx 0,82 \text{ kW/(m}^2\text{K)}$  nahezu konstant mit steigender Berieselungsdichte (abgesehen von sehr kleinen Berieselungsdichten). Für die hohe Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_0 = 40^\circ C$  steigt der mittlere Wärme-



**Abbildung 6.20:** Verlauf der mittleren Stoffübergangskoeffizienten für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für verschiedene Salzlösungseintrittstemperaturen

durchgangskoeffizient von  $\bar{k} \approx 0,9 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  bei  $\dot{\Gamma} = 0,005 \text{ kg}/(\text{ms})$  auf über  $\bar{k} \approx 1,25 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  bei  $\dot{\Gamma} \approx 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$  an. Der größte Unterschied der für dieses Beispiel ermittelten mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten ist für die hohen Berieselungsdichten ( $\dot{\Gamma} \approx 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$ ) mit  $\bar{k} \approx 0,15 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  bei  $T_0 = 27^\circ\text{C}$  und  $\bar{k} \approx 1,25 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  bei  $T_0 = 40^\circ\text{C}$  abzulesen.

Yoon et al. (2008) trugen zu Vergleichszwecken ihrer eigenen Messungen einige



**Abbildung 6.21:** Verlauf der mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten für wässrige Lithiumbromidlösung als Funktion der Berieselungsdichte für verschiedene Salzlösungseintrittstemperaturen

Messdaten anderer Autoren mit nicht-additiver wässriger Lithiumbromidlösung zusammen. Diese Messdaten sind in der Tabelle 6.1 aufgelistet.

Die in den Experimenten eingestellten Berieselungsdichten liegen zwischen  $\dot{\Gamma} = 0,007$  und  $0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$ . Eine direkte Zuordnung der in Tab. 6.1 angegebenen mittleren Stoffübergangs- und Wärmedurchgangskoeffizienten zu den angegebenen Berieselungsdichten ist nicht möglich, da je nach Salzlösungseintrittsbedingungen der höhere Wert des Stoffübergangs- bzw. Wärmedurchgangskoeffizienten wie in den vorangegangenen Abschnitten diskutiert nicht unbedingt zu der höheren Berieselungsdichte gehört.

Der Bereich der experimentell bestimmten mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten liegt zwischen  $\bar{k} = 0,23$  und  $1,26 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$ . Dieser große Bereich des mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten ist bei Betrachtung von Abbildung 6.21 nachvollziehbar und hängt unter anderem von der Berieselungsdichte, der Salzlösungseintrittstemperatur sowie der entsprechenden Gleichgewichtstemperatur der Salzlösung am Eintritt ab. Durch die Vorgabe des vergleichsweise hohen partiellen Wärmedurchgangskoeffizienten vom Kühlwasser zur Wand und durch die Wand bis zur Filmströmung von  $U' = 5000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , wird der mit Hilfe der analytischen Lösung berechnete, mittlere Wärmedurchgangskoeffizient  $\bar{k}$  maßgeblich durch die Filmseite beeinflusst. So beträgt der mittlere Wärmedurchgangskoeffizient für den Eintrittssalzmassenanteil von  $x_0 = 0,55$  bei  $\dot{\Gamma} \approx 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$   $\bar{k} \approx 0,7 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  im Vergleich zu  $\bar{k} \approx 0,4 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  für den Eintrittssalzmassenanteil von  $x_0 = 0,6$  nur einen Bruchteil von  $U' = 5 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$ .

Der große Wertebereich der experimentell bestimmten, mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten ist daher nicht überraschend, denn diese Bandbreite unterschiedlicher Werte ergibt sich auch mit Hilfe der analytischen Lösung für den absorbierenden laminaren Fallfilm für die unterschiedlichen Betriebsbedingungen. Die in Tabelle 6.1 angegebenen Stoffübergangskoeffizienten reichen von

**Tabelle 6.1:** Von Yoon et al. (2008) angegebene Bereiche der experimentell ermittelten mittleren Stoffüber- und Wärmedurchgangskoeffizienten ohne Additive

Autoren	$\dot{\Gamma}$ in $\text{kg}/(\text{ms})$	$\bar{k}$ in $\text{kW}/(\text{m}^2\text{K})$	$\bar{\beta}$ in $\text{m}/\text{h}$
Yoon et al. (2008)	0,0142 – 0,0303	0,571 – 0,803	0,079 – 0,116
Hoffmann et al.	0,007 – 0,045	0,23 – 0,63	–
Kyung et al.	0,014 – 0,05	0,65 – 0,95	–
Furukawa et al.	0,013 – 0,042	0,7 – 0,9	0,06 – 0,18
Nagaoka et al.	0,008 – 0,023	0,43 – 1,25	0,05 – 0,14
Kawamatra et al.	0,008 – 0,025	0,522 – 1,258	0,08 – 0,14
Yamaguchi et al.	0,015 – 0,042	0,52 – 0,65	0,12 – 0,23

$\bar{\beta} = 0,05 \text{ m}/\text{h}$  bis zu  $\bar{\beta} = 0,23 \text{ m}/\text{h}$ . Auch dieser große Wertebereich der experimentell ermittelten mittleren Stoffübergangskoeffizienten ist nachvollziehbar mit Blick auf Abbildung 6.20. Die mit Hilfe der theoretischen Lösung bestimm-

ten mittleren Stoffübergangskoeffizienten variieren für das betrachtete Beispiel von  $\bar{\beta} = 0,08 \text{ m/h}$  bis zu  $\bar{\beta} = 0,018 \text{ m/h}$ .

Die hier vorgestellte analytische Lösung für den absorbierenden laminaren Fallfilm an einer diabaten Wand liefert also auch für die mittleren Stoffübergangskoeffizienten plausible und mit den experimentellen Ergebnissen sehr gut übereinstimmende Ergebnisse.

Im folgenden, letzten Abschnitt der Arbeit wird die analytische Lösung dazu verwendet, die Wärme- und Stoffströme an einem Rohrbündel zu berechnen und diese mit den experimentellen Daten von Beutler (1997) zu vergleichen.

## 6.4 Messdaten von Beutler

Die Dissertation von Beutler (1997) ist für den Vergleich von besonderem Wert, da Beutler zumindest für einige Messpunkte alle notwendigen Messdaten für eine Berechnung mit Hilfe der in dieser Arbeit eingeführten analytischen Lösung angibt. Darüber hinaus ist in seiner Dissertation die Versuchsdurchführung gut dokumentiert. Aus diesem Grund werden für einen Vergleich einer Berechnung des Rohrbündels mit Hilfe der in dieser Arbeit eingeführten analytischen Lösung der diabaten Wand die von Beutler (1997) veröffentlichten Messergebnisse herangezogen.

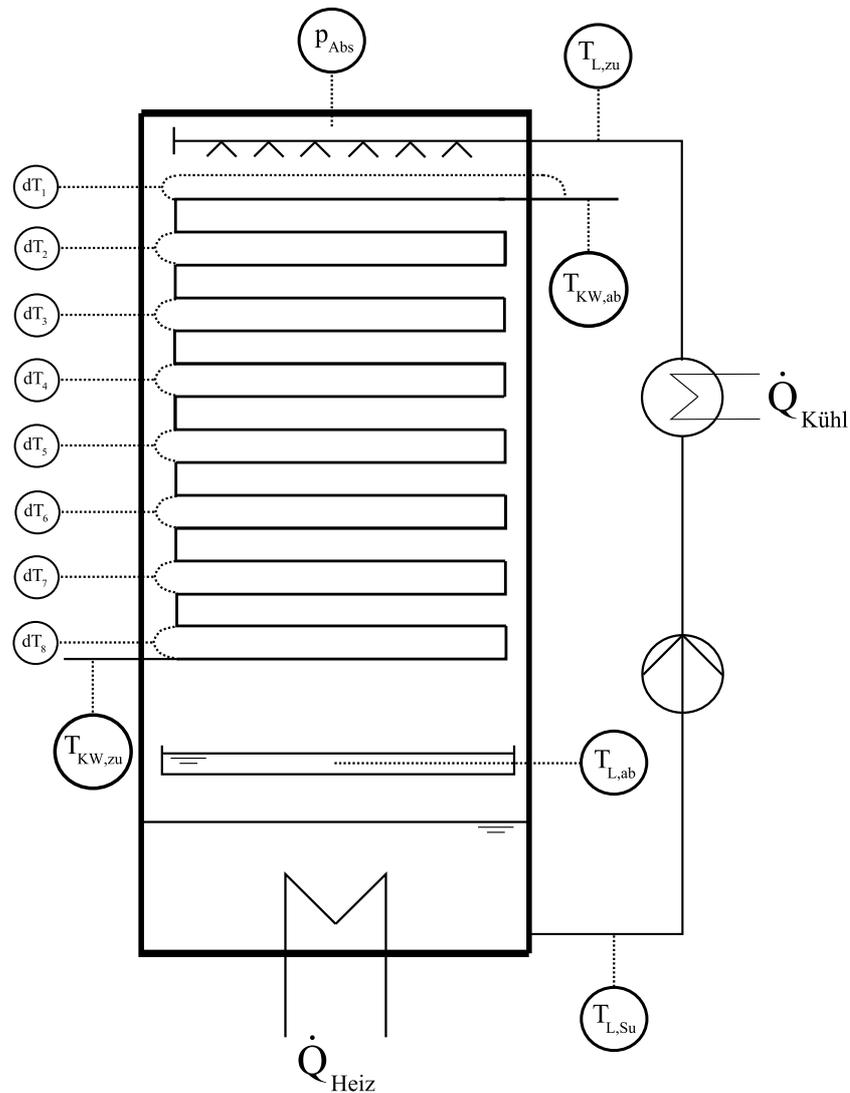
### 6.4.1 Aufbau der Messapparatur von Beutler

Abbildung 6.22 zeigt schematisch den Versuchsaufbau des von Beutler (1997) durchgeführten Rieselfilmexperiments. Hauptbestandteil ist ein Rohrbündelwärmeübertrager aus insgesamt 24 horizontal übereinander angeordneten Kupferrohren, die von Kühlwasser durchströmt werden und sich in einem Vakuumbehälter befinden. In den Versuchen von Beutler wurden jedoch nicht alle 24 Rohre von Salzlösung überströmt. In seiner Dissertation schreibt er von 15 berieselten Rohren und begründet diese Beschränkung mit der sonst zu geringen Wärmeleistungsdichte des gesamten Rohrbündels.

Die wässrige Lithiumbromidlösung wird vom Sumpf des Behälters auf dem obersten Kupferrohr verteilt und tropft von Rohr zu Rohr zurück in den Sumpf des Behälters. Im Sumpf befindet sich ein elektrischer Heizer. Dieser Heizer hat zwei Funktionen. Einerseits dient er zur Einstellung einer konstan-

ten Salzlösungstemperatur im Sumpf  $T_{L,Su}$  und andererseits zur Einstellung eines möglichst konstanten Drucks im Behälter  $p_{Abs}$ . Der Druck im Behälter bleibt konstant, wenn genau die Wassermenge, welche auf den Rohren absorbiert wurde, aus der Salzlösung im Sumpf verdampft wird.

Bevor die Salzlösung auf den Rohren verteilt wird, wird sie über einen Wärme-



**Abbildung 6.22:** Schematischer Versuchsaufbau des Rieselfilmversuchs von Beutler (1997)

übertrager auf die vorgegebene Eintrittstemperatur gekühlt. Beide Eintrittstemperaturen, d.h. die Salzlösungs- und Kühlwassereintrittstemperatur  $T_{L,zu}$  und  $T_{KW,zu}$  sowie die Temperatur der Salzlösung im Sumpf  $T_{L,Su}$  sind Regelgrößen, d.h. sie werden vorgegeben und über entsprechende Stellgrößen mög-

lichst konstant gehalten. Weiterhin werden der Salzlösungsvolumenstrom sowie der Kühlwassermassenstrom geregelt. Die Austrittsgrößen, mit Ausnahme der Salzlösungstemperatur im Behältersumpf, stellen sich im stationären Betrieb ein. Von besonderem Interesse sind hierbei die Austrittstemperatur des Kühlwassers  $T_{KW,ab}$  sowie die Abtropftemperatur der Salzlösung vom untersten Kupferrohr  $T_{L,ab}$ . Darüber hinaus hat Beutler mit Hilfe von Thermoelementen zur Differenztemperaturmessung die Spreizung der Kühlwassertemperatur passweise gemessen. Die Lage der Thermoelemente ist in Abbildung 6.22 eingezeichnet.

### 6.4.2 Kenngrößen der Messung

Bei einer Salzlösungsfilmstärke von im Allgemeinen nur wenigen  $100\mu\text{m}$  ist die direkte Messung von lokalen Filmtemperaturen oder lokalen Massenanteilen im Film nur mit größerem messtechnischen Aufwand durchführbar. Aus diesem Grund beschränkt sich Beutler in seiner Arbeit auf die Messung der mittleren Filmein- und -austrittstemperaturen am Absorber sowie der zugehörigen mittleren Ein- und Austrittstemperaturen des externen Kühlmediums, welches im Kreuzgegenstrom horizontal durch die Wärmeübertragerrohre aus Kupfer strömt.

Ein direkter Vergleich experimenteller und analytisch bestimmter Temperatur- und Massenanteilsprofile im Rieselfilm ist nicht möglich. Der Vergleich beschränkt sich daher auf die von Beutler angegebenen Messdaten sowie auf aus diesen Messdaten abgeleitete Größen.

#### Daten des Experiments von Beutler (1997)

In Tabelle 6.2 sind die wesentlichen Systemvorgaben des Experiments von Beutler zusammengefasst. Beutler führte die Versuche mit wässriger Lithiumbromidlösung durch. Für die in Tabelle 6.2 gegebenen Systemrandbedingungen ergeben sich die in Tabelle 6.3 aufgelisteten Stoffdaten der wässrigen Lithiumbromidlösung. Alle Stoffdaten der wässrigen Lithiumbromidlösung außer dem Diffusionskoeffizient basieren auf den Daten von Löwer (1960). Die experimentell ermittelten Stoffdaten von Löwer (1960) wurden von A. Wohlfeil mit Hilfe einer Regressionsanalyse korreliert und implementiert. Diese bisher

**Tabelle 6.2:** Systemvorgaben der von Beutler (1997) durchgeführten Experimente an einer horizontalen untereinander angeordneten Rohrreihe

Größe	Wert	Einheit
Rohraußendurchmesser	15,9	mm
Rohrwandstärke	1	mm
Rohrlänge	400	mm
Rohranzahl	15 berieselt (24)	-
Rohrabstand	6	mm
LiBr Massenanteil	0,6	$\text{kg}_{LiBr}/\text{kg}_{Lsg}$
Kühlwasservolumenstrom	9,3	l/min
Kühlwassereintrittstemperatur	27	°C
Sumpftemperatur Absorber	50	°C
Salzlösungseintrittstemperatur	38,5	°C

von Wohlfeil nicht veröffentlichten analytischen Stofffunktionen sind im Anhang A.4 aufgeführt. Die von Löwer (1960) experimentell ermittelten Dampfdruckdaten der wässrigen Lithiumbromidlösung werden, wie im Anhang A.6 gezeigt, verwendet, um eine möglichst einfache analytische Funktion für das Phasengleichgewicht zu erhalten. Aus diesem analytischen Zusammenhang für den Dampfdruck, insbesondere der Steigung der Siedelinien im van't Hoff Diagramm, wird der konzentrationsabhängige Wert der Absorptionenthalpie (vgl. Abb. A.5) ermittelt. Der Diffusionskoeffizient wurde mittels der in der Dissertation von Kim (1992) angegebenen Berechnungsgleichung bestimmt. In der Originalversion der Dissertation von Kim (1992) befindet sich ein Schreibfehler in der Bestimmungsgleichung des Diffusionskoeffizienten bei 25°C, welcher in der am Fachgebiet verfügbaren gedruckten Version handschriftlich verändert wurde. Diese Veränderung ist im Anhang A.5 dokumentiert.

### Vorgehen bei der Simulation des Rohrbündels mit Hilfe der analytischen Lösung

Das jeweilige Einzelrohr wird modelliert als ein aus zwei vertikalen Platten bestehendes Gebilde. Diese Platten bestehen aus dem Rohrmaterial Kupfer und

**Tabelle 6.3:** Stoffdaten der wässrigen Lithiumbromidlösung für die in 6.2 gegebenen Eintrittsbedingungen der Salzlösung basierend auf den Daten von Löwer (1960) und Kim (1992)

Größe	Wert	Einheit
dynamische Salzlösungsviskosität $\eta_{Lsg}$	5,5	mPas
Salzlösungsdichte $\rho_{Lsg}$	1704	kg/m <sup>3</sup>
kinematische Salzlösungsviskosität $\nu_{Lsg}$	$3,2 \cdot 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
spezifische Wärmekapazität $c_{p,Lsg}$	1,9	kJ/(kgK)
Absorptionsenthalpie $\Delta h_{abs}$	2770	kJ/kg
Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{Lsg}$	0,37	W/(mK)
Temperaturleitfähigkeit $a_{Lsg}$	$1,15 \cdot 10^{-7}$	m <sup>2</sup> /s
Diffusionskoeffizient $D_{Lsg}$	$1,21 \cdot 10^{-9}$	m <sup>2</sup> /s

ihre Dicke entspricht der Rohrwandstärke. Auf einer Seite werden die Platten vom Kühlwassermassenstrom gekühlt und auf der anderen Seite von wässriger Lithiumbromidlösung berieselt. Die vertikale und die horizontale Länge der zwei Platten entsprechen dabei dem halben äußeren Rohrumfang und der Länge der Rohre. Die Wärmeübertragungsfläche der beiden Platten ergibt daher die äußere Mantelfläche des Rohres.

Für das Einzelrohr strömt das Kühlwasser horizontal im Kreuzstrom zur von oben nach unten fließenden Salzlösung. Bei der Durchströmung jedes Rohres erwärmt sich das Kühlwasser abhängig von der Größe des von der Salzlösung an die Wand übertragenen Wärmestroms. Die in dieser Arbeit erhaltene analytische Lösung geht von einer konstanten externen Kühlwassertemperatur aus. Diese externe Kühlwassertemperatur kommt in der analytischen Lösung lediglich als Vorfaktor vor den unendlichen Reihen vor. Aus diesem Grund ist mit Hilfe einer differentiellen Energiebilanz in Rohrlängenrichtung  $dz$  am Einzelrohr die Veränderung der Kühlwassertemperatur über der Rohrlänge analytisch bestimmbar:

$$\dot{M}_{KW} \cdot c_{p,KW} \cdot dT_{KW}(z) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}(y = \delta, T_{KW}(z)) \cdot \pi \cdot d \cdot dz. \quad (6.11)$$

Der mittlere Wandtemperaturgradient ist der über die Filmströmungslänge der Salzlösung  $x = 0$  bis  $x = \pi \cdot d/2$  gemittelte Wert. Durch Trennung der Variablen

und bestimmte Integration über der Rohrlänge  $z$  lässt sich eine Exponentialfunktion für die Erwärmung des Kühlwassers für die gegebenen Eintrittsbedingungen ermitteln. Die Kühlwasseraustrittstemperaturen als Funktion der gegebenen Eintrittsbedingungen sind dementsprechend berechenbar.

Mit Hilfe dieser Funktion für die lokale Erwärmung des Kühlwassers über der Rohrlängenkoordinate  $z$  wird eine für das Rohr repräsentative Kühlwassertemperatur durch Mittelwertbildung über der Rohrlänge  $z = L$  berechnet. Diese über die Rohrlänge gemittelte Kühlwassertemperatur wird dazu verwendet, um für jedes Rohr die wiederum über der Rohrlänge gemittelten absorbierten Massenströme sowie Wärmeströme zu berechnen, um mit diesen die mittlere Temperatur sowie Zusammensetzung der vom jeweiligen Rohr abtropfenden Salzlösung zu ermitteln.

Das Kühlwasser strömt im Kreuzgegenstrom zur Salzlösung von unten nach oben durch das gesamte Rohrbündel. Auf der untersten Rohrreihe sind demnach die Eintrittsbedingungen des Kühlwassers bekannt. Da jedoch die Salzlösung auf der obersten Rohrreihe aufgegeben wird, ist der Zustand der Salzlösung auf der untersten Rohrreihe von den darüber liegenden Rohren abhängig und zu Beginn der Simulation unbekannt.

Das gesamte Rohrbündel wird mit den Eintrittswerten der Salzlösung und des Kühlwassers initialisiert und die Simulation gestartet. Die Berechnung beginnt mit dem obersten Rohr. Die auf der obersten Rohrreihe verrieselte Salzlösung wird dementsprechend im ersten Iterationsschritt von Kühlwasser mit der Eintrittstemperatur in das Rohrbündel gekühlt, da diese für alle Rohre als Startwert gesetzt wurde. Nach der Berechnung des obersten Rohres werden die berechnete Zusammensetzung und Temperatur der Salzlösung als Eintrittswerte für die darunter liegende Rohrreihe gesetzt und die Kühlwasseraustrittstemperatur des obersten Rohres wird als Kühlwasseraustrittstemperatur des Rohrbündels gesetzt. Diese Kühlwasseraustrittstemperatur des obersten Rohres im ersten Iterationsschritt wird sich in den weiteren Iterationsschritten verändern, weil diese ausgehend von einem zu niedrigen Startwert der Kühlwassereintrittstemperatur in dieses Rohr berechnet wurde. In den folgenden Iterationsschritten erhöht sich die Kühlwassereintrittstemperatur in das oberste Rohr als Folge der zunehmenden Kühlwassertemperatur der darunter liegenden Rohre. Also muss das erste Rohr erneut berechnet werden usw.. Die Iteration des Rohrbün-

dels wird so lange durchgeführt, bis diese Kühlwasseraustrittstemperatur aus dem obersten Rohr sowie die Austrittszusammensetzung der Salzlösung vom untersten Rohr sich bis auf ein jeweils vorgegebenes Residuum nicht mehr verändert.

Nach dieser Iteration liegen die Temperaturen des Kühlwassers und der Salzlösung sowie deren Zusammensetzung rohrweise vor und können mit den von Beutler gemessenen Daten verglichen werden.

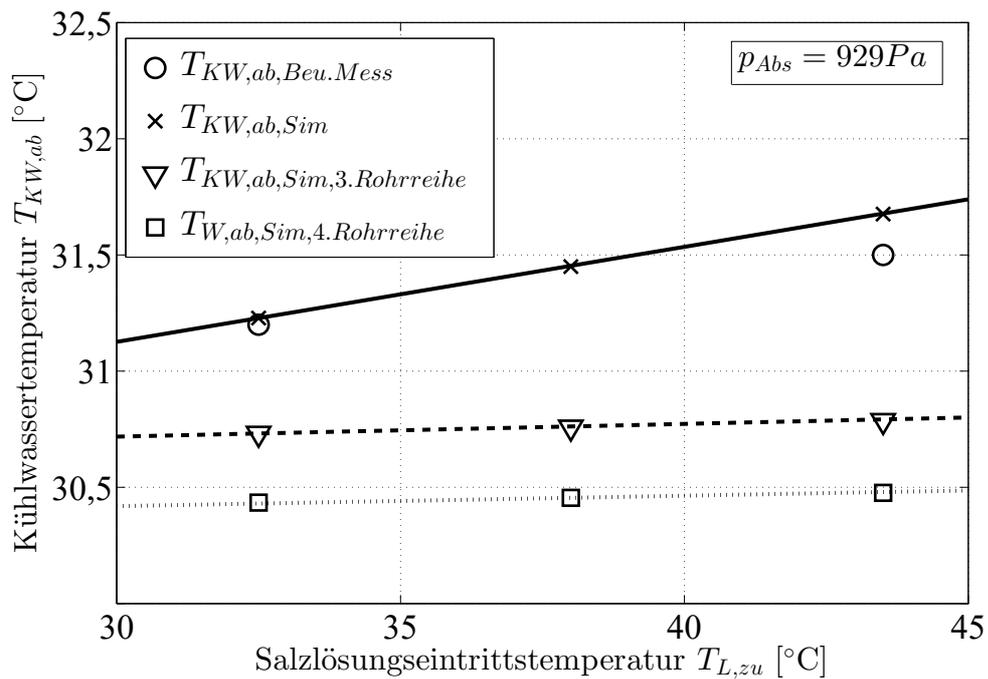
Für den Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Messergebnissen von Beutler ist jedoch die Angabe des Druckes in dem Apparat zwingend erforderlich. In der Dissertation von Beutler wird jedoch der im Absorber gemessene Druck nur für wenige Messpunkte angegeben. Aus diesem Grund werden nur die von Beutler (1997) durchgeführten Experimente simuliert, für welche eindeutige Angaben zum Druck und den weiteren notwendigen Messdaten verfügbar sind. Manche dieser verwendbaren Messdaten wurden aus Abbildungen abgelesen, da deren Zahlenwerte in der Dissertation von Beutler weder im Text geschrieben noch tabelliert waren.

### Variation der Salzlösungseintrittstemperatur

Bei dem Experiment variierender Salzlösungseintrittstemperaturen gibt Beutler eine zugehörige Gleichgewichtstemperatur der 60%igen LiBr-Lösung am Eintritt des Absorbers von  $45,3^{\circ}\text{C}$  an. Anhand dieser Angabe wird der Druck im Absorber für die Simulationen mit  $p_{Abs} = 929\text{Pa}$  vorgegeben. Für diese Messreihe gibt Beutler im Text allerdings lediglich die gemessenen Kühlwasseraustrittstemperaturen für die niedrigste und höchste Salzlösungseintrittstemperatur mit  $31,2^{\circ}\text{C}$  und  $31,5^{\circ}\text{C}$  an. Diese beiden Messwerte sind in die Abbildung 6.23 als Kreise eingetragen. Weiterhin sind für die in Tabelle 6.2 angegebenen Bedingungen die Ergebnisse der Simulationsrechnungen in Abbildung 6.23 eingetragen. Die Kreuze markieren dabei die simulierte Kühlwasseraustrittstemperatur aus dem Absorber und die Drei- und Vierecke die simulierten Kühlwasseraustrittstemperaturen aus der 3. und 4. Rohrreihe von oben aus gezählt. Die Verbindungslinien sind nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate an die simulierten Punkte angepasste Geradengleichungen. Bemerkenswert ist die sehr gute Übereinstimmung der simulierten mit der experimentell von Beutler bestimmten Kühlwasseraustrittstemperatur, speziell

bei einer Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_{L,zu} = 32,5^\circ\text{C}$ . Für die höhere Salzlösungseintrittstemperatur von  $T_{L,zu} = 43,5^\circ\text{C}$  ergibt sich in der Simulation eine um ca. 0,2 K höhere Austrittstemperatur im Vergleich zur Messung von Beutler.

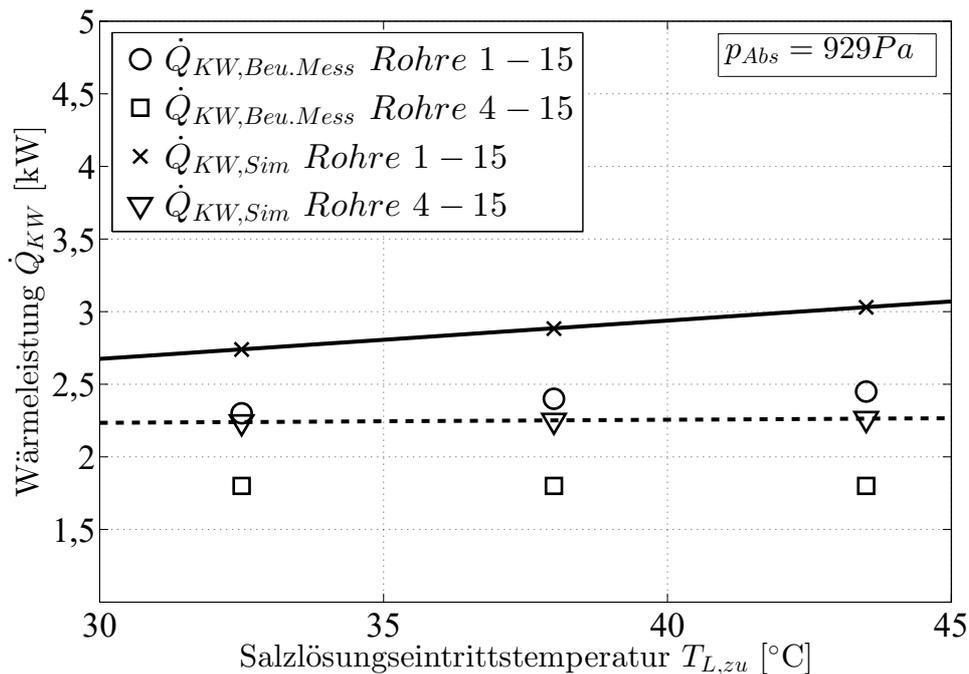
Die simulierten Kühlwasseraustrittstemperaturen aus dem vom obersten Rohr aus gezählten 3. und 4. Rohr zeigen nur eine sehr geringe Abhängigkeit von der Salzlösungseintrittstemperatur. Die Zunahme der Spreizung der Kühlwasser-



**Abbildung 6.23:** Kühlwassertemperaturen bei Variation der Salzlösungseintrittstemperatur

temperatur über dem gesamten Rohrbündel bei steigender Eintrittstemperatur der Salzlösung wird nach der Simulation auf den obersten beiden Rohrreihen durch das Kühlen der Salzlösung verursacht.

Beutler gibt in seiner Dissertation auch die von ihm aus den Messdaten berechneten thermischen Leistungen an. Diese sind zusammen mit den aus den Simulationsergebnissen ermittelten Leistungen in Abbildung 6.24 dargestellt. Die von Beutler aus den Messdaten berechnete an das Kühlwasser abgegebene thermische Leistung ist um ca. 0,5kW kleiner als die in dieser Arbeit simulierte Leistung, trotz der zuvor gezeigten sehr guten Übereinstimmung der Kühlwasseraustrittstemperaturen. Die von Beutler angegebenen thermischen Leistun-



**Abbildung 6.24:** Wärmeleistungen bei Variation der Salzlösungseintrittstemperatur

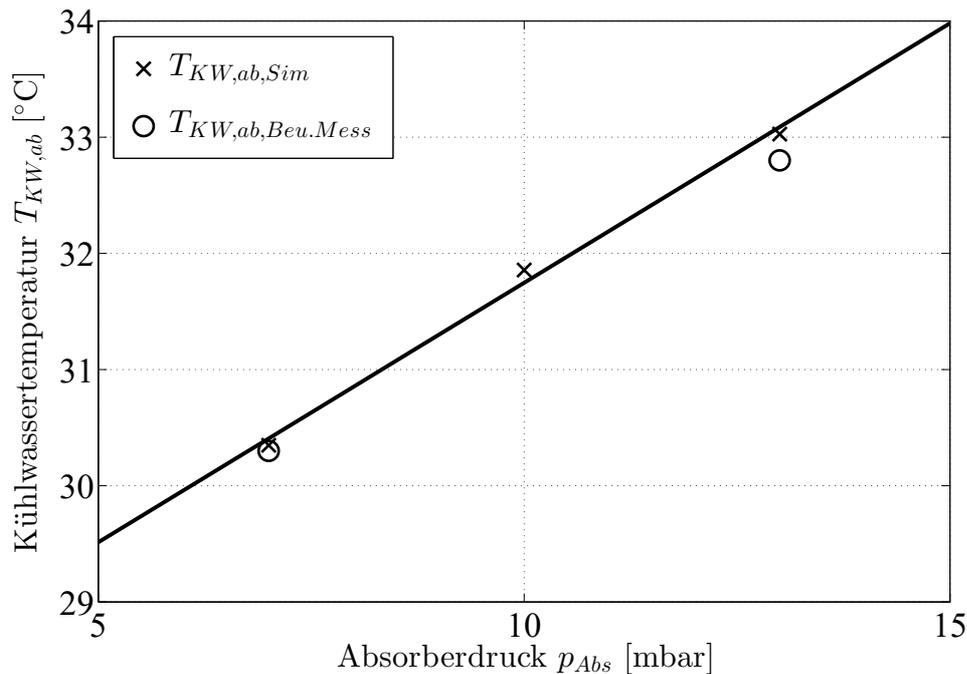
gen wurden von ihm um eine durch die kühlwasserseitigen Strömungsdruckverluste eingetragene Wärmeleistung verringert. Nach Angaben von Beutler beträgt diese Wärmeleistung rund  $0,25 \text{ kW}$  und erscheint recht hoch. Ohne diese Korrektur, bzw. sofern diese eingetragene Leistung lediglich einen Bruchteil dessen betragen würde, würden sich die Leistungen lediglich um  $0,25 \text{ kW}$  unterscheiden.

Allerdings sind das genaue Vorgehen bei der Leistungsbestimmung sowie die von Beutler verwendeten Stoffdaten zur Berechnung dieser Leistungen nicht eindeutig nachvollziehbar und aus diesem Grund werden nun weniger die absoluten Werte der Leistungen als die Entwicklung der Leistung mit zunehmender Salzlösungseintrittstemperatur zum Vergleich herangezogen. So zeigen z.B. die gemessenen ( $\circ$ ) und simulierten ( $\times$ ) Kühlwasseraustrittstemperaturen eine ähnlich steigende Tendenz. Durch die Simulation wird die These und in der Tendenz auch die Messdaten von Beutler (1997) bestätigt, dass die erhöhte Salzlösungseintrittstemperatur ab der 4. Rohrreihe den an das Kühlwasser übertragenen Wärmestrom nicht beeinflusst. Beutler gibt an, dass bereits auf der obersten Rohrreihe der Großteil der sensiblen Wärme aus dem Salzlösungs-

film abgeführt wird.

### Variation der Sumpftemperatur (des Absorberdruckes)

Für dieses Experiment gibt Beutler für die niedrigste und höchste Sumpftemperatur explizit den gemessenen Druck im Absorber von 7 und 13mbar an. In Abbildung 6.25 sind die simulierten ( $\times$ ) und die von Beutler gemessene



**Abbildung 6.25:** Kühlwassertemperaturen bei Variation der Sumpftemperatur und somit des Absorberdrucks  $p_{Abs}$

nen ( $\circ$ ) Kühlwasseraustrittstemperaturen aus dem Rohrbündel bei verschiedenen Absorberdrücken aufgetragen. Die durchgezogene Linie stellt eine an die drei simulierten Kühlwasseraustrittstemperaturen ( $\times$ ) mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate angepasste Gerade dar. Insbesondere bei dem niedrigen Absorberdruck von  $p_{Abs} = 7\text{mbar}$  ergibt sich eine hervorragende Übereinstimmung zwischen der gemessenen und der simulierten Kühlwasseraustrittstemperatur. Bei einem höheren Absorberdruck von  $p_{Abs} = 13\text{mbar}$  ist die simulierte Kühlwasseraustrittstemperatur rund  $0,2\text{K}$  höher als die von Beutler gemessene.

Auch für das Rohrbündel, welches mit Hilfe der in dieser Arbeit eingeführten analytischen Lösung simuliert wird, zeigt sich also trotz der zahlreichen

vereinfachenden Modellannahmen eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten.

Die Effekte von z.B. unvollständiger Benetzung der Rohre mit der Salzlösung oder die durch Salzlösungstropfen verursachten Abweichungen von der glatten laminaren Filmströmung mit homogener Filmgeschwindigkeit spielen in dem betrachteten Bereich typischer Berieselungsdichten eine offenbar untergeordnete Rolle und der laminare Rieselfilm dominiert den gekoppelten Wärme- und Stofftransport in berieselten Horizontalrohrrieselfilmabsorbern mit wässriger Lithiumbromidlösung.

# Kapitel 7

## Fazit

In der vorliegenden Arbeit wird auf das Modell von Nakoryakov und Grigor'eva (2010) in Form der entdimensionierten, differentiellen Energie- und Absorbatmassenbilanz die LAPLACE-Transformation angewendet. Im LAPLACE'schen Bildbereich gehen die ursprünglich partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche über. Durch eine Entdimensionierung mit den jeweiligen Eintrittswerten der Salzlösungstemperatur und -zusammensetzung verschwinden die Anfangsbedingungen und die auf diese Weise erhaltenen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich mit dem allgemeinen Ansatz von EULER lösen.

Zur Ermittlung der unbekanntenen Konstanten der allgemeinen Lösung werden zwei thermische und zwei stoffliche Randbedingungen benötigt. Die zwei Randbedingungen an der Filmoberfläche und die Randbedingung der stoffundurchlässigen Wand werden von Nakoryakov und Grigor'eva (2010) übernommen. Lediglich die thermische Wandrandbedingung wird in dieser Arbeit verändert. Nakoryakov und Grigor'eva (2010) lösen das Problem für die thermischen Grenzfälle der adiabaten und isothermen Wand, da das von ihnen angewendete Lösungsverfahren lediglich diese Fälle zulässt. Die Veränderung des Lösungsverfahrens in dieser Arbeit ermöglicht die Anwendung einer adiabaten Wandrandbedingung mit endlichen thermischen Widerständen. Diese allgemeinere Form der thermischen Wandrandbedingung beinhaltet die thermischen Grenzfälle für einen verschwindenden (isotherm) bzw. einen unendlich großen (adiabat) thermischen Wandwiderstand. In einem für berieselte Horizontalrohrbündelabsorber relevanten Bereich der Berieselungsdichten führt der

thermische Grenzfall der isothermen Wand, d.h. eines verschwindenden thermischen Wandwiderstands, zu einer deutlichen Überschätzung der Kühlung und somit der absorbierten Massenstromdichte im Vergleich zur diabaten Wand. Durch diese Überschätzung der Prozesse des Wärme- und Stoffübergangs gelangt der absorbierende Rieselfilm für die isotherme Wandrandbedingung im Vergleich zur Wand mit einem nicht verschwindenden thermischen Widerstand bereits bei geringeren Werten der dimensionslosen Strömungskordinate in seinen Gleichgewichtszustand.

Die so erhaltene analytische Lösung wird für dimensionslose Parameter ausgewertet, welche sich für wässrige Lithiumbromidlösungen ergeben, einem typischen Absorbens in Absorptionskälteanlagen zur Klimatisierung. Die im Absorber an der Filmoberfläche absorbierte Massenstromdichte ist dabei von besonderer Bedeutung, da diese die Kälteleistung im Verdampfer skaliert. Anhand der sich entwickelnden dimensionslosen Temperatur- und Massenanteilsprofile wird die Beeinflussung dieses an der Filmoberfläche absorbierten Massenstroms in Abhängigkeit von der Intensität der Kühlung durch die Wand analysiert.

Um einen Vergleich mit experimentellen Daten für wässrige Lithiumbromidlösung zu ermöglichen, wird die in dieser Arbeit präsentierte analytische Lösung dazu verwendet, die Massen- und Wärmestromdichten am Einzelrohr in Abhängigkeit von den Versuchsparametern zu berechnen. Hierfür werden die dimensionslosen Kennzahlen mit Hilfe der Stoffdaten wässriger Lithiumbromidlösung sowie der Versuchsbedingungen, wie z.B. der Berieselungsdichte für den typischen Betriebsbereich bestimmt.

Das Einzelrohr wird als zwei von Salzlösung überströmte Platten modelliert, welche auf der anderen Plattenseite von Kühlwasser gekühlt werden. Die von der Salzlösung überströmte Plattenlänge entspricht dabei dem halben Rohrumfang. Mit steigender Berieselungsdichte nimmt die Dicke und Geschwindigkeit des Salzlösungsfallfilms an der Platte zu. Da die Absorption des Dampfes an der freien Filmoberfläche, die Kühlung jedoch an der Wand stattfindet, wirkt die auf diese Weise steigende Filmdicke zunehmend wie eine wärmedämmende Schicht. Aufgrund der endlichen Geschwindigkeit des Wärmetransportes durch den Film und der Zunahme der Filmgeschwindigkeit bei Steigerung der Berieselungsdichte gibt es bei der Betrachtung des Einzelrohres einen für die an der Wand übertragene Wärmestromdichte von der Absorption an der freien Film-

oberfläche unabhängigen Bereich. Dieser Effekt der vollständigen Unabhängigkeit der Entwicklung der Filmoberfläche von der Wandrandbedingung tritt bei typischen Rohraußendurchmessern von wenigen Zentimetern jedoch erst bei unrealistisch hohen Werten der Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} > 0,5 \text{ kg}/(\text{ms})$  auf. Allerdings ergeben sich auch in realistischen Bereichen der Berieselungsdichte deutlich unterschiedliche an die Wand übertragene mittlere Wärmestromdichten. In dem Bereich der Berieselungsdichte, in dem die thermische Grenzschicht der Wand die der Filmoberfläche beeinflusst, gilt, je kleiner die Berieselungsdichte, um so größer ist der Einfluss der Wand auf die Absorption an der Filmoberfläche und desto geringer ist der Einfluss der Eintrittstemperatur der Salzlösung.

Diese Abhängigkeit des Transportes der an der Filmoberfläche durch Absorption freigesetzten Wärmestromdichte zur Wand von der Berieselungsdichte erschwert die Beschreibung des gekoppelten Phänomens mit Hilfe des klassischen integralen Wärmedurchgangsansatzes. Nichtsdestotrotz werden mit Hilfe der präsentierten analytischen Lösung die mittleren Wärmedurch- und Stoffübergangskoeffizienten am Einzelrohr als Funktion der Berieselungsdichte ermittelt. Insbesondere der mittlere Wärmedurchgangskoeffizient zeigt aus den oben genannten Gründen für größere Berieselungsdichten eine starke Abhängigkeit von der Differenz zwischen der Kühlwassertemperatur und der Salzlösungseintrittstemperatur. Für eine vergleichsweise hohe Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} \approx 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$  beträgt der mittlere Wärmedurchgangskoeffizient  $\bar{k} \approx 0,18 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  bei einer Salzlösungseintrittstemperatur, die der Kühlwassertemperatur von  $T_0 = T_{ext} = 27^\circ\text{C}$  entspricht. Im Vergleich dazu beträgt der mittlere Wärmedurchgangskoeffizient  $\bar{k} \approx 1,25 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  bei einer hohen Temperaturdifferenz von  $13 \text{ K}$  zwischen der Salzlösung und dem Kühlwasser. Bei einer um den Faktor zehn geringeren Berieselungsdichte von  $\dot{\Gamma} \approx 0,005 \text{ kg}/(\text{ms})$  unterscheiden sich die mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten mit  $\bar{k} \approx 0,6 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  bei  $T_0 = 27^\circ\text{C}$  und  $\bar{k} \approx 0,9 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  bei  $T_0 = 40^\circ\text{C}$  weniger stark. Der Effekt der Kühlung der Salzlösung wird bei kleinen Berieselungsdichten zunehmend von der Absorption an der Filmoberfläche überlagert und somit sinkt die Abhängigkeit des mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten von der Salzlösungseintrittstemperatur. Diese Ergebnisse passen zu einer von Yoon et al. (2008) zusammengetragenen Übersicht zu experimentell be-

stimmten mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten für unadditivierte wässrige Lithiumbromidlösung welche den Bereich  $\bar{k} \approx 0,23 - 1,26 \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$  für den gleichen Berieselungsdichtenbereich von  $\dot{\Gamma} \approx 0,008 - 0,05 \text{ kg}/(\text{ms})$  umfasst. Ähnlich gute Übereinstimmungen lassen sich beim Vergleich der mittleren Stoffübergangskoeffizienten zwischen Experiment und der hier präsentierten analytischen Lösung für das Einzelrohr als Funktion der Berieselungsdichte feststellen. Die von Yoon et al. (2008) zusammengetragenen Werte des mittleren Stoffübergangskoeffizienten für den oben genannten Berieselungsdichtenbereich betragen  $\bar{\beta} = 0,06 - 0,23 \text{ m}/h$ . Mit Hilfe der analytischen Lösung ergeben sich bei der Variation der Berieselungsdichte wie im Experiment und typischen Absorberbedingungen mittlere Stoffübergangskoeffizienten von  $\bar{\beta} = 0,08 - 0,18 \text{ m}/h$ .

In einem weiteren Vergleich mit den Messungen von Beutler (1997) an einem mit wässriger Lithiumbromidlösung berieselten Rohrbündel ergeben sich ebenfalls sehr gute Übereinstimmungen zwischen der experimentell bestimmten und der mit Hilfe der hier präsentierten analytischen Lösung berechneten Kühlwasseraustrittstemperatur mit maximalen Abweichungen von  $0,2 \text{ K}$ . Hierzu wurde das von Beutler vermessene Kupferrohrbündel unter Verwendung der in dieser Arbeit präsentierten analytischen Lösung für das Einzelrohr aufgrund der Kreuzgegenstromführung des Kühlwassers iterativ berechnet. Die Leistungen weichen allerdings systematisch ab. Die Ursache hierfür ist unklar.

In dem typischen Betriebsbereich von mit wässriger Lithiumbromid berieselten und von Kühlwasser durchströmten Horizontalrohrabsorbern erlaubt also die in dieser Arbeit präsentierte analytische Lösung für eine diabate Wandrandbedingung nicht nur die qualitative Aus- und Bewertung sämtlicher den Prozess beeinflussenden Betriebsparameter, sondern auch die quantitative Bestimmung der Stoff- und Wärmeströme.

Obwohl offensichtlich die Strömung nicht eben ist und immer wieder durch Wellen und Tropfen gestört wird, dominiert offenbar das dem physikalischen Modell in dieser Arbeit zu Grunde liegende laminare Strömungsregime den gekoppelten Wärme- und Stofftransport im typischen Betriebsbereich.

Die Ergebnisse dieser Arbeit für den einfachsten Fall in Bezug auf die Filmströmung können als Ausgangspunkt für einen Vergleich mit komplexeren Film-

modellen dienen.

Sämtliche die Filmströmungsverhältnisse beeinflussende Effekte wirken auch auf den Wärme- und Stofftransport im Film und beeinflussen somit auch die Filmoberflächenwerte. Allerdings sollten die jeweiligen Auswirkungen quantifiziert und auf deren Relevanz für den gekoppelten Wärme- und Stofftransport hin untersucht werden. Zu den weiteren im einzelnen zu quantifizierenden Auswirkungen von Filmströmungseffekten auf den an der Filmoberfläche absorbierten Massenstrom im Vergleich zu dem stark vereinfachten Filmmodell zählen z.B. die einseitige Diffusion an der Filmoberfläche, ein sich ausbildendes Filmströmungsprofil sowie der Einfluss von Filmturbulenzen, z.B. durch das Auf- und Abtropfen der Salzlösung oder durch die Zugabe von Additiven. Die in dieser Arbeit präsentierte Lösung bildet den Ausgangspunkt für eine sorgfältige und systematische Untersuchung des Einflusses einzelner Modellannahmen, da dieses Modell durch die Beschränkung auf den molekularen Wärme- und Stofftransport in transversaler Richtung, abgesehen von der Überschätzung der Filmgeschwindigkeit in Wandnähe, eine theoretisch untere Grenze für die berechneten Massen- und Wärmestromdichten darstellt.



# Anhang A

## Physikalischer Anhang

### A.1 Fick'sche Diffusion

Das erste Fick'sche Gesetz beschreibt die Nettoteilchenstromdichte, die sich aufgrund der Molekularbewegung rein statistisch von der höheren zur niedrigeren Volumenteilchenkonzentration  $c_A^*$  bei konstanter Gesamtkonzentration  $c^*$  einstellt:

$$\dot{n}_A = -D_{AB} \cdot \frac{\partial c_A^*}{\partial y}. \quad (\text{A.1})$$

Die Volumenteilchenkonzentration lässt sich folgendermaßen mit den Massenanteilen ausdrücken:

$$c_A^* = \frac{n_A}{V_{Lsg}} = \frac{m_A}{\underbrace{m_{Lsg}}_{=c}} \cdot \frac{\rho_{Lsg}}{\tilde{M}_A}. \quad (\text{A.2})$$

Unter der vereinfachenden Annahme einer konstanten Dichte der Salzlösung ergibt sich die diffusiv transportierte Massenstromdichte zu:

$$\dot{n}_A \cdot \tilde{M}_A = \dot{m}_A = -D_{AB} \cdot \rho_{Lsg} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \quad \text{mit} \quad c = \frac{m_A}{m_{Lsg}}. \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Asymptotische Endwerte für die adiabate Wand

Die stationären Endwerte für die thermische Randbedingung der adiabaten Wand lassen sich anhand einer integralen Energiebilanz zwischen dem Eintritts-

und dem Austrittszustand für sehr große Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi_\infty$  herleiten. Da die Wand wärmeundurchlässig ist, verbleibt die gesamte Absorptionswärme im Film:

$$M_{Lsg,0} \cdot c_{Lsg} \cdot (T_\infty - T_0) = M_{Lsg,0} \cdot (c_\infty - c_0) \cdot \Delta h_{abs}. \quad (\text{A.4})$$

Eine Veränderung der Salzlösungsmasse sowie der Stoffeigenschaften der Salzlösung während des Absorptionsvorganges wird in diesem Modell inhärent vernachlässigt. Die Einführung dimensionsloser Variablen ergibt folgenden Zusammenhang zwischen den stationären Endwerten der dimensionslosen Temperatur und des dimensionlosen Massenanteils für den zugehörigen Wert der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi_\infty$ :

$$\begin{aligned} c_{Lsg} \cdot (T_{eq,0} - T_0) \cdot \Theta_\infty &= (c_{eq,0} - c_0) \cdot \Delta h_{abs} \cdot \gamma_\infty, \\ \tilde{St} \cdot \Theta_\infty &= \gamma_\infty. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Da für  $\xi_\infty$  der komplette Film im thermodynamischen Gleichgewicht ist, erstreckt sich die Randbedingung des Phasengleichgewichts,  $\Theta_i + \gamma_i = 1$ , über den gesamten Film:

$$\tilde{St} \cdot \Theta_\infty = 1 - \Theta_\infty \rightarrow \Theta_\infty = \frac{1}{\tilde{St} + 1}, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_\infty = (1 - \gamma_\infty) \cdot \tilde{St} \rightarrow \gamma_\infty = \frac{\tilde{St}}{\tilde{St} + 1}. \quad (\text{A.7})$$

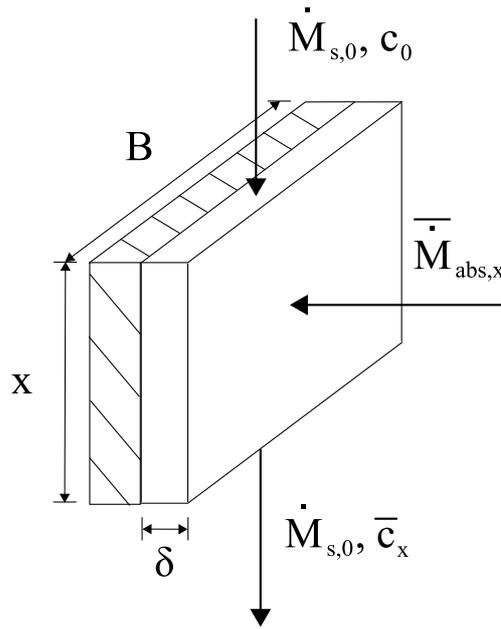
Die Gleichgewichtswerte für  $\xi \rightarrow \infty$  hängen für die adiabate Wandrandbedingung somit lediglich von der modifizierten Stefan-Zahl der Salzlösung ab.

### A.3 Integrale Absorbatbilanz

Um den Verlauf des lokalen Gradienten des Absorbatmassenanteils an der Filmoberfläche (5.4) als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate zu erläutern, wird eine integrale Absorbatmassenbilanz herangezogen.

Abbildung A.1 zeigt das angewendete Bilanzvolumenelement für diese Absorbatmassenbilanz. Der über die Strömungslänge gemittelte absorbierte Massenstrom an Absorbat,  $\dot{\bar{M}}_{abs,x}$ , bis zu einer entsprechenden Strömungslänge,  $x$ , sorgt für einen Anstieg des mittleren Absorbatmassenanteils,  $\bar{c}_x$ , an ebendieser Strömungslänge,  $x$ :

$$\dot{\bar{M}}_{abs,x} = \dot{M}_{Lsg,0} \cdot (\bar{c}_x - c_0). \quad (\text{A.8})$$



**Abbildung A.1:** Bilanzvolumenelement für die integrale Absorbatmassenbilanz

Eine Veränderung der Salzlösungsmasse durch Absorption wird bei dem verwendeten physikalischen Filmmodell inhärent vernachlässigt. Der über die Filmdickenkoordinate gemittelte Absorbatmassenanteil,  $\bar{c}_x$ , wird wie folgt bestimmt:

$$\bar{c}_x = \frac{1}{\delta_{Film}} \int_0^{\delta_{Film}} c(x, y) \cdot dy. \quad (\text{A.9})$$

Der über die Strömungskoordinate gemittelte Absorbatmassenstrom ergibt sich folgendermaßen:

$$\dot{\bar{M}}_{abs,x} = \dot{\bar{m}}_{abs,x} \cdot B \cdot x, \quad (\text{A.10})$$

mit der mittleren Absorbatmassenstromdichte:

$$\dot{\bar{m}}_{abs} = -\rho_{Lsg} \cdot D \cdot \frac{1}{x} \int_0^x \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_i dx = -\rho_{Lsg} \cdot D \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_i, \quad (\text{A.11})$$

und  $B$  als der angeströmten Plattenbreite. Durch Einsetzen des gemittelten Absorbatmassenstroms (A.10) in die integrale Absorbatmassenbilanz (A.8) wird der folgende Zusammenhang zwischen dem mittleren Absorbatmassenanteil  $\bar{c}_x$  und dem mittleren Gradienten des Absorbatmassenanteils erhalten:

$$-\rho_{Lsg} \cdot D \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_i \cdot B \cdot x = \rho_{Lsg} \cdot u \cdot \delta \cdot B \cdot (\bar{c}_x - c_0), \quad (\text{A.12})$$

mit

$$\dot{M}_{Lsg,0} = \rho_s \cdot u \cdot \delta \cdot B.$$

Durch Einführung dimensionsloser Variablen in Gleichung (A.12) ergibt sich der folgende dimensionslose Zusammenhang:

$$\bar{\gamma}_x = -\frac{\xi}{\text{Le}} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \Big|_0. \quad (\text{A.13})$$

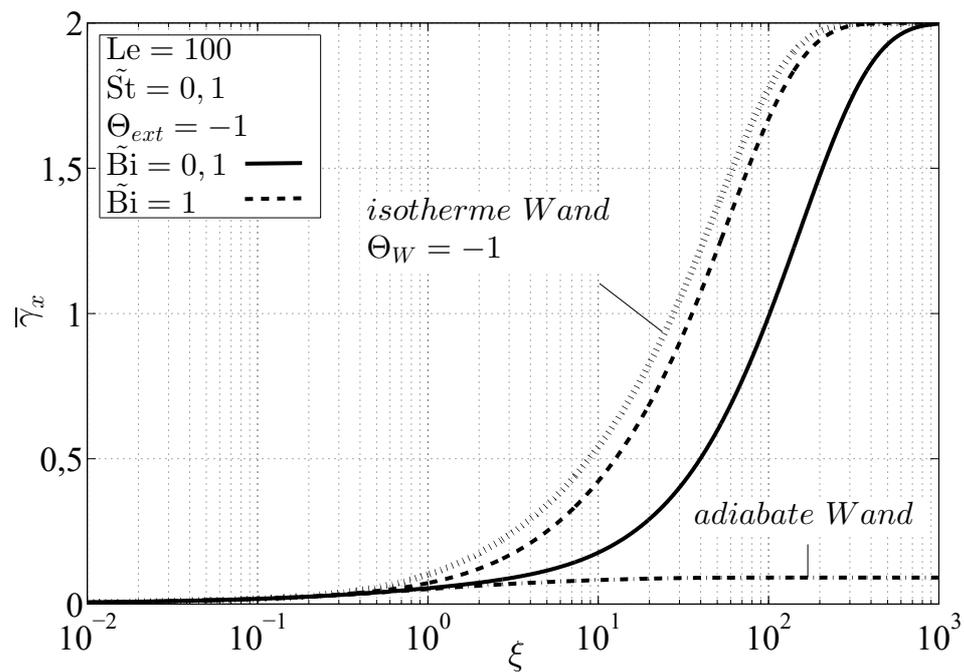
Am Ende des Absorptionsprozesses für je nach Randbedingung genügend große Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi_\infty$  hat der gesamte Film den finalen dimensionslosen Absorbatmassenanteil  $\bar{\gamma}_x = \gamma_\infty$ . Für die adiabate Wand ( $\tilde{\text{Bi}} = 0$ ) hängt dieser finale Endwert, wie in Abschnitt A.2 hergeleitet, nur von der modifizierten Stefan Zahl ab (Meyer, 2014a):

$$\gamma_{\infty,adia} = \frac{\tilde{\text{St}}}{1 + \tilde{\text{St}}}, \quad (\text{A.14})$$

aber für alle von Null verschiedenen modifizierten Biot Zahlen  $\tilde{\text{Bi}} \neq 0$  wird dieser finale Endwert durch die externe Fluidtemperatur bestimmt:

$$\gamma_\infty = 1 - \Theta_{ext}. \quad (\text{A.15})$$

Dementsprechend sind alle finalen Endwerte des Absorbatmassenanteils,  $\gamma_\infty$ , identisch für eine gegebene externe Fluidtemperatur  $\Theta_{ext}$  und alle modifizierten Biot-Zahlen ungleich Null,  $\tilde{\text{Bi}} \neq 0$ . Da jedoch der dimensionslose Massenstrom stark von der modifizierten Biot-Zahl abhängt, wird beispielsweise 99% dieses finalen Absorbatmassenanteils bei verschiedenen Werten der dimensionslosen Strömungskordinate erreicht. Ist der mittlere Massenstrom zu Beginn kleiner, wie z.B. für sehr kleine modifizierte Biot-Zahlen, so wird eine größere Strömungslänge und somit Übertragungsfläche benötigt, um die zum Erreichen dieses Massenanteils nötige Absorbatmasse zu absorbieren. Abbildung A.2 zeigt die unterschiedliche Entwicklung des mittleren Absorbatmassenanteils  $\bar{\gamma}_x$  als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für die verschiedenen thermischen Randbedingungen und bestätigt die vorangegangenen Überlegungen.



**Abbildung A.2:** Entwicklung des über die Filmdickenkoordinate gemittelten dimensionslosen Absorbatmassenanteils  $\bar{\gamma}_x$  als Funktion der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi$  für  $Le = 100$ ,  $\tilde{St} = 0,1$ ,  $\Theta_{ext} = -1$  und zwei modifizierte Biot-Zahlen  $\tilde{Bi} = 1$  (gestrichelte Linie) und  $\tilde{Bi} = 0,1$  (durchgezogene Linie) und die thermischen Grenzfälle

## A.4 Stoffdaten wässriger Lithiumbromidlösung

Im Rahmen seiner Dissertation passte Arnold Wohlfeil von ihm vorgegebene mathematische Funktionen an die von Löwer (1960) gemessenen Stoffdaten wässriger Lithiumbromidlösung an. Von diesen Stoffdaten werden in dieser Arbeit die kinematische Viskosität, die Wärmeleitfähigkeit sowie die Dichte und die spezifische Wärmekapazität der Salzlösung in Abhängigkeit von deren Temperatur und Zusammensetzung benötigt. Für jede der anzupassenden mathematischen Funktionen verwendet Wohlfeil bis zu siebzehn Parameter, welche in der Tabelle A.1 aufgelistet sind. Die von Wohlfeil vorgegebenen ma-

**Tabelle A.1:** Von A. Wohlfeil mit Hilfe der Messdaten von Löwer (1960) für die Stoffdaten wässriger Lithiumbromidlösungen ermittelte Koeffizienten für die mathematischen Funktionen (A.16), (A.17), (A.18) und (A.19)

Koeff.	$\nu$	$\lambda$	$\rho$	$c_P$
$a_{01}$	-771,2238243	-2,828546042	-158,792071	6,462731914
$a_{02}$	1,313986647	0,027095169	18502,67064	-68,15825241
$a_{03}$	6661,751115	$-7,3592 \cdot 10^{-5}$	9,79173601	-0,017426854
$a_{04}$	-0,176584923	$6,84271 \cdot 10^{-8}$	-158,6456762	0,520285681
$a_{05}$	-0,00049714	0,168719769	-73846,71379	5,800384892
$a_{06}$	-327,2586134	0,371295842	-0,025910389	$4,1611 \cdot 10^{-5}$
$a_{07}$	0,000136026	0,171540919	679,2667079	-0,055755167
$a_{08}$	0,069697926	-0,002034796	0,465762844	-0,001404767
$a_{09}$	-0,000103042	$2,4103 \cdot 10^{-6}$	-2,043875777	0,000168802
$a_{10}$	283,1165871	-0,003341468	86252,5194	28,85672066
$a_{11}$	-5,806649869	$4,93796 \cdot 10^{-6}$	$2,04622 \cdot 10^{-5}$	$-2,95603 \cdot 10^{-8}$
$a_{12}$	-5,412275708	–	-794,2826466	-0,19710322
$a_{13}$	-6824,256192	–	2,390046288	0,000474334
$a_{14}$	-2993,737847	–	-0,000453566	$1,25375 \cdot 10^{-6}$
$a_{15}$	-816,7742305	–	0,002046451	$-1,81967 \cdot 10^{-7}$
$a_{16}$	35,8541012	–	-0,00239635	$-3,38265 \cdot 10^{-7}$
$a_{17}$	–	–	2093,332625	–

thematischen Funktionen für die jeweiligen Stoffparameter der wässrigen Li-

thiumbromidlösung in Abhängigkeit von der Temperatur,  $T$ , in  $K$  und dem Salzmassenanteil,  $x$ , in  $kg_{LiBr}/kg_{Lsg}$  lauten:

$$\begin{aligned} \nu(T, x) = 1 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \cdot \exp \left( a_{01} + a_{02} \cdot T + a_{03} \cdot x + a_{04} \cdot T \cdot x + a_{05} \cdot T^2 \right. \\ \left. + a_{06} \cdot x^2 + a_{07} \cdot T^2 \cdot x + a_{08} \cdot T \cdot x^2 + a_{09} \cdot T^2 \cdot x^2 + a_{10} \cdot \ln(T) \right. \\ \left. + a_{11} \cdot \ln^2(T) + a_{12} \cdot \ln^3(T) + a_{13} \cdot \ln(1+x) + a_{14} \cdot \ln^2(1+x) \right. \\ \left. + a_{15} \cdot \ln^3(1+x) + a_{16} \cdot \ln(T) \cdot \ln(1+x) \right), \end{aligned} \quad (A.16)$$

$$\begin{aligned} \lambda(T, x) = 1 \frac{W}{m \cdot K} \cdot \left( a_{01} + a_{02} \cdot T + a_{03} \cdot T^2 + a_{04} \cdot T^3 + a_{05} \cdot x + a_{06} \cdot x^2 \right. \\ \left. + a_{07} \cdot x^3 + a_{08} \cdot T \cdot x + a_{09} \cdot T^2 \cdot x + a_{10} \cdot T \cdot x^2 + a_{11} \cdot T^2 \cdot x^2 \right), \end{aligned} \quad (A.17)$$

$$\begin{aligned} \rho(T, x) = 1 \frac{kg}{m^3} \cdot \left( a_{01} + a_{02} \cdot x + a_{03} \cdot T + a_{04} \cdot T \cdot x + a_{05} \cdot x^2 + a_{06} \cdot T^2 \right. \\ \left. + a_{07} \cdot T \cdot x^2 + a_{08} \cdot T^2 \cdot x + a_{09} \cdot T^2 \cdot x^2 + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot T^3 \right. \\ \left. + a_{12} \cdot T \cdot x^3 + a_{13} \cdot T^2 \cdot x^3 + a_{14} \cdot T^3 \cdot x + a_{15} \cdot T^3 \cdot x^2 \right. \\ \left. + a_{16} \cdot T^3 \cdot x^3 + a_{17} \cdot x^4 \right), \end{aligned} \quad (A.18)$$

$$\begin{aligned} c_P(T, x) = 1 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot \left( a_{01} + a_{02} \cdot x + a_{03} \cdot T + a_{04} \cdot T \cdot x + a_{05} \cdot x^2 + a_{06} \cdot T^2 \right. \\ \left. + a_{07} \cdot T \cdot x^2 + a_{08} \cdot T^2 \cdot x + a_{09} \cdot T^2 \cdot x^2 + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot T^3 \right. \\ \left. + a_{12} \cdot T \cdot x^3 + a_{13} \cdot T^2 \cdot x^3 + a_{14} \cdot T^3 \cdot x + a_{15} \cdot T^3 \cdot x^2 \right. \\ \left. + a_{16} \cdot T^3 \cdot x^3 \right). \end{aligned} \quad (A.19)$$

## A.5 Diffusionskoeffizient wässriger Lithiumbromidlösung

Basierend auf den Daten von Kashiwagi et al. (1984) gibt Kim (1992) eine Gleichung für die Bestimmung des salzmassenanteilsabhängigen Diffusionskoeffizienten wässriger Lithiumbromidlösung für einen Salzmassenanteilsbereich

von  $0,4 < x < 0,6$  bei  $25^\circ\text{C}$  in  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$  an:

$$D(25^\circ\text{C}) = (1,3528 + 0,19881 \cdot m - 0,036382 \cdot m^2 + 0,0020299 \cdot m^3 - 0,000039375 \cdot m^4) \cdot 10^{-9}, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{mit } m = \frac{1000 \cdot x}{\tilde{M}_{\text{LiBr}} \cdot x} \quad \tilde{M}_{\text{LiBr}} = 86,845 \text{ g mol}^{-1} \quad x = \frac{m_{\text{LiBr}}}{m_{\text{Lsg}}}. \quad (\text{A.21})$$

In der gedruckten Version der Dissertation ist der zweite Faktor in (A.20) fälschlicherweise mit 1,9881 angegeben und wurde entsprechend der handschriftlichen Verbesserungen von Herrn Kim zu 0,19881 angepasst.

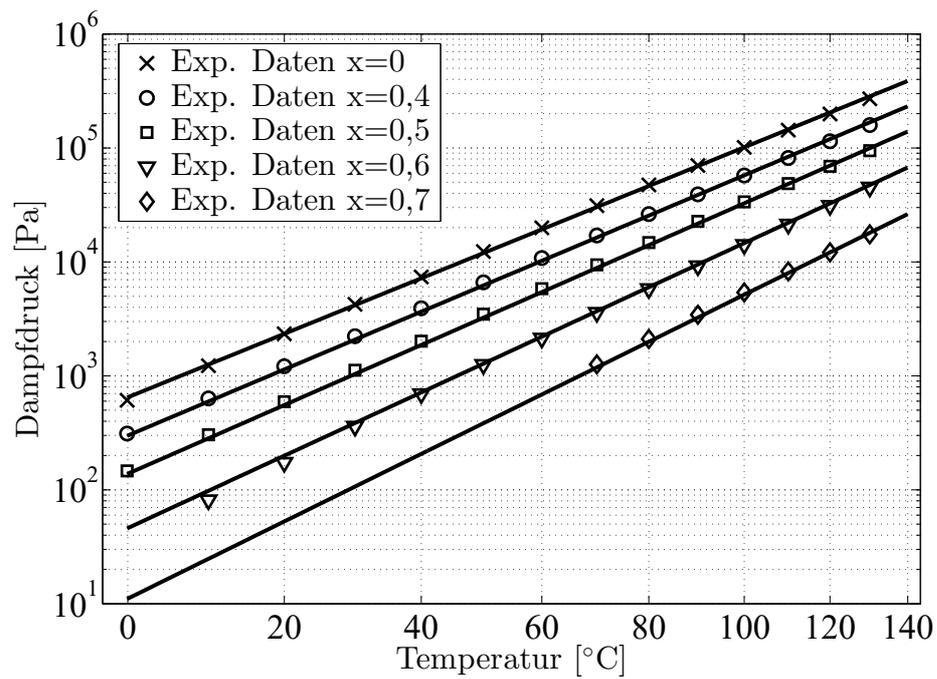
Die Temperaturabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten bildet Kim (1992) u.a. über die Veränderung der dynamischen Viskosität der Salzlösung ab:

$$D(T) = D(25^\circ\text{C}) \cdot \frac{T + 273,15}{298,15} \cdot \frac{\eta(25^\circ\text{C})}{\eta(T)}. \quad (\text{A.22})$$

Die in dieser Arbeit verwendete Funktion für die dynamische Viskosität der wässrigen Lithiumbromidlösung  $\eta = \nu \cdot \rho$  ist durch die von Wohlfeil implementierten Stofffunktionen in A.4 gegeben und wurde in dieser Form in dieser Arbeit verwendet.

## A.6 Analytische Funktion für die Dampfdruckdaten wässriger Lithiumbromidlösung

Abbildung A.3 zeigt sowohl die von Löwer (1960) experimentell bestimmten Gleichgewichtsdampfdruckdaten der wässrigen Lithiumbromidlösung, als auch den Verlauf der an diese Messdaten angepassten analytischen Dampfdruckfunktionen, welche im Rahmen dieser Arbeit erstellt und verwendet wurden. Das Verfahren zur Anpassung der Funktion an die Messdaten basiert auf der unter vereinfachenden Annahmen integrierten Form der Clausius-Clapeyron Beziehung. Ein ähnliches Verfahren wurde auch von Othmer und Frohlich (1960) für die funktionelle Anpassung experimenteller Dampfdruckdaten wässriger Ammoniumnitratlösungen verwendet. Wie aus Abbildung A.3 deutlich erkennbar ist, lassen sich die gemessenen Dampfdruckdaten für gleiche Salzmassenanteile im van't Hoff Diagramm sehr gut als Geraden annähern, was die nötigen Anpassungsparameter stark reduziert, da lediglich ein salzmassenanteilsabhängiger Steigungsparameter  $m(x)$  und Achsenabschnitt  $C(x)$  ermittelt



**Abbildung A.3:** Von Löwer (1960) experimentell ermittelte Dampfdruckdaten wässriger Lithiumbromidlösung bei verschiedenen Salzmassenanteilen  $x = m_{LiBr}/(m_{LiBr} + m_{H_2O})$  und -temperaturen (Markierungen) und die in dieser Arbeit verwendeten, an diese Messdaten angepassten analytischen Dampfdruckfunktionen (durchgezogene Linien)

werden muss.

Als Referenz wird die als Gerade angepasste Dampfdruckkurve reinen flüssigen Wassers verwendet:

$$\ln p_{x=0} = m_0 \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) + C_0 \quad (\text{A.23})$$

mit  $m_0 = 5154,9 [PaK^{-1}]$      $C_0 = 25,34 [Pa]$ .

Die Anpassung des Dampfdruckes der wässrigen Lithiumbromidlösungen unterschiedlichen Salzmassenanteils erfolgt prinzipiell auf gleichem Weg. Für diese wird als „quasi“-Reinstoff der gleiche Ansatz wie für reines Wasser verwendet, jedoch mit entsprechend anzupassenden Parametern:

$$\ln p_x = m_x \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) + C_x. \quad (\text{A.24})$$

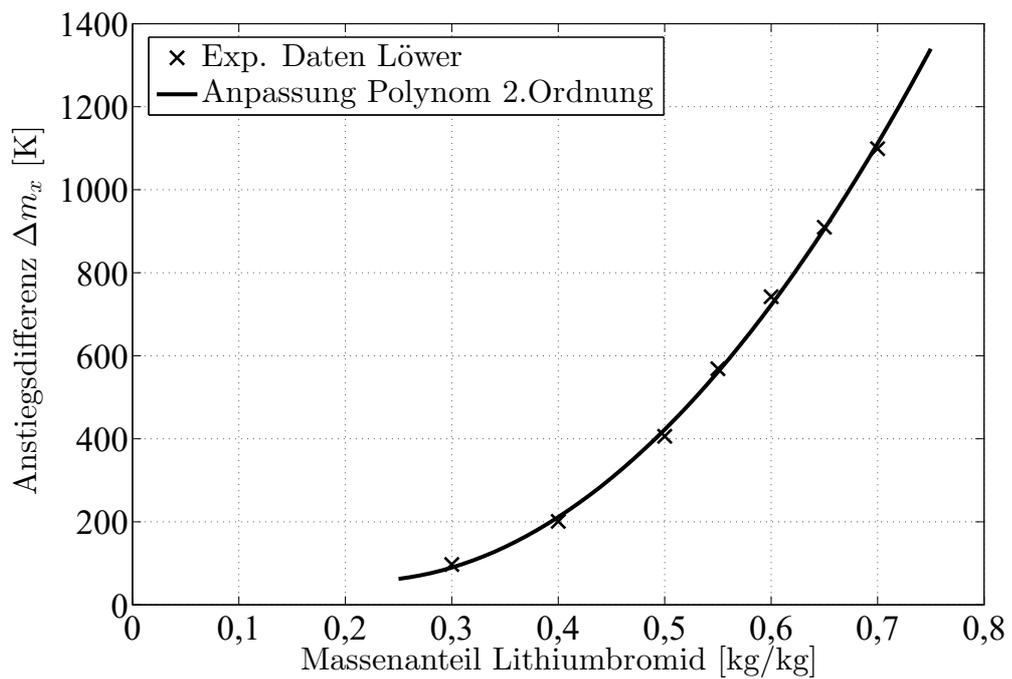
An dieser Stelle wird weiterhin angenommen, dass die Achsenabschnitte der Salzlösungen und der des reinen Wassers identisch sind,  $C_x = C_0$ , und sich die Geraden lediglich in dem Steigungsparameter  $m_x$  unterscheiden. Durch Bildung der Differenz von Gleichung (A.24) mit (A.23) wird ein vergleichsweise einfacher Ausdruck für die vom Salzmassenanteil abhängige Dampfdruckabsenkung bei konstanter Temperatur erhalten:

$$\ln \left(\frac{p_x}{p_{x=0}}\right) = \underbrace{(m_x - m_0)}_{=\Delta m_x} \cdot \left(-\frac{1}{T}\right). \quad (\text{A.25})$$

Die eigentliche Anpassung der Messdaten erfolgt über die Differenz der Steigungsparameter  $\Delta m_x$ . In Abbildung A.4 ist die Entwicklung dieser Anstiegsdifferenz für die von Löwer ermittelten Dampfdruckdaten aufgetragen. Der Verlauf dieser Daten wird in guter Näherung mit Hilfe eines Polynoms zweiten Grades beschrieben (durchgezogene Linie):

$$\Delta m_x = 4462 \cdot x^2 - 1907,5 \cdot x + 260,39. \quad (\text{A.26})$$

Der über einen großen Temperaturbereich offenbar konstante Steigungsparameter der Dampfdruckgeraden im van't Hoff Diagramm ist sehr hilfreich für eine einfache mathematische Beschreibung der Dampfdruckdaten wässriger Lithiumbromidlösungen. Darüber hinaus lässt sich aus einer unter vereinfachenden Annahmen integrierten Form der Clausius-Clapeyron Beziehung, welche auch von Othmer und Frohlich (1960) verwendet wird, aus den Steigungen der



**Abbildung A.4:** Anstiegendifferenzen der von Löwer (1960) experimentell ermittelten Dampfdruckdaten wässriger Lithiumbromidlösung bei verschiedenen Salzmassenanteilen  $x = m_{LiBr}/(m_{LiBr} + m_{H_2O})$  (Markierungen) und das an diese Messdaten angepasste Polynom zweiter Ordnung (durchgezogene Linien)

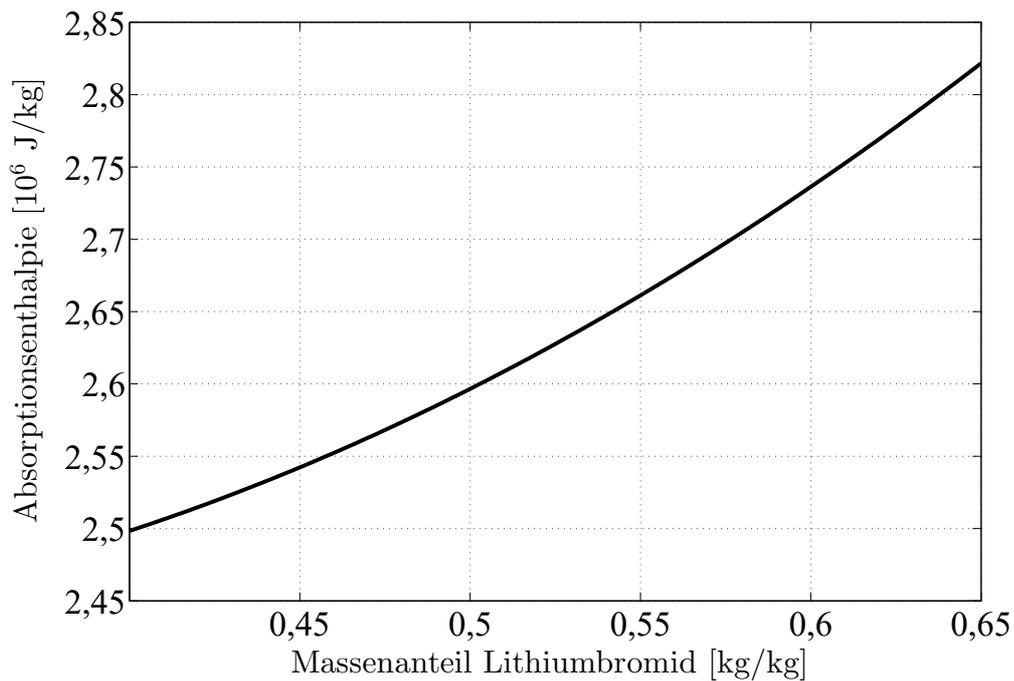
Dampfdruckgeraden die für den Phasenwechsel notwendige Enthalpiedifferenz bei der Verdampfung des Absorbats aus der Salzlösung  $\Delta h_x$  ermitteln:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{\Delta h_0}{R_D} \quad \text{und} \quad m_x = \frac{\Delta h_x}{R_D}, \\ \Delta h_x = \Delta h_{Abs} &= \frac{m_x}{m_0} \cdot \Delta h_0 = \left(1 + \frac{\Delta m_x}{m_0}\right) \cdot \Delta h_0. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Hierin ist  $R_D$  die spezifische Gaskonstante von reinem Wasserdampf. Mit Hilfe der Anpassung der Differenz der Dampfdruckgeradensteigung im van't Hoff Diagramm  $\Delta m_x$  an von Löwer (1960) experimentell ermittelte Gleichgewichtsdampfdruckdaten wird demnach sowohl das Dampfdruckverhalten als auch die salzmassenanteilsabhängige Absorptionenthalpie analytisch erfasst und für die Berechnungen und Simulationen in dieser Arbeit verwendet. Abbildung A.5 zeigt den Verlauf dieser aus den Steigungen der Dampfdruckgeraden ermittelten Absorptionenthalpie. An dieser Stelle wird eine temperaturunabhängige Verdampfungsenthalpie von  $\Delta h_0 = m_0 \cdot R_D \approx 2400 \text{ kJ/kg}$  für reines Wasser zu Grunde gelegt. Die so lediglich nur noch vom Salzmassenanteil abhängige Absorptionenthalpie variiert von  $\Delta h_{Abs} = 2500 \text{ kJ/kg}$  bei  $x = 0,4$  bis zu  $\Delta h_{Abs} = 2825 \text{ kJ/kg}$  bei  $x = 0,65$ .

## A.7 Randbedingungen erster Art an der Phasengrenzfläche

Die partiellen Differentialgleichungen können durch die in dieser Arbeit angewendeten Randbedingungen an der Phasengrenzfläche wie gezeigt gekoppelt, aber im Gegensatz dazu auch ungekoppelt für eine konstante Temperatur und einen konstanten Massenanteil an der Filmoberfläche gelöst werden (Meyer und Ziegler, 2014). Ein großer Vorteil bei diesem Vorgehen besteht in der Möglichkeit der unabhängigen Lösung der partiellen Differentialgleichungen im LAPLACE-Bereich und der Rücktransformation in den reellen Zahlenbereich mit konstanten, aber noch unbekanntem Oberflächenwerten für die Temperatur und den Absorbatmassenanteil an der Filmoberfläche. Die Kopplung des Problems erfolgt erst im reellen Zahlenbereich über eine integrale Energiebilanz an der Filmoberfläche für die jeweils betrachtete Strömungslänge sowie einer Phasengleichgewichtsbeziehung mit den ebenfalls über die jeweilige Strö-



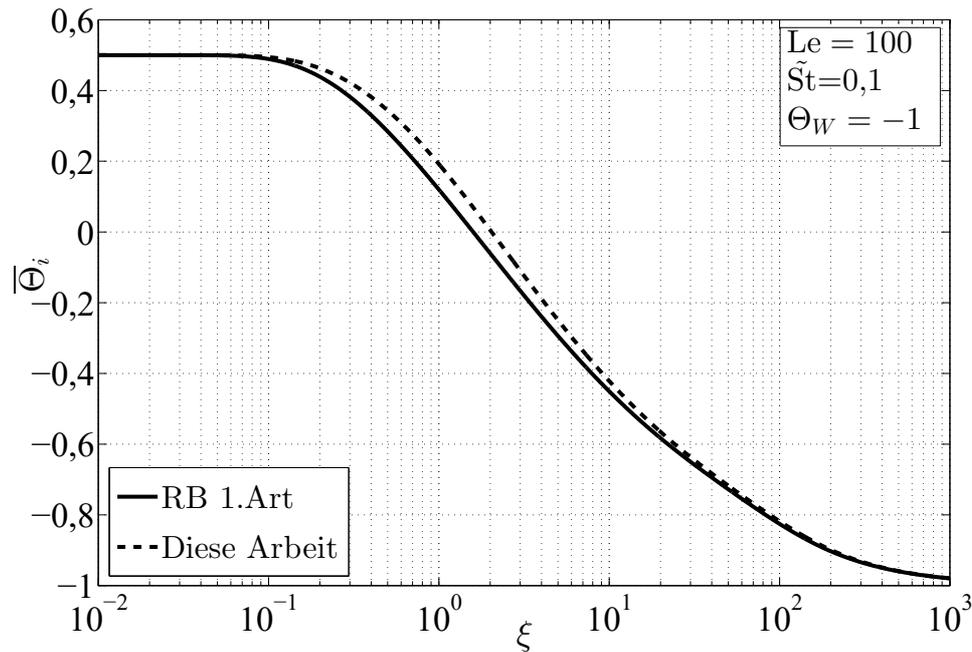
**Abbildung A.5:** Aus den Dampfdruckdaten ermittelte Absorptionsenthalpie als Funktion des Salzmassenanteils

mungslänge gemittelten Werten der Filmoberflächentemperatur und des Absorbatmassenanteils an der Filmoberfläche. Ein weiterer Vorteil der Kopplung der so erhaltenen Lösungen im reellen Zahlenbereich ist die Anwendung komplexerer Phasengleichgewichtsbeziehungen, d.h. diese müssen nicht wie für den in dieser Arbeit verwendeten Lösungsansatz linearisiert werden. Des Weiteren können auch kompliziertere Kopplungsbeziehungen, z.B. unter Einbeziehung der Dampfphase mit Hilfe dieser Lösungsmethode angewendet werden.

Nichtsdestotrotz führt diese Herangehensweise der Festlegung einer über die betrachtete Strömungslänge gemittelten Filmoberflächentemperatur sowie des zugehörigen mittleren Filmoberflächenabsorbatmassenanteils, welche die integrale Energiebilanz und das Phasengleichgewicht erfüllen, zu Abweichungen im Vergleich zu der Lösung der partiellen Differentialgleichungen wie sie in dieser Arbeit präsentiert wird. Diese Abweichungen sollen hier kurz untersucht und abgeschätzt werden.

Abbildung A.6 zeigt den Verlauf der über die Strömungslänge gemittelten dimensionslosen Filmoberflächentemperatur  $\bar{\Theta}_i$  für das gerade beschriebene

Modell der ungekoppelten Lösung mit Randbedingungen erster Art an der Phasengrenzfläche im Vergleich zu der in dieser Arbeit vorgestellten und in zusammengefasster Form von Meyer (2014a) veröffentlichten Lösungsmethode für die Randbedingung der isothermen Wand. In beiden Fällen wurde die lineare Approximation der isobaren Siedetemperatur in Abhängigkeit von dem Absorbatmassenanteil verwendet. Es ist deutlich zu erkennen, dass für sehr

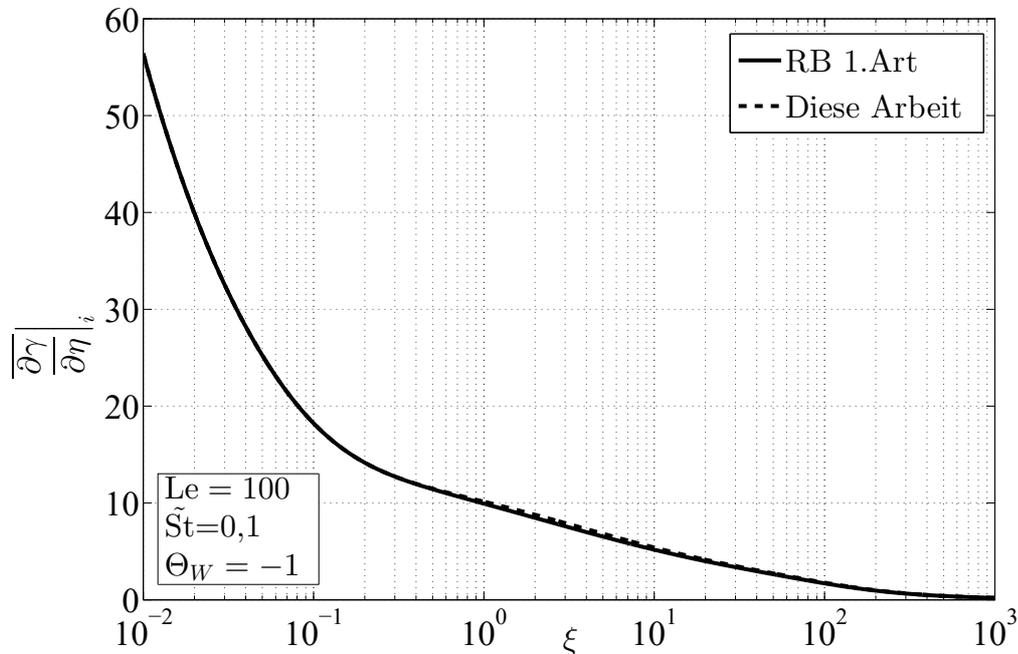


**Abbildung A.6:** Verlauf der mittleren dimensionslosen Filmoberflächentemperatur für die Lösungsmethode mit Randbedingung erster Art an der Filmoberfläche (Meyer und Ziegler, 2014) im Vergleich zur Lösung dieser Arbeit für die isotherme Wand

kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate  $\xi < 0,1$  die Annahme der konstanten Filmoberflächentemperatur für die von der Wand unbeeinträchtigte Filmoberfläche gegeben ist und daher beide Modelle übereinstimmend die dimensionslose mittlere Oberflächentemperatur des Modells der ungestörten Filmoberfläche wiedergeben. Die mittlere Filmoberflächentemperatur für das Modell der Randbedingung erster Art beginnt aber bereits bei kleineren Werten der dimensionslosen Strömungskordinate im Vergleich zur Lösung in dieser Arbeit zu sinken. Dieser Unterschied tritt im Strömungsbereich zwischen  $0,2 < \xi < 10$  besonders hervor und verringert sich für  $\xi > 10$  wieder. Welche Auswirkung diese Annahme von konstanten, mittleren Oberflächenwerten auf

den an der Filmoberfläche absorbierten Massenstrom im Vergleich zum Modell mit den exakten Randbedingungen hat, wird im Folgenden untersucht.

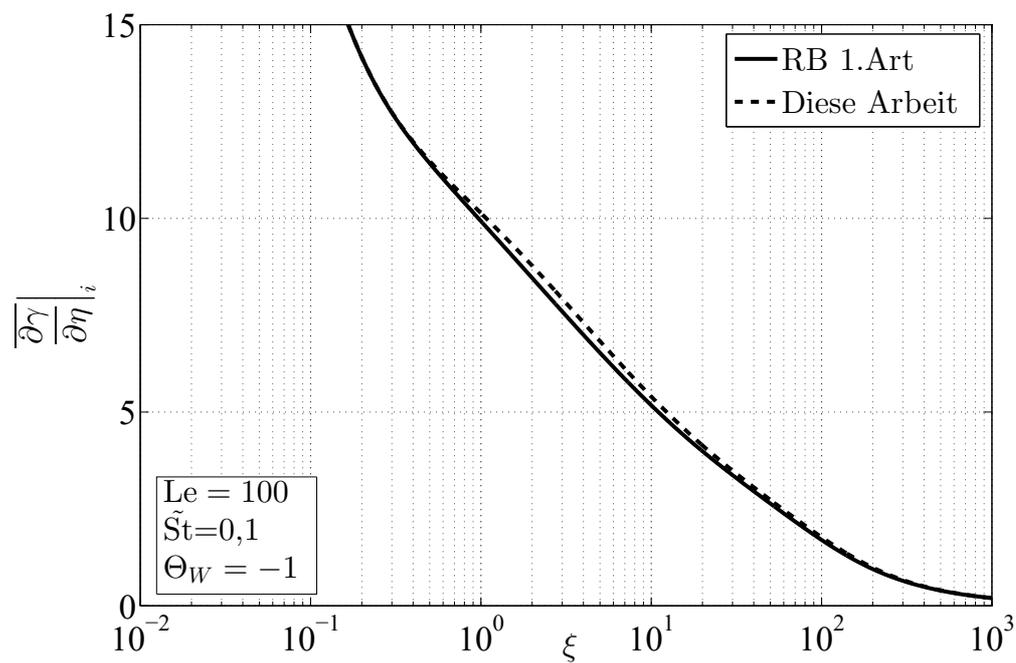
Die Abbildungen A.7 und A.8 zeigen den Verlauf des mittleren Absorbat-



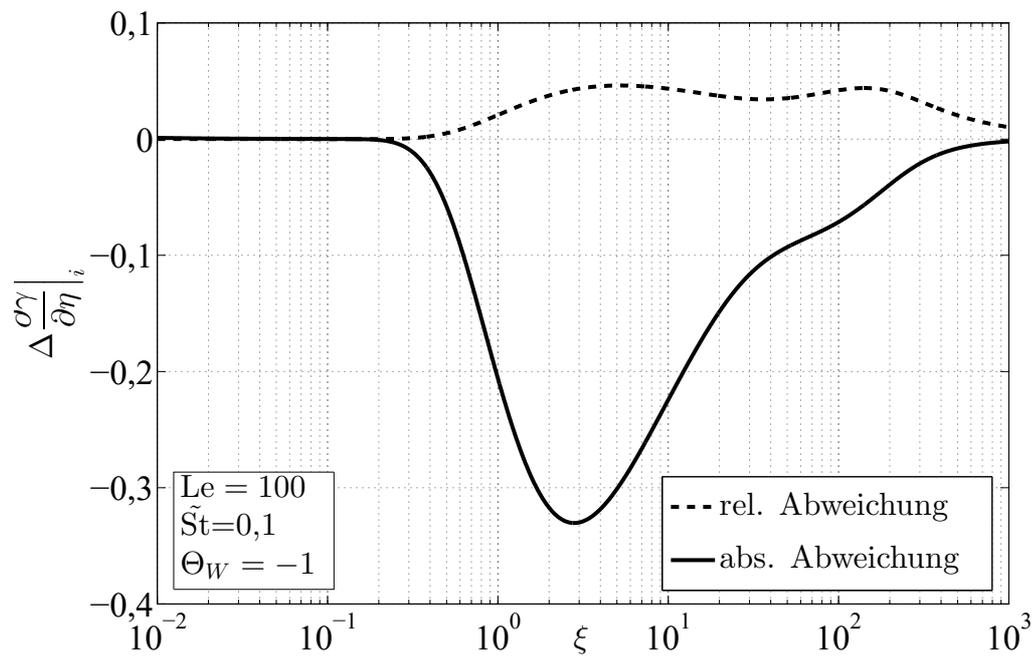
**Abbildung A.7:** Verlauf des mittleren dimensionslosen Filmoberflächenabsorbatmassenanteilsgradienten für die Lösungsmethode mit Randbedingungen erster Art an der Filmoberfläche (Meyer und Ziegler, 2014) im Vergleich zur Lösung dieser Arbeit für die isotherme Wand

massengradienten an der Filmoberfläche für die beiden Modelle, welche bei sonst konstanten Bedingungen direkt den absorbierten Absorbatmassenstrom wiedergeben. Erwartungsgemäß weichen die beiden Modelle in dem gleichen Strömungsbereich ab, wie zuvor bereits die mittlere dimensionslose Filmoberflächentemperatur. Allerdings scheinen die Auswirkungen auf den mittleren dimensionslosen Absorbatmassenstrom kleiner zu sein als bei der mittleren dimensionslosen Filmoberflächentemperatur.

Abbildung A.9 zeigt die absolute Abweichung der dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten an der Filmoberfläche sowie die auf den mittleren dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten der Lösung mit Randbedingung erster Art, d.h. den kleineren Wert, bezogene, relative Abweichung zwischen den beiden Lösungsmethoden.



**Abbildung A.8:** Kleiner Ausschnitt des Verlaufs des mittleren dimensionslosen Filmoberflächenabsorbatmassenanteilsgradienten für die Lösungsmethode mit Randbedingungen erster Art an der Filmoberfläche (Meyer und Ziegler, 2014) im Vergleich zur Lösung dieser Arbeit für die isotherme Wand.



**Abbildung A.9:** Verlauf der absoluten und relativen Abweichung der dimensionslosen Filmoberflächenabsorbatmassenanteilsgradienten für die Lösungsmethode mit Randbedingungen erster Art an der Phasengrenzfläche (Meyer und Ziegler, 2014) im Vergleich zu der Lösung dieser Arbeit für die isotherme Wand.

Dabei sind die absolute und die relative Differenz folgendermaßen definiert:

$$\Delta \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_i = \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{i, RB1. Art} - \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{i, Exakte RB}, \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{i, relativ} = \frac{\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{i, RB1. Art} - \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{i, Exakte RB}}{\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_{i, RB1. Art}}. \quad (\text{A.29})$$

Zu Beginn des Prozesses, d.h. für kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate gibt es bis auf vernachlässigbar kleine numerische Abweichungen keine Unterschiede zwischen den beiden Modellen, da für diesen Bereich die Annahme konstanter Filmoberflächenwerte für die ungestörte Filmoberfläche zutreffend ist. Sobald die thermische Randbedingung der Wand die Filmoberfläche beeinträchtigt, unterschätzt das Modell der konstanten Filmoberflächenrandbedingungen den mittleren dimensionslosen Massenstrom absolut um bis zu -0,32 bei  $\xi \approx 3$  und relativ betrachtet betragen die Abweichungen bis zu 5% bezogen auf den kleineren mittleren dimensionslosen Absorbatmassenanteilsgradienten an der Filmoberfläche, welcher mit Hilfe der Lösung für die Randbedingung erster Art an der Filmoberfläche ermittelt wurde.

## A.8 Verbesserung der FOURIER-Methode

Im Abschnitt 3 wurde die FOURIER-Methode von Grigor'eva und Nakoryakov (1977) und Nakoryakov et al. (1997) als Lösung für das in dieser Arbeit ebenfalls angewendete Filmmodell vorgestellt und erläutert. Für die Eigenwertbestimmung des Problems geben Grigor'eva und Nakoryakov (1977), Nakoryakov et al. (1997) sowie Nakoryakov und Grigor'eva (2010) eine im Definitionsbereich eingeschränkte aus zwei Tangensfunktionen bestehende Bestimmungsgleichung (3.46) an. Die Form dieser Gleichung bringt für eine numerische Eigenwertbestimmung Probleme mit sich, die für bestimmte dimensionslose Parameter aufgrund der Beschränktheit des Definitionsbereiches der Tangensfunktionen zu einem unvollständigen Satz an Eigenwerten führen (Meyer, 2014b). Die in dieser Arbeit abgeleitete Funktion für die Ermittlung der Polstellen für die Lösung der isotherme Wandrandbedingung, welche für die inverse LAPLACE-Transformation benötigt wird, ist bis auf die komplexen Argumente identisch mit der Eigenwertfunktion von Nakoryakov et al. (1997). Ein Durchmultiplizieren der Gleichung (3.46) mit den Nennerkosinusfunktionen liefert

die gleiche mathematische Funktion wie diese Polstellenfunktion im LAPLACE-Bereich, jedoch mit reellen Argumenten.

Wird die von Nakoryakov et al. (1997) präsentierte Eigenwertfunktion so umgeformt, kann mit Hilfe einer numerischen Nullstellensuche ohne Probleme der komplette Satz an Eigenwerten gefunden werden und die von Nakoryakov et al. (1997) beschriebenen Schwierigkeiten von nicht abklingenden Schwingungen für kleine Werte der dimensionslosen Strömungskordinate für die mit der FOURIER-Methode erhaltenen Lösung verschwinden (Meyer, 2014b). Das gleiche gilt für die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte für die thermische Randbedingung der adiabaten Wand.



# Anhang B

## Mathematischer Anhang

### B.1 Fourier-Methode

Im Jahre 1822 veröffentlichte Jean Baptiste Joseph FOURIER in seiner „Théorie analytique de la chaleur“ Untersuchungen zum Wärmefluss in festen Körpern. Er bediente sich dabei einer mathematischen Methode, die in der Literatur teilweise als FOURIER-Methode bezeichnet wird.

Er betrachtete unter anderem die instationäre Wärmeleitung in einem Stab, den er als eindimensionalen Körper modellierte. Dieser Vorgang kann durch folgende partielle Differentialgleichung modelliert werden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (\text{B.1})$$

FOURIER wendete die Methode des Separations- bzw. Produktansatzes an und formulierte folgenden formalen Lösungsansatz:

$$T(x, t) = f(x) \cdot g(t). \quad (\text{B.2})$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung B.1 und nach Variablen getrennt, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{a}{g(t)} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} = \text{const.} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (\text{B.3})$$

Mit Hilfe dieser Methode ergeben sich aus der partiellen Differentialgleichung zwei homogene gewöhnliche Differentialgleichungen, welche über eine gemeinsame als Eigenwert bezeichnete Konstante miteinander verknüpft sind. Dieser noch zu ermittelnde Eigenwert wird mit  $-k^2$  angesetzt, um lediglich negative

reelle Werte zu erlauben, um konvergierende mathematische Lösungen zu erhalten. Somit werden folgende zwei homogene Differentialgleichungen mit den noch unbekanntem Eigenwerten erhalten:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + a \cdot k^2 \cdot g(t) = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2 \cdot f(x) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Diese Methode wird auch als die Eigenwertmethode bezeichnet. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen können mit Hilfe des EULER-Ansatzes gelöst werden, sind jedoch über den Eigenwert  $k$  weiterhin gekoppelt. Die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen lauten wie folgt:

$$g(t) = C_{1,k} e^{-ak^2 t}, \quad (\text{B.6})$$

$$f(x) = C_{2,k} \cdot \sin(kx) + C_{3,k} \cdot \cos(kx). \quad (\text{B.7})$$

Mit Hilfe der Anfangs- und Randbedingungen des jeweiligen physikalischen Problems lassen sich unter Umständen die noch unbekanntem Integrationskonstanten  $C_{1,k}$ ,  $C_{2,k}$ ,  $C_{3,k}$  sowie die zugehörigen, ebenfalls unbekanntem Eigenwerte ermitteln.

## B.2 Laplace Transformation

”LAPLACE seems to have regarded analysis merely as a means of attacking physical problems, though the ability with which he invented the necessary analysis is almost phenomenal. As long as his results were true he took but little trouble to explain the steps by which he arrived at them; he never studied elegance or symmetry in his processes, and it was sufficient for him if he could by any means solve the particular question he was discussing.” (Rouse Ball (1908) S.345)

Bei der LAPLACE-Transformation handelt es sich um eine Integraltransformation, die eine Funktion aus dem reellen Zahlenbereich in den komplexen Bildbereich abbildet. Die allgemeine Transformationsvorschrift lautet:

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-z \cdot t} dt \quad z \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.8})$$

Die Funktion  $F(z)$  wird als die LAPLACE-Transformierte der Funktion  $f(t)$  bezeichnet. Häufig wird auch das Doetsch-Symbol als Abkürzung für die LAPLACE-Transformation verwendet:

$$F(z) \bullet \longrightarrow \circ f(t). \quad (\text{B.9})$$

Die LAPLACE-Transformation ist eng verwandt mit der FOURIER-Transformation und wird in den Ingenieurwissenschaften häufig zur Lösung von Rand- und Anfangswertproblemen verwendet.

Wird die LAPLACE-Transformation auf eine partielle Differentialgleichung, z.B. die der instationären eindimensionalen Wärmeleitung im festen Stab (B.1) angewendet, so ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial T}{\partial t} \cdot e^{-z \cdot t} \cdot dt = \int_0^{\infty} a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cdot e^{-z \cdot t} \cdot dt. \quad (\text{B.10})$$

Die linke Seite von Gleichung (B.10) lässt unter Verwendung der Regel zur partiellen Integration folgendermaßen umformen:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial T}{\partial t} \cdot e^{-z \cdot t} \cdot dt = \underbrace{[T \cdot e^{-z \cdot t}]_0^{\infty}}_{=-T_0} - \underbrace{\int_0^{\infty} (-z) \cdot T \cdot e^{-z \cdot t} \cdot dt}_{=+z \cdot \Theta(z)} = z \cdot \Theta(z) - T_0. \quad (\text{B.11})$$

Die rechte Seite der Gleichung (B.10) lässt sich umformen, da die partielle Ableitung der Temperatur nach dem Ort  $y$  definitionsgemäß nicht von der Zeit abhängt und aus diesem Grund vor das Zeitintegral gezogen werden kann:

$$a \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} T \cdot e^{-z \cdot t} \cdot dt}_{=\Theta(z)} = a \frac{\partial^2 \Theta(z)}{\partial y^2}. \quad (\text{B.12})$$

Somit lautet die LAPLACE-Transformierte der instationären eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} z \cdot \Theta(z) - T_0 &= a \frac{\partial^2 \Theta(z)}{\partial y^2}, \\ -T_0 &= a \frac{\partial^2 \Theta(z)}{\partial y^2} - z \cdot \Theta(z). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Mit Hilfe der LAPLACE-Transformation lässt sich also die partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung umformen und kann zumindest im komplexen Bildbereich mit den Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt werden.

### B.3 Inverse LAPLACE-Transformation

An dieser Stelle sei auf die für Ingenieure hervorragend geeignete Anwendung der LAPLACE-Transformation für instationäre Wärmeleitungsprobleme von Herrn Prof. em. H.D. Baehr aus dem Jahr 1955 verwiesen (Baehr, 1955). Aus dieser Veröffentlichung und den dort aufgeführten Quellen werden die folgenden Ausführungen zur Anwendung der allgemeinen inversen LAPLACE-Transformation aus dem komplexen Bildbereich in den reellen Zahlenbereich entnommen.

Die allgemeine Integralvorschrift für die inverse LAPLACE-Transformation lautet:

$$T(t, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{\omega-i\cdot\infty}^{\omega+i\cdot\infty} e^{z\cdot t} \cdot \Theta(z, y) \cdot dz. \quad (\text{B.14})$$

Um die gesuchte Temperaturfunktion im reellen Zahlenbereich zu ermitteln, muss das komplexe Integral auf der rechten Seite der Gleichung (B.14) gelöst werden. Hierzu bedarf es einer kurzen Einführung in die Analysis komplexer Zahlen.

Nach Knopp (1976) wird der CAUCHY'sche Integralsatz folgendermaßen formuliert:

*„Ist  $f(z)$  in dem einfach zusammenhängenden Gebiete  $\Gamma$  regulär, so ist*

$$\int^{\Omega} f(z) dz = 0 \quad (\text{B.15})$$

*wenn  $\Omega$  einen beliebigen (nicht notwendig doppelpunktfreien), geschlossenen, in  $\Gamma$  liegenden Weg bedeutet.“* ((Knopp, 1976) S.52f)

Der CAUCHY'sche Integralsatz stellt einen fundamentalen Hauptsatz in der

Funktionentheorie dar, bedarf jedoch einiger Erläuterungen bezüglich der mathematischen Voraussetzungen, die für diesen Hauptsatz der Funktionentheorie gegeben sein müssen. Schwank (1951) gibt dazu eine für Ingenieure anschauliche Herleitung dieses Hauptsatzes, den SCHWANK, da GAUSS (1811) diesen vor CAUCHY (1814) gefunden haben soll, als GAUSS'schen Integralsatz bezeichnet. Eine komplexe Funktion  $f(z)$  wird als regulär bezeichnet, wenn diese Funktion den CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen genügt.

„Soll die Funktion

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y), \quad (\text{B.16})$$

wo  $u$  und  $v$  in einem Gebiet<sup>1</sup>  $\Gamma$  stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, in diesem Gebiet differenzierbar sein, so ist es notwendig und hinreichend, dass  $u$  und  $v$  den CAUCHY-RIEMANN'schen Gleichungen genügen.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{B.18})$$

Eine in diesem Gebiet  $\Gamma$  differenzierbare Funktion heißt in diesem Gebiet regulär analytisch, oder auch nur regulär oder analytisch. Wir nennen alle Stellen  $z$  eines Bereiches, an denen die CAUCHY-RIEMANN'schen Gleichungen für die Funktion  $f(z)$  erfüllt sind, reguläre Stellen von  $f(z)$  und alle anderen Stellen singuläre Stellen.“ (Schwank (1951) S.56f)

Für die Herleitung der CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen sei auf die anschaulichen Ausführungen von Schwank (1951) (S.54ff) verwiesen. Des Weiteren leitet Schwank (1951) aus der Theorie reeller Kurvenintegrale die Anforderungen an komplexe Integrale ab und kommt zu folgender Formulierung des (GAUSS'schen) Hauptsatzes der Funktionentheorie:

„Wenn die Funktion  $f(z)$  im Bereich  $\Gamma$  regulär analytisch ist, so ist das über eine geschlossene Kurve  $\Omega$  erstreckte Integral

$$\oint_{\Omega} f(z) dz = 0 \quad (\text{B.19})$$

---

<sup>1</sup>Schwank (1951) meint hier das auch von Knopp (1976) beschriebene einfach zusammenhängende Gebiet.

oder, was damit äquivalent ist, der Wert des Integrals

$$\int_A^B f(z) dz \quad (\text{B.20})$$

ist von der die Punkte  $A$  und  $B$  verbindenden Kurve unabhängig; bei beiden Formulierungen wird angenommen, dass der Integrationsweg ganz im Bereich  $\Gamma$  verläuft.“ (Schwank (1951) S.73f)

Für die Bereichsdefinition gilt nach SCHWANK:

„Unter einem Bereich verstehen wir einen von einer oder mehreren sich nicht selbst überschneidenden Kurven begrenzten Teil der Ebene; werden die Randpunkte der begrenzenden Kurven nicht zum Bereich gerechnet, so spricht man von einem offenen Bereich oder einem Gebiet. Die Anzahl der einen Bereich begrenzenden Kurven bestimmt den Zusammenhang des Bereichs. Ist nur eine Randkurve vorhanden, so heißt der Bereich einfach zusammenhängend, während z.B. das Ringgebiet zwischen zwei geschlossenen Kurven einen zweifach zusammenhängenden Bereich bildet.“ (Schwank (1951) S.56)

Bisher wurde ausschließlich über reguläre Funktionen gesprochen deren Integral unter den genannten Bedingungen gerade verschwindet. Das ist im Falle der Lösung von (B.14) nicht notwendigerweise so.

Mit Hilfe des Residuensatzes kann das komplexe Integral (B.14) aber gelöst werden. An dieser Stelle wird wiederum Knopp (1976) zitiert:

„Ist  $f(z)$  in der Umgebung von  $z_0$  regulär, so ist nach dem CAUCHY'schen Satze

$$\oint_{\Omega} f(z) dz = 0 \quad (\text{B.21})$$

wenn eine kleine den Punkt  $z_0$  umschließende Kurve  $\Omega$  als Weg gewählt wird. Hat dagegen  $f(z)$  in  $z_0$  eine isolierte singuläre Stelle, in deren Umgebung  $f(z)$  sonst eindeutig und regulär ist, so wird dasselbe Integral im allgemeinen von Null verschieden sein. Sein Wert lässt sich sofort angeben: Da  $f(z)$  für eine Umgebung von  $z_0$  ( $0 < |z - z_0| < r$ ) in eine LAURENT'sche Reihe entwickelt

werden kann, so hat man nach §29,<sup>2</sup> wenn  $\Omega$  im positiven Sinne durchlaufen wird, sofort die Beziehung

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \oint_{\Omega} f(z) dz = a_{-1}. \quad (\text{B.22})$$

Den Wert dieses Integrals oder also den Koeffizienten der ersten negativen Potenz in der LAURENT'schen Entwicklung nennt man das Residuum von  $f(z)$  in  $z_0$ , und die obige Formel stellt in gewissem Sinne eine Erweiterung des CAUCHY'schen Satzes dar.“ (Knopp (1976) S.131f)

Unter Verwendung dieser mathematischen Hilfsmittel, d.h. hauptsächlich des Residuensatzes, geht Baehr (1955) folgendermaßen vor. Er bringt z.B. die komplexe Temperaturfunktion in die folgende Form, um deren Polstellen, d.h. Singularitäten ermitteln zu können:

$$\Theta(z) = \frac{f(z)}{g(z)}. \quad (\text{B.23})$$

Die Nullstellen des Nenners,  $z_k$ , für die  $g(z_k) = 0$ , sind die Polstellen von  $\Theta(z, y)$ . Das zu lösende Integral B.14 lässt sich nach Baehr (1955) für die meisten Wärmeleitungsprobleme mit Hilfe des Residuensatzes folgendermaßen umformulieren:

$$T(t, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Res} [e^{z \cdot t} \cdot \Theta(z, y)]_{z=z_k}. \quad (\text{B.24})$$

Sind die gefundenen Polstellen einfache Nullstellen von  $g(z)$ , so kann das Residuum zu diesen Nullstellen mit Hilfe des folgenden von Baehr (1955) angegebenen Zusammenhangs bestimmt werden:

$$\text{Res} [e^{z \cdot t} \cdot \Theta(z, y)]_{z=z_k} = \frac{f(z_k) \cdot e^{z \cdot t}}{[dg(z)/dz]_{z=z_k}}. \quad (\text{B.25})$$

Treten Polstellen höherer Ordnung (meist bei  $z = 0$ ) auf, so wird das Residuum, wie in Gleichung (B.22) dargestellt, durch Entwicklung einer LAURENT'schen Reihe und Ermittlung des Koeffizienten  $a_{-1}$  bestimmt. Nach Baehr (1955) hat die LAURENT'sche Reihe die folgende Form:

$$e^{zx} \cdot F(z) = \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 \cdot z + \dots \quad (\text{B.26})$$

<sup>2</sup>Vgl. Knopp (1976) S.118ff zur Entwicklung der LAURENT'schen Reihe und den Bezug zu den singulären Stellen.

## B.4 Zusammenhang zwischen Exponential- und Winkelfunktionen

In diesem Abschnitt werden einige in dieser Arbeit häufig verwendeten Äquivalenzen von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen sowie ausgewählte Umformungen hyperbolischer Funktionen aufgelistet. Hierbei spielt insbesondere die Verknüpfung der hyperbolischen Winkelfunktionen mit der Exponentialfunktion bei der Lösung der homogenen Differentialgleichungen eine wesentliche Rolle:

$$\sinh(x) = -i \cdot \sin(i \cdot x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad (\text{B.27})$$

$$\cosh(x) = \cos(i \cdot x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}). \quad (\text{B.28})$$

Im folgenden werden einige häufig verwendete Umformungen erläutert:

$$\begin{aligned} \sinh(a \cdot x) \cdot \sinh(b \cdot x) &= \frac{1}{4} (e^{a \cdot x} - e^{-a \cdot x}) \cdot (e^{b \cdot x} - e^{-b \cdot x}) \\ &= \frac{1}{4} \underbrace{(e^{(a+b) \cdot x} + e^{-(a+b) \cdot x})}_{=2 \cdot \cosh((a+b) \cdot x)} \underbrace{(-e^{(a-b) \cdot x} - e^{-(a-b) \cdot x})}_{=-2 \cdot \cosh((a-b) \cdot x)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\cosh((a+b) \cdot x) - \cosh((a-b) \cdot x)], \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \cosh(a \cdot x) \cdot \cosh(b \cdot x) &= \frac{1}{4} (e^{a \cdot x} + e^{-a \cdot x}) \cdot (e^{b \cdot x} + e^{-b \cdot x}) \\ &= \frac{1}{4} \underbrace{(e^{(a+b) \cdot x} + e^{-(a+b) \cdot x})}_{=2 \cdot \cosh((a+b) \cdot x)} \underbrace{(e^{(a-b) \cdot x} + e^{-(a-b) \cdot x})}_{=2 \cdot \cosh((a-b) \cdot x)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\cosh((a+b) \cdot x) + \cosh((a-b) \cdot x)], \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} \cosh(a \cdot x) \cdot \sinh(b \cdot x) &= \frac{1}{4} (e^{a \cdot x} + e^{-a \cdot x}) \cdot (e^{b \cdot x} - e^{-b \cdot x}) \\ &= \frac{1}{4} \underbrace{(e^{(a+b) \cdot x} - e^{-(a+b) \cdot x})}_{=2 \cdot \sinh((a+b) \cdot x)} \underbrace{(-e^{(a-b) \cdot x} + e^{-(a-b) \cdot x})}_{=-2 \cdot \sinh((a-b) \cdot x)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\sinh((a+b) \cdot x) - \sinh((a-b) \cdot x)]. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

## B.5 Ermittlung von Mittelwerten und Gradienten aus den Lösungsfunktionen

Ein Vorteil der analytischen Funktionen ist der verhältnismäßig einfache Zugang zu den abgeleiteten Größen wie dem Massenstrom und den mittleren Temperaturen oder Absorbatmassenanteilen im Film als Funktion der Strömungskordinate. Hierfür müssen die Funktionen der Filmtemperatur und des Filmabsorbatmassenanteils abgeleitet bzw. integriert werden. An dieser Stelle werden diese Umformungen nicht im Einzelnen durchgeführt, sondern anhand der allgemeinen Struktur der Lösungen gezeigt, dass diese Umformungen im Allgemeinen sehr leicht durchzuführen sind.

Die Lösungsfunktionen stellen unendliche Reihen dar, deren Summenglieder gliedweise abgeleitet bzw. integriert werden können:

$$F(\xi, \eta) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cdot f_k(\eta) \cdot f_k(\xi). \quad (\text{B.32})$$

Wird nun die partielle Ableitung der Lösungsfunktion nach der dimensionslosen Filmdickenkoordinate  $\eta$ , z.B. für den Massen- oder Wärmestrom, benötigt, so wird die von der Filmdickenkoordinate abhängige Funktion gliedweise abgeleitet und der Gradient geht in folgende Form über:

$$\left. \frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\xi=\text{const}} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cdot f'_k(\eta) \cdot f_k(\xi) \quad (\text{B.33})$$

$$\text{mit} \quad f'_k(\eta) = \left. \frac{\partial f_k(\eta)}{\partial \eta} \right|_{\xi=\text{const}}. \quad (\text{B.34})$$

Für die Ermittlung des Mittelwertes über der dimensionslosen Filmdickenkoordinate muss integriert werden:

$$\int_0^1 F(\xi, \eta) d\eta = S_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cdot [F_k(\eta)]_0^1 \cdot f_k(\xi) \quad (\text{B.35})$$

$$\text{mit} \quad [F_k(\eta)]_0^1 = \int_0^1 f_k(\eta) d\eta.$$

Z.B wird für die Ermittlung des mittleren Massenstromes bis zu einer bestimmten dimensionslosen Strömungslänge,  $\tilde{\xi}$ , der dimensionslose Stoffgradient an

der Filmoberfläche über die dimensionslose Strömungskordinate integriert:

$$\frac{1}{\tilde{\xi}} \int_0^{\tilde{\xi}} \frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\xi=const} d\xi = \frac{1}{\tilde{\xi}} \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cdot f'_k(\eta) \cdot [F_k(\xi)]_0^{\tilde{\xi}} \quad (\text{B.36})$$

mit  $[F_k(\xi)]_0^{\tilde{\xi}} = \int_0^{\tilde{\xi}} f_k(\xi) d\xi.$

## Literaturverzeichnis

- Anonymous, 1701. Scala grandium caloris. *Philosophical Transactions (of the Royal Society)* 22, 824–829.
- Baehr, H.D., 1955. Die Lösung nicht–stationärer Wärmeleitungsprobleme mit Hilfe der Laplace–Transformation. *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* 21, 33–40.
- Baehr, H.D., 2008. *Wärme- und Stoffübertragung 6.Auflage*. Springer.
- Beutler, A., 1997. Stoff- und Wärmeübergang bei der Rieselfilmabsorption am horizontalen Rohr. Dissertation. München, Techn. Univ.
- Brauner, B., 1991. Non-isothermal vapour absorption into falling film. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 34, 767 – 784.
- Brauner, B., Maron, D.M., Meyerson, H., 1989. Coupled heat condensation and mass absorption with comparable concentrations of absorbate and absorbent. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 32, 1897– 1906.
- Conlisk, A., 1992. Falling film absorption on a cylindrical tube. *AIChE Journal* 38, 1716–1728.
- Conlisk, A., 1995. Analytical solutions for the heat and mass transfer in a falling film absorber. *Chemical Engineering Science* 50, 651–660.
- Conlisk, A., Mao, J., 1996. Nonisothermal Absorption on a horizontal cylindrical tube - 1 . The Film Flow. *Chemical Engineering Science* 51, 1275–1285.
- Davis, P., Polonsky, I., 1970. *Handbook of Mathematical Functions*. volume 9th printing. Dover Publications, Inc. New York.

- Grigor'eva, N., Nakoryakov, V., 1977. Exact solution of combined heat-and mass-transfer problem during film absorption. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 33, 1349–1353.
- Grossman, G., 1983. Simultaneous heat and mass transfer in film absorption under laminar flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 26, 357–371.
- Hajji, A., Worek, W., 1992. Transient heat and mass transfer in film absorption of finite depth with nonhomogeneous boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 35, 2101–2108.
- Hobler, T., 1966. Mass transfer and absorbers. Warsaw: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne , 94–96.
- Honig, G., Hirdes, U., 1984. A method for the numerical inversion of Laplace transforms. *J. Comp. Appl. Math.* 10.
- Ibrahim, G.A., Vinnicombe, G., 1993. A hybrid method to analyse the performance of falling film absorbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 36, 1383–1390.
- Kashiwagi, T., Kurosaki, Y., Nikai, I., 1984. Heat and mass diffusions in the absorption of water vapor by aqueous solution of lithium bromide. *Transactions of the Japan Society of Refrigerating and Air Conditioning Engineers* 1, 89–98.
- Kholpanov, L.P., Malyusov, V.A., Zhavoronkov, N., 1982. Hydrodynamics and heat- and mass transfer in a liquid film in the presence of a gas stream or of surface tension. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering* 16, 201–207.
- Killion, J.D., Garimella, S., 2001. A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling film absorption. *International Journal of Refrigeration* 24, 755–797.
- Kim, K.J., 1992. Heat and Mass Transfer Enhancement in Absorption Cooling. Ph.D. thesis. Arizona State University.

- Knopp, K., 1976. Funktionentheorie I, Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Walter de Gruyter, Berlin New York. 13th edition.
- Le Goff, H., Ramadane, A., Le Goff, P., 1985. Modélisations des transferts couplés de matière et de chaleur dans l'absorption gaz-liquide en film ruisselant laminaire. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 28, 2005–2017.
- Le Goff, H., Ramadane, A., Le Goff, P., 1986. Un modèle simple de la pénétration couplée de chaleur et de matière dans l'absorption gaz-liquide en film ruisselant laminaire. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 29, 625–634.
- Löwer, H., 1960. Thermodynamische und physikalische Eigenschaften der wässrigen Lithiumbromidlösung. Dissertation. Karlsruhe, T.H., F. f. Maschinenw.
- Meyer, T., 2014a. Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminar falling film absorption with uniform film velocity – isothermal and adiabatic wall. *International Journal of Refrigeration* 48, 74 – 86.
- Meyer, T., 2014b. Improvement of the exact analytical solutions for combined heat and mass transfer problems obtained with the Fourier method. *International Journal of Refrigeration* 43, 133 – 142.
- Meyer, T., 2015. Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminar falling film absorption with uniform film velocity - diabatic wall boundary. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 80, 802 – 811.
- Meyer, T., Mittermaier, M., Ziegler, F., 2014. Comparison of Various Methods for Evaluation of Combined Heat and Mass Transfer in Laminar Falling Films with Constant Film Velocity Part II - Analytical methods. *International Sorption Heat Pump Conference 2014, Washington D.C., 31.Mar-2.Apr*.
- Meyer, T., Ziegler, F., 2014. Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminar falling film absorption using first type boundary conditions at the interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 73, 141 – 151.

- Mittermaier, M., Meyer, T., Ziegler, F., 2014. Comparison of Various Methods for Evaluation of Combined Heat and Mass Transfer in Laminar Falling Films with Constant Film Velocity Part I - Numerical method. International Sorption Heat Pump Conference 2014, Washington D.C., 31.Mar-2.Apr .
- Nakoryakov, V., Grigor'eva, N., 1977. Combined heat and mass transfer during absorption in drops and films. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 32, 243–247.
- Nakoryakov, V., Grigor'eva, N., 1980. Calculation of heat and mass transfer in nonisothermal absorption on the initial portion of a downflowing film. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering* 14, 483–488.
- Nakoryakov, V., Grigor'eva, N., 2010. Nonisothermal absorption in thermotransformers. *Journal of Engineering Thermophysics* 19, 196–271.
- Nakoryakov, V., Grigor'eva, N., Potaturkina, L., 1997. Analysis of exact solutions to heat-and mass-transfer problems for absorption with films or streams. *Theoretical foundations of chemical Engineering* 31, 119–126.
- Nusselt, W., 1923. Der Wärmeaustausch am Berieselungskühler. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure* 67, 206–210.
- O'Sullivan, C., 1990. Newton's law of cooling - a critical assessment. *American Journal of Physics* 58, 956–960.
- Othmer, D.F., Frohlich, G.J., 1960. Correlating vapor pressures and heats of solution for the ammonium nitrate – water system: An enthalpy – concentration diagram. *AIChE Journal* 6, 210–214.
- Patnaik, V., Perez-Blanco, H., Miller, W.A., 1994. An empirical methodology for the design of vertical tube absorbers. *Transactions - American Society of Heating Refrigerating and Air Conditioning Engineers* 100, 185–200.
- Patnaik, V., Perez-Blanco, H., Ryan, W., 1993. A simple analytical model for the design of vertical tube absorbers. *Transactions - American Society of Heating Refrigerating and Air Conditioning Engineers* 99, 69–80.
- Rouse Ball, W.W., 1908. A short account of the history of mathematics. Dover Publications, Inc. New York. 4th edition.

- Schwank, F., 1951. Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- Seban, R., 1978. Transport to falling films. Sixth Int. Heat Transfer Conference, Toronto, Aug. 7-11, 6, 417-428.
- van der Wekken, B., Wassenaar, R., 1988. Simultaneous heat and mass transfer accompanying absorption in laminar flow over a cooled wall. International Journal of Refrigeration 11, 70-77.
- Yang, R., Wood, B.D., 1992. A numerical modeling of an absorption process on a liquid film. Solar Energy 48, 195-198.
- Yih, S., Chen, K., 1982. Gas absorption into wavy and turbulent falling liquid films in a wetted-wall column. Chem. Eng. Commun. 17, 123-136.
- Yoon, J.I., Phan, T., Moon, C.G., Lee, H.S., Jeong, S.K., 2008. Heat and mass transfer characteristics of a horizontal tube falling film absorber with small diameter tubes. Heat and Mass Transfer 44, 437-444.
- Ziegler, F., 2010. The multiple meanings of the Stefan-number (and relatives) in refrigeration. International Journal of Refrigeration 33, 1343-1349.