

Technische Universität Berlin
Institut für Mechanik
Fachgebiet Systemdynamik und Reibungsphysik



Tomsk Polytechnic University
Institute of High Technology Physics
Department of High Technology Physics in Mechanical
Engineering



Masterarbeit

Physikalische Ingenieurwissenschaft

Numerische Untersuchung des ebenen, viskoelastischen Stoßes einer Kugel mit einem Halbraum ohne Gleiten

Betreuung Prof. Dr. V. L. Popov
Mitberichter M.Sc. E. Willert
eingereicht von B.Sc. F. Czediwoda, 326648

Berlin, 31. März 2016

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Fabian Czediwoda, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, 31. März 2016

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	II
Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	III
1 Einleitung	1
2 Stand der Forschung	2
2.1 Hertzscher Normalkontakt	2
2.2 Elastische Stöße von Kugeln	4
2.3 Elastomere	7
3 Analytische Modellierung des Stoßes	10
3.1 Lösung der Differentialgleichungen	11
3.2 Bestimmung der Kontaktdauer	12
3.3 Bestimmung der Stoßzahl	13
4 Numerische Modellierung des Stoßes	16
4.1 Methode der Dimensionsreduktion	16
4.2 Kelvin-Voigt-Körper	17
4.3 Standardkörper	23
5 Auswertung	28
5.1 Dimensionslose Parameter	28
5.2 Kelvin-Voigt-Körper	28
5.3 Standardkörper	31
6 Zusammenfassung und Fazit	33
Literatur	34
Anhang	35
A.1 Matlab Skripte	35

Symbolverzeichnis

a	Hertzscher Kontaktradius
c	Schallgeschwindigkeit
D	Durchmesser des Kontaktgebiets
d	maximale Eindrucktiefe
\tilde{d}	Eindrucktiefe
E	Elastizitätsmodul
E^*	effektives Elastizitätsmodul
F	Kraft
G	Schubmodul
G^*	effektives Schubmodul
$J(t)$	Kriechfunktion
k	Federsteifigkeit
K	kinetische Energie
m	Masse
n	Anzahl an Zeitschritten
Q_1, Q_2	dimensionslose Parameter
R	Radius
S	Schwerpunkt
T	Kontaktzeit
U	potentielle Energie
v	Geschwindigkeit
χ	dimensionsloser Parameter
η	Dämpfungskonstante
ε	Verschiebung
μ	Reibkoeffizient
ν	Poisson-Zahl
ω	Winkelgeschwindigkeit
ψ	dimensionsloser Parameter
σ	Spannung
τ	Stoßdauer nach Hertz
Θ	Massenträgheitsmoment

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schiefer, elastischer Stoß einer Kugel auf einen starren Halbraum	5
2.2	Rheologische Modelle	9
3.1	Vereinfachtes lineares Kontaktmodell mit Freischnitt	10
3.2	Stoßfunktion e_z über das Dämpfungsverhältnis δ_z/ω_0 für das vereinfachte, lineare Kontaktmodell	15
4.1	Indentierung der Parabel in eine Winklersche Bettung aus Kelvin-Voigt-Elementen	17
4.2	Normierte Geschwindigkeiten v_z , v_x und ω der Kugel während des Stoßes auf eine Bettung aus Kelvin-Voigt-Elementen	20
4.3	Struktogramm des numerischen Lösers	21
4.4	Konvergenzanalyse der numerischen Lösung für den elastischen Stoß und Ver- gleich zu der analytischen Lösung	22
4.5	Normierter Spannungsverlauf des Standardmodells nach Gl. (4.38) für $G_1 = G_2$ und $G_2/\eta = 15$	25
5.1	Funktionswerte der Stoßfunktion e_x , e_z für zufallsgenerierten Parameter Q_1 .	29
5.2	Stoßfunktion e_z über Q_1 für $\nu = 0,5$ und $\nu = 0$ und analytisches e_z aus Gl. (3.45)	30
5.3	Kurvenschar der Stoßfunktion e_x über Q_1 für $\nu = 0$, $\nu = 0,25$ und $\nu = 0,5$. .	30
5.4	Stoßfunktion e_z über Q_1 für verschiedene Q_2 und Kelvin-Voigt-Körper	32
5.5	Stoßfunktion e_x über Q_1 für verschiedene Q_2 und Kelvin-Voigt-Körper	32

Tabellenverzeichnis

4.1	Abweichung der Endgeschwindigkeit der numerischen von der analytischen Lösung in Abhängigkeit von n	23
-----	--	----

1 Einleitung

Kontaktprobleme zwischen dreidimensionalen Körpern treten in vielen unterschiedlichen technischen Anwendungen, wie in Rad-Schiene-Systemen, Kupplungen, Bremsen und Reifen auf. Ihre Beschreibung stellt eine Herausforderung dar, da weder die Spannungsverteilung im Kontakt noch die Verschiebungen a priori bekannt sind. Durch die kontinuierliche Änderung des Kontaktgebiets sind die Kontaktsteifigkeiten und Spannungen dort zudem nichtlinear. Bei einem Kontakt mit viskoelastischen Materialien, also Elastomeren, ist das Materialverhalten zeitabhängig. Vergangene Verformungen oder Spannungen beeinflussen direkt das Schubmodul. Sie müssen daher bekannt sein, um den Momentanzustand des viskoelastischen Körpers berechnen zu können. Elastomere werden wegen ihrer starken Deformierbarkeit und ihren großen Reib- und Haftkräften beispielsweise für Reifen oder Dichtungen verwendet. Das Ziel dieser Arbeit bestand darin, ein dynamisches Kontaktproblem, nämlich den ebenen Stoß einer Kugel auf einen Halbraum, unter Beachtung der viskoelastischen Materialeigenschaften und des Einflusses der Tangentialbewegung, zu lösen. Die Verwendung einer Kugel bietet sich hierbei an, da sie durch ihre Symmetrie die Einbeziehung der Tangentialbewegung und des kinematischen Rollens vereinfacht. Ihre Geometrie ist unabhängig von rotatorischen Verschiebungen. Als weitere Annahme wurde davon ausgegangen, dass kein Gleiten stattfindet, der Kontakt quasistationär ist und die Halbraumnäherung erfüllt ist.

Zunächst wurde der Stand der Forschung dokumentiert, um eine historische und methodische Einordnung der Arbeit zu erlauben. Daraufhin wurde ein vereinfachtes Modell analytisch gelöst, um Aufschluss über die Form der Lösung zu erlangen. Im Anschluss daran wurde das Stoßproblem numerisch, unter Verwendung der Methode der Dimensionsreduktion (MDR), gelöst. Die MDR bietet gegenüber anderen Methoden den Vorteil, dass sie einen dreidimensionalen Kontakt durch die Indentierung eines Profils in eine eindimensionale Anordnung von unabhängigen Feder- und Dämpferelementen exakt abbilden kann. Durch diese eindimensionale Diskretisierung des Kontinuums und durch die unabhängigen Freiheitsgrade reduziert sich der Berechnungsaufwand deutlich. Hierbei wurde aufgrund seiner einfachen Handhabung zunächst der Kelvin-Voigt-Körper und anschließend der allgemeinere Standardkörper betrachtet. An die numerische Lösung schließt sich mit der Einführung von dimensionslosen Parametern, für eine kompakte Darstellung aller Einflussgrößen, die Auswertung der Ergebnisse an. Den Abschluss bildet eine Zusammenfassung der Ergebnisse und deren Bewertung.

2 Stand der Forschung

Grundlegende Arbeiten zur Kontaktmechanik zwischen zwei ideal elastischen, elliptischen Körpern wurden von HERTZ verfasst. In [Her82] löste er das reibungsfreie Normalkontaktproblem zwischen diesen Körpern und entwickelte darauf aufbauend die Theorie für gerade Stöße. Aus diesen Arbeiten lassen sich die Spannungen und Verschiebungen in den Körpern und die Dauer des Stoßes berechnen. Der Betrachtung statischer, tangentialer Kontakte zwischen zwei ideal elastischen Kugeln durch MINDLIN in [Min49] und MINDLIN und DERESIEWICZ in [MD53], folgte die Lösung eines elastischen Tangentialstoßes durch MAW, BARBER und FAWCETT in [MBF76], [Maw77] und [MBF81]. Hierbei wurde anstatt des Stoßes zweier Kugeln aufeinander, der Stoß einer Kugel auf einen Halbraum betrachtet, was keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt, solange die Halbraumnäherung erfüllt ist. Das einfache Kontaktproblem zwischen viskoelastischen Körpern wurde von LEE und RADOK in [LR60] analytisch gelöst. Aufbauend auf den bisher geleisteten Arbeiten soll damit eine Grundlage für die Betrachtung des viskoelastischen Stoßes geschaffen werden.

2.1 Hertzscher Normalkontakt

Die Lösung des klassischen Kontaktproblems, der Normalkontakt zwischen zwei ideal elastischen, elliptischen Körpern, geht auf die Arbeit von HERTZ in [Her82] zurück. Die Betrachtung der elastischen Lösung stellt eine Abschätzung und Kontrolle für den viskoelastischen Fall dar und wurde im Folgenden durchgeführt.

2.1.1 Berechnung der Größe des Kontaktgebiets nach Hertz

Damit die Halbraumnäherung gültig ist, muss das Kontaktgebiet mit Radius a deutlich kleiner sein als der Krümmungsradius der Kugel, $a \ll R$. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man die Oberflächen der Körper im Kontaktgebiet in erster Näherung als eben betrachten. Dies erklärt auch die oben erwähnte Äquivalenz des Kontakts zweier Kugeln und einer Kugel mit einem Halbraum. Um zu überprüfen, ob diese Annahme bei den gegebenen Materialwerten und Anfangsbedingungen erfüllt ist, wird der Kontaktradius mit der Hertzschen Kontakttheorie berechnet. Sie gilt zwar nur für elastische Kontakte, stellt aber eine obere Abschätzung für viskoelastische Halbräume dar. Da bei einem viskoelastischen Stoß ein Teil der kinetischen Energie dissipiert, ist eine kleinere Eindringtiefe und somit ein kleinerer Kontaktradius zu erwarten. Dies soll im Folgenden erläutert werden. Es gilt für den Kontaktradius nach [Her82]

$$a = \sqrt{Rd} \quad (2.1)$$

und für die Normalkraft

$$F_N(d) = \frac{4}{3} E^* \sqrt{Rd^3}, \quad (2.2)$$

mit dem Kugelradius R , Eindringtiefe d und dem effektiven E-Modul

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (2.3)$$

mit dem E-Modul E und der Poisson-Zahl ν . Für die potentielle Energie folgt aus

$$\frac{\partial U}{\partial d} = F_N \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow U = \frac{8}{15} E^* \sqrt{Rd^5}. \quad (2.5)$$

Die kinetische Energie einer Kugel mit Masse m und der Geschwindigkeit v ist

$$K = \frac{m}{2} v^2. \quad (2.6)$$

Da bei einem ideal elastischen Stoß davon ausgegangen wird, dass keine Energie dissipiert, muss die kinetische Energie bis zum Umkehrpunkt des Stoßes vollständig in potentielle Energie übergehen. Hierbei wird indirekt die Annahme getroffen, dass der Stoß quasistationär ist und keine Energiedissipation durch die Ausbreitung elastischer Wellen im Kontinuum stattfindet. Die Quasistationarität wird in Kap. 4.1 näher erklärt. Es gilt

$$U = K, \quad (2.7)$$

$$\frac{8}{15} E^* \sqrt{Rd^5} = \frac{m}{2} v_{z0}^2 \quad (2.8)$$

und mit Gl. (2.1) ergibt sich der maximale Kontaktradius

$$a = \left(\frac{15m v_{z0}^2 R^2}{16E^*} \right)^{1/5}. \quad (2.9)$$

2.1.2 Berechnung der Kontaktdauer nach Hertz

Für die Berechnung der Kontaktdauer wird der Zusammenhang genutzt

$$\frac{8}{15} E^* \sqrt{Rd^5} = \frac{8}{15} E^* \sqrt{R\tilde{d}^5} + \frac{m}{2} v_z^2, \quad (2.10)$$

mit der aktuellen Eindringtiefe \tilde{d} , der maximalen Eindringtiefe d und der Momentangeschwindigkeit v_z . Dies führt auf

$$v_z^2 = \underbrace{\frac{16 E^* R^{1/2}}{15 m}}_{v_{z0}^2} d^{5/2} \left(1 - \left(\frac{\tilde{d}}{d} \right)^{5/2} \right) \quad (2.11)$$

$$v_z(\tilde{d}) = v_{z0} \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{d}}{d} \right)^{5/2}}. \quad (2.12)$$

Die Kontaktzeit für den Stoß, bei der die Eindringtiefe von 0 bis d ansteigt und wieder abnimmt, berechnet sich zu

$$\tau = 2 \int_0^d \frac{1}{v_z(\tilde{d})} d\tilde{d}. \quad (2.13)$$

Durch Einsetzen der Gl. (2.12) und Substitution mit $\xi(\tilde{d}) = \frac{\tilde{d}}{d}$ ergibt sich

$$\tau = 2 \int_0^1 \frac{d}{v_{z0} \sqrt{1 - \xi^{5/2}}} d\xi \quad (2.14)$$

und für die Stoßdauer folgt

$$\tau \approx \frac{2,94d}{v_{z0}}, \quad (2.15)$$

mit der maximalen Eindringtiefe aus Gl. (2.8)

$$d = \left(\frac{15}{16} \frac{mv_{z0}^2}{E^* R^{1/2}} \right)^{2/5}. \quad (2.16)$$

Für den gedämpften Fall wird zwar eine kleinere Eindringtiefe erwartet, jedoch hilft die Abschätzung den Zeitraum und die Schrittweite der Diskretisierung für die numerische Integration festzulegen. Tatsächlich wird sich herausstellen, dass auch die Stoßzeit bei Dämpfung stets kleiner ist. Darauf wird in Kap. 5.2 näher eingegangen.

2.2 Elastische Stöße von Kugeln

2.2.1 Klassische Stoßtheorie

Die klassische Stoßtheorie der Kinetik für einen schiefen, elastischen Stoß, wie in Abb. 2.1 dargestellt, basiert auf den Drehimpuls- und Impulserhaltungssätzen

$$m(v_x - v_{x0}) = -\hat{F}_x \quad (2.17)$$

$$m(v_z + v_{z0}) = -\hat{F}_z \quad (2.18)$$

$$\Theta_S(\omega - \omega_0) = -R\hat{F}_x \quad (2.19)$$

mit

$$\hat{F}_i = \int_{t_0}^t F_i dt. \quad (2.20)$$

Aus Gl. (2.17) und (2.19) ergibt sich der allgemein gültige Zusammenhang

$$v_x - v_{x0} = \frac{\Theta_S}{mR}(\omega - \omega_0). \quad (2.21)$$

Die klassische Stoßtheorie berechnet die Endgeschwindigkeiten nur anhand globaler Eigenschaften, wie Anfangsgeschwindigkeit und Masse. Hierbei werden die real auftretenden lokalen Verformungen im Kontaktgebiet der Körper nicht betrachtet. Um die Gleichungen zu lösen, muss daher die Stoßzahl e für das vorliegende System mit all seinen charakteristischen Größen in normaler und tangentialer Richtung bekannt sein. Mit der Annahme der Starrkörperbewegung wird im Falle des vollständigen Haftens im Kontaktpunkt die vereinfachende Annahme

$$v_z + R\omega = 0 \quad (2.22)$$

getroffen. Wie LYASHENKO und POPOV in [LP15] anmerken, steht diese Annahme im Widerspruch zu dem elastischen Verhalten der Körper. Die Annahme ist somit nicht für die gesamte Kontaktzeit gültig, sondern nur zu einem Zeitpunkt, welcher nicht zwangsläufig der Endzeitpunkt des Stoßes ist. Weitere Beispiele zu der Berechnung von Stößen im Rahmen der Starrkörperkinetik finden sich in [GHSW15, Kap. 3].

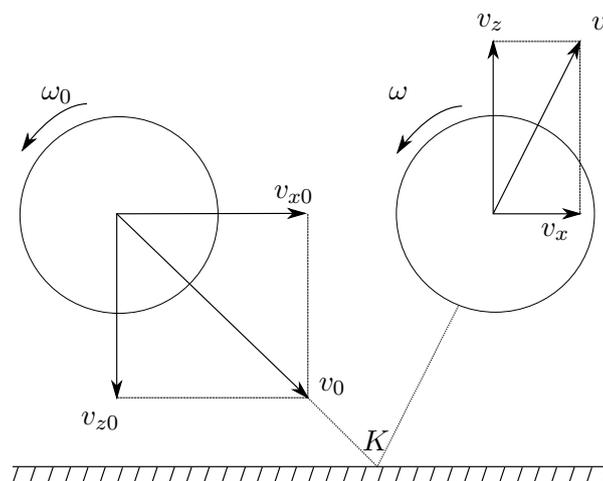


Abbildung 2.1: Schiefer, elastischer Stoß einer Kugel auf einen starren Halbraum

2.2.2 Schiefe, elastische Stöße mit Tangentialbewegung und Gleiten

Eine Erweiterung der Hertzischen Kontakttheorie für den schiefen, elastischen Stoß und den Einfluss tangentialer Bewegungen wurde von MAW, BARBER und FAWCETT in [MBF76], [Maw77] und [MBF81] untersucht. Hierbei nutzten sie die statische Lösung des Tangentialkontakts von CATTANEO [Cat38], MINDLIN [Min49] und MINDLIN, DERESIEWICZ in [MD53]. Diese statische Lösung beschreibt das Verhalten von zwei identischen Kugeln, die unter einer konstanten Normalkraft aufeinander gepresst sind und anschließend einer steigenden Tangentialkraft ausgesetzt werden (vgl. [Jae94]). MAW, BARBER und FAWCETT stellten die Tangentialkraft während des Stoßes in Abhängigkeit von den zwei dimensionslosen Parametern χ und ψ dar. Die erste dimensionslose Variable $\chi = \frac{(1-\nu)(1+mR^2/\Theta)}{2-\nu}$ enthält das sogenannte „Mindlin-ratio“, das Verhältnis zwischen Tangential- und Normalkontaktsteifigkeit $2G^*a/2E^*a$.

Θ stellt hierbei das Massenträgheitsmoment dar. Für die zweite dimensionslose Koordinate $\psi = \frac{2(1-\nu)}{\mu(2-\nu)} \frac{v_x}{v_{z0}}$, die von dem Verhältnis der Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit v_x/v_{z0} , dem Reibkoeffizienten μ und der Querkontraktionszahl ν abhängt, wurden drei unterschiedliche Bereiche eines Stoßes dargestellt. Diese dimensionslose Koordinate ψ kann als normierter Stoßwinkel aufgefasst werden. Bei kleinen Stoßwinkeln liegt Haften im Kontaktgebiet vor. Kurz vor dem Umkehrpunkt des Stoßes kommt es in einem äußeren Ring des Gebiets zum Mikro-Gleiten („microslip“). Wenn sich das Kontaktgebiet auf dem Rückweg verringert, setzt sich das ringförmige Gleitgebiet fort, indem sich der innere Radius soweit verkleinert bis es das gesamte Kontaktgebiet umfasst und der gesamte Körper gleitet („gross-slip“). Für große Winkel verhält es sich umgekehrt, es liegt zuerst „gross-slip“ und eine Reibkraft vor, die der Bewegungsrichtung entgegenwirkt. Wenn sich die Gleitgeschwindigkeit auf Null reduziert, liegt sofort komplette Haftung vor, bis sich am Rande des Kontaktgebiets wieder ringförmige Gleitgebiete ausbilden. Bei noch größeren Winkeln, also einem sehr flachen Aufprall liegt nur noch „gross-slip“ vor. Weiterhin wurde das zeitliche Verhalten der wirkenden Tangentialkraft untersucht und es wurde gezeigt, dass sie während des Stoßvorgangs eine ganze Periode durchläuft, wobei der Punkt, an dem die Kraft ihr Vorzeichen ändert mit steigendem ψ nach hinten verschoben wird. Es wurde grundsätzlich von einer Stoßzahl in normaler Richtung gleich Eins ausgegangen, also einem voll elastischen Stoß. Die numerischen Untersuchungen wurden anschließend durch experimentelle Versuche bestätigt.

2.2.3 Numerische Betrachtung

In [LP15] wurde der schiefe, elastische Stoß einer Kugel auf einen Halbraum ohne Gleiten betrachtet, da eine exakte analytische Lösung dieses Kontaktproblems bisher nur für den Fall des vollständigen Gleitens vorhanden ist. Zunächst wurde ein vereinfachtes Modell mit konstanter Kontaktsteifigkeit gelöst, welches Aufschluss über die Lösung und mögliche dimensionslose Koordinaten gibt. Die Ergebnisse dieses Modells zeigten, dass alle den Stoß beschreibende Parameter nur explizit vom „Mindlin-ratio“, also dem Verhältnis zwischen der vertikalen und tangentialen Kontaktsteifigkeit $k_x/k_z = 2G^*a/2E^*a$, abhängen. Dies steht im Einklang mit den Untersuchungen in [MBF81]. Weiterhin wurde die kinematische Rollbedingung $v_x + R\omega = v_{x,ges}$ beachtet, welche die Verschiebung im Kontaktpunkt als Summe der Schwerpunktverschiebung und der Starrkörperrotation darstellt. Danach wurde das Kontaktproblem numerisch mit der Methode der Dimensionsreduktion (MDR) untersucht [PH13]. Die Methode stellt eine exakte Lösung des dreidimensionalen Kontaktproblems dar, indem es in einen Kontakt zwischen einer veränderten Profilform des rotationssymmetrischen Körpers und einer linear elastischen Bettung unabhängiger Federn überführt wird. Die aus dem vereinfachten Modell hergeleitete These, dass alle den Stoß beschreibenden Parameter nur explizit vom „Mindlin-ratio“ abhängen, wurde durch die numerische Untersuchung belegt. Die MDR verringert durch ihre eindimensionale Diskretisierung des Kontinuums und durch die unabhängigen Freiheitsgrade der Federelemente den Rechenaufwand. Mit ausreichend kleiner Zeitschrittweite konnte daher für die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen

das Eulersche Polygonzugverfahren implementiert werden, so dass die Lösung stabil ist.

2.3 Elastomere

Viskoelastische Materialien, wie Gummi und andere Elastomere, werden in der Technik genutzt, wenn eine starke Deformierbarkeit sowie große Haft- und Reibkräfte nötig sind. Ein kleines Elastizitätsmodul von 1-10 MPa und ihre große Verformbarkeit liegen in ihrer Struktur aus Polymermolekülen begründet. Diese beginnen sich unter einer angelegten Spannung zu entflechten, wobei einem vollständigen Auseinanderlaufen Schwefelbrücken entgegenwirken, die bei der Herstellung von Gummi im Vulkanisationsprozess entstehen [Pop10, Kap. 15].

2.3.1 Zeit- und frequenzabhängiger Schubmodul

Anders als bei Festkörpern ist das materialspezifische Schubmodul bei Elastomeren zeitabhängig. Wird ein Gummiblock schnell um ε_0 deformiert, so schnellt die Spannung auf einen hohen Wert $\sigma(t = 0)$, um dann mit fortschreitender Zeit exponentiell, abhängig vom Elastomer teilweise um mehrere Größenordnungen, abzunehmen. Das Schubmodul wird während dieses sehr kurzen Zeitraums, in dem das Elastomer ein solches Festkörperverhalten aufweist, daher auch Glasmodul genannt. Dagegen beschreibt das statische Schubmodul das Materialverhalten nach einer langen Wartezeit, in der die Polymerketten sich entflochten haben. Die auf eine konstante Verschiebung ε_0 bezogene Spannung wird als zeitabhängiger Schubmodul bezeichnet [Pop10, S. 237]

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \quad (2.23)$$

Da diese Größe das zeitliche Abklingen der Spannung beschreibt, ist auch die Bezeichnung Relaxationsfunktion geläufig (siehe [GHW14, S. 329]). Die Dehnung $\varepsilon(t)$ bezogen auf eine konstante Spannung σ_0 , aus einer zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgebrachten Belastung, wird als Kriechfunktion bezeichnet und beschreibt die zeitliche Verzögerung der Dehnung

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}. \quad (2.24)$$

Der Gummiblock wird nun kontinuierlich mit einer beliebigen Verschiebung $\varepsilon(t)$ deformiert, die nach [Pop10, S. 237] als „elementare Stufenfunktion“ mit der Amplitude $d\varepsilon(t') = \dot{\varepsilon}(t')dt'$ zum Zeitpunkt t' dargestellt werden kann. Die zu t' eingebrachte Spannung $d\sigma = G(t - t')\dot{\varepsilon}(t')dt'$ führt auf die gesamte Spannung

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - t')\dot{\varepsilon}(t')dt'. \quad (2.25)$$

Dies bedeutet, dass vergangene Verformungen Einfluss auf die aktuelle Spannung haben, weshalb $G(t)$ auch Gedächtnisfunktion genannt wird. Findet nun eine harmonische Deformation

mit der Frequenz ω statt, so lässt sich diese mit der Eulerformel schreiben als

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (2.26)$$

Durch Aufteilen der komplexen Schwingung, einsetzen in Gl. (2.25) und die Substitution $\xi = t - t'$ lässt sich die Spannung nach [Pop10, S. 239] als komplexe Größe schreiben

$$\sigma(t) = \hat{G}(\omega) \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} = \hat{G}(\omega) \varepsilon(t), \quad (2.27)$$

mit dem komplexen Schubmodul

$$\hat{G}(\omega) = i\omega \int_0^\infty G(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (2.28)$$

Der Realteil des komplexen Schubmoduls $G'(\omega) = \Re \hat{G}(\omega)$ wird als Speichermodul bezeichnet und der Imaginärteil $G''(\omega) = \Im \hat{G}(\omega)$ als Verlustmodul [Pop10, S. 239]. Es lässt sich zeigen, dass der Realteil die linear-elastischen Materialeigenschaften eines Festkörpers und der Imaginärteil die linear-viskosen Eigenschaften einer Flüssigkeit darstellen.

Da die Relaxationszeit mehrere Größenordnungen umfasst, ist experimentell nicht möglich das komplexe und das zeithabhängige Schubmodul zu bestimmen. Hierbei wird sich die starke Temperaturabhängigkeit der Module zunutze gemacht, indem bei unterschiedlichen Temperaturen die Spannungsrelaxation für praktisch umsetzbare Zeiträume gemessen wird. Im logarithmischen Maßstab können diese Kurven dann um einen Betrag $\log(\tau(T_2)/\tau(T_1))$ auf der Zeit- bzw. Frequenzachse verschoben werden (vgl. [Pop10, S. 248f.]). Somit ist es möglich eine sogenannte Masterkurve zusammenzustellen, die die Spannungsrelaxation über Zeiträume wiedergibt, welche „vom Millisekunden-Bereich bis Jahre“ [Pop10, S. 249] reichen.

2.3.2 Modellrheologie

Die rheologischen Modelle zur Beschreibung viskoelastischer Materialien setzen sich aus linearen Feder- und Dämpferelementen in geeigneter Kombination zusammen. Sie diskretisieren viskoelastische Körper und beschreiben das Materialverhalten dadurch sehr anschaulich. Wie in Abb. 2.2 dargestellt, besteht der Kelvin-Voigt-Körper aus einer Feder und einem Dämpfer in Parallelschaltung und der Maxwell-Körper aus einer Feder und einem Dämpfer in Reihe geschaltet. Während ein Kelvin-Voigt-Körper bei einem Spannungssprung ein flüssigkeitsartiges Anfangsverhalten aufweist, strebt die Dehnung einem endlichen Wert zu, weshalb das Endverhalten dem eines Festkörpers entspricht. Ein Maxwell-Körper verhält sich genau umgekehrt. Die Spannung erzeugt eine sprunghafte Dehnung der Feder, wie bei einem Festkörper. Anschließend dehnt sich nur noch der Dämpfer und das Endverhalten ist flüssigkeitsartig [GHW14, Kap. 6.2]. Ein Modell, welches das Verhalten eines Elastomers allgemeiner als die beiden genannten Spezialfälle beschreiben kann, ist der lineare Standardkörper. Er besteht aus einem Maxwell-Element parallel zu einer weiteren Feder (siehe Abb. 2.2 c).

Für die weiteren Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wurde für die Darstellung des visko-

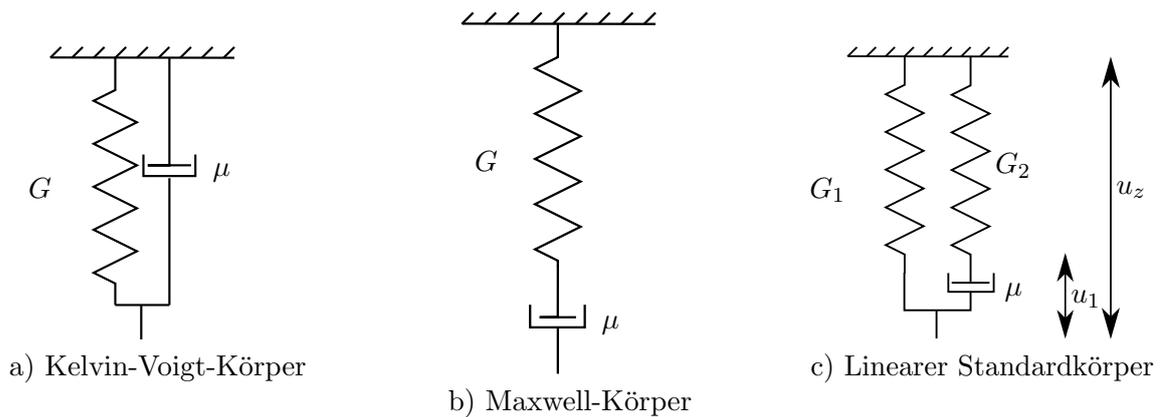


Abbildung 2.2: Rheologische Modelle

elastischen Halbraums zunächst das Kelvin-Voigt-Modell und anschließend das Standardmodell benutzt.

2.3.3 Viskoelastisches Kontaktproblem

Eine Methode zur Lösung viskoelastischer Kontaktprobleme wurde 1960 von LEE und RADOK veröffentlicht [LR60]. Dabei werden die viskoelastischen Materialeigenschaften zunächst durch elastische ersetzt. Die Lösung des elastischen Problems kann berechnet werden und durch eine anschließende Rücksubstitution der viskoelastischen Materialparameter im Laplace-Bereich erhält man die viskoelastische Lösung. Die Methode hat allerdings Einschränkungen. Sie gilt nur für eine reine Indentierung ohne Tangentialbewegung, nur für glatte Oberflächen und auch nur für einen zunehmenden Kontaktbereich. Die Lösung für den Rückstoß ist fehlerbehaftet, da eine Gesamtkraft von Null, bei der das Ende des Kontakts angenommen wird, durch die Summe von Zug- und Druckkräften erreicht wird. Für unterschiedliche, die Indentierung beschreibende Parameter, wie Geschwindigkeit oder Eindringtiefe, wurde das viskoelastische Materialverhalten untersucht. So verhält sich das Material bei einem ersten Kontakt elastisch, was bereits zuvor als Glasmodul beschrieben wurde. Bei konstanter Eindringtiefe relaxiert das Material nach und nach bis die Spannung Null beträgt. Wird der Indenter entfernt, bleibt eine konstante plastische Deformation bestehen.

3 Analytische Modellierung des Stoßes

Um Aufschluss über die mögliche Struktur einer numerischen Lösung des Stoßvorgangs zu erhalten, wird zunächst der lineare Kontakt als vereinfachtes Modell herangezogen und die Bewegungsgleichungen analytisch gelöst. Wie in Abb. 3.1 zu sehen ist, wird angenommen, dass die Kugel auf ein einzelnes Kelvin-Voigt-Element mit den Normal- und Tangentialmodulen für die Feder und den Dämpfer k_z, k_x, η_z, η_x stößt. Der Schwerpunkt- und Drallsatz liefern folgende Bewegungsgleichungen

$$\sum F_x : m\ddot{u}_x + F_f = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum F_z : m\ddot{u}_z + F_n = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum M^{(S)} : \Theta_s \dot{\omega} + F_f R = 0. \quad (3.3)$$

Aus dem Freischnitt Abb. (3.1, rechts) ergeben sich die Kräfte in vertikaler und tangentialer Richtung

$$F_f = u_{x,k} k_x + \dot{u}_{x,k} \eta_x \quad (3.4)$$

$$F_n = u_z k_z + \dot{u}_z \eta_z. \quad (3.5)$$

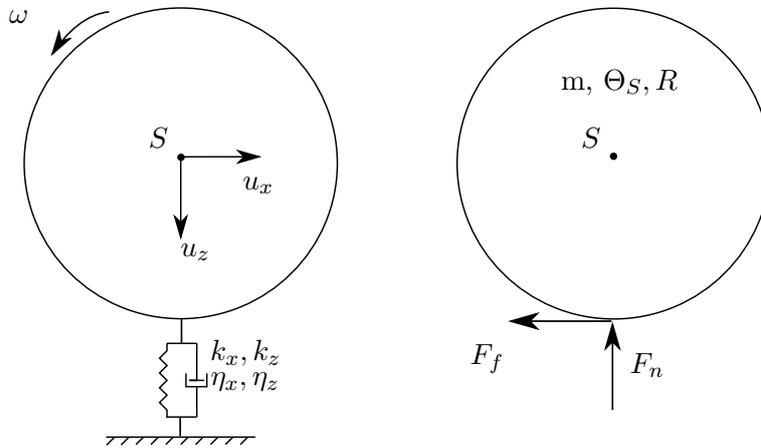


Abbildung 3.1: Vereinfachtes lineares Kontaktmodell mit Freischnitt

Da von einem kleinen Kontaktgebiet ausgegangen wird, gilt für die horizontale Geschwindigkeit im Kontaktpunkt die kinematische Beziehung

$$\dot{u}_{x,k} = \dot{u}_x + R\omega. \quad (3.6)$$

Die Anfangsbedingungen für den Stoß sind gegeben als

$$u_x(t=0) = 0, \dot{u}_x(t=0) = v_{x0} \quad (3.7)$$

$$u_z(t=0) = 0, \dot{u}_z(t=0) = v_{z0} \quad (3.8)$$

$$\varphi(t=0) = 0, \dot{\varphi}(t=0) = \omega_0. \quad (3.9)$$

Die Bewegungsgleichungen (3.1-3.3) lauten demnach

$$m\ddot{u}_x + (u_x + R\varphi)k_x + (\dot{u}_x + R\dot{\varphi})\eta_x = 0 \quad (3.10)$$

$$m\ddot{u}_z + u_zk_z + \dot{u}_z\eta_z = 0 \quad (3.11)$$

$$\Theta_S\ddot{\varphi} + (u_x + R\varphi)k_xR + (\dot{u}_x + R\dot{\varphi})\eta_xR = 0. \quad (3.12)$$

Mit $\frac{k_i}{m} = \omega_i^2$ und $\frac{\eta_i}{m} = 2\delta_i$ ergibt sich

$$\ddot{u}_x = -(u_x + R\varphi)\omega_x^2 - (\dot{u}_x + R\dot{\varphi})2\delta_x \quad (3.13)$$

$$\ddot{u}_z = -u_z\omega_z^2 - \dot{u}_z2\delta_z \quad (3.14)$$

$$\ddot{\varphi} = -(u_x + R\varphi)\frac{k_xR}{\Theta_S} - (\dot{u}_x + R\dot{\varphi})\frac{\eta_xR}{\Theta_S}. \quad (3.15)$$

3.1 Lösung der Differentialgleichungen

Zunächst wird die homogene DGL zweiter Ordnung (3.14) für die Bewegung in z -Richtung gelöst, da diese entkoppelt von den anderen beiden Bewegungen stattfindet. Dazu wird der Exponentialansatz $x = Ae^{\lambda t}$ genutzt.

Mit $\tilde{\omega}_z = \sqrt{\omega_z^2 - \delta_z^2}$ lautet die Lösung der DGL

$$u_z(t) = e^{-\delta_z t}(A \cos(\tilde{\omega}_z t) + B \sin(\tilde{\omega}_z t)), \quad (3.16)$$

$$\dot{u}_z(t) = -\delta_z e^{-\delta_z t}(A \cos(\tilde{\omega}_z t) + B \sin(\tilde{\omega}_z t)) + e^{-\delta_z t}(-A\tilde{\omega}_z \sin(\tilde{\omega}_z t) + B\tilde{\omega}_z \cos(\tilde{\omega}_z t)). \quad (3.17)$$

Mit den Anfangsbedingungen sind die Konstanten

$$u_z(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad (3.18)$$

$$\dot{u}_z(t=0) = v_{z0} \Rightarrow B = \frac{v_{z0}}{\tilde{\omega}_z} \quad (3.19)$$

und somit

$$u_z(t) = e^{-\delta_z t} \left(\frac{v_{z0}}{\tilde{\omega}_z} \sin(\tilde{\omega}_z t) \right), \quad (3.20)$$

$$\dot{u}_z(t) = e^{-\delta_z t} \left(\tilde{\omega}_z \cos(\tilde{\omega}_z t) - \delta_z \sin(\tilde{\omega}_z t) \right). \quad (3.21)$$

Um die gekoppelten Differentialgleichungen für die Tangentialbewegung (3.13) und die Rotation (3.15) zu lösen, wird im Kontaktpunkt die kinematische Beziehung aus Gl. (3.6) herangezogen.

Es gilt

$$\ddot{u}_{x,k}(t) = \ddot{u}_x(t) + R\ddot{\varphi}. \quad (3.22)$$

In Gl. (3.22) werden die Gl. (3.13) und (3.15) eingesetzt

$$\ddot{u}_{x,k}(t) = -u_{x,k}\omega_x^2 - \dot{u}_{x,k}2\delta_x - u_{x,k}\frac{k_x R^2}{\Theta_S} - \dot{u}_{x,k}\frac{\eta_x R^2}{\Theta_S} \quad (3.23)$$

$$= u_{x,k}\left(-\omega_x^2 - \frac{k_x R^2}{\Theta_S}\right) + \dot{u}_{x,k}\left(-2\delta_x - \frac{\eta_x R^2}{\Theta_S}\right). \quad (3.24)$$

Mit dem Massenträgheitsmoment der Kugel $\Theta_S = \frac{2}{5}mR^2$ lässt sich schreiben

$$\ddot{u}_{x,k} = -u_{x,k}\frac{7k_x}{2m} - \dot{u}_{x,k}\frac{7\eta_x}{2m}. \quad (3.25)$$

Die homogene DGL wird wie zuvor gelöst, wobei $\frac{7\eta_x}{2m} = 2\delta_{x,k}$ und $\frac{7k_x}{2m} = \omega_{x,k}^2$ sind. Der Exponentialansatz liefert somit

$$\lambda^2 + 2\delta_{x,k}\lambda + \omega_{x,k}^2 = 0 \quad (3.26)$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta_x \pm i\tilde{\omega}_x, \quad (3.27)$$

mit $\tilde{\omega}_x = \sqrt{\omega_{x,k}^2 - \delta_{x,k}^2}$.

Mit den Anfangsbedingungen $u_{x,k}(t=0) = 0$ und $\dot{u}_{x,k}(t=0) = v_{x0} + R\omega_0$ ergibt sich

$$u_{x,k}(t) = e^{-\delta_x t} \frac{v_{x0} + R\omega_0}{\tilde{\omega}_x} \sin(\tilde{\omega}_x t), \quad (3.28)$$

$$\dot{u}_{x,k}(t) = e^{-\delta_x t} \frac{v_{x0} + R\omega_0}{\tilde{\omega}_x} (\tilde{\omega}_x \cos(\tilde{\omega}_x t) - \delta_x \sin(\tilde{\omega}_x t)). \quad (3.29)$$

3.2 Bestimmung der Kontaktdauer

Aus der Kontaktbedingung $F_n = F_{kz} + F_{\eta z} > 0$ lässt sich der letzte Kontaktzeitpunkt t^* ermitteln. Anschaulich betrachtet bleibt die Kugel solange mit dem Kelvin-Voigt-Element in Kontakt, wie die Summe aus Federkraft F_{kz} und Dämpferkraft $F_{\eta z}$ in normaler Richtung positiv ist. Bei negativem Vorzeichen wird die Kugel zur Oberfläche hingezogen; da aber keine Adhäsion betrachtet wird, soll dies den Zeitpunkt beschreiben, an dem die Kugel mit einer Geschwindigkeit $\dot{u}_z(t=t^*)$ abprallt. Es gilt

$$F_n = k_z u_z(t^*) + \eta_z \dot{u}_z(t^*) = 0 \quad (3.30)$$

und durch Einsetzen von Gl. (3.20) und (3.21) folgt

$$-e^{-\delta_z t^*} \frac{v_{z0}}{\tilde{\omega}_z} [k_z \sin(\tilde{\omega}_z t^*) + \eta_z (\tilde{\omega}_z \cos(\tilde{\omega}_z t^*) - \delta_z \sin(\tilde{\omega}_z t^*))] = 0 \quad (3.31)$$

$$k_z \sin(\tilde{\omega}_z t^*) + \eta_z (\tilde{\omega}_z \cos(\tilde{\omega}_z t^*) - \delta_z \sin(\tilde{\omega}_z t^*)) = 0. \quad (3.32)$$

Für $\tilde{\omega}_z t^* \neq i\pi$ mit $i \in \mathbb{N}$ folgt

$$0 = k_z + \eta_z \tilde{\omega}_z \frac{\cos(\tilde{\omega}_z t^*)}{\sin(\tilde{\omega}_z t^*)} - \eta_z \delta_z \quad (3.33)$$

$$\cot(\tilde{\omega}_z t^*) = \frac{\eta_z / (m \delta_z) - k_z / m}{\eta_z / (m \tilde{\omega}_z)} \quad (3.34)$$

$$\cot(\tilde{\omega}_z t^*) = \frac{2\delta_z^2 - \omega_z^2}{2\delta_z \tilde{\omega}_z} \quad (3.35)$$

$$\tan(\tilde{\omega}_z t^*) = \frac{2\delta_z \tilde{\omega}_z}{2\delta_z^2 - \omega_z^2}. \quad (3.36)$$

Somit ist der Zeitpunkt des letzten Kontakts zwischen der Kugel und dem Kelvin-Voigt-Element gegeben als

$$t^* = \frac{1}{\tilde{\omega}_z} \arctan\left(\frac{2\delta_z \tilde{\omega}_z}{2\delta_z^2 - \omega_z^2}\right). \quad (3.37)$$

3.3 Bestimmung der Stoßzahl

Die Stoßzahl e in z -Richtung wird als $e_z = \frac{|v_z|}{v_{z0}}$ definiert. Mit den zuvor bestimmten Gl. (3.37) und (3.21) folgt aus

$$e_z = \frac{|v_z(t^*)|}{v_{z0}} \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{\tilde{\omega}_z} e^{-\delta_z t^*} [\tilde{\omega}_z \cos(\tilde{\omega}_z t^*) - \delta_z \sin(\tilde{\omega}_z t^*)] \quad (3.39)$$

und mit den trigonometrischen Beziehungen $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$e_z = \frac{\delta_z}{\tilde{\omega}_z} e^{-\frac{\delta_z}{\tilde{\omega}_z} \arctan(D)} \left[\frac{\tilde{\omega}_z / \delta_z - D}{\sqrt{D^2 + 1}} \right], \quad (3.40)$$

wobei D zusammengefasst wurde als

$$D = \frac{2\delta_z \tilde{\omega}_z}{2\delta_z^2 - \omega_z^2} \quad (3.41)$$

$$D \left(\frac{\delta_z}{\omega_z} \right) = \frac{2\delta_z / \omega_z \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_z}{\omega_z} \right)^2}}{2 \left(\frac{\delta_z}{\omega_z} \right)^2 - 1}. \quad (3.42)$$

Der von dem Verhältnis $\frac{\delta_z}{\omega_z}$ abhängige Ausdruck D ist somit negativ für $\frac{\delta_z}{\omega_z} < \sqrt{1/2}$ und komplex für $\frac{\delta_z}{\omega_z} > 1$. Auch der Bruch

$$\frac{\delta_z}{\tilde{\omega}_z} \left(\frac{\delta_z}{\omega_z} \right) = \frac{\delta_z}{\sqrt{\omega_z^2 - \delta_z^2}} \quad (3.43)$$

$$= \frac{\delta_z}{\omega_z \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_z}{\omega_z} \right)^2}} \quad (3.44)$$

ist somit explizit nur vom Verhältnis $\frac{\delta_z}{\omega_z}$ abhängig. Dies wird noch einmal deutlich, wenn die Stoßzahl ausgeschrieben wird

$$e_z = \frac{\delta_z}{\omega_z} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta_z}{\omega_z} \right)^2}} \cdot e^{-\frac{\delta_z}{\omega_z} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta_z}{\omega_z} \right)^2}} \arctan(D)} \left(\frac{\frac{\omega_z}{\delta_z} \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_z}{\omega_z} \right)^2} - D}{\sqrt{D^2 + 1}} \right). \quad (3.45)$$

Die exklusive Abhängigkeit der Stoßzahl in vertikaler Richtung von dem Verhältnis $\frac{\delta_z}{\omega_z}$ soll im Folgenden grafisch dargestellt werden. Bevor der entsprechende Graph gezeichnet werden kann, muss das Verhalten der Gl. (3.45) an der Polstelle von D ($\frac{\delta_z}{\omega_z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) untersucht werden. Da es dort zu einem Vorzeichenwechsel kommt, gibt es eine unstetige Stelle durch $\arctan(D)$. Daher gilt für Gl. (3.37)

$$t^* = \frac{1}{\tilde{\omega}_z} \arctan \left(\frac{2\delta_z \tilde{\omega}_z}{2\delta_z^2 - \omega_z^2} \right) + \pi, \quad \text{für } \frac{\delta_z}{\omega_z} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t^* = \frac{1}{\tilde{\omega}_z} \arctan \left(\frac{2\delta_z \tilde{\omega}_z}{2\delta_z^2 - \omega_z^2} \right), \quad \text{für } \frac{\delta_z}{\omega_z} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Stoßzahl wurde in Matlab berechnet und ist in Abb. 3.2 dargestellt; das Skript befindet sich im Anhang (A.1.1). Aus der Abb. 3.2 wird deutlich, dass bei einem rein elastischen Stoß mit $\delta_z = 0$ die Abprallgeschwindigkeit genauso groß ist wie die Anfangsgeschwindigkeit und daher $e_z = 1$ ist. Mit zunehmender Dämpfung fällt die Stoßzahl exponentiell ab und nähert sich der Nulllinie. Es wurde nur der Bereich $0 < \frac{\delta_z}{\omega_z} < 2$ betrachtet. Diese Abhängigkeit soll im Folgenden bei der Darstellung der numerischen Berechnung genutzt werden.

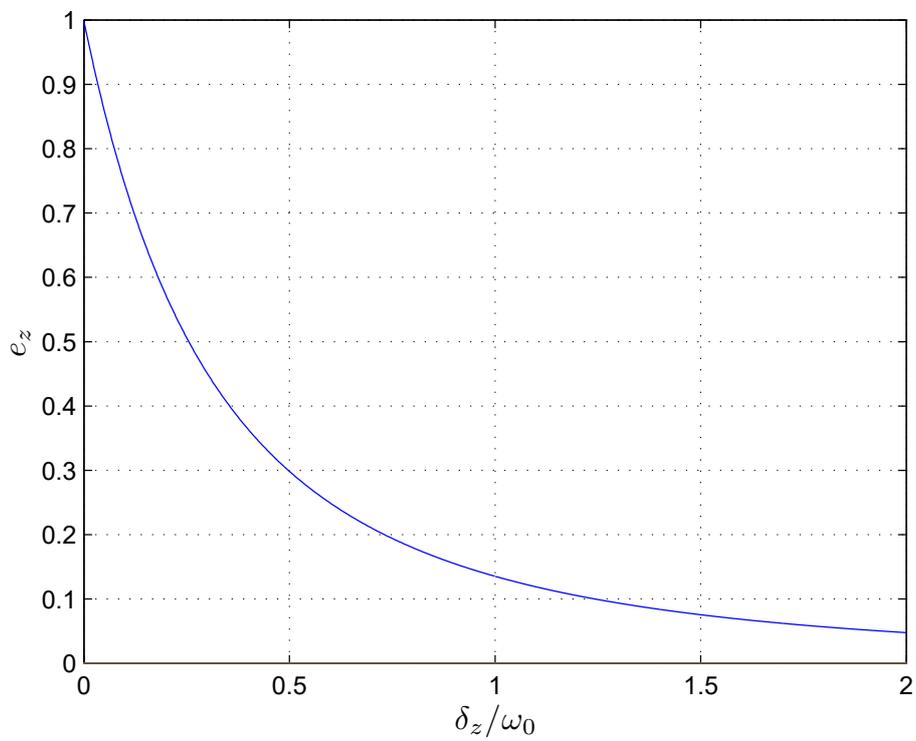


Abbildung 3.2: Stoßfunktion e_z über das Dämpfungsverhältnis δ_z/ω_0 für das vereinfachte, lineare Kontaktmodell

4 Numerische Modellierung des Stoßes

4.1 Methode der Dimensionsreduktion

Nachdem die Form der analytischen Lösung bekannt ist, soll mit Hilfe der Methode der Dimensionsreduktion (MDR) der Stoß einer starren Kugel auf einen viskoelastischen Halbraum numerisch beschrieben werden. Dafür müssen die folgenden Voraussetzungen nach [PH13, Kap. 1] erfüllt sein:

- Quasistationarität
- Elastische Energie als lokale Eigenschaft
- Kinetische Energie als globale Eigenschaft

Damit der Kontakt als quasistatisch betrachtet werden kann, muss die Kontaktzeit T viel größer sein als die charakteristische Zeit, die elastische Wellen im Kontinuum benötigen, um das Kontaktgebiet zu durchlaufen [PH13, S. 8]. Mit dem Durchmesser eines Kontaktgebiets D und der Schallgeschwindigkeit c ergibt sich die Bedingung

$$T > D/c. \quad (4.1)$$

Die elastischen Eigenschaften sollen nur in einem Volumen von der Größe des Kontaktgebiets einen Einfluß haben und nicht von der Größe und Form des Körpers abhängen [PH13, S. 9]. Ein dreidimensionales, reibungsfreies und elastisches Normalkontaktproblem eines rotations-symmetrischen Körpers lässt sich dann exakt auf den eindimensionalen Kontakt mit einer Winklerschen Bettung abbilden [PH13, Kap. 3]. Bei der Betrachtung von Tangentialkontakten ist es nach [PH13, S. 67] zudem erforderlich, dass es sich bei den Körpern im Kontakt um elastisch ähnliche Materialien handelt mit

$$\frac{1 - 2\nu_1}{G_1} = \frac{1 - 2\nu_2}{G_2}. \quad (4.2)$$

G_1 und G_2 beschreiben die Schubmodule der Körper. Nur so kann sichergestellt werden, dass das Normal- und Tangentialkontaktproblem entkoppelt voneinander betrachtet werden kann. Für den Fall eines Kontakts zwischen einem starren Körper $G_2 \rightarrow \infty$ und einem inkompressiblen Elastomer $\nu = 0,5$ ist die Gl. (4.2) erfüllt, da beide Seiten gleich Null sind. Da sich die Tangentialspannungsverteilung zweier Kugeln im Kontakt nach CATTANEO und MINDLIN aus der Differenz der Normalspannungsverteilungen berechnen lässt [Jae94], ist die Abbildung der MDR auch für elastische Tangentialkontakte exakt. Mit der Methode von LEE und RADOK aus Kap. 2.3.3 lassen sich viskoelastische auf elastische Kontaktprobleme zurückführen. Die MDR gilt somit auch für viskoelastische Kontaktprobleme und der dreidimensionale Kontakt lässt sich durch die Indentierung eines Profils in eine eindimensionale Anordnung von unabhängigen Feder- und Dämpferelementen exakt abbilden. Dies soll im Folgenden erläutert werden.

4.2 Kelvin-Voigt-Körper

Für die numerische Behandlung des Stoßes wird der viskoelastische Halbraum zunächst diskretisiert und als eine Bettung aus Kelvin-Voigt-Elementen dargestellt. Der Kelvin-Voigt-Körper hat den Vorteil, dass durch die Parallelschaltung die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung und die elastische Kraft der Feder in Abhängigkeit von der Verschiebung entkoppelt voneinander auftreten.

4.2.1 Winklersche Bettung

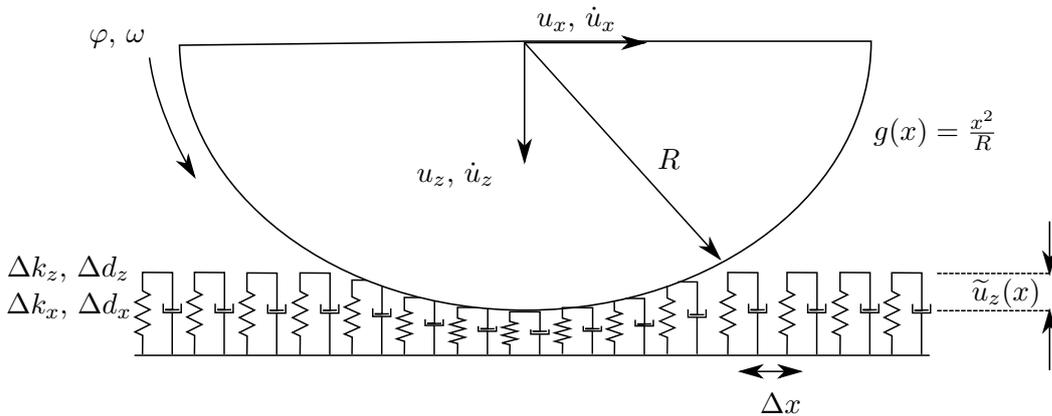


Abbildung 4.1: Indentierung der Parabel in eine Winklersche Bettung aus Kelvin-Voigt-Elementen

Um einen viskoelastischen Kontakt darzustellen, werden in einem ersten Schritt Kelvin-Voigt-Elemente aus Abb. 2.2 in einer Reihe angeordnet, wie in Abb. 4.1 zu sehen ist. Des Weiteren muss das Oberflächenprofil der Kugel nach [Pop10, Kap. 3.2] angepasst werden, um exakt den dreidimensionalen Kontakt abbilden zu können. Für eine Kugel mit Radius R und dem genäherten Querschnittsprofil für die Halbraumnäherung $f(r) = \frac{r^2}{2R_1}$, muss der Radius in vertikaler Richtung um den Faktor zwei gestreckt werden: $R_1 = R/2$. Daher ergibt sich das Ersatzprofil

$$g(x) = \frac{x^2}{R}. \quad (4.3)$$

Die Federelemente besitzen nach [PH13, S.20] in z -Richtung die Steifigkeit

$$\Delta k_z = E^* \Delta x = \frac{2G}{1-\nu} \Delta x \quad (4.4)$$

mit dem effektiven Elastizitätsmodul E^* nach Gl. (2.3). Um die Dämpferkonstante d_z zu bestimmen, wird die Methode nach LEE und RADOK benutzt (siehe Kap. 2.3.3). Sie besagt, dass ein viskoelastisches Kontaktproblem gelöst werden kann, indem die viskosen Materialeigenschaften durch elastische ersetzt werden. Die Materialeigenschaften werden nach der Lösung dieses elastischen Problems wieder durch viskose substituiert. Obwohl diese Substituierung

normalerweise im Laplace-Bereich stattfindet, lässt sich für den Fall einer konstant wirkenden Kraft die Verschiebung u durch die Geschwindigkeit \dot{u} und das Schermodul G durch die Scherviskosität η ersetzen [PH13, S. 106]. Aus Gl. (4.4) folgt somit

$$\Delta d_z = \frac{2\eta}{1-\nu} \Delta x. \quad (4.5)$$

Analog sind die Steifigkeiten und Dämpferkonstanten für den tangentialen Kontakt in x -Richtung

$$\Delta k_x = G^* \Delta x = \frac{4G}{2-\nu} \Delta x, \quad (4.6)$$

$$\Delta d_x = \frac{4\eta}{2-\nu} \Delta x. \quad (4.7)$$

Hierbei ist der effektive Schubmodul nach [Pop10, S.114]

$$G^* = \frac{4G}{2-\nu}. \quad (4.8)$$

Um ein Kontinuum zu diskretisieren und möglichst genaue Ergebnisse zu erhalten, muss der Abstand zwischen den einzelnen Kelvin-Voigt-Elementen sehr gering sein. Wenn eine Anzahl an k Elementen über eine Länge von $L = 2a$ verteilt wird, ergibt sich zwischen ihnen der Abstand

$$\Delta x = \frac{L}{k}. \quad (4.9)$$

Hierbei stellt a den Hertzschen Kontaktradius nach Gl. (2.9) dar. Da der maximale Kontaktradius des viskoelastischen Stoßes a priori nicht bekannt ist, wird der Hertzsche Kontaktradius herangezogen, um in der Implementierung in Matlab sicherzustellen, dass die Bettung breit genug ist, damit ein Großteil der Federn während des Stoßes tatsächlich Kontakt zu der Kugel haben.

4.2.2 Numerische Lösung der Bewegungsgleichungen

Während der Indentierung der Kugel in die Bettung hängt die vertikale Verschiebung jedes einzelnen Kelvin-Voigt-Elements nicht nur von der Verschiebung des Schwerpunkts der Kugel, sondern auch von der horizontalen Position des Elements ab. Es gilt

$$\tilde{u}_z(x_j, t) = u_z^s(t) - g(x_j). \quad (4.10)$$

Mit den in Kap. 4.2.1 gegebenen Steifigkeiten und Dämpferkonstanten ergibt sich die vertikale Kraft jedes Elements

$$f_n(x_j, t) = \frac{2G}{1-\nu} \Delta x \tilde{u}_z(x_j, t) + \frac{2\eta}{1-\nu} \Delta x \dot{\tilde{u}}_z(x_j, t). \quad (4.11)$$

Dies gilt für alle Kelvin-Voigt-Elemente im Kontakt mit der Kugel und solange die Kraft positiv gerichtet ist. Analog zu Kap. 3.2 wird keine Adhäsion betrachtet und der Zeitpunkt an dem die Kraft Null ist, beschreibt den Moment an dem die Kugel nicht mehr im Kontakt mit dem jeweiligen Element ist. Daraus ergeben sich die zwei Kontaktbedingungen

$$\tilde{u}_z(x_j, t) > 0, \quad (4.12)$$

$$f_n(x_j, t) > 0. \quad (4.13)$$

Die Summe der einzelnen Kräfte f_n ergibt die gesamte Reaktionskraft des Systems zu jedem Zeitpunkt t

$$F_n(t) = E^* \Delta x \sum_{j=1}^k \tilde{u}_z(x_j, t) + \frac{2\eta}{1-\nu} \Delta x \sum_{j=1}^k \dot{\tilde{u}}_z(x_j, t). \quad (4.14)$$

Analog wird die horizontale Kraft berechnet, wobei die Tangentialgeschwindigkeit der kinematischen Beziehung der Gl. (3.6) folgt und auch die Verschiebung im Kontaktpunkt sich aus der Schwerpunktverschiebung und der Starrkörperrotation berechnet, wenn von einem im Vergleich zum Radius der Kugel kleinen Kontaktgebiet ausgegangen wird

$$\dot{\tilde{u}}_x(x_j, t) = \dot{u}_x^s + \omega R, \quad (4.15)$$

$$\tilde{u}_x(x_j, t) = u_x^s + \varphi R. \quad (4.16)$$

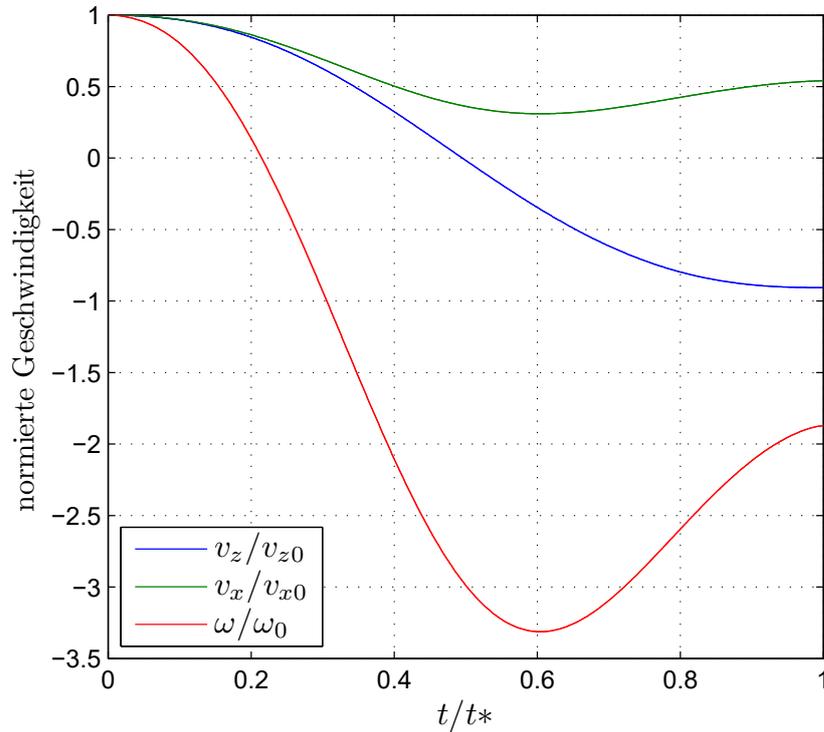
Um die Annahme der Halbraumthese bei der Programmierung zu berücksichtigen, wird die Bedingung

$$a < 0,2R \quad (4.17)$$

eingeführt, bei deren Überschreiten eine Fehlermeldung ausgegeben wird. Im Folgenden wird nur der Fall ohne Gleiten betrachtet, es wird also von einem vollständigen Haften in tangentialer Richtung ausgegangen. Dies bedeutet, dass die Kontaktbedingung der Tangentialbewegung der Elemente nur davon abhängt, ob das Element die Bedingungen der Gl. (4.13) erfüllt. Für den Fall mit Gleiten müsste eine zusätzliche Haftbedingung in tangentialer Richtung bis zur Überschreitung der Haftreibung eingeführt werden. Die tangentiale Kraft berechnet sich aus der Summe der einzelnen Kräfte der Elemente mit Gl. (4.6) und (4.7) zu

$$f_f(x_j, t) = \frac{4G}{2-\nu} \Delta x \tilde{u}_x(x_j, t) + \frac{4\eta}{2-\nu} \Delta x \dot{\tilde{u}}_x(x_j, t), \quad (4.18)$$

$$F_f(t) = \sum_{j=1}^k f_f(x_j, t). \quad (4.19)$$



E	ν	η	R	m	Δt	Δx
$5 \cdot 10^{10}$ Pa	0.5	10^5 Pa/s	0,2 m	10 kg	$5,9 \cdot 10^{-8}$ s	$3,1 \cdot 10^{-5}$ m

Abbildung 4.2: Normierte Geschwindigkeiten v_z , v_x und ω der Kugel während des Stoßes auf eine Bettung aus Kelvin-Voigt-Elementen

Nachdem die Kräfte nun bekannt sind, werden die Momentensätze und der Drallsatz wie in Gl. (3.1 - 3.3) aufgestellt

$$\ddot{u}_x = -\frac{F_f}{m}, \quad (4.20)$$

$$\ddot{u}_z = -\frac{F_n}{m}, \quad (4.21)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{F_f R}{\Theta_s}. \quad (4.22)$$

Mit dem expliziten Eulerschen Polygonzugverfahren [GHW14, Kap. 7.3.1] werden diese Bewegungsgleichungen gelöst und die Kontaktbedingungen implementiert. Durch die bereits erwähnte deutliche Reduzierung des Rechenaufwands durch die MDR, können genügend Zeitschritte n implementiert werden, um ein stabiles Verhalten zu erreichen. Die Stabilität der Lösung wird in Kap. 4.2.3 näher beschrieben. Als Rechenbeispiel werden mit den gegebenen Anfangsbedingungen und Materialkonstanten die normierten Geschwindigkeiten v_z , v_x und ω in Abb. 4.2 berechnet. Sobald die Beschleunigung $\ddot{u}_z = 0$ ist, gilt der Stoß als beendet. Die Endgeschwindigkeiten werden bei der Auswertung zur Berechnung der Stoßzahl benutzt. Die Implementierung erfolgt in Matlab und der Quelltext ist im Anhang A.1.2 zu finden. Für ein

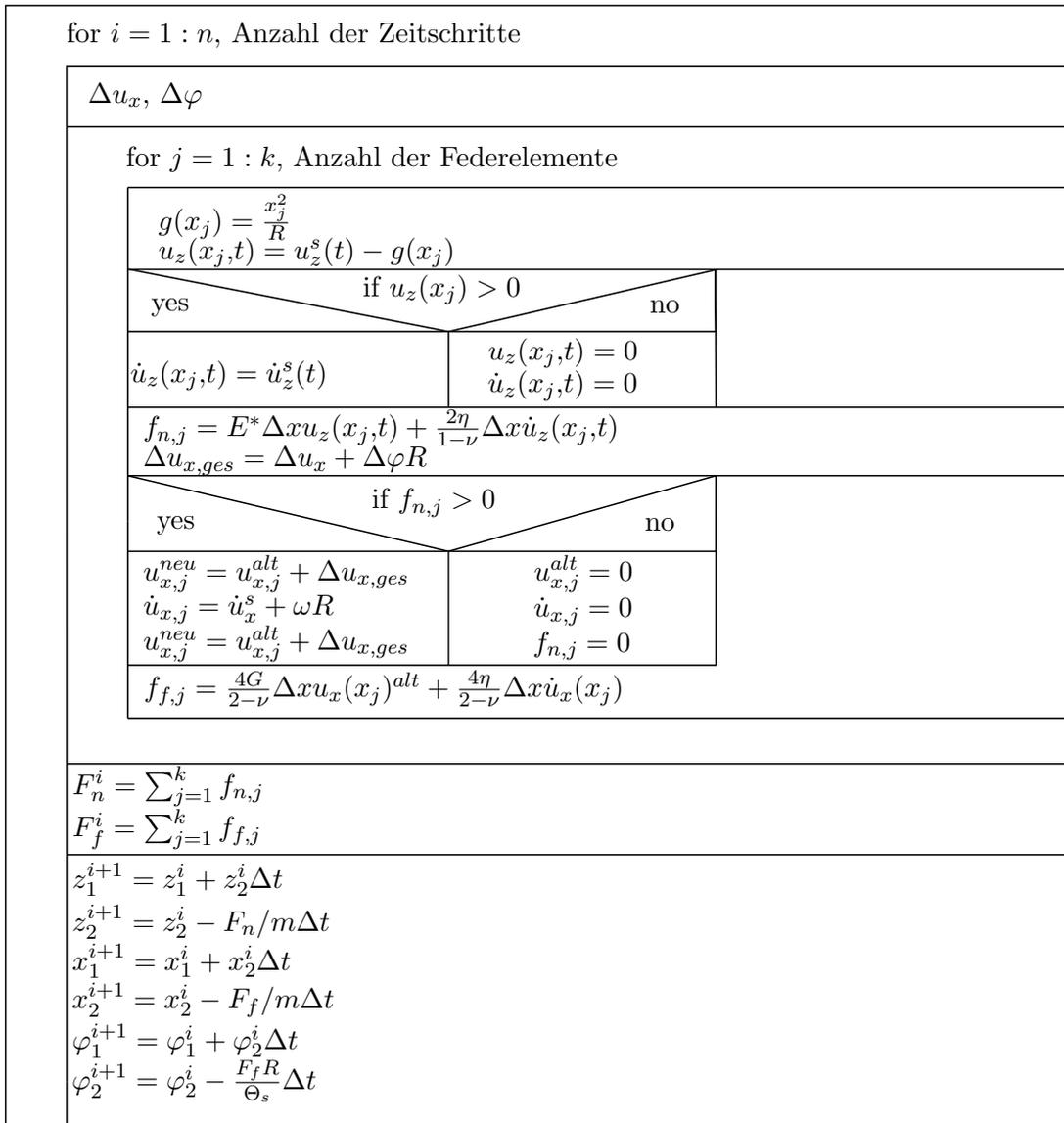


Abbildung 4.3: Struktogramm des numerischen Lösers

besseres Verständnis des Skripts ist in Abb. 4.3 das zugehörige Struktogramm dargestellt.

4.2.3 Numerische Stabilität

Um eine Aussage über die Genauigkeit der numerischen Lösung des expliziten Euler Verfahrens zu treffen, werden die Ergebnisse für den elastischen Fall mit der analytischen Lösung der Hertzschen Theorie verglichen. Die exakte Lösung des geraden elastischen Stoßes lautet mit

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{kin,0} \quad (4.23)$$

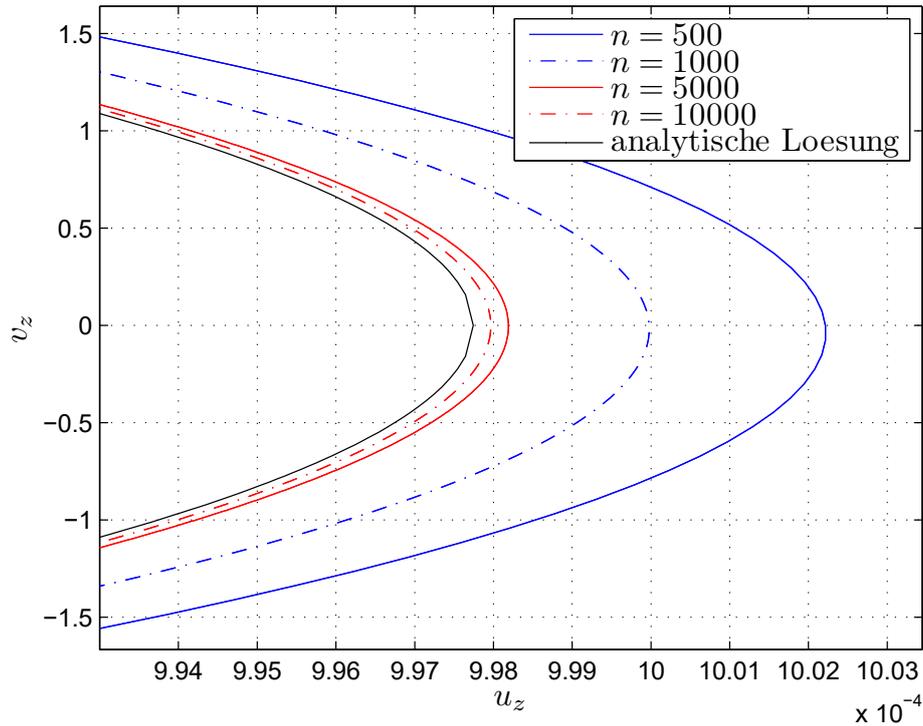


Abbildung 4.4: Konvergenzanalyse der numerischen Lösung für den elastischen Stoß und Vergleich zu der analytischen Lösung

und Gl. (2.5)

$$\frac{m}{2}v_z^2 + \frac{8}{15}E^*R^{1/2}u^{5/2} = \frac{m}{2}v_{z,0}^2 \quad (4.24)$$

$$v_z = \left(v_{z,0}^2 - \frac{16E^*R^{1/2}}{15m}u^{5/2} \right)^{1/2}. \quad (4.25)$$

Im Vergleich zu Gl. (4.25) werden die numerischen Lösungen für eine zunehmende Anzahl von Zeitschritten gezeichnet, um ein mögliches Konvergenzverhalten zu untersuchen. Dazu wird das Phasendiagramm in Abb. 4.4 gezeichnet, das die Geschwindigkeit v_z über die Verschiebung u_z darstellt; das Skript ist unter A.1.3 zu finden. Wie zu erkennen ist, weichen die numerischen Lösungen am Umkehrpunkt des Stoßes von der analytischen Lösung ab. Dabei ist die Abweichung antiproportional zu der Anzahl der Zeitschritte n . Die Divergenz der Lösung, welche zu dieser Abweichung führt, resultiert allein aus der numerischen Integration des expliziten Euler Verfahrens. Dieses bekannte Phänomen wird als numerische Instabilität bezeichnet, welche bei der Betrachtung längerer Zeiträume zunimmt (vgl. [GHSW15, S. 382]). Die schwarze, durchgezogene Linie beschreibt die Hertzsche Lösung nach Gl. (4.25), während die farbigen Linien die numerischen Lösungen für die angegebenen Zeitschritte darstellen. Die Abweichung der numerisch errechneten Endgeschwindigkeiten von der analytischen Lösung ist in Tab. 4.1 aufgeführt.

Abweichung in %	Anzahl der Zeitschritte n
1,1254	500
0,5608	1000
0,1119	5000
0,0559	10000

Tabelle 4.1: Abweichung der Endgeschwindigkeit der numerischen von der analytischen Lösung in Abhängigkeit von n

Da die Rechenzeit für $n = 10000$ bereits deutlich zugenommen hat und der Fehler unter 0,01 % liegt, werden für die folgenden Berechnungen $n = 5000$ Zeitintervalle genutzt.

4.3 Standardkörper

Im Folgenden soll der viskoelastische Halbraum zusätzlich als Standardkörper modelliert werden, da der Kelvin-Voigt-Körper nur einen Sonderfall dieses allgemeinen Modells darstellt. Um die Bewegungsgleichungen des Standardkörpers aufzustellen, muss zunächst Klarheit darüber geschaffen werden, dass Geschwindigkeit und Verschiebung nun nicht mehr entkoppelt behandelt werden können, wie es zuvor bei dem Kelvin-Voigt-Körper der Fall war. Es wird zusätzlich davon ausgegangen, dass es sich um ein inkompressibles Elastomer mit $\nu = 0,5$ handelt, was auf die meisten Elastomere zutrifft. Die Herleitung der kinematischen Gleichung des Standardmodells erfolgt zunächst anhand der Spannung im Verbindungspunkt zwischen der Feder und dem Dämpfer. Dabei werden die Verschiebungen u_1 und u_z aus Abb. 2.2 benutzt. Es gilt

$$0 = -G_2(u_z - u_1) + \dot{u}_1\eta \quad (4.26)$$

$$\Leftrightarrow u_z(t) = u_1(t) + \tau\dot{u}_1(t) \quad (4.27)$$

mit $\tau = \frac{\eta}{G_2}$ und die Kraft eines Elements ist

$$f_n = 4G_1\Delta x u_z + 4G_2\Delta x(u_z - u_1). \quad (4.28)$$

Unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Auslenkung um u_0 stattfindet, lautet die homogene Lösung der Differentialgleichung (4.27)

$$\dot{u}_1 + \frac{1}{\tau}u_1 = \frac{1}{\tau}u_0 \quad (4.29)$$

$$\dot{u}_{1,\text{hom}} + \frac{1}{\tau}u_{1,\text{hom}} = 0 \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow u_{1,\text{hom}} = Ae^{\lambda t} \quad (4.31)$$

mit $\lambda = -\frac{1}{\tau}$. Die partikuläre Lösung lässt sich mit Hilfe der Variation der Konstanten bestimmen

$$u_{1,\text{part}} = A(t)e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow \dot{u}_{1,\text{part}} = \dot{A}(t)e^{-\frac{1}{\tau}t} - A(t)\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}t}. \quad (4.33)$$

Durch Einsetzen in Gl. (4.29) wird $A(t)$ berechnet und die partikuläre Lösung lautet

$$u_{1,\text{part}} = e^{\frac{1}{\tau}t}u_0e^{-\frac{1}{\tau}t}u_0 = u_0 \quad (4.34)$$

und die gesamte inhomogene Lösung, als Summe der homogenen und partikulären Teillösungen

$$u_1 = Ae^{-\frac{1}{\tau}t} + u_0. \quad (4.35)$$

Mit der gegebenen Anfangsbedingung $u_1(0) = 0$ ergibt sich $A = -u_0$ und die Lösung lautet

$$u_1 = u_0(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}). \quad (4.36)$$

Die Spannung im Standardkörper berechnet sich demnach zu

$$\sigma = G_1u_0 + G_2(u_0 - u_1) = u_0(G_1 + G_2e^{-\frac{1}{\tau}t}). \quad (4.37)$$

Damit lässt sich das zeitabhängige Schubmodul berechnen

$$G(t) = \frac{\sigma}{u_0} = G_1 + G_2e^{-\frac{G_2}{\eta}t}. \quad (4.38)$$

Analog zu Gl. (4.28) ergibt sich somit als gesamte Kraft des inkompressiblen Standardkörpers für die Methode der Dimensionsreduktion

$$f_n(t) = 4\Delta xu_z \left(G_1 + G_2e^{-\frac{G_2}{\eta}t} \right). \quad (4.39)$$

Diese Kraft, die für eine konstante Verschiebung $u_z = u_0$ gilt, ist die Summe einer konstanten Kraft der Feder G_1 und der abklingende Kraft des Maxwell-Elements. Wie in Kap. 2.3 beschrieben, setzt sich das Glasmodul zum Zeitpunkt $t = 0$ aus G_1 und G_2 zusammen und das statische Schubmodul strebt gegen G_1 , da der zweite Term mit fortschreitender Zeit exponentiell abnimmt. Dieses Verhalten ist in Abb. 4.5 für die Größen $G_1 = G_2$ und $G_2/\eta = 15$ dargestellt.

Da für den Stoß jedoch eine beliebige und a priori unbekannte Verschiebung $u_z(t)$ erwartet wird, muss die Kraft in einem Standardmodell mit Gl. (2.25) und dem zeitabhängigen Schubmodul $G(t)$ berechnet werden. Einsetzen von Gl. (4.38) in Gl. (2.25) führt auf

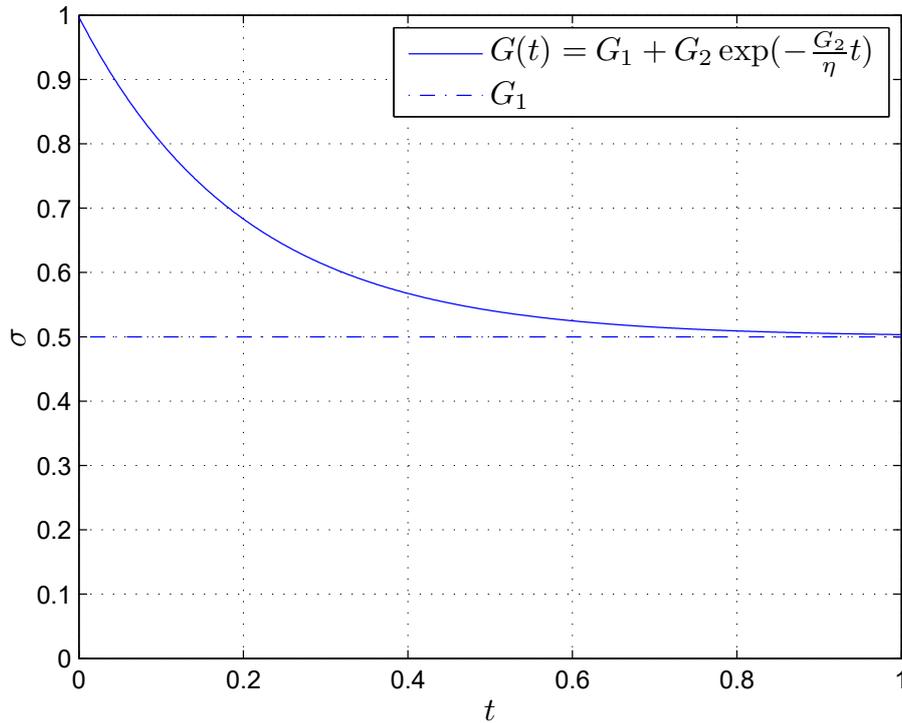


Abbildung 4.5: Normierter Spannungsverlauf des Standardmodells nach Gl. (4.38) für $G_1 = G_2$ und $G_2/\eta = 15$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \left(G_1 + G_2 e^{-\frac{G_2}{\eta}(t-t')} \right) \dot{u}(t') dt' \quad (4.40)$$

$$= \int_{-\infty}^t G_1 \dot{u}(t') dt' + \int_{-\infty}^t G_2 e^{-\frac{G_2}{\eta}(t-t')} \dot{u}(t') dt' \quad (4.41)$$

$$= [G_1 u(t')]_{-\infty}^t + \int_{-\infty}^t G_2 e^{-\frac{G_2}{\eta}(t-t')} \dot{u}(t') dt'. \quad (4.42)$$

Wird angenommen, dass die beliebige Verschiebung $u(t)$ bis zum Zeitpunkt $t = 0$, $u(0) = 0$ ist, so lässt sich schreiben

$$\sigma(t) = [G_1 u(t')]_0^t + G_2 \int_0^t e^{-\frac{G_2}{\eta}(t-t')} \dot{u}(t') dt' \quad (4.43)$$

$$= G_1 u(t) + G_2 \int_0^t e^{-\frac{G_2}{\eta}(t-t')} \dot{u}(t') dt'. \quad (4.44)$$

Das zweite Integral soll numerisch berechnet werden, indem die Summe der Funktionswerte gebildet wird. Die Diskretisierung der Zeit erfolgt durch $N = \frac{t}{\Delta t}$ Zeitinkremente. Da der erste Summand offensichtlich das rein elastische Verhalten der Feder beschreibt und der zweite

Term das viskose Verhalten des Maxwell-Elements, wird Gl. (4.44) aufgeteilt in

$$f_{n,\text{elas}}^N = 4\Delta x G_1 u_z^N \quad (4.45)$$

$$f_{n,\text{vis}}^N = 4\Delta x G_2 \sum_{j=1}^N e^{\frac{G_2}{\eta}(j-N)\Delta t} \dot{u}_z^j \Delta t. \quad (4.46)$$

Um das Materialverhalten korrekt darzustellen, ist es nötig, den Einfluss aller vergangenen Verschiebungen auf die Kraft exponentiell mit der Zeit abklingen zu lassen. Für die praktische Umsetzung würde dies bedeuten, dass zu jedem Zeitschritt Δt die aktuelle Geschwindigkeit gespeichert und die Kraft, mit allen vergangenen Geschwindigkeiten, neu berechnet werden muss. Da dieses Vorgehen die Rechenzeit stark erhöhen würde, werden stattdessen alle bisherigen Verschiebungen als Summe gespeichert und mit einem passenden Abklingkoeffizient für jeden Zeitschritt nur die neue Summe berechnet. Es gilt

$$f_{n,\text{vis}}^N = 4\Delta x G_2 \sum_{j=1}^N e^{\frac{G_2}{\eta}(j-N+1-1)\Delta t} \dot{u}_z^j \Delta t \quad (4.47)$$

$$= 4\Delta x G_2 \Delta t \sum_{j=1}^N e^{\frac{G_2}{\eta}(j-N+1)\Delta t} e^{-\frac{G_2}{\eta}\Delta t} \dot{u}_z^j \quad (4.48)$$

$$= 4\Delta x G_2 \Delta t \left[\sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{G_2}{\eta}\Delta t(j-(N-1))} e^{-\frac{G_2}{\eta}\Delta t} \dot{u}_z^j + e^{\frac{G_2}{\eta}\Delta t(N-N+1)} e^{-\frac{G_2}{\eta}\Delta t} \dot{u}_z^N \right] \quad (4.49)$$

$$= 4\Delta x G_2 \Delta t \left[e^{-\frac{G_2}{\eta}\Delta t} \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{G_2}{\eta}\Delta t(j-(N-1))} \dot{u}_z^j + \dot{u}_z^N \right] \quad (4.50)$$

und es lässt sich schreiben

$$f_{n,\text{vis}}^N = e^{-\frac{G_2}{\eta}\Delta t} 4\Delta x G_2 \Delta t \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{G_2}{\eta}\Delta t(j-(N-1))} \dot{u}_z^j + 4\Delta x G_2 \Delta t \dot{u}_z^N \quad (4.51)$$

$$f_{n,\text{vis}}^N = e^{-\frac{G_2}{\eta}\Delta t} f_{n,\text{vis}}^{N-1} + 4\Delta x G_2 \Delta t \dot{u}_z^N. \quad (4.52)$$

Mit Gl. (4.52) und (4.45) wird die Vorschrift für die Berechnung der Normalkraft eines Standardelements in Abhängigkeit von der Verschiebung und der Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt N bestimmt. Analog erfolgt die Berechnung der Tangentialkraft zu

$$f_{q,\text{elas}}^N = G_1^* \Delta x \tilde{u}_x^N = \frac{8\Delta x G_1}{3} \tilde{u}_x^N, \quad (4.53)$$

$$f_{q,\text{vis}}^N = e^{-\frac{G_2}{\eta}\Delta t} f_{q,\text{vis}}^{N-1} + \frac{8\Delta x G_2}{3} \Delta t \dot{\tilde{u}}_x^N, \quad (4.54)$$

wobei die horizontale Verschiebung wie in Gl. (4.16) die Kombination der Schwerpunktverschiebung und der Rotation der Kugel ist. Dies setzt wie bereits in den vorangegangenen Kapitel voraus, dass die Halbraumthese erfüllt ist. Der Tangentialkontakt wird, wie zuvor, nur

für den Fall des vollständigen Haftens betrachtet. Die Implementierung in Matlab geschieht analog zu Abb. 4.3, wobei sich nur die Berechnung der Kräfte für jedes Standardelement ändert. Mit dem expliziten Euler Verfahren werden somit wieder die Bewegungsgleichungen in jedem Zeitschritt gelöst, um die Endgeschwindigkeiten berechnen zu können. Die Auswertung der Stoßzahlen mit unterschiedlichen Materialparametern und Anfangsbedingungen, sowie die Unterschiede zwischen der Modellierung eines Kelvin-Voigt-Körpers und des Standardkörpers werden im Folgenden erläutert.

5 Auswertung

Aus den zuvor berechneten Endgeschwindigkeiten der Kugel nach dem Stoß, lassen sich nun die Stoßzahlen bestimmen mit

$$e_z = \frac{|v_z|}{v_{z0}}, \quad (5.1)$$

$$e_x = \frac{|v_x + R\omega|}{v_{x0} + R\omega_0}. \quad (5.2)$$

Zum Zwecke der Übersichtlichkeit, werden im Folgenden nur e_z und e_x grafisch dargestellt. Ein Rückschluss auf die Endgeschwindigkeiten v_x und ω ist durch die Gl. (2.21) möglich, die das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten zueinander beschreibt.

5.1 Dimensionslose Parameter

Analog zu Kap. 3.3 wird die These aufgestellt, dass die Stoßzeit und somit die Endgeschwindigkeit wieder nur explizit von dem Verhältnis $\frac{\delta}{\omega_0}$, also der Dämpfungskonstante und der Steifigkeit, abhängig ist. Es gilt

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2\sqrt{mk}}, \quad (5.3)$$

mit den Modulen des gesamten Kontaktgebiets

$$k = 2E^*a = \frac{4G}{1-\nu}a, \quad (5.4)$$

$$d = \frac{4\eta}{1-\nu}a. \quad (5.5)$$

Hierbei beschreibt a den Hertzschen Kontaktradius aus Gl. (2.9). Das ergibt den ersten dimensionslosen Parameter

$$Q_1 = \frac{\eta\sqrt{a}}{\sqrt{Gm(1-\nu)}}. \quad (5.6)$$

5.2 Kelvin-Voigt-Körper

Um die These aus Kap. 5.1 zu überprüfen, werden die Stoßzahlen $e_z(Q_1)$ und $e_x(Q_1)$ als Funktion von Q_1 dargestellt. Die Werte $Q_1(E, \eta, m, R, v_{z0})$, sowie v_{x0} und ω_0 werden zufällig generiert. Anschließend wird Q_1 berechnet und mit dem dazugehörigen Funktionswert eingezeichnet. Zunächst wird von einem inkompressiblen Elastomer mit $\nu = 0,5$ ausgegangen. Wie aus Abb. 5.1 zu erkennen ist, ergeben sich zwei Stoßfunktionen. Somit ist die These belegt, dass es keine spezifische, weitere Abhängigkeit von einer Materialkonstanten oder einem Anfangswert gibt, sondern nur von dem dimensionslosen Parameter Q_1 . Um eine mögliche explizite Abhängigkeit von der Poisson-Zahl ν zeigen zu können, werden die Graphen e_z und e_x in Abb. 5.2 und Abb. 5.3 für unterschiedliche Werte von ν dargestellt. Das Matlab Skript

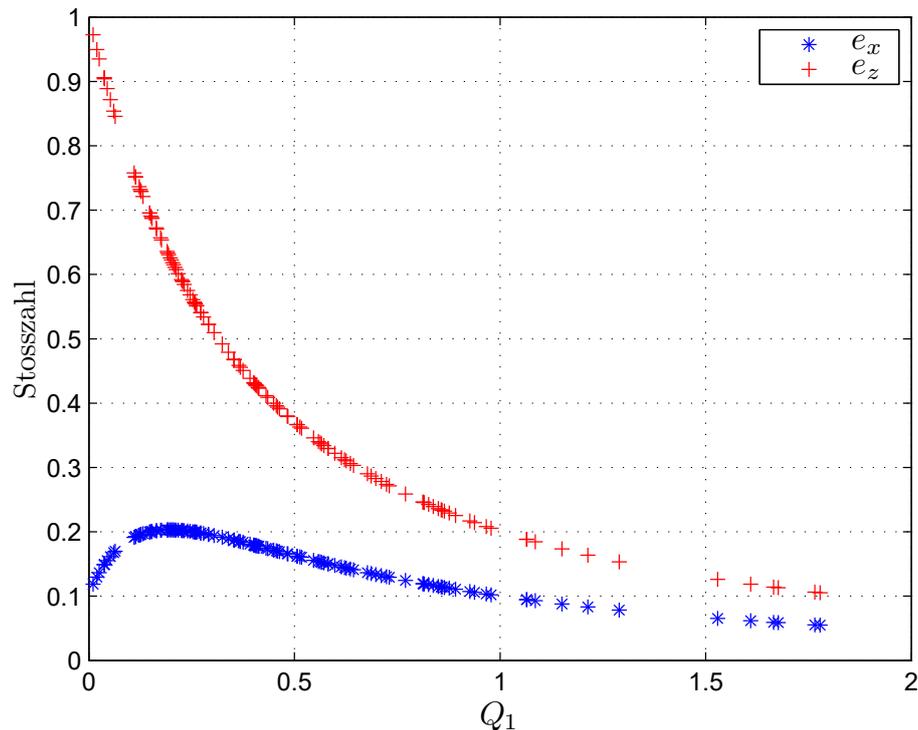


Abbildung 5.1: Funktionswerte der Stoßfunktion e_x , e_z für zufallsgenerierten Parameter Q_1

ist im Anhang A.1.4 zu finden.

Aus den Graphen ist zu erkennen, dass sich $e_z(Q_1, \nu)$ mit zunehmenden ν nicht verändert, während sich $e_x(Q_1, \nu)$ nach oben verschiebt. Damit gilt

$$e_z(Q_1), e_x(Q_1, \nu). \quad (5.7)$$

Elastomere können grundsätzlich als inkompressible Körper aufgefasst werden, für die $\nu = 0,5$ gilt, weshalb diese Kurve physikalisch die größte Bedeutung hat. Interessanterweise stimmen die Kurven e_z des vereinfachten Modells (Gl. (3.45)) und der numerischen Lösung in Abb. 5.2, bis auf eine bei zunehmender Stoßzahl konstante Abweichung, qualitativ überein. Mit zunehmender Dämpfung nimmt die Stoßzahl exponentiell ab. Das Verhalten von e_x ist weniger anschaulich, da sich die Stoßzahl nach Gl. (5.2) aus der Tangential- und der Rotationsgeschwindigkeit zusammensetzt. Da es auch bei einem elastischen Stoß zu einer Umkehr der Rotationsbewegung kommen kann, geht ω in diesem Fall negativ in die Berechnung von e_x ein. Auch hier ist jedoch zu erkennen, dass die Stoßzahl mit steigender Dämpfung abnimmt. Bei der Implementierung in Matlab wurde die Beobachtung gemacht, dass das maximale Kontaktgebiet bei zunehmender Dämpfung kleiner wird und auch die Stoßzeit immer kürzer wird. Während eine Verringerung des Kontaktgebiets erwartet wurde (vgl. Kap. 2.1.2), ist die Verkürzung der Stoßzeit bei zunehmender Dämpfung jedoch nicht intuitiv. Dies gilt sowohl für den Kelvin-Voigt-Körper als auch für den Standardkörper, der im Folgenden

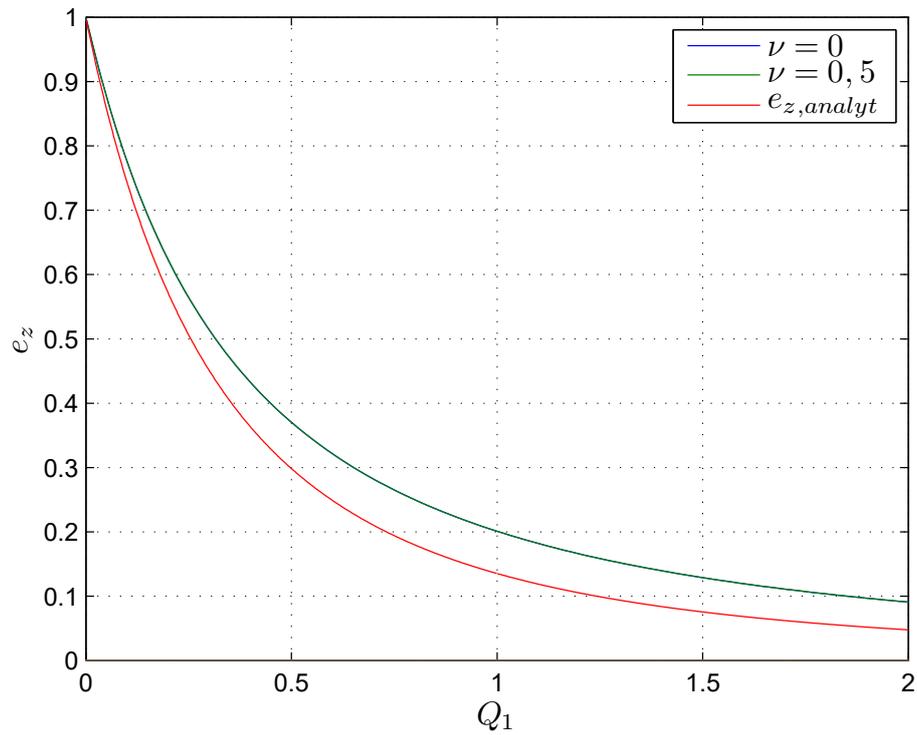


Abbildung 5.2: Stoßfunktion e_z über Q_1 für $\nu = 0,5$ und $\nu = 0$ und analytisches e_z aus Gl. (3.45)

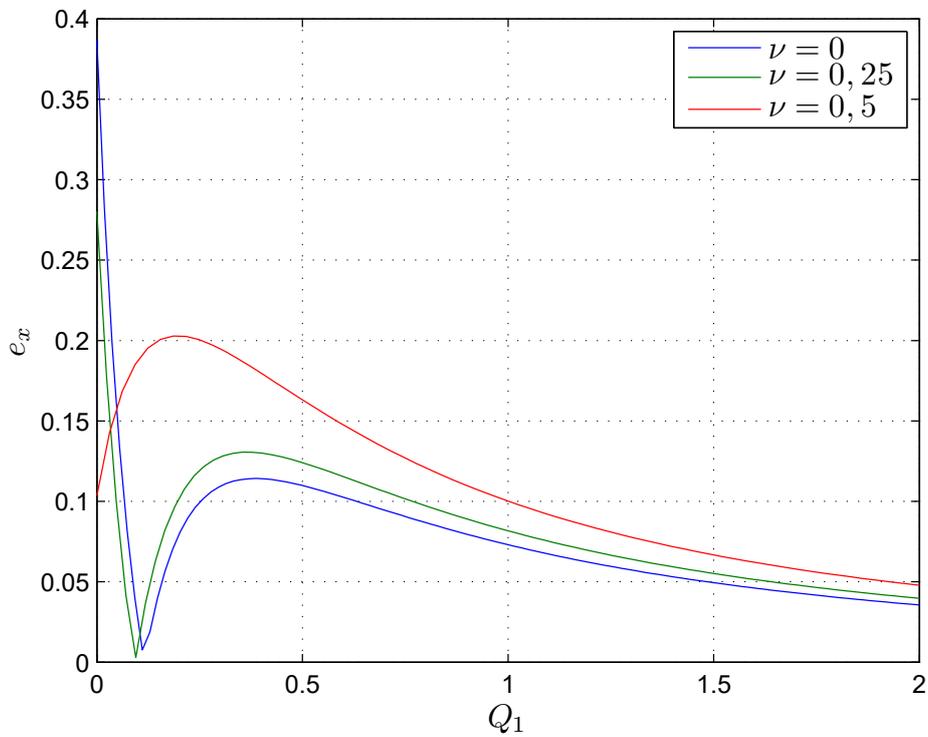


Abbildung 5.3: Kurvenschar der Stoßfunktion e_x über Q_1 für $\nu = 0$, $\nu = 0,25$ und $\nu = 0,5$

beschrieben wird.

5.3 Standardkörper

Für den Standardkörper ist aufgrund der zweiten Feder (vgl. Abb. 2.2, c) ein weiterer Eingangsparameter, das Modul G_2 , zu berücksichtigen. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, wird bei dem Standardkörper von einem inkompressiblen Material mit $\nu = 0,5$ ausgegangen, was bei Elastomeren keine Einschränkung darstellt. Wie zuvor werden alle Eingangsparameter zufällig erstellt und die Stoßzahlen über Q_1 dargestellt, mit

$$Q_1 = \frac{\eta\sqrt{a}}{\sqrt{G_1 m (1 - \nu)}}. \quad (5.8)$$

Um den Einfluss von G_2 darzustellen, wird ein zweiter dimensionsloser Parameter eingeführt

$$Q_2 = \frac{G_1}{G_2}. \quad (5.9)$$

Die Stoßzahlen lassen sich als Funktionen von Q_1 und Q_2 darstellen und sind wieder nicht explizit von Materialparametern oder Anfangsbedingungen abhängig. Die Kurvenscharen für die Stoßzahlen $e_z(Q_1, Q_2)$ und $e_x(Q_1, Q_2)$, in Abhängigkeit der beiden dimensionslosen Parameter, sind in Abb. 5.4 und 5.5 dargestellt. Die Kurven mit $Q_2 \rightarrow 0$ stellen den Grenzfall für den Kelvin-Voigt-Körper dar. Bei konstantem G_1 geht $G_2 \rightarrow \infty$, was dazu führt, dass der elastische Anteil des Maxwell-Elements durch die sehr steife Feder sehr klein ist, im Vergleich zu der elastischen Energie der einzelnen Feder. Die viskosen Eigenschaften des Dämpfers bleiben davon unbeeinflusst. Daher beschreiben die Kurven e_z und e_x für $Q_2 = 0,01$ qualitativ den gleichen Verlauf wie für den Kelvin-Voigt-Körper, welcher in schwarz eingezeichnet ist. Wie zu sehen ist, weichen die beiden Kurven für $Q_2 = 0,01$ bei kleinen Q_1 von der Lösung des Kelvin-Voigt-Körpers ab. Dies ist auf einen numerischen Fehler zurückzuführen, welcher bei der Division durch sehr kleine Werte η im Exponenten der Gl. (4.39) auftritt. Die einzige Möglichkeit $Q_1 = 0$ zu erreichen, wäre $\eta = 0$ zu setzen. Dies steht aber im Widerspruch zu Gl. (4.39), da in diesem Fall durch Null dividiert würde.

Für $Q_2 > 1$ wird die einzelne Feder G_1 steifer als G_2 , was dazu führt, dass der Einfluss des Dämpfers auch bei steigendem η immer geringer wird. Für e_z verschieben sich die Kurven immer mehr nach oben gegen 1. Die Kurven für e_x flachen immer weiter ab, sodass der Grenzfall $Q_2 \rightarrow \infty$ hier den rein elastischen Stoß darstellt. Das zu den Graphen gehörenden Matlab Skript befindet sich im Anhang A.1.5.

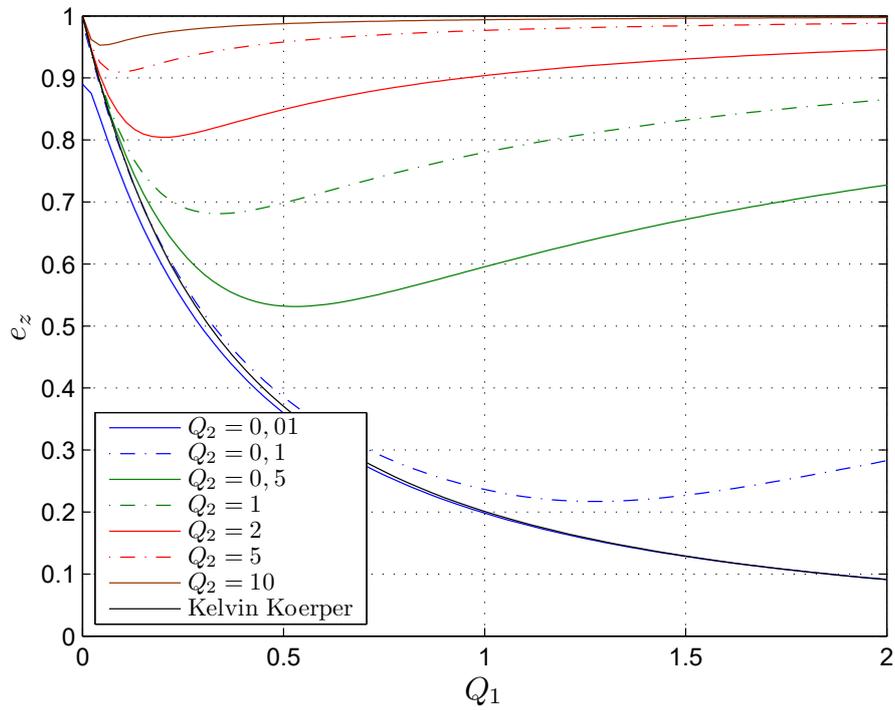


Abbildung 5.4: Stoßfunktion e_z über Q_1 für verschiedene Q_2 und Kelvin-Voigt-Körper

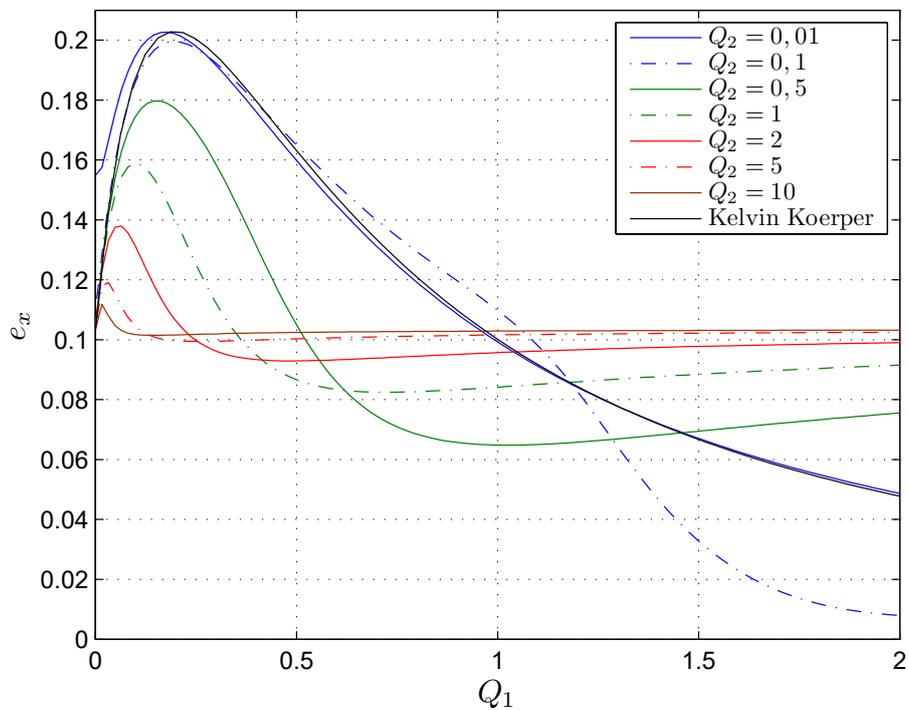


Abbildung 5.5: Stoßfunktion e_x über Q_1 für verschiedene Q_2 und Kelvin-Voigt-Körper

6 Zusammenfassung und Fazit

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, wie sich ein viskoelastisches Stoßproblem mit der Methode der Dimensionsreduktion numerisch berechnen lässt. Dazu wurde zunächst der Kelvin-Voigt-Körper aufgrund der einfacheren Handhabung gelöst und anschließend der allgemeinere Standardkörper. Die Verwendung der dimensionslosen Parameter Q_1 (Gl. (5.6) für den Kelvin-Voigt-Körper) und Q_2 (Gl. (5.8) und Gl. (5.9) für den Standardkörper) erlaubt eine kompakte Darstellung der Lösung. Es sei hierbei erwähnt, dass die Methode nicht auf diese beiden Modelle beschränkt ist, sondern sich auf jede beliebige Rheologie, wie beispielsweise den Maxwell-Körper oder auf Prony-Reihen, anwenden lässt. Durch den Vergleich zwischen der numerischen und der analytischen Lösung für den elastischen Fall konnte eine Aussage über die Genauigkeit der Berechnung mit dem expliziten Euler Verfahren getroffen werden. Als eine weniger rechenaufwendige Alternative könnte sich das Runge-Kutta-Verfahren erweisen, welches auch bei längeren Zeiträumen stabil bleibt und bei gleicher Genauigkeit eine größere Zeitschrittweite als das Euler Verfahren erlaubt. Durch die korrekte kontaktmechanische Berechnung der Stoßzahlen sind nun die Wechselwirkungen viskoelastischer Materialien in Abhängigkeit ihrer Eingangsparameter und der Anfangsbedingungen verfügbar. Die gespeicherten Stoßzahlen können bei der Berechnung granularer Medien, im mesoskopischen Bereich, die Wechselwirkung zwischen einzelnen Teilchen exakt zur Verfügung stellen. Dadurch könnte eine Verbesserung von Vielteilchensimulationen auf makroskopischer Ebene erreicht werden. Dieser Datensatz für viskoelastische granulare Medien, kann der vorliegenden Arbeit entnommen werden.

Literatur

- [Cat38] CATTANEO, C.: Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi. In: *Rendiconti dell' Accademia nazionale dei Lincei* 27 (1938), S. 342–348
- [GHSW15] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 3, Kinetik*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2015 (13)
- [GHW14] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik 4, Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2014 (9)
- [Her82] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), S. 156–171
- [Jae94] JAEGER, J. J.: Analytical solutions of contact impact problems. In: *Appl. Mech. Rev.* 47(2) (1994), S. 35–54
- [LP15] LYASHENKO, I. A. ; POPOV, V. L.: Impact of an elastic sphere with an elastic half space revisited: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction. In: *Scientific Reports* 103 (2015), S. 8479
- [LR60] LEE, E. H. ; RADOK, J. R. M.: The contact problem for viscoelastic bodies. In: *J. of Appl. Mech.* 27 (1960), Nr. 3, S. 438–444
- [Maw77] MAW, N.: The rebound of elastic bodies in oblique impact. In: *Mech. Res. Comm* 4 (1977), S. 17–22
- [MBF76] MAW, N. ; BARBER, J.R. ; FAWCETT, J.N.: The oblique impact of elastic spheres. In: *Wear* 38 (1976), Nr. 1, S. 101–114
- [MBF81] MAW, N. ; BARBER, J. R. ; FAWCETT, J. N.: The role of elastic tangential compliance in oblique impact. In: *Journal of Lubrication Technology* 103 (1981), S. 74–80
- [MD53] MINDLIN, R. D. ; DERESIEWICZ, H.: Elastic spheres in contact under varying oblique forces. In: *J. of Appl. Mech.* 75 (1953), S. 327–344
- [Min49] MINDLIN, R. D.: Compliance of elastic bodies in contact. In: *J. of Appl. Mech.* 16 (1949), S. 259–268
- [PH13] POPOV, V. L. ; HESS, M.: *Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung. Eine Berechnungsmethode im Mikro- und Makrobereich*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2013
- [Pop10] POPOV, V. L.: *Kontaktmechanik und Reibung. Von der Nanotribologie bis zur Erdbebendynamik*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2010

Anhang

A.1 Matlab Skripte

A.1.1 Analytische Stoßfunktion

A.1.2 Normierte Geschwindigkeiten des Euler Verfahrens mit Kelvin-Voigt-Körper

A.1.3 Numerische Stabilität

A.1.4 Zufallsgenerierung für Dämpfungsverhältnis mit Kelvin-Voigt-Körper

A.1.5 Zufallsgenerierung für Dämpfungsverhältnis mit Standardkörper

A.1.6 Funktion des Euler Verfahrens mit Kelvin-Voigt-Körper

A.1.7 Funktion des Euler Verfahren mit Standardkörper