

FEM-GESTÜTZTE ANALYSE DER
LINEAR-ELASTISCHEN UND HYPERELASTISCHEN
EIGENGRAVITIERENDEN ERDE UNTER DEM
ASPEKT GEOMETRISCHER UND PHYSIKALISCHER
NICHTLINEARITÄTEN

vorgelegt von
Dipl.-Ing.
Paul Lofink
geb. in Tscheljabinsk

von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Utz von Wagner
Erstgutachter: Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Zweitgutachter: Prof. Dr. Nikolai D. Tutyshkin

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 2. Februar 2018

Berlin 2018

Abstract

This thesis deals with the deformation of the Earth due to self-gravitation. First fundamentals of continuum theory are explained. Mechanical and thermodynamical balance equation are presented. In order to close the system of field equations, thermodynamically consistent constitutive laws are derived by applying the method of COLEMAN-NOLL.

The self-gravitational deformation based on geometrically linear model of HOOKE is solved analytically. For this purpose the local mass and linear momentum balances in spherical coordinates are specialized to the radially symmetrical case. Corresponding boundary conditions are used and radial displacements for an initially homogeneous Earth are determined.

In order to capture the heterogeneous structure of the Earth the homogenization method of KACHANOV and SEVOSTIANOV is used. A three-layered compound consisting of the inner core, outer core and mantle is homogenized. Thus effective elastic parameters are deduced for the Earth. Data for the heterogeneous elastic characteristics are taken from the Preliminary Reference Earth Model.

The predicted strains are beyond the validity of the geometrically linear theory. Consequentially the investigation is extended to finite deformations. Here a distinction between reference and current configuration becomes essential. The current configuration of the Earth is given by the Preliminary Reference Earth Model. The referential configuration is unknown. Therefore the balance equations are stated in the current configuration. A physically linear constitutive law relates the CAUCHY stress tensor and the EULER-ALMANSI strain tensor. The resulting non-linear differential equations are solved numerically with the finite element method and radial displacements, strains and stresses are determined.

A further refinement of the model is obtained by simulating the multi-layered structure of the Preliminary Reference Earth Model. To ensure the transition conditions an iteration scheme is implemented. Thereby the continuity of the radial displacements and stresses is realized.

In the last chapter self-gravitational deformation based on physically non-linear MOONEY-RIVLIN model is analyzed. The polyconvex stored energy function of this model is developed in spherical coordinates and specialized to the radially symmetric case of the Earth. By using the PREM data the deformations of the Earth are determined with the finite element method and results are compared to those from the linear models.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Deformation der Erde aufgrund der Eigengravitation. Es werden zunächst kontinuumstheoretische Grundlagen vorgestellt. Dabei werden mechanische und thermodynamische Gesetze erläutert. Um das System aus Feldgleichungen zu schließen, werden nach der Methode von COLEMAN-NOLL thermodynamisch-konsistente Materialgesetze hergeleitet.

Das Eigengravitationsproblem wird auf Basis des geometrisch linearen Modells nach HOOKE analytisch gelöst. Dabei wird die lokale Massen- und Impulsbilanz in Kugelkoordinaten auf den radialsymmetrischen Fall konkretisiert. Mit entsprechenden Randbedingungen werden radiale Verschiebungen für eine anfänglich homogene Erde berechnet. Aus den Verschiebungen werden Dehnungen und Spannungen im Erdinneren bestimmt.

Um den heterogenen Aufbau der Erde zu erfassen, wird das Homogenisierungsverfahren von KACHANOV und SEVOSTIANOV angewendet. Dabei wird der Aufbau der Erde bestehend aus innerem, äußerem Kern und Mantel zu einer homogenen Kugel zusammengefasst. Daraus resultieren effektive elastische Kennwerte für die Erde. Die Daten für die heterogenen elastischen Eigenschaften sind dem *Preliminary Reference Earth Model* (PREM) entnommen.

Die ermittelten Dehnungen übersteigen den Gültigkeitsbereich der geometrisch linearen Theorie. Folgerichtig wird die Untersuchung auf finite Deformationen erweitert. Hierbei wird die Unterscheidung zwischen Bezugs- und aktueller Platzierung wesentlich. Die aktuelle Platzierung der Erde ist durch das *Preliminary Reference Earth Model* bekannt. Die Bezugsplatzierung ist dagegen unbekannt. Daher werden die Bilanzgleichungen in der aktuellen Platzierung formuliert. Es wird ein physikalisch linearer Zusammenhang zwischen dem CAUCHY-Spannungstensor und dem EULER-ALMANZI-Dehnungstensor hergestellt. Die daraus resultierenden nicht-linearen Differentialgleichungen werden mit der Finiten-Elemente-Methode (FEM) numerisch gelöst und radiale Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen bestimmt.

Eine weitere Verfeinerung des Modells besteht in der Simulation des PREM-Mehrschichtaufbaus der Erde. Um die Übergangsbedingungen an den Schichtgrenzen zu erfüllen, wird in der numerischen Simulation eine Iterationsprozedur implementiert. Dadurch wird die Stetigkeit der radialen Verschiebungen und der radialen Spannungen realisiert.

Im letzten Abschnitt wird das physikalisch nicht-lineare Materialverhalten nach MOONEY-RIVLIN untersucht. Die polykonvexe Formänderungsenergiedichte dieses Modells wird in Kugelkoordinaten entwickelt und auf den radialsymmetrischen Fall der Erde spezialisiert. Unter Verwendung der PREM-Daten werden die Deformationen der geschichteten Erde mithilfe der FEM bestimmt und mit den Ergebnissen der linearen Modelle verglichen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde während der wissenschaftlichen Arbeit am Fachgebiet Kontinuumsmechanik und Materialtheorie von Prof. MÜLLER in den Jahren 2013 bis 2017 erstellt. Als Assistent war ich während dieser Zeit vor allem in der Hochschullehre tätig und betreute Studierende sowohl in den Grundstudiumsveranstaltungen der Technischen Mechanik als auch in vertiefenden Veranstaltungen der Kontinuumstheorie und der numerischen Simulation mit der Finiten-Element-Methode.

Schon als Kind faszinierten mich der Astronomieunterricht und die absolute Gewissheit, dass es dort draußen sehr viel mehr gibt. KEPLERSche Gesetze der Planetenbewegung, Entstehung und das Absterben von Sternen und Planeten. Durch das Studium der Physikalischen Ingenieurwissenschaften erlangte ich mehr Wissen und mehr Fähigkeiten, die ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter weiter vertiefte. Als Prof. MÜLLER seinerseits eine Affinität zur Astronomie verkündete, wurde für mich das Thema für meine Dissertation schnell klar.

Daher gilt mein besonderer Dank Prof. MÜLLER für die Anregung zu dieser Arbeit und die Unterstützung in der gesamten Zeit.

Ich bedanke mich bei Prof. TUTYSHKIN für die freundliche und verständnisvolle Zusammenarbeit und für die Übernahme des Mitberichts.

Prof. VON WAGNER danke ich für die Unterstützung bei der Weiterbeschäftigung im letzten Jahr und die Übernahme des Vorsitzes.

Ganz besonders danke ich meinen freundlichen Mitarbeitern Dr. Ralf Wille, Dr. B. Emek Abali, Dr. Benjamin Schmorl, Dr. Oliver Stahn, Dr. Anton Köllner, Dr. Felix A. Reich, Sebastian Glane, Wilhelm Rickert, Julian Rackwitz, Gregor Ganzosch, Miriam Ziert und Arion Juritza für die stets anregenden Diskussion und für das angenehme Arbeitsklima.

Spezieller Dank gebührt meiner Familie, die mich stets unterstützte und motivierte weiterzumachen. Ich danke meinen beiden Töchtern, Emma und Jana, die mich immer wieder mit ihrem Lachen und ihrer Energie angesteckt haben und ich bedanke mich bei meiner wundervollen Frau, Freundin und Geliebten Anna, die stets an meiner Seite war.

Berlin, im Dezember 2017

Paul Lofink

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	IX
Acronyms	XII
Notation	XIII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Zielsetzung	2
1.3 <i>State of the Art</i>	2
1.4 Aufbau der Arbeit	3
2 Linear-elastische Analyse	7
2.1 Geometrisch lineares Modell nach HOOKE	7
2.2 Homogenisierung nach KACHANOV und SEVOSTIANOV	20
2.3 Physikalisch lineares Modell	25
2.4 Physikalisch lineares Mehrschalenmodell	31
3 Hyperelastische Analyse	41
3.1 Referenzproblem mit ST. VENANT-KIRCHHOFF	41
3.2 Referenzproblem mit MOONEY-RIVLIN	47
3.3 Mehrschalenmodell der Erde nach MOONEY-RIVLIN	52
4 Zusammenfassung und Ausblick	67
4.1 Zusammenfassung	67
4.2 Beitrag zur Forschungsgemeinschaft	69
4.3 Ausblick	70
A Koordinatensysteme	i
A.1 Kartesische Koordinaten	i
A.2 Kugelkoordinaten	ii
B Kinematik	v
B.1 EULER- und LAGRANGE-Darstellung	v
B.2 Deformationsgradient und verschiedene Dehnungsmaße	vi

B.3	Hauptachsen- bzw. Spektraldarstellung	ix
B.4	EUKLIDISCHE Transformation	xiii
C	Physikalische Gesetze	xvii
C.1	Mechanische Bilanzen in regulären Punkten	xvii
C.2	Thermodynamische Bilanzen in regulären Punkten	xxi
C.3	Entropieungleichung	xxiv
C.4	Bilanzen in singulären Punkten	xxvi
C.5	NEWTONSches Gravitationsgesetz	xxx
D	Materialmodelle	xxxv
D.1	Elastizität	xxxv
D.2	Lineare Elastizität	xlii
D.3	Hyperelastizität	xliv
D.4	<i>Preliminary Reference Earth Model</i>	xlvi
E	Finite-Elemente-Methode	li
E.1	Variation und Richtungsableitung	li
E.2	Prinzip der virtuellen Arbeit	li
E.3	NEWTON-RAPHSON-Verfahren	lv
F	Daten des <i>Preliminary Reference Earth Model</i>	lvii
	Literatur	XXI

Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Beschreibung
A	m^2	Fläche
α_K	1	Normierungsparameter
\mathbf{a}	m/s^2	Beschleunigungsvektor
χ	m	Bewegung
\mathbf{B}	1	linker CAUCHY-GREEN-Dehnungstensor
\mathbf{b}^*	m	Verschiebung des Koordinatenursprunges
\mathbf{C}	1	rechter CAUCHY-GREEN-Dehnungstensor
$\delta(\cdot)$	unreg.	1. Variation
\mathbf{D}	1/s	symmetrischer Geschwindigkeitsgradient
$(\tilde{\cdot})$	1	dimensionslose Größe
E	N/m^2	Elastizitätsmodul
\mathbf{e}_i	1	orthonormierter Eigenvektor (i -ter)
\mathbf{E}^a	1	EULER-ALMANZI-Dehnungstensor
\mathbf{E}	1	GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor
\mathbf{n}_i	1	Eigenvektor (i -ter)
\mathbf{E}^{lin}	1	linearisierter Dehnungstensor
$(\cdot)_E$	unreg.	EULER-Darstellung
\mathbf{F}	1	Deformationsgradient
\mathbf{f}	m/s^2	massenspezifische äußere Volumenkräfte
f	N m/kg	massenspezifische freie HELMHOLTZ-Energie
\mathbf{g}_i	unreg.	kovarianter Eigenvektor (i -ter)
\mathbf{g}^i	unreg.	kontravarianter Eigenvektor (i -ter)
$\Gamma_{i^j k}$	unreg.	CHRISTOFFEL-Symbole
\mathbf{v}	m/s	materieller Geschwindigkeitsvektor
G	$\text{m}^3 / \text{kg s}^2$	Gravitationskonstante
G_i	N/m^2	Schubmodul in der i -ten Schicht
\mathbf{h}	K/m	Temperaturgradient
\mathbf{H}	1	Verschiebungsgradient
I_A	$[\mathbf{A}]$	1. Hauptinvariante des Tensors \mathbf{A} ; $I_A = \text{Sp}(\mathbf{A})$
II_A	$[\mathbf{A}]^2$	2. Hauptinvariante des Tensors \mathbf{A} ; $II_A = \text{Sp}(\mathbf{A}^{\text{cof}})$
III_A	$[\mathbf{A}]^3$	3. Hauptinvariante des Tensors \mathbf{A} ; $III_A = \det \mathbf{A}$
\mathbf{I}	1	Einheitstensor 2. Stufe
J	1	Determinante des Deformationsgradienten

Symbol	Einheit	Beschreibung
K	N/m^2	Kompressionsmodul
$(\bar{\cdot})$	unreg.	Bezugsplatzierungsgröße
\mathbf{k}	N	Gravitationskraft
$(\cdot)_L$	unreg.	LAGRANGE-Darstellung
λ, μ	N/m^2	LAMÉ-Konstanten
λ_i	1	Eigenwert des Strecktensors (i -ter)
\mathbf{L}	1/s	Geschwindigkeitsgradient
m	kg	Masse
Θ_E	kg/m^2	Massenträgheitsmoment der Erde
\mathbf{n}	1	Flächennormale
ν	1	Querkontraktionszahl
\mathbf{P}	N/m^2	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
\mathbf{P}_i	1	Eigenprojektor (i -ter) z.B.: $\mathbf{P}_r = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$
p	N/m^2	hydrostatischer Druck
ϕ	unreg.	flächenspezifischer Fluss
φ, Φ	1	Azimutwinkel
Π	unreg.	variationelles Funktional
$(\cdot)^\pm$	unreg.	links- und rechtsseitiger Grenzwert
p	unreg.	volumenspezifische Produktion
ψ	unreg.	volumenspezifische extensive Größe
\mathbf{q}	N/m s	flächenspezifischer Wärmefluss
r, R	m	Radius
ρ	kg/m^3	Massendichte
\mathbf{R}, \mathbf{Q}^*	1	Rotationstensor
\mathbf{S}	N/m^2	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
s	N m/kg s	massenspezifische Entropie
Σ	N/m^2	Nominalspannungstensor
\mathbb{C}	N/m^2	Steifigkeitstetrade
\mathbf{T}	N/m^2	CAUCHY-Spannungstensor
\mathbf{T}_E	N/m^2	Extraspannungsanteil
ϑ, Θ	1	Polarwinkel
\mathbf{t}	N/m^2	Spannungsvektor
\mathbf{T}_R	N/m^2	Reaktionsspannungsanteil
T	K	absolute Temperatur
t, τ	s	Zeit
u	N m/kg	massenspezifische innere Energie
\mathbf{U}	1	rechter Strecktensor
U	m^2/s^2	Gravitationspotential
V	m^3	Volumen
ε_i	1	Hauptdehnung des linearisierten Dehnungstensors (i -te)
\mathbf{u}	m	Verschiebungsvektor
\mathbf{V}	1	linker Strecktensor

Symbol	Einheit	Beschreibung
w	N/m ²	volumenspezifische Formänderungsenergie
\mathbf{W}	1/s	antimetrischer Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{w}	m/s	Geschwindigkeit der singulären Fläche
$\mathbf{\Omega}$	1/s	Winkelgeschwindigkeitstensor
W^{ext}	N m	äußere mechanischer Arbeit
W^{int}	N m	innere mechanischer Arbeit
ω	1/s	Winkelgeschwindigkeit
\mathbf{x}	m	Ortsvektor
z	unreg.	volumenspezifische Zufuhr

Acronyms

AP aktuelle Platzierung viii, xix, VIII

BP Bezugsplatzierung viii, xvii–xix, VIII

FEM Finite-Elemente-Methode VIII

MR MOONEY-RIVLIN VIII

PREM *Preliminary Reference Earth Model* VIII

SVK SAINT VENANT-KIRCHHOFF VIII

unreg. unregelmäßig VIII

Notation

In der gesamten Arbeit wird folgende Notation verwendet:

- α, b, C – Skalare
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – Vektoren in der aktuellen Platzierung
- $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ – Vektoren in Bezugsplatzierung
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – Tensoren 2. Stufe
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – Tensoren 3. Stufe
- $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ – Tensoren 4. Stufe .

Tensoren sind Objekte, die zwangsläufig mit ihrer Basis verbunden sind. Das heißt nicht, dass sie nur in dieser Basis dargestellt werden können. Im Gegenteil: Sie können in jedes beliebige Koordinatensystem und dazugehörige Vektorbasis transformiert werden und sind damit unabhängig von dieser.

Im Gegensatz dazu sind Matrizen nur eine Zusammenstellung von Zahlen, die z.B. in einer 3×3 Aufstellung angeordnet werden:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j .$$

Hierbei wurde die EINSTEINSche Summenkonvention verwendet. Dabei wird bei doppelten Indizes von 1 bis 3 summiert. Der Tensor \mathbf{A} lautet also ausgeschrieben:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j .$$

Die EINSTEINSche Summenkonvention wird im gesamten Dokument einheitlich verwendet. An den Stellen, wo diese nicht anwendbar ist, wird das Summenzeichen explizit ausgeschrieben; so z.B. bei der Spektraldarstellung.

Bis jetzt wurden nur Tensoren mit kartesischen Basen betrachtet. Für die in dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen sind allerdings Kugelkoordinaten angepasster. Bei Kugelkoordinaten muss zwischen ko- und kontravariante Basisvektoren unterschieden werden. Die Vektoren der kovarianten Basis werden mit

\mathbf{g}_i bezeichnet:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z^i} ,$$

die Vektoren der kontravarianten Basis hingegen mit \mathbf{g}^k . Daraus ergeben sich mehrere ko-/kontra, aber auch gemischte Darstellungen für Tensoren:

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = A_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j = A^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j .$$

All diese Formen stellen ein und denselben Tensor 2. Stufe dar. Hierbei ist zu beachten, dass die EINSTEINSche Summenkonvention bei krummlinigen Systemen über doppelte Indizes greift, die zusätzlich einmal oben und einmal unten stehen. Die ko- und kontravarianten Basen sind dual zu einander. Deren Skalarprodukt liefert entweder eine 1 oder eine 0. Nur bei einer orthonormalen Basis sind die ko- und kontravarianten Basisvektoren identisch:

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j , \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j , \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} , \quad \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \delta^{ij}$$

mit $\delta_i^j = \delta^i_j = \delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} .$

Das mathematische Symbol δ_{ij} heißt KRONECKER-Delta. Nur im Falle einer Orthonormalbasis ergibt das Skalarprodukt zweier ko- oder kontravarianten Basisvektoren das KRONECKER-Delta. Beim schiefwinkligen oder krummlinigen Systemen ergibt das Skalarprodukt die Metrik, die ebenfalls ko- oder kontravariant sein kann:

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^k = G^{ik} , \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k = G_{ik} .$$

Krummlinige Basen werden auch lokale Basen bezeichnet, da die Basisvektoren \mathbf{g}_i vom Ort abhängen. Die kartesischen Basisvektoren zeigen im Gegensatz dazu unabhängig von der Position in die gleiche Richtung und haben stets die Länge Eins.

Es existieren Tensoren 2. Stufe, die spezielle Eigenschaften besitzen. Solche

Tensoren werden in den folgenden Mengen zusammengefasst:

Lin	Menge aller Tensoren 2. Stufe,
Lin^+, Lin^-	Menge aller Tensoren 2. Stufe mit positiver oder negativer Determinante,
Inv	Menge aller invertierbaren Tensoren 2. Stufe,
Sym	Menge aller symmetrischen Tensoren 2. Stufe,
Skw	Menge aller antimetrischen Tensoren 2. Stufe,
$Psym$	Menge aller symmetrischen und positiv definiten Tensoren 2. Stufe,
$Orth$	Menge aller orthogonalen Tensoren 2. Stufe.

Zusätzlich zu den verwendeten Symbolen existieren in der Tensoralgebra unterschiedliche Multiplikationen:

- ⊗ dyadisches Produkt zweier Tensoren mit Rang n und m zu einem Tensor mit Rang $n + m$,
Bsp.: $\mathbf{A} \otimes \mathbf{a} = A_{ij} a_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$.
- einfach Überschiebung der benachbarten Vektoren,
Bsp.: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A_{ij} b_k \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)$.
- doppelte Überschiebung der benachbarten Vektoren,
Bsp.: $\mathbb{C} \cdot \mathbf{E} = C_{ijkl} E_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot$
- : doppelte Überschiebung der transponierten benachbarten Vektoren,
Bsp.: $\mathbf{T} : \mathbf{E} = T_{ij} E_{ji}$.
- × Kreuzprodukt benachbarter Vektoren,
Bsp.: $\mathbf{A} \times \mathbf{b} = A_{ij} b_k \mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)$
- * RAYLEIGH-Produkt eines Tensors 4. Stufe mit einem Drehtensor $\mathbf{R} \in Orth^+$,
Bsp.: $\mathbf{R} * \mathbb{A} = A^{ijkl} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_i) \otimes (\mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_j) \otimes (\mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_k) \otimes (\mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_l)$.

Neben den algebraischen Operationen werden Ableitung benötigt. Hier unterscheidet man zwischen der einfachen partiellen Ableitung und der kovarianten Ableitung:

$$a^i{}_{;j} = \frac{\partial a^i}{\partial z^j} \quad \text{und} \quad a^i{}_{;j} = \frac{\partial a^i}{\partial z^j} + a^k \Gamma_k{}^i{}_j = a^i{}_{;j} + a^k \Gamma_k{}^i{}_j.$$

Bei der kovarianten Ableitung tauchen die sogenannten CHRISTOFFEL-Symbole $\Gamma_k{}^i{}_j$ auf. Diese berücksichtigen die Änderung der lokalen Basis. Die Notwendigkeit der kovarianten Ableitung wird deutlich, wenn man sich die Änderung, d.h. den

Gradienten, eines Vektorfeldes in einer krummlinigen Basis ansieht:

$$\text{grad } \mathbf{a} = \mathbf{a} \otimes \nabla = (a^k \mathbf{g}_k) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \mathbf{g}^i \right) = \frac{\partial a^k}{\partial z^i} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^i + a^k \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial z^i} \otimes \mathbf{g}^i .$$

Die CHRISTOFFEL-Symbole beschreiben die Komponenten der einzelnen Ableitungen der Basisvektoren:

$$\Gamma_{k \ i}^n := \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial z^i} \cdot \mathbf{g}^n , \quad \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial z^i} = \Gamma_{k \ i}^n \mathbf{g}_n .$$

Die Ableitung lässt sich entsprechend auch in der kontravarianten Basis aufstellen:

$$\Gamma_{kni} := \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial z^i} \cdot \mathbf{g}_n , \quad \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial z^i} = \Gamma_{kni} \mathbf{g}^n .$$

Damit lässt sich der Gradient schreiben:

$$\text{grad } \mathbf{a} = a^k_{,i} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^i + a^k \Gamma_{k \ i}^n \mathbf{g}_n \otimes \mathbf{g}^i = \left(a^k_{,i} + a^n \Gamma_{n \ i}^k \right) \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^i .$$

Bei der Bestimmung des Gradienten wurde bereits der Nabla-Operator verwendet. Dieser erlaubt es, folgende Differentiale einheitlich zu notieren:

$$\text{grad } \mathbf{T} = \mathbf{T} \otimes \nabla , \quad \text{div } \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \nabla , \quad \text{rot } \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \nabla .$$

Es wird im gesamten Dokument nur noch die Notation mit Nabla verwendet.

Das letzte Thema dieser Übersicht betrifft die Variation. Diese geht aus der GÂTEAUX-Richtungsableitung hervor:

$$\mathcal{D}_{d\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dh} f(\mathbf{x} + h d\mathbf{x}) \right|_{h=0} = \text{grad } f \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} .$$

Die Variation eines Feldes f ist gegeben durch:

$$\delta f(\mathbf{u}) = \mathcal{D}_{\delta \mathbf{u}} f(\mathbf{u}) = \left. \frac{d}{dh} f(\mathbf{u} + h \delta \mathbf{u}) \right|_{h=0} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} .$$

Dadurch wird ein Term erzeugt, der linear in $\delta \mathbf{u}$ ist. Die Variation wird verwendet, um schwache Formen für die FE-Simulationen zu generieren.

1. Einleitung

1.1. Motivation

Wenn man die Deformation der Erde studiert, dann stellt man fest, dass die dominanten Kräfte die eigene Gravitationskraft und die Trägheitskräfte durch die Eigenrotation sind. Erste Überlegungen hierzu stellte bereits NEWTON (siehe Chandrasekhar, 1995) in einem Gedankenexperiment im 18. Jahrhundert auf. Bei der Berechnung der Deformation aufgrund der Eigenrotation und -gravitation stellt sich heraus, dass der Anteil der Eigenrotation um zwei Größenordnungen kleiner ist als der der Eigengravitation (siehe Lofink und Müller, 2015). Der Eigenrotationsanteil kann mit Hilfe der geometrisch linearen Deformationstheorie unter Verwendung des linearen HOOKESchen Materialgesetzes bestimmt werden (siehe Müller und Lofink, 2014). Der Eigengravitationsanteil dagegen übersteigt die Grenzen der geometrisch linearen Theorie. Dadurch wird die Anwendung der finiten Deformationstheorie notwendig und damit einhergehend die Verwendung von höheren Materialgesetzen, wie z.B. SAINT VENANT-KIRCHHOFF oder MOONEY-RIVLIN.

Diese Dissertationsschrift befasst sich ausschließlich mit dem Eigengravitationsanteil der Erddeformationen und beschränkt sich hierbei auf eine elastische Untersuchung. Es werden sowohl analytische als auch numerische Finite-Elemente-Ergebnisse bestimmt und diskutiert. Durch die vorherrschende Radialsymmetrie werden alle Gleichungen konsequent in krummlinigen Kugelkoordinaten entwickelt.

Eine besondere Problematik bei der Anwendung der finiten Deformationstheorie stellt die unbekannt Referenzkonfiguration dar. Bei der Simulation von finiten Deformation in der Blechumformung oder im Bauwesen ist es üblich, in der undeformierten Referenzplatzierung zu rechnen. Bei der eigengravitierenden Erde ist die unbelastete Konfiguration, d.h. ohne Wirkung der Gravitationslast, unbekannt. Die aktuelle Platzierung dagegen ist durch das *Preliminary Reference Earth Model* (PREM) bekannt (siehe Dziewonski und Anderson, 1987). Dies führt zu einer Favorisierung der aktuellen Platzierung zur Beschreibung der Erde.

1.2. Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die finite Deformationstheorie für den radialsymmetrischen Fall zu entwickeln und damit die Deformationen der Erde zu bestimmen. Dabei werden folgende Zwischenziele verfolgt:

- Analytische Bestimmung der Verschiebungen für ein geometrisch lineares HOOKEsches Materialmodell. Diese Lösung wird als Referenz für die numerischen Berechnungen verwendet.
- Auswertung des *Preliminary Reference Earth Model* zur Bestimmung von radiusabhängigen Materialkennwerten.
- Entwicklung der finiten Kinematik für radialsymmetrische Probleme.
- Entwicklung eines geometrisch nicht-linearen Materialmodells für die Erde.
- Entwicklung der variationellen Formulierungen für die Simulation in der aktuellen Platzierung.
- Bestimmung der Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen für die Erde mit dem geometrisch nicht-linearen Materialmodell.
- Erweiterung der Untersuchung auf ein physikalisch nicht-lineares Materialmodell.
- Bestimmung der Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen für die Erde mit dem physikalisch nicht-linearen Materialmodell.
- Vergleich und Diskussion der Ergebnisse der unterschiedlichen Modellierungen.

1.3. *State of the Art*

Eine der frühesten wissenschaftlichen Publikationen, die sich mit der Deformation von eigengravitierenden Kugeln und Zylindern befasst ist von Chree, 1889. Diese Arbeit wurde später in Love, 1911 aufgegriffen, wo die radialen Verschiebungen einer homogenen Sphäre unter Eigengravitation berechnet wurden. Dabei wurde die Berechnung unter dem Gesichtspunkt einer geometrisch linearen Theorie durchgeführt. In einer späteren Veröffentlichung Love, 1944 wurde zum ersten Mal der LOVE-Radius beschrieben, der den Übergang von kompressiven zu streckenden Dehnungen beschreibt. Ebenfalls wurde in dieser Arbeit festgehalten, dass die Gravitationslast die dominante Last bei der Untersuchung von Planetendformationen ist.

In Hoskins, 1910 wird das Problem einer homogenen Kugel unter Eigengravitation mit konstanter Massendichte beschrieben. In einer späteren Veröffentlichung

(siehe Hoskins, 1920) wurde die Untersuchung auf eine veränderliche Massendichte und auf veränderliche elastische Konstanten erweitert. Das Modell der inneren Verteilung war rein empirisch.

Am Anfang des 20. Jahrhundert entwickelte sich die finite Deformationstheorie. Ein wichtiger Verfechter der Berechnung in der aktuellen Platzierung war SETH. Von ihm wurden mehrere Publikationen mit Anwendungsbeispielen der finiten Deformationstheorie in der aktuellen Platzierung veröffentlicht (siehe Seth, 1935; Seth, 1939b; Seth, 1939a).

Seiner Schule entstammend wurde von Chattarji, 1953 eine Reihenlösung der Verschiebungen für die eigengravitierende Erde basierend auf Seth' Ansatz entwickelt. Das verwendete empirische Modell für die Verteilung der Massendichte im Inneren stammte von ROCHE, welches im Sammelwerk von Jeffreys und Singer, 1959 veröffentlicht wurde.

Weitere Autoren folgten diesem Ansatz und untersuchten die Änderung des LOVE-Radius infolge verschiedener Dichteverteilungen (siehe Bose und Chattarji, 1963; Pan, 1963). Als LOVE-Radius wird diejenige Position im Inneren der Erde bezeichnet, bei der ein Übergang von kompressiven zu streckenden Dehnungen erfolgt. Diese Stelle wurde in Love, 1911 zum ersten Mal erwähnt.

In Geller, 1988 wird eine lineare Theorie für das Problem angewandt. Dabei wird aus dem HAMILTONSchen Prinzip eine Gleichung zur Bestimmung einer numerischen Lösung hergeleitet.

Eine ausführliche Beschreibung der historischen Entwicklung des Deformationszustandes der Erde und des aktuellen Forschungsstandes ist in Müller und Weiss, 2016 zu finden. In diese Veröffentlichung sind bereits Ergebnisse der vorliegenden Arbeit eingeflossen.

1.4. Aufbau der Arbeit

Bei der Dokumentation wird die Arbeit in mehrere Kapitel unterteilt, deren Inhalt sei kurz vorgestellt.

Kapitel 2 widmet sich der linear-elastischen Analyse. Als erste Näherungslösung wird eine analytische Lösung einer homogenen Eisenkugel mit den Maßen der Erde dargelegt. Dabei wird das geometrisch lineare isotrope HOOKESche Gesetz verwendet. Daraufhin wird das Homogenisierungsverfahren aus Sevostianov und Kachanov, 2007 instrumentalisiert, um effektive elastische Parameter der Erde zu bestimmen. Die Grundlage hierfür liefert das *Preliminary Reference Earth Model*. Danach wird die Untersuchung auf die finite Deformationstheorie erweitert. Dabei werden die Deformationen einer homogenen eigengravitierenden Kugel mit den homogenisierten elastischen Parametern der Erde bestimmt. Darüber hinaus wird eine FE-Simulation des Schalenaufbaus der Erde vorgestellt.

In Kapitel 3 werden zunächst hyperelastische Gesetze beleuchtet. Dabei werden die Deformationen eines Einheitswürfels für das ST. VENANT-KIRCHHOFF-Materialgesetz analytisch bestimmt. Daraufhin sollen die hyperelastischen Gesetze nach ST. VENANT-KIRCHHOFF und MOONEY-RIVLIN in FEniCS© implementiert und mit den zuvor gezeigten analytischen Ergebnissen verifiziert werden. Danach erfolgt die FE-Simulation des geschichteten Erdmodells mit dem hyperelastischen MOONEY-RIVLIN-Gesetz.

In Kapitel 4 werden die Ergebnisse zusammengefasst und verglichen. Das Kapitel schließt mit einem Ausblick für mögliche weitere Forschungen.

Im Anhang wird die Theorie erläutert, die zum Verständnis der Ergebnisse notwendig ist. Der Anhang ist in folgende Kapitel unterteilt:

Kapitel A befasst sich mit den verwendeten Koordinatensystemen. Es werden kartesische und Kugelkoordinaten vorgestellt. Dabei werden insbesondere deren Differentiationseigenschaften rekapituliert.

In Kapitel B Kinematik wird die mathematische Beschreibung der Bewegung behandelt. Dabei werden kinematische Größen rekapituliert, die zur Beschreibung der finiten Deformationstheorie notwendig sind. Allen voran wird der Deformationsgradient \mathbf{F} eingeführt. Auf dem Deformationsgradient aufbauend werden weitere Dehnungsmaße vorgestellt: der GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor, der EULER-ALMANSI-Dehnungstensor und der linearisierte Dehnungstensor. Ebenfalls in diesem Kapitel wird die Spektraldarstellung vorgestellt. Diese erweist sich bei der Beschreibung des physikalisch nicht-linearen hyperelastischen Materialverhaltens als nützlich. Es wird die Transformation der kinematischen und kinetischen Größen bei einem Beobachterwechsel erläutert. Konsequenzen dieser EUKLIDISCHEN Transformation reduzieren die Einflussgrößen der Materialgleichungen.

In Kapitel C Physikalische Gesetze werden die kontinuumstheoretischen Bilanzgleichungen demonstriert. Es werden die mechanischen Bilanzen für Masse, Impuls und Energie erörtert. Über die Energiebilanz wird ein Zusammenhang zwischen der Kontinuumsmechanik und der -thermodynamik hergestellt. Daran anschließend wird die Entropiegleichung nach CLAUSIUS und DUHEM vorgestellt. Diese gibt zum einen eine Prozessrichtung vor und zum anderen zeigt sie die Existenz eines hyperelastischen Potentials für reversible Prozesse. Anschließend werden Bilanzen in singulären Punkten diskutiert. Diese liefern Rand- und Übergangsbedingungen für die anstehenden Randwertprobleme. Ebenfalls in diesem Kapitel wird das NEWTONSche Gravitationsgesetz vorgestellt. Für kontinuierliche Körper führt es auf ein skalares Potential, dass über die POISSON-Gleichung mit der Massendichte des Körpers verbunden ist.

In Kapitel D Materialmodelle werden aus den mechanischen und thermodynamischen Gesetzen Relationen zwischen den physikalischen und den kinematischen

Größen hergeleitet. Dabei wird die physikalische Seite durch einen Spannungstensor und die kinematische Seite durch einen Dehnungstensor repräsentiert. Es werden insgesamt drei Materialgesetze untersucht: das geometrisch lineare HOOKESche Gesetz, ein physikalisch lineares Gesetz vom ST. VENANT-KIRCHHOFF-Typ, sowie das physikalisch nicht-lineare MOONEY–RIVLIN-Gesetz. Ebenso wird in diesem Kapitel das *Preliminary Reference Earth Model* (PREM) aus Dziewonski und Anderson, 1987 vorgestellt. Dieses liefert radiusabhängige Daten für die Massendichte. Durch Messungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit von seismischen Wellen können außerdem radiusabhängige elastische Konstanten für die Erde ermittelt werden.

Kapitel E stellt die Finite-Elemente-Methode (FEM) vor und die damit einhergehende variationelle Formulierung der Bilanzgleichungen. Das führt auf das Prinzip der virtuellen Arbeit, das für die numerischen Simulationen notwendig ist.

In Kapitel F sind die verwendeten Daten des PREM-Modells niedergeschrieben und Graphen der elastischen Konstanten im Erdinneren abgebildet.

2. Linear-elastische Analyse

2.1. Geometrisch lineares Modell nach HOOKE

Folgendes Problem ist mathematisch zu lösen: man gehe von einer Kugel aus, die durch die Eigengravitation schrumpft. Als erste Näherung soll das Problem

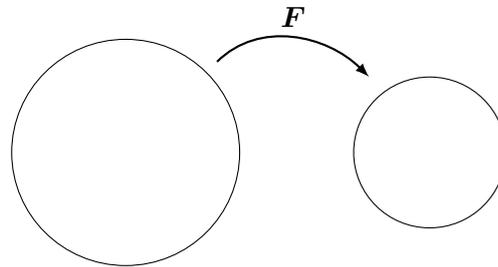


Abb. 2.1.: Schematische Darstellung der Deformation durch die Eigengravitation.

mit dem HOOKESchen Gesetz gelöst werden. Die Erde wird als ein rein elastischer Festkörper betrachtet. Des Weiteren wird angenommen, dass das Objekt homogen und isotrop ist, sodass es durch zwei elastische Konstanten vollständig beschrieben ist. Es wird die geometrisch lineare Theorie angewandt. Dazu wird die Impulsbilanz gelöst werden:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}.$$

In der geometrisch linearen Theorie wird die Belastung am unverformten System aufgebracht, und es gibt keine Auswirkung der Deformation auf die Belastung. Im allgemeinen wird der Himmelskörper beim Schrumpfen dichter werden. Damit verändert sich auch seine Gravitation. In der linearen Theorie werden diese Effekte vernachlässigt. Es ist zwar möglich, die Verdichtung anhand der Massenbilanz im Nachhinein zu berechnen, diese hat aber in der geometrisch linearen Theorie keinen Einfluss auf die Deformation selbst. Man geht von einem quasi-statischen Prozess aus. Damit fallen die Trägheitsterme weg, und es bleibt nur das Kräftegleichgewicht aus innerer Beanspruchung und äußerer Gravitationswirkung:

$$\nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{T} = -\rho \mathbf{f} = \rho \nabla_{\mathbf{E}} U. \quad (2.1)$$

Um das Gravitationspotential U zu bestimmen, muss die POISSON-Gleichung gelöst werden:

$$\Delta_{\mathbb{E}}U = 4\pi G\rho = \text{konst.} .$$

Der LAPLACE-Operator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch:

$$\Delta_{\mathbb{E}}U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} .$$

Es wird von reiner Radialsymmetrie ausgegangen:

$$U(r, \vartheta, \varphi) = U(r).$$

Dadurch lässt sich die POISSON-Gleichung direkt integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) &= 4\pi G\rho r^2 \\ r^2 \frac{dU}{dr} &= \frac{4}{3}\pi G\rho r^3 + C \\ \frac{dU}{dr} &= \frac{4}{3}\pi G\rho r + \frac{C}{r^2} . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Da in diesem Fall nur die Gravitationsbeschleunigung relevant ist, ist nochmaliges Integrieren nicht notwendig:

$$\rho \mathbf{f} = -\rho \nabla_{\mathbb{E}}U = -\rho \left(\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right) .$$

Bei reiner Radialsymmetrie vereinfacht sich die Gleichung:

$$\rho \mathbf{f} = -\rho \frac{dU}{dr} \mathbf{e}_r .$$

Damit lassen sich ebenso die Integrationskonstante in Gleichung (2.2) wegdiskutieren. Wenn die Konstante C von Null verschieden wäre, würde im Mittelpunkt $r = 0$ die Gravitationsbeschleunigung ins Unendliche wachsen, was unphysikalisch ist. Die Gleichung (2.2) kann mit Hilfe der Masse einer homogenen Kugel geschrieben werden:

$$\frac{dU}{dr} = G \frac{m(r)}{r^2} .$$

Mit $m(r)$ ist die Masse der Erde unterhalb des Radius r gemeint. Die Gravitationskraftdichte ist dann gegeben durch:

$$\rho \mathbf{f} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r \mathbf{e}_r .$$

Als nächstes wird die linke Seite von Gleichung (2.1) veranschaulicht. Man geht vom isotropen HOOKEschen Gesetz aus:

$$\mathbf{T} = \lambda \text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^{\text{lin}} .$$

In der linearen Theorie ist der Verzerrungstensor \mathbf{E}^{lin} durch den symmetrischen Verschiebungsgradienten gegeben:

$$\mathbf{E}^{\text{lin}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{E}} + (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{E}})^{\top} \right) .$$

Der Gradient der Verschiebungen lässt sich mithilfe der CHRISTOFFEL-Symbole bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{E}} &= (u^i \mathbf{g}_i) \otimes \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial z^k} \mathbf{g}^k \right) = \frac{\partial u^i}{\partial z^k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^k + u^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial z^k} \otimes \mathbf{g}^k \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial z^k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^k + u^i \Gamma_{i \ k}^n \mathbf{g}_n \otimes \mathbf{g}^k = \left(\frac{\partial u^i}{\partial z^k} + u^n \Gamma_n^i \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^k . \end{aligned}$$

Die Verschiebung wird ebenfalls radialsymmetrisch angenommen. Das erscheint sinnvoll, da die einzige „äußere“ Kraft durch die Gravitation hervorgerufen wird und diese rein radialsymmetrisch ist:

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + u_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} = u_r(r) \mathbf{e}_r .$$

Dann kann der Gradient von \mathbf{u} in physikalischen Komponenten summarisch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{E}} &= \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_{\varphi} \right) \otimes (u_r \mathbf{e}_r) \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{u_r}{r} \left(\mathbf{e}_{\vartheta} \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \mathbf{e}_{\varphi} \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{u_r}{r} (\mathbf{e}_{\vartheta} \otimes \mathbf{e}_{\vartheta} + \mathbf{e}_{\varphi} \otimes \mathbf{e}_{\varphi}) . \end{aligned}$$

Dieser Tensor hat nur Diagonaleinträge, sodass die Transposition identisch ist. Der Dehnungstensor ist damit gleich dem Gradienten:

$$\mathbf{E}^{\text{lin}} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{u_r}{r} (\mathbf{e}_{\vartheta} \otimes \mathbf{e}_{\vartheta} + \mathbf{e}_{\varphi} \otimes \mathbf{e}_{\varphi}) . \quad (2.3)$$

Der Spannungstensor hat dadurch ebenfalls nur Diagonaleinträge:

$$\mathbf{T} = T_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + T_{\vartheta\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} \otimes \mathbf{e}_{\vartheta} + T_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} \otimes \mathbf{e}_{\varphi} ,$$

mit:

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ T_{\vartheta\vartheta} = T_{\varphi\varphi} &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{u_r}{r} \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird die Impulsbilanz (2.1) ausgewertet. Dazu wird auf der linken Seite die Divergenz des Spannungstensors in Kugelkoordinaten herangezogen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}} &= (T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial z^k} \mathbf{g}^k \right) \\ &= \frac{\partial T^{ij}}{\partial z^k} \mathbf{g}_i \delta_j^k + T^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial z^k} \delta_j^k + T^{ij} \mathbf{g}_i \left(\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial z^k} \cdot \mathbf{g}^k \right) \\ &= \frac{\partial T^{ij}}{\partial z^j} \mathbf{g}_i + T^{ij} \Gamma_{i \ j}^n \mathbf{g}_n + T^{ij} \Gamma_{j \ k}^k \mathbf{g}_i = \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial z^j} + T^{nj} \Gamma_{k \ j}^i + T^{ij} \Gamma_{j \ k}^k \right) \mathbf{g}_i . \end{aligned}$$

Diese reduziert sich durch die Diagonalgestalt von \mathbf{T} und reine Abhängigkeit der Komponenten vom Radius r . In physikalischen Koordinaten folgt:

$$\left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\vartheta\vartheta} - T_{\varphi\varphi}) \right] \mathbf{e}_r + \frac{\cot \vartheta}{r} (T_{\vartheta\vartheta} - T_{\varphi\varphi}) \mathbf{e}_\vartheta = \rho \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r .$$

Die ϑ -Komponente der Gleichung liefert die angenommene Gleichheit der $T_{\vartheta\vartheta}$ und $T_{\varphi\varphi}$ Komponenten, sodass kein Widerspruch entsteht. In \mathbf{e}_r -Richtung bleibt eine inhomogene Differentialgleichung in r :

$$\left[\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\vartheta\vartheta} - T_{\varphi\varphi}) \right] = \frac{4}{3} \pi G \rho^2 r . \quad (2.4)$$

Die Gleichung wird mit dem Außenradius der Erde R_a entdimensionalisiert:

$$r = \tilde{r} R_a, \quad u_r = \tilde{u}_r R_a, \quad \frac{du_r}{dr} = \frac{R_a d\tilde{u}_r}{R_a d\tilde{r}} = \tilde{u}'_r .$$

Die Spannungen werden mit dem Kompressionsmodul in dimensionslose Form gebracht:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{rr} = \frac{T_{rr}}{K} &= \frac{3\nu}{1+\nu} \left(\tilde{u}'_r + 2 \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} \right) + \frac{3(1-2\nu)}{1+\nu} \tilde{u}'_r , \\ \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} = \tilde{T}_{\varphi\varphi} &= \frac{3\nu}{1+\nu} \left(\tilde{u}'_r + 2 \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} \right) + \frac{3(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} . \end{aligned}$$

Für eine zunächst konstante Dichte $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0$ ist die Differentialgleichung gegeben durch:

$$\tilde{u}_r'' + 2\frac{\tilde{u}_r'}{\tilde{r}} - 2\frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{3} \tilde{r} \quad \text{mit} \quad \alpha_K = \frac{4\pi G \bar{\rho}_0^2 R_a^2}{3K}. \quad (2.5)$$

Diese inhomogene Differentialgleichung wird gelöst, indem zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung mittels Exponentialansatz gefunden wird und anschließend eine geeignete partikuläre Lösung bestimmt wird. Eine elegante Lösung kann gefunden werden, indem man die linke Seite wie folgt ersetzt (Bower, 2009, Kap. 3.1.4):

$$\tilde{u}_r'' + 2\frac{\tilde{u}_r'}{\tilde{r}} - 2\frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}^2} = \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r}^2 \tilde{u}_r) \right) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{3} \tilde{r}.$$

Durch zweimaliges unbestimmtes Integrieren ist die Verschiebung \tilde{u}_r nur noch bis auf zwei Integrationskonstanten exakt bestimmt:

$$\tilde{u}_r(\tilde{r}) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{30} \tilde{r}^3 + C_1 \frac{\tilde{r}}{3} + C_2 \frac{1}{\tilde{r}^2}.$$

Die Integrationskonstanten lassen sich aus den Randbedingungen bestimmen. Zum einen wird die Verschiebung ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Ursprung zu Null gesetzt. Dadurch wird eine gegebenenfalls überlagerte Starrkörperbewegung ausgeschlossen. Außerdem wird am Außenrand Spannungsfreiheit gefordert, da außerhalb keine Materie vorhanden ist. Sollte eine gasartige Substanz die Erde umgeben, wird deren Druckanteil als vernachlässigbar klein im Vergleich zu den inneren Spannungen angenommen:

$$\tilde{u}_r|_{\tilde{r}=0} = 0, \quad \left. \frac{T_{rr}}{K} \right|_{\tilde{r}=1} = 0.$$

Die erste Bedingung ist durch $C_2 = 0$ erfüllt. Für die Spannungsrandbedingung wird die Ableitung benötigt:

$$\tilde{u}_r'(\tilde{r}) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{10} \tilde{r}^2 + \frac{C_1}{3} \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_r'(\tilde{r} = 1) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{10} + \frac{C_1}{3}.$$

Hieraus gilt für die radiale Spannungskomponente:

$$\frac{3\nu}{1 + \nu} \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{30} (3 - \nu) + \frac{C_1}{3} (1 + \nu) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{3 - \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{10}.$$

Damit ist die Lösung vollständig bestimmt.

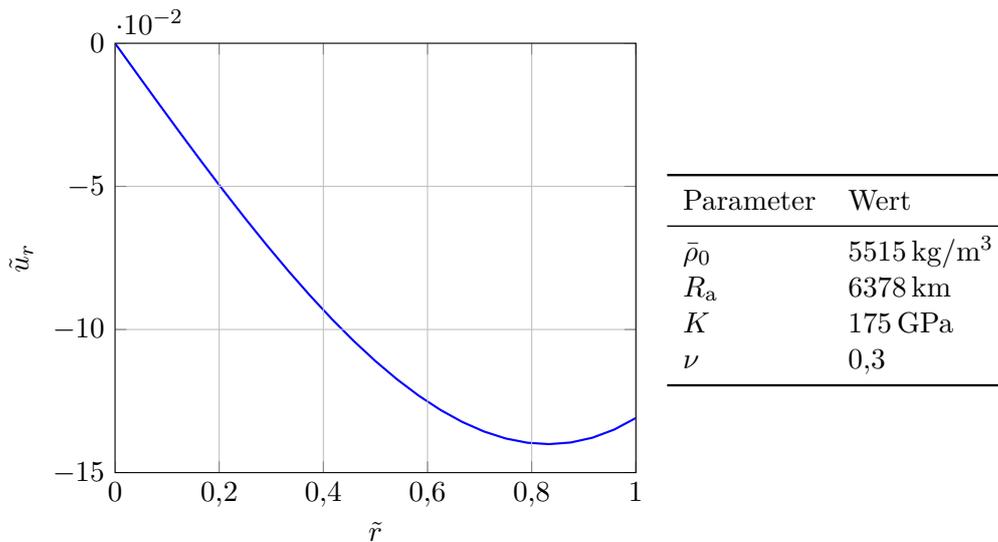


Abb. 2.2.: Normierte Verschiebung $\tilde{u}_r = u_r/R_a$ des geometrisch linearen Modells mit anfänglich konstanter Massendichte.

Die Verschiebung für den geometrisch linearen Fall unter Anwendung des HOOKEschen Gesetzes mit vollständiger Radialsymmetrie und anfänglich konstanter Dichte ist damit gegeben durch:

$$\tilde{u}_r(\tilde{r}) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{30} \left[\tilde{r}^3 - \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \tilde{r} \right], \quad \alpha_K = \frac{4\pi G \bar{\rho}_0^2 R_a^2}{3K}.$$

Abb. 2.2 zeigt die dimensionslose Verschiebung. Die verwendeten Parameter befinden sich in der Tabelle daneben. Es wurde die aktuelle mittlere Dichte der Erde $\bar{\rho}_0$ verwendet und der Kompressionsmodul K sowie die Querkontraktionszahl ν von Eisen. Diese Angabe ist für eine erste Schätzung brauchbar, da der innere und äußere Kern zum aktuellen Kenntnisstand aus Eisen bestehen. Die Verschiebung hat an der Stelle $\tilde{r}_{\text{Love}} = 0,83$ ihr Minimum. Sie beträgt an dieser Stelle 14% und ist negativ. Damit entspricht das Bild der schrumpfenden Kugel der Hypothese. Jedoch übersteigen 14% den Gültigkeitsrahmen der linearen Theorie.

Abb. 2.3 zeigt die Dehnungen für das geometrisch lineare Modell. Die radiale Dehnung E_{rr}^{lin} hat ihren Nulldurchgang gerade beim LOVE-Radius. Sie beginnt bei einem negativen Wert und ist am Außenrand positiv. Es wird unterhalb des LOVE-Radius komprimiert und oberhalb von \tilde{r}_{Love} auseinander gezogen. Die $E_{\vartheta\vartheta}^{\text{lin}}$ sind im gesamten Definitionsbereich negativ. Abbildung 2.4 zeigt die radialen und die sphärischen Spannungen über den Radius aufgetragen. Die radiale Spannung \tilde{T}_{rr} ist am Außenrand Null, sodass die geforderte NEUMANN-Bedingung genau erfüllt ist. Die sphärischen Spannungen $\tilde{T}_{\vartheta\vartheta} = \tilde{T}_{\varphi\varphi}$ starten im Erdmittel-

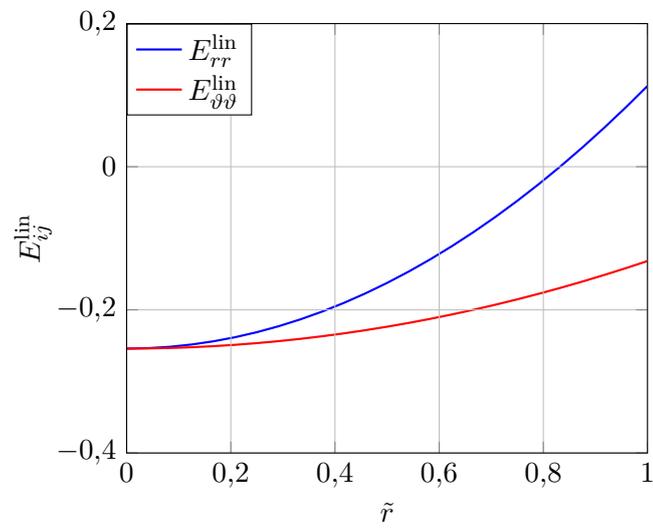


Abb. 2.3.: Komponenten des Dehnungstensors \mathbf{E}^{lin} des geometrisch linearen Modells der Erde nach HOOKE.

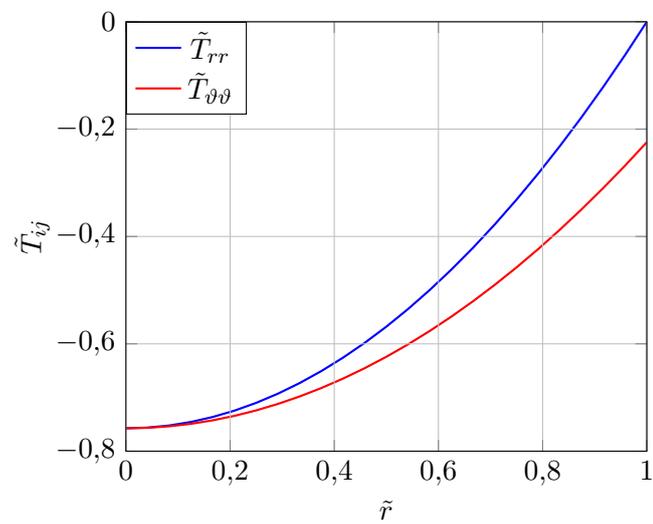


Abb. 2.4.: Normierte Spannungskomponenten $\tilde{T}_{rr} = T_{rr}/K$ und $\tilde{T}_{\vartheta\vartheta} = T_{\vartheta\vartheta}/K = T_{\varphi\varphi}/K$ über den normierten Radius.

punkt beim gleichen Wert, erreichen jedoch am Außenrand endliche von Null verschiedene Werte, die im gesamten Bereich negativ sind.

Im Anschluss an die berechneten Verschiebungen kann die Dichteverteilung im Endzustand betrachtet werden:

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{J} = \frac{\bar{\rho}}{\det \mathbf{F}} .$$

Die Determinante des Deformationsgradienten lässt sich in der geometrisch linearen Theorie approximieren (Bertram, 2005, §2.3):

$$\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det(\mathbf{U}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 .$$

Die λ_i sind die Eigenwerte des rechten Strecktensors \mathbf{U} . Der Zusammenhang zum linearen Dehnungstensor \mathbf{E}^{lin} ergibt sich über den rechten CAUCHY-GREEN-Tensor \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})^\top \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}) = \mathbf{I} + \mathbf{H}^\top + \mathbf{H} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} \approx \mathbf{I} + 2\mathbf{E}^{\text{lin}} .$$

Der Zusammenhang zwischen \mathbf{C} und \mathbf{U} ist durch das Quadrat gegeben. Damit lässt sich \mathbf{U} durch \mathbf{E}^{lin} in erster Näherung abbilden:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{I} + 2\mathbf{E}^{\text{lin}}} = \mathbf{I} + \mathbf{E}^{\text{lin}} - \frac{1}{2}\mathbf{E}^{\text{lin}2} + \mathcal{O}(\mathbf{E}^{\text{lin}3}) \approx \mathbf{I} + \mathbf{E}^{\text{lin}} .$$

Der Zusammenhang zu den Eigenwerten wird in der Spektraldarstellung ersichtlich:

$$\mathbf{E}^{\text{lin}} = \mathbf{U} - \mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i - 1) \bar{\mathbf{n}}_i \otimes \bar{\mathbf{n}}_i = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \bar{\mathbf{n}}_i \otimes \bar{\mathbf{n}}_i .$$

Mit diesem Ergebnis können die Determinante durch die Hauptdehnungen ε_i approximiert werden:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{U} &= (\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_2 + 1)(\varepsilon_3 + 1) \\ &= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \\ &\approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1 + \text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}}) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Dichte im geometrisch linearen Fall:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\bar{\rho}}{1 + \text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}})} = \bar{\rho} \left(1 - \text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}}) + \text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}})^2 + \mathcal{O}(\text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}})^3) \right) \\ &\approx \bar{\rho}_0 \left(1 - \text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}}) \right) = \bar{\rho}_0 (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) . \end{aligned}$$

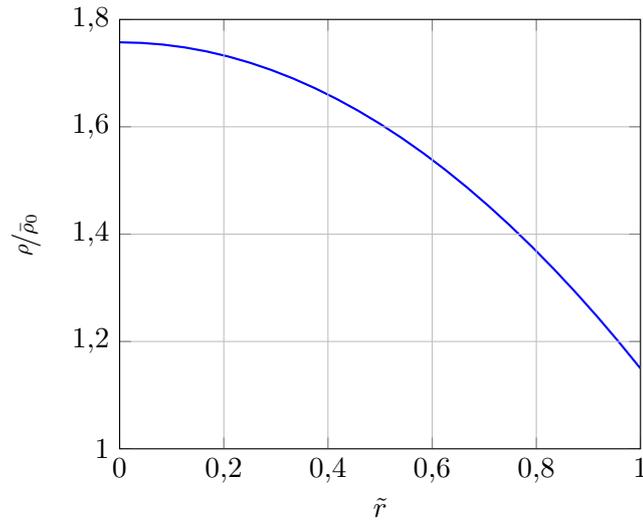


Abb. 2.5.: Dimensionslose Dichteverteilung für den geometrisch linearen Fall.

Da der Dehnungstensor in Gleichung (2.3) bereits diagonal ist, sind die Hauptdehnungen durch die Diagonaleinträge gegeben:

$$\varepsilon_1 = \tilde{u}'_r, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}}.$$

Die Dichteverteilung ist gegeben durch:

$$\rho = \bar{\rho}_0 \left(1 - \tilde{u}'_r - \frac{2\tilde{u}_r}{\tilde{r}} \right). \quad (2.6)$$

Abbildung 2.5 zeigt die Dichteverteilung über den dimensionslosen Radius. Die Dichte ist an jeder Stelle größer als die Ausgangsdichte $\bar{\rho}_0$. Das erscheint plausibel, da die Sphäre geringer geworden ist. Durch die geforderte Massenbilanz muss die Dichte größer werden, damit die Masse erhalten bleibt.

Bei der Rechnung wurde angenommen, dass die Kugel die Massendichte $\rho_E = 5515 \text{ kg/m}^3$ und den Außenradius $r_E = 6378 \text{ km}$ besitzt. Das entspricht den Werten der aktuellen Platzierung der Erde. Das entspricht sicherlich nicht der Realität. Da aber der Außenradius und die Massendichte der Bezugsplatzierung unbekannt sind, ist das als eine erste grobe Schätzung brauchbar.

Abschätzung der undeformierten Erde in Rahmen der geometrisch linearen Theorie

Gesucht ist der Anteil der Deformation aufgrund der Eigengravitation. Also ist sinnbildlich die Größe der Erde vor dem Einsetzen der Gravitationswirkung zu bestimmen. Es ist damit derjenigen Ausgangsradius R_a gesucht, der bei konstanter Masse m_0 und konstanten elastischen Werten K und ν gerade die Verschiebung erzeugt, die zur aktuellen Gestalt der Erde führt:

$$r_E = (1 + \tilde{u}_r(\tilde{r} = 1))R_a \quad \Rightarrow \quad r_E = R_a \left[1 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_K}{30} \left(1 - \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \right) \right]. \quad (2.7)$$

Der Parameter α_K hängt ebenfalls vom Ausgangsradius R_a ab. Hinzu kommt, dass α_K von der Ausgangsmassendichte $\bar{\rho}_0$ abhängt. Diese wird sich ebenfalls ändern, da Massenerhaltung gefordert wird. Um diese Zusammenhänge klarer abzubilden, wird die Dichte in α_K durch die Gesamtmasse ersetzt:

$$\alpha_K = \frac{4\pi G \bar{\rho}_0^2 R_a^2}{3K} = \frac{3m_0^2 G}{4\pi K R_a^4}.$$

In Gleichung (2.7) eingesetzt, führt das zu einer Gleichung vierter Ordnung:

$$\frac{m_0^2 G}{20\pi K} = R_a^4 - r_E R_a^3.$$

Die einzige positive reelle Lösung dieser Gleichung liefert einen Ausgangsradius $R_a = 7002$ km. Daraus resultiert die Ausgangsdichte $\bar{\rho}_0 = 4154$ kg/m³.

Der geometrisch lineare Fall ist in der Literatur bereits bekannt und ausführlich diskutiert. In der Arbeit Müller und Weiss, 2016 wird das gleiche Vorgehen auf ein Erdmodell bestehend aus einem inneren Eisenkern und einem Mantel aus SiO₂ angewendet. Es wird zunächst für jeden Bereich die Gravitationsbeschleunigung bestimmt und danach die Differentialgleichung (2.5) bereichsweise gelöst. Selbst für diesen „übersichtlichen“ Fall ist die Lösung bereits sehr umfangreich. Nichtsdestotrotz, die Gleichungen können noch geschlossen durch eine Reihe gelöst werden. Ein numerischer Plot dieser Ergebnisse ist in Abb. 2.6 zu sehen. In dieser Arbeit wird dieser Ansatz nicht weiter verfolgt. Stattdessen wird von Beginn an eine numerische Betrachtung favorisiert.

Zusätzlich zu den Verschiebungen ist in Abb. 2.7 die radiale Spannung abgebildet. Es wird deutlich, dass die Erweiterung auf zwei Schalen sowohl die Verschiebung als auch die Spannungen sehr stark beeinflussen. Aus diesem Grund wird in Kap. 2.4 ein Mehrschalenmodell der Erde simuliert.

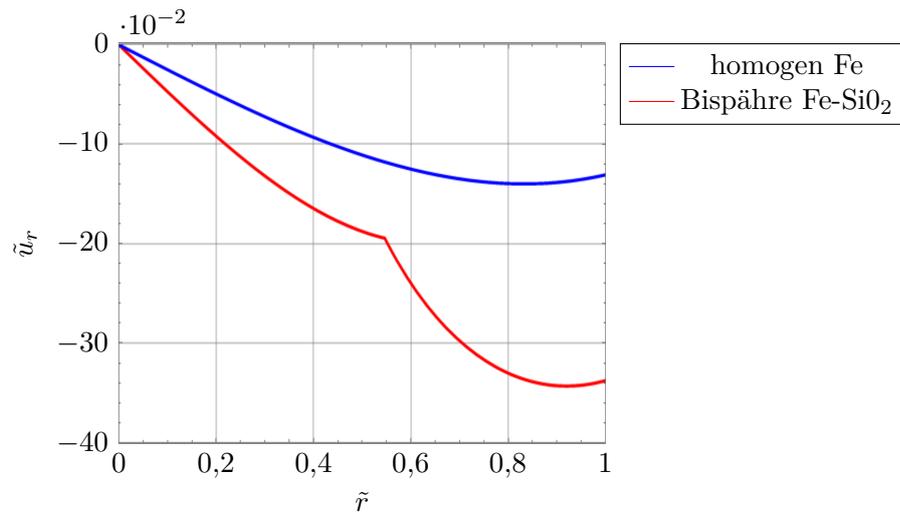


Abb. 2.6.: Normierte Verschiebungen $\tilde{u}_r = u_r/r_E$ über den normierten Radius $\tilde{r} = r/r_E$ für ein Zwei-Schalen-Modell der Erde. Dabei wird der innere Kern aus Eisen ($E_i = 210$ GPa, $\nu_i = 0,3$, $\rho_i = 1000$ kg/m³) und der Mantel aus Silikat ($E_o = 100$ GPa, $\nu_o = 0,17$, $\rho_o = 4600$ kg/m³) modelliert. Zum Vergleich ist die Lösung für die homogene Kugel aus Eisen dargestellt (Müller und Weiss, 2016).

Inkompressibler Sonderfall

Nun wird der Fall betrachtet, wenn die Querkontraktionszahl den Wert $\nu = 1/2$ annimmt. Bei der Inkompressibilität entsteht ein innerer Zwang im Material. Ähnlich einer Lagerreaktion, die einen kinematischen Zwang in einem System produziert und dadurch in dem Lager Reaktionslasten entstehen. Bei inneren Zwängen unterteilt sich der Spannungstensor in einen Reaktionsanteil \mathbf{T}_R , der keine Arbeit leistet und einen Extraspannungsanteil \mathbf{T}_E , der weiterhin durch das Konstitutivgesetz ermittelt wird (siehe Bertram, 2005, Kap. 5):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_R + \mathbf{T}_E \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\rho} \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{D} = 0 . \quad (2.8)$$

Die innere Zwangsbedingung ist eine skalare Funktion von \mathbf{F} :

$$\gamma_F(\mathbf{F}) := J - 1 = 0 .$$

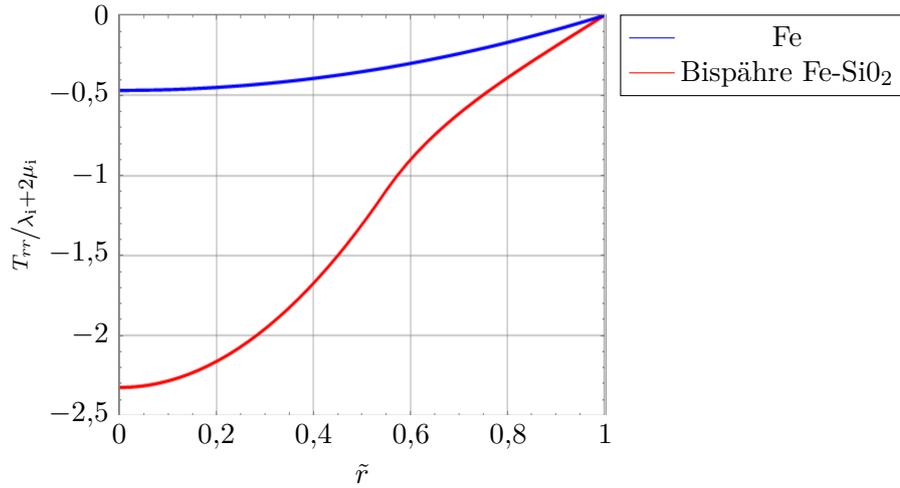


Abb. 2.7.: Normierte radiale Spannungen $T_{rr}/\lambda_i+2\mu_i$ über den normierten Radius $\tilde{r} = r/r_E$ für ein Zwei-Schalen-Modell der Erde. Dabei wird der innere Kern aus Eisen ($E_i = 210$ GPa, $\nu_i = 0,3, \rho_i = 1000$ kg/m³) und der Mantel aus Silikat ($E_o = 100$ GPa, $\nu_o = 0,17, \rho_o = 4600$ kg/m³) modelliert. Zum Vergleich ist die Lösung für die homogene Kugel aus Eisen dargestellt (Müller und Weiss, 2016).

Da nur diejenigen Prozesse zulässig sind, die für $J = 1$ keine Arbeit verrichten, muss die Änderung von γ_F stets Null sein:

$$\begin{aligned} \gamma_F^\bullet(\mathbf{F}) &= \frac{\partial \gamma_F}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\bullet = 0 \\ &= J \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^\bullet = \underbrace{J}_{=1} \text{Sp}(\mathbf{L}) = \text{Sp}(\mathbf{D}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{D} . \end{aligned}$$

Durch einen Vergleich mit Gleichung (2.8) können die Reaktionsspannungen nur noch ein Vielfaches vom Einheitstensor sein $\mathbf{T}_R = \alpha \mathbf{I}$. Die additive Aufspaltung der Spannungen, wird eindeutig, wenn die Reaktionsspannung derart normiert wird, dass sie orthogonal zu den Extraspannungen ist $\mathbf{T}_R \cdot \mathbf{T}_E = 0$. Dadurch bleibt nur noch der Raum der deviatorischen Tensoren 2. Stufe für die Extraspannungen übrig, da diese orthogonal zu den sphärischen Tensoren sind. Der sphärische Anteil des Spannungstensors beschreibt den hydrostatischen Druck:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^{\text{lin,dev}} .$$

Im vorliegenden Fall ist der deviatorische Anteil des linearisierten Dehnungstensors gegeben durch:

$$\mathbf{E}^{\text{lin,dev}} = \mathbf{E}^{\text{lin}} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) (2\mathbf{P}_r - \mathbf{P}_\vartheta - \mathbf{P}_\varphi) .$$

Mit diesem Ergebnis sind die Spannungen definiert durch:

$$\mathbf{T} = \left[-p + \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) \right] \mathbf{P}_r + \left[-p - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) \right] (\mathbf{P}_\vartheta + \mathbf{P}_\varphi) .$$

Dieser Spannungstensor erzeugt in der Impulsbilanz (2.4) folgende Differentialgleichung:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4\mu}{3} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - 2 \frac{u_r}{r} \right] = \frac{4}{3} \pi G \rho^2 r . \quad (2.9)$$

Für einen inkompressiblen Himmelskörper unter Eigengravitation verschwinden die Verschiebungen. Aus der linearisierten Massenbilanz Gl. (2.6) folgt mit der Inkompressibilitätsbedingung:

$$\rho = \bar{\rho}_0 (1 - \tilde{u}'_r - 2 \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}}) \Rightarrow 1 - \tilde{u}'_r - 2 \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} = 1 .$$

Diese Gleichung lässt sich durch Trennung der Variablen unbestimmt integrieren:

$$\int \frac{d\tilde{u}_r}{\tilde{u}_r} = - \int \frac{2 d\tilde{r}}{\tilde{r}} \Rightarrow \ln \tilde{u}_r = -2 \ln \tilde{r} + \ln A \Rightarrow \tilde{u}_r = A \tilde{r}^{-2} .$$

Die Integrationskonstante muss zu Null gewählt werden, damit im Erdkern $\tilde{r} = 0$ endliche Verschiebungen entstehen. Dieses Ergebnis ist anschaulich, denn unter der Annahme einer rein radialsymmetrischen Verschiebung entstehen nur volumetrische Dehnungen. Wird eine Dichteänderung ausgeschlossen, kann die Erde sich nicht zusammenziehen. Damit liefert die Impulsbilanz (2.9) eine Berechnungsformel für den hydrostatischen Druck:

$$p = p_0 - \frac{4}{6} \pi G \bar{\rho}_0^2 r^2 .$$

Die Integrationskonstante p_0 kann bestimmt werden, wenn am Rand $r = R_a$ Spannungsfreiheit angenommen wird. Schließlich resultiert die Druckverteilung im Erdinneren:

$$p = \frac{2\pi G \bar{\rho}_0^2 R_a^2}{3} (1 - \tilde{r}^2) .$$

Diese Abschätzung führt zu einem Innendruck im Mittelpunkt der Erde von ca. 170 GPa. In der Literatur findet man für den Innendruck Werte von ca. 330 GPa (siehe Anzellini u. a., 2013), was durchaus in der gleichen Größenordnung liegt.

2.2. Homogenisierung nach KACHANOV und SEVOSTIANOV

Um eine elegante Lösung der mehrschichtigen Erde zu bekommen, lässt sich der Schichtaufbau auf effektive elastische Konstanten homogenisieren. Dabei wird nach der Methode von Sevostianov und Kachanov, 2007 vorgegangen. In der genannten Veröffentlichung wird ein Homogenisierungsverfahren beschrieben, das die elastischen Eigenschaften eines Gefüges mit Einschluss und Zwischenschicht bestimmt. Die Homogenisierung funktioniert nur für den geometrisch linearen Fall. Um das Verfahren auf die Erde anzuwenden, modellieren wir die Erde als ein Drei-Schalen-Modell bestehend aus einem inneren Eisenkern als Inklusion, dem äußeren Kern als Zwischenschicht und dem Mantel als Matrixmaterial (siehe Abbildung 2.8).

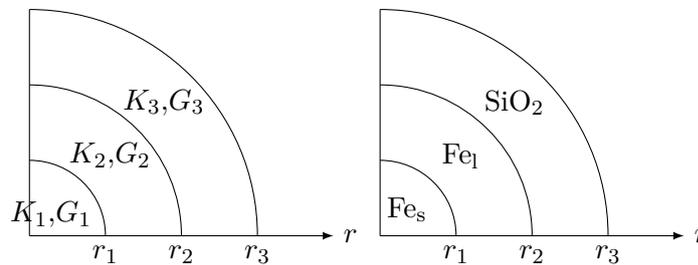


Abb. 2.8.: Drei-Schalen-Modell der Erde bestehend aus dem inneren Kern (vorwiegend festes Eisen Fe_s), dem äußeren Kern (vorwiegend flüssiges Eisen Fe_1) und dem Mantel (vorwiegend festes Gestein SiO_2).

Jede Schicht wird homogen modelliert. In Sevostianov und Kachanov, 2007 wird eine Berechnungsvorschrift für den Kompressionsmodul K und den Schubmodul $\mu = G$ angegeben. Dabei wird zunächst der innere Kern ($0 < r < r_1$) und äußere Kern ($r_1 < r < r_2$) zu einer homogenen Inklusion zusammengefasst mit dem Radius r_2 . Anschließend lassen sich für den Gesamtverbund effektive elastische Konstanten ermitteln (siehe Abbildung 2.9).

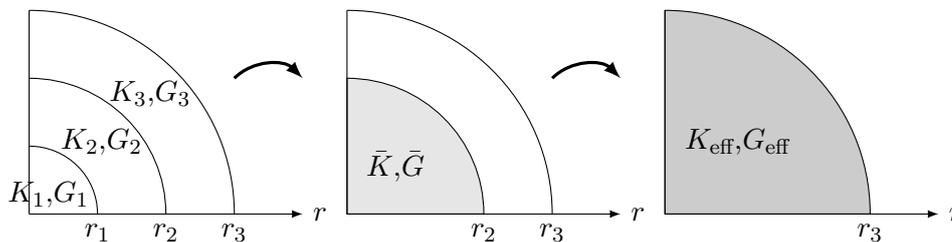


Abb. 2.9.: Schematische Darstellung des Homogenisierungsverfahrens.

KACHANOV und SEVOSTIANOV gehen von einem Material aus, das gewisse Einschlüsse enthält und ermitteln den Einfluss auf das umgebende Material. Dabei

wird eine Korrektur des elastischen Potential vorgenommen, woraus effektive elastische Parameter ermittelt werden. Für die homogenisierte Inklusion wird in Sevostianov und Kachanov, 2007 folgende Differentialgleichung angegeben:

$$\frac{dK}{dr} = -\frac{3}{r} \frac{K - K_2}{1 + \beta_K} \left(\beta_K + \frac{K}{K_2} \right), \quad \text{mit} \quad \beta_K = 2 \frac{1 - 2\nu_3}{1 + \nu_3}. \quad (2.10)$$

Im vorliegenden Fall hat das umgebende Material die Materialkonstanten K_3 . Deshalb ist auch der definierte Parameter β_K in Abhängigkeit von Material ν_3 gegeben. Die Differentialgleichung kann folgendermaßen verstanden werden: Man beginnt mit der homogenen Inklusion K_1 und addiert inkrementell eine Schicht dr vom Material K_2 hinzu, wodurch sich der Kompressionsmodul um den Betrag dK ändert. Allgemein kann K_2 vom Radius abhängen. Wenn K_2 konstant ist, kann Gl. (2.10) nach Trennung der Variablen direkt integriert werden:

$$\int_{K_1}^{\bar{K}} \frac{1 + \beta_K}{(K - K_2)(\beta_K + \frac{K}{K_2})} dK = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{3}{r} dr$$

$$\left[\ln \frac{K - K_2}{\beta_K K_2 + K} \right]_{K_1}^{\bar{K}} = -3 \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Das Einsetzen der Integrationsgrenzen und beidseitiges Anwenden der Exponentialfunktion liefern:

$$\frac{\bar{K} - K_2}{\beta_K K_2 + \bar{K}} \frac{\beta_K K_2 + K_1}{K_1 - K_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3.$$

Für die weiter Rechnung wird der Parameter A_K eingeführt:

$$A_K = \frac{\beta_K K_2 + K_1}{K_1 - K_2} = \frac{1 + \beta_K \frac{K_2}{K_1}}{1 - \frac{K_2}{K_1}}.$$

Nun wird nach der gesuchten Größe \bar{K} umgestellt:

$$\bar{K} = \frac{\beta_K + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3 A_K}{\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3 A_K - 1} K_2.$$

Dieses Ergebnis gibt den gesuchten Kompressionsmodul an und beschreibt die homogenisierte Inklusion vom Radius r_2 . In ähnlicher Manier wird eine Differentialgleichung für den Schubmodul G angegeben:

$$\frac{d\mu}{dr} = -\frac{3}{r} (G - G_2) \left(1 + \beta_G \frac{G - G_2}{G_2} \right), \quad \text{mit} \quad \beta_G = \frac{2}{25} \frac{4 - 7\nu_3}{3 - 5\nu_3}.$$

Trennung der Variablen und Integration liefern:

$$\int_{G_1}^{\bar{G}} \frac{dG}{(G - G_2)(1 + \beta_G \frac{G - G_2}{G_2})} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{3}{r} dr ,$$

$$\ln \left[- \frac{\bar{G} - G_2}{(1 - G_2)G_2 + \beta_G \bar{G}} A_G \right] = \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 , \quad (2.11)$$

mit $A_G = \frac{(\beta_G - 1)G_2 - \beta_G G_1}{G_1 - G_2} = \frac{\beta_G (\frac{G_2}{G_1} - 1) - \frac{G_2}{G_1}}{1 - \frac{G_2}{G_1}}$

Anschließend wird nach dem gesuchten Schubmodul umgestellt:

$$\bar{G} = \frac{(\beta_G - 1) + A_G (\frac{r_2}{r_1})^3}{A_G (\frac{r_2}{r_1})^3 + \beta_G} G_2 . \quad (2.12)$$

Beim Berechnen der Formel (2.12) zusammen mit der Definition von A_G in Gl. (2.11) stellten sich leichte Unterschiede zu den in Sevostianov und Kachanov, 2007 entwickelten Gleichungen heraus. Nach kurzer Korrespondenz bestätigten SEVOSTIANOV und KACHANOV die Richtigkeit der hier angegebenen Gleichungen.

Damit wurde das Homogenisierungsproblem auf eine Matrix mit homogener Inklusion reduziert, wofür in Sevostianov und Kachanov, 2007 folgende effektive elastische Konstanten angegeben sind:

$$K_{\text{eff}} = K_3 + c' (\bar{K} - K_3) \left[1 + \frac{(\bar{K} - K_3)(1 - \kappa_3)}{G_3} \right]^{-1} ,$$

$$G_{\text{eff}} = G_3 + c' (\bar{G} - G_3) \left[1 + \frac{(\bar{G} - G_3)(5 - 2\kappa_3)}{15G_3} \right]^{-1} ,$$

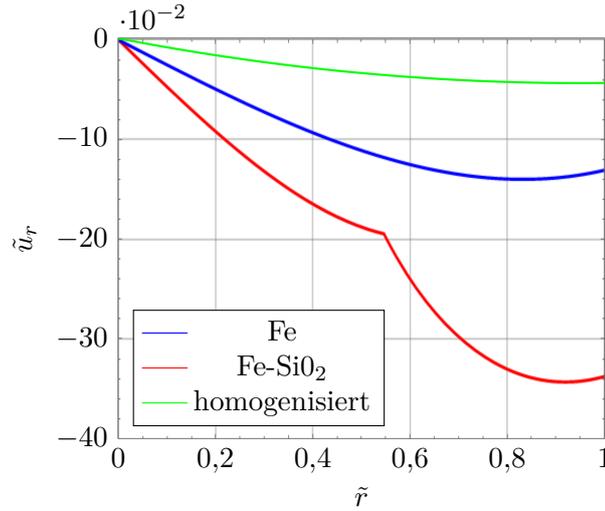
mit $\kappa_3 = \frac{1}{2(1 - \nu_3)}$ und $c' = \frac{\bar{V}}{V_{\text{ges}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_2^3}{\frac{4}{3}\pi r_3^3} = \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^3$.

Dieses Verfahren wird auf die Daten, die durch das PREM Modell zur Verfügung stehen, angewendet. Dabei wird zunächst der Kompressionsmodul und der Schubmodul für die innerste Schicht gemittelt. Diese entspricht dem inneren Kern bestehend aus festem Eisen. Analog geht man für den äußeren Kern vor, welcher flüssigem Eisen entspricht. Wie zu erwarten, ist der Schubmodul entsprechend Null, da die Querkontraktionszahl in dieser flüssigen inkompressiblen Schicht den Wert 0,5 annimmt. Alle Daten, die zur Mittelung verwendet werden, sind in Tab. 2.1 zusammengetragen.

Mit dem von Sevostianov und Kachanov, 2007 vorgeschlagenen Homogenisierungsverfahren resultiert ein effektiver Kompressionsmodul von $K_{\text{eff}} = 517$ GPa und ein effektiver Schubmodul von $G_{\text{eff}} = 138$ GPa. Daraus lässt sich die effektive

Tab. 2.1.: Gemittelte elastische Konstanten aus PREM für die relevanten Schichten der Homogenisierung.

	innerer Kern Fe _s	äußerer Kern Fe ₁	Mantel SiO ₂
K_i in GPa	1476	910	472
G_i in GPa	163	0	175
ν_i	0,447	0,5	0,335
r_i in km	1225	3482	6378

**Abb. 2.10.:** Normierte Verschiebung $\tilde{u}_r = u_r/r_E$ des homogenisierten geometrisch linearen Modells mit anfänglich konstanter Dichte $\rho_E = 5515 \text{ kg/m}^3$, Außenradius $r_E = 6378 \text{ km}$ und den effektiven elastischen Konstanten $K_E = 517 \text{ GPa}$ und $\nu_E = 0,378$ im Vergleich zur analytischen Lösung der homogenen Erde aus Eisen ($K_{Fe} = 175 \text{ GPa}$, $\nu_{Fe} = 0,3$) und der Zwei-Schicht-Lösung Fe-SiO₂ aus Müller und Weiss, 2016.

POISSON-Zahl aus der bereits bekannten LAMÉ-Beziehung ermitteln:

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad \Rightarrow \quad \nu_{\text{eff}} = 0,378 .$$

In Abb. 2.10 sind die Ergebnisse für die homogene Eisenkugel, das Zwei-Schalen-Modell aus Müller und Weiss, 2016 und die homogenisierte Lösung aus Sevostianov und Kachanov, 2007 dargestellt. Die Verschiebungen sind mit maximal 4% wesentlich geringer als die Prognose von Müller und Weiss. Das liegt an dem erheblich größeren Kompressionsmodul $K_E = 517 \text{ GPa}$. Dieser Wert übersteigt sowohl den Wert von Eisen als auch den von Silikat unter Normalbedingungen. Ma u. a., 2004 und H. Mao u. a., 1990 zeigen in ihrer Arbeit, dass Eisen unter sehr hohem Druck und hohen Temperaturen, wie sie im Inneren

der Erde herrschen, wesentlich extremere Steifigkeitsparameter besitzt als unter Normalbedingungen. Sie zeigen in einer späteren Veröffentlichung (siehe W. L. Mao u. a., 2008), dass die im Erdinneren dominante ε -Phase bei einem Druck von 52 GPa und einer Temperatur von 300 K bereits einen Kompressionsmodul von 465 GPa besitzt.

Durch die höheren Kompressionsmoduli ist die Erde wesentlich steifer als in Müller und Weiss, 2016 angenommen. Bei gleicher Last resultieren erheblich kleinere Verschiebungen.

2.3. Physikalisch lineares Modell

Die Erde wird nur aufgrund von Eigengravitation untersucht. Der Ausgangspunkt ist eine Sphäre mit einem unbekanntem Außenradius R_a . Diese schrumpft auf den aktuellen Außenradius r_a . Das stellt ein radial symmetrisches Problem dar, welches mit folgendem Ansatz beschrieben werden kann:

$$R(r, \vartheta, \varphi) = r - u_r(r), \quad \Theta(r, \vartheta, \varphi) = \vartheta, \quad \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \varphi.$$

Für Kugelkoordinaten gilt:

$$\mathbf{g}^i = \left\{ \mathbf{e}_r, \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta, \frac{1}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \right\} \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{g}}_k = \{ \bar{\mathbf{e}}_R, R \bar{\mathbf{e}}_\Theta, R \sin \Theta \bar{\mathbf{e}}_\Phi \}.$$

Daraus wird der Deformationsgradient berechnet und in physikalischen Komponenten dargestellt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial r}{\partial R} \mathbf{g}_r \otimes \bar{\mathbf{g}}^R + \mathbf{g}_\vartheta \otimes \bar{\mathbf{g}}^\Theta + \mathbf{g}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{g}}^\Phi \\ &= \frac{\partial r}{\partial R} \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_R + \frac{r}{R} \mathbf{e}_\vartheta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Theta + \frac{r}{R} \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Phi \\ &= \left(1 - \frac{du_r}{dr} \right)^{-1} \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_R + \left(1 - \frac{u_r}{r} \right)^{-1} (\mathbf{e}_\vartheta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Theta + \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Phi). \end{aligned}$$

Die Determinante des Deformationsgradienten ist:

$$J = \left(1 - \frac{du_r}{dr} \right)^{-1} \left(1 - \frac{u_r}{r} \right)^{-2}.$$

Mit dem Deformationsgradienten lässt sich nun der linke CAUCHY-GREEN-Dehnungstensor berechnen:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \left(1 - \frac{du_r}{dr} \right)^{-2} \mathbf{P}_r + \left(1 - \frac{u_r}{r} \right)^{-2} (\mathbf{P}_\vartheta + \mathbf{P}_\varphi).$$

Als Diagonaltensor lässt sich die Inverse hiervon durch Kehrwertbildung berechnen:

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \left(1 - \frac{du_r}{dr} \right)^2 \mathbf{P}_r + \left(1 - \frac{u_r}{r} \right)^2 (\mathbf{P}_\vartheta + \mathbf{P}_\varphi).$$

Die Komponenten des GREEN-ALMANSI-Dehnungstensors werden ermittelt:

$$\mathbf{E}^a = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = E_{rr}^a \mathbf{P}_r + E_{\vartheta\vartheta}^a (\mathbf{P}_\vartheta + \mathbf{P}_\varphi),$$

Die Diagonalkomponenten sind gegeben durch:

$$E_{rr}^a = \frac{du_r}{dr} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{du_r}{dr} \right), \quad E_{\vartheta\vartheta}^a = E_{\varphi\varphi}^a = \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u_r}{r} \right). \quad (2.13)$$

Diese werden in das CAUCHY-ALMANSI-Materialgesetz eingesetzt. Dabei liegt der Unterschied zum klassischen HOOKESchen Gesetz in der Verwendung von \mathbf{E}^a statt des linearisierten Dehnungstensors \mathbf{E}^{lin} :

$$\mathbf{T} = \lambda \text{Sp}(\mathbf{E}^a) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^a.$$

Man erhält für die mit dem Kompressionsmodul K normierten Spannungskomponenten:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{rr} &= \frac{T_{rr}}{K} = \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \frac{du_r}{dr} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{du_r}{dr} \right) + \frac{6\nu}{1+\nu} \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u_r}{r} \right), \\ \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} &= \tilde{T}_{\varphi\varphi} = \frac{3\nu}{1+\nu} \frac{du_r}{dr} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{du_r}{dr} \right) + \frac{3}{1+\nu} \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u_r}{r} \right). \end{aligned}$$

Diese Komponenten werden in die statische Impulsbilanz in der aktuellen Platzierung eingesetzt und in Kugelkoordinaten ausgewertet. Aufgrund der Diagonalität des Spannungstensors \mathbf{T} bleibt nur die radiale Komponente übrig:

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\vartheta\vartheta} - T_{\varphi\varphi}) = -\rho f_r. \quad (2.14)$$

Die Größen werden mit dem Kompressionsmodul K bzw. dem aktuellen Außenradius $r_E = 6378$ km normiert:

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_E}, \quad \tilde{u}_r = \frac{r}{r_E} u_r, \quad \frac{du_r}{dr} = \frac{d\tilde{u}_r}{d\tilde{r}} = \tilde{u}'_r, \quad \frac{u_r}{r} = \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}}.$$

Damit vereinfacht sich die Impulsbilanz zu:

$$\frac{d\tilde{T}_{rr}}{d\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} (2\tilde{T}_{rr} - \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} - \tilde{T}_{\varphi\varphi}) = -\frac{\rho r_E}{K} f_r.$$

Es ergeben sich die dimensionslosen Spannungskomponenten:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{rr} &= \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \tilde{u}'_r \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{u}'_r \right) + \frac{6\nu}{1+\nu} \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} \right), \\ \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} &= \tilde{T}_{\varphi\varphi} = \frac{3\nu}{1+\nu} \tilde{u}'_r \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{u}'_r \right) + \frac{3}{1+\nu} \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} \right). \end{aligned}$$

Nun soll die rechte Seite ausgearbeitet werden. Für eine Dichteverteilung, die nur vom Radius r abhängt, gilt:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dr} = \frac{G}{r^2} \int_{\hat{r}=0}^r 4\pi \rho(\hat{r}) \hat{r}^2 d\hat{r} .$$

Das Integral ergibt die aufsummierte Masse der Kugel bis zum aktuellen Radius r . Damit lässt sich die Gravitationsbeschleunigung als Funktion der bis dahin akkumulierten Masse schreiben:

$$f_r = -\frac{Gm(r)}{r^2} = -\frac{G\bar{m}(R)}{r^2} = -\frac{G \frac{4}{3} \pi \bar{\rho}_0 R^3}{r^2} = -\frac{4}{3} \pi G \bar{\rho}_0 \left(1 - \frac{u_r}{r}\right)^3 r .$$

Im letzten Schritt wurde die Massenerhaltung $m(r) = \bar{m}(R)$ benutzt und eine konstante Ausgangsmassendichte $\bar{\rho}_0$ für die Ausgangskugel angenommen. Die aktuelle Dichte ist über die Determinante gegeben:

$$\rho = \frac{\bar{\rho}_0}{J} = \bar{\rho}_0 (1 - \tilde{u}'_r) \left(1 - \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}}\right)^2 .$$

Daraus folgt für die rechte Seite der stationären Impulsbilanz:

$$-\frac{\bar{\rho}_0 r_E}{JK} f_r = \alpha_K \left(1 - \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}}\right)^5 (1 - \tilde{u}'_r) \tilde{r} , \quad \alpha_K = \frac{4 \pi G \bar{\rho}_0^2 r_E^2}{3 K} .$$

Der eingeführte Parameter α_K beschreibt das Verhältnis der Schwere eines Himmelskörpers zu seiner Steifigkeit. Nun kann die Impulsbilanz in ihrer Gesamtheit aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{3}{1 + \nu} \left\{ (1 - \nu) \left[\tilde{u}''_r + 2 \frac{\tilde{u}'_r}{\tilde{r}} - 2 \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}^2} - \tilde{u}'_r \tilde{u}''_r \right] \right. \\ \left. + 2\nu \left[\frac{\tilde{u}'_r{}^2}{\tilde{r}^2} - \frac{\tilde{u}_r \tilde{u}'_r}{\tilde{r}^2} \right] + \frac{\tilde{u}_r^2}{\tilde{r}^3} - \frac{\tilde{u}'_r{}^2}{\tilde{r}} \right\} = \alpha_K \left(1 - \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}}\right)^5 (1 - \tilde{u}'_r) \tilde{r} . \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt es nun zu lösen, um die radiale normierte Verschiebung \tilde{u}_r zu bestimmen. Zur Lösung werden Randbedingungen benötigt. Die DIRICHLET-Randbedingung ist:

$$\tilde{u}_r|_{\tilde{r}=0} = 0 .$$

Als zweite Randbedingung soll die Spannung an der Außenhülle betrachtet werden. Die Spannungsrandbedingung folgt aus der Sprungbilanz für den Impuls (siehe Gl. (C.8)). Dabei wird die materielle Hülle der Erde als Grenzfläche A_s gewählt. Dadurch ist die Geschwindigkeit der Grenzfläche gleich der materiellen Geschwindigkeit, d.h. $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$. Folglich verschwindet der konvektive Anteil in der

Sprungbilanz und es bleibt der Sprung über die Normalspannungen übrig:

$$\llbracket \rho \mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \mathbf{T} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \llbracket \mathbf{T} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 .$$

Die Normalenvektoren \mathbf{n}_s und \mathbf{n} sind identisch bei Wahl einer materiellen Grenzfläche. Die atmosphärischen Normalspannungen sind im Vergleich zu den inneren Spannungen sehr viel kleiner und werden deshalb in der Rechnung vernachlässigt. Hieraus folgt, dass die Normalspannungen an der Außenhülle verschwinden müssen:

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\tilde{r}=1} = \mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_r \Big|_{\tilde{r}=1} = 0 .$$

Aus der Diagonalgestalt des Spannungstensors resultiert eine Bedingung für die radiale Normalspannung:

$$\left(\tilde{T}_{rr} \mathbf{P}_r + \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} \mathbf{P}_\vartheta + \tilde{T}_{\varphi\varphi} \mathbf{P}_\varphi \right) \cdot \mathbf{e}_r \Big|_{\tilde{r}=1} = \tilde{T}_{rr} \Big|_{\tilde{r}=1} \mathbf{e}_r = \mathbf{0} . \quad (2.15)$$

Für die Simulation wird eine variationelle Formulierung nach dem GALERKIN-Verfahren entwickelt. Begonnen wird bei der dimensionslosen Impulsbilanz, diese wird skalar mit einer vektorwertigen Testfunktion $\delta \tilde{\mathbf{u}}$ multipliziert und über die Einheitskugel integriert:

$$- \int_{\tilde{V}} \left(\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\nabla}_E \right) \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\tilde{V} = 3\alpha_K \int_{\tilde{V}} \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\tilde{V} . \quad (2.16)$$

Die einzelnen Komponenten werden nun in physikalischen Kugelkoordinaten entwickelt, so gilt für die Testfunktion und das Volumenelement:

$$\delta \tilde{\mathbf{u}} = \delta \tilde{u}_r \mathbf{e}_r + \delta \tilde{u}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \delta \tilde{u}_\varphi \mathbf{e}_\varphi , \quad d\tilde{V} = \tilde{r}^2 \sin \vartheta \, d\tilde{r} \, d\vartheta \, d\varphi .$$

In Gl. (2.14) wurde gezeigt, dass von der Divergenz der Spannungen nur die radiale Komponente übrig bleibt. Das Skalarprodukt mit der Testfunktion liefert:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\nabla}_E \right) \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} &= \left(\frac{d\tilde{T}_{rr}}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}} \left(\tilde{T}_{rr} - \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} \right) \right) \mathbf{e}_r \cdot \left(\delta \tilde{u}_r \mathbf{e}_r + \delta \tilde{u}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \delta \tilde{u}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \right) \\ &= \left(\frac{d\tilde{T}_{rr}}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}} \left(\tilde{T}_{rr} - \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} \right) \right) \delta \tilde{u}_r . \end{aligned}$$

Die Integration über das Volumen kann nun auf ein skalares Integral in r reduziert

werden, da die Integrationen über ϑ und φ direkt ausgeführt werden können:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{V}} (\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\tilde{V} \\ &= \int_{\tilde{r}=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{d\tilde{T}_{rr}}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}} (\tilde{T}_{rr} - \tilde{T}_{\vartheta\vartheta}) \right) \delta \tilde{u}_r \tilde{r}^2 \sin \vartheta \, d\tilde{r} \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= 4\pi \int_{\tilde{r}=0}^1 \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{T}_{rr}}{d\tilde{r}} + 2\tilde{r} (\tilde{T}_{rr} - \tilde{T}_{\vartheta\vartheta}) \right) \delta \tilde{u}_r \, d\tilde{r} . \end{aligned}$$

Die partielle Integration muss nun auf den ersten Term im Integranden angewendet werden. Als Hilfestellung sei hier die Ableitung nach der Produktregel vom zu untersuchenden Term angegeben:

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \tilde{T}_{rr} \delta \tilde{u}_r \right) = 2\tilde{r} \tilde{T}_{rr} \delta \tilde{u}_r + \tilde{r}^2 \frac{d\tilde{T}_{rr}}{d\tilde{r}} \delta \tilde{u}_r + \tilde{r}^2 \tilde{T}_{rr} \frac{d\delta \tilde{u}_r}{d\tilde{r}} .$$

Wenn dieses Resultat in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt wird, bleibt das folgende variationelle Integral übrig:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}} (\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\tilde{V} &= -4\pi \int_{\tilde{r}=0}^1 \left(\tilde{r}^2 \tilde{T}_{rr} \frac{d\delta \tilde{u}_r}{d\tilde{r}} + 2\tilde{r} \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} \right) \delta \tilde{u}_r \, d\tilde{r} \\ &\quad + 4\pi \left[\tilde{r}^2 \tilde{T}_{rr} \delta \tilde{u}_r \right]_{\tilde{r}=0}^1 . \end{aligned}$$

Der letzte Term ist identisch Null. Bei der unteren Grenze ist $\tilde{r} = 0$ und bei der oberen ist die radiale Normalspannung Null wegen der Randbedingung Gl. (2.15).

Die rechte Seite der variationellen Form (2.16) lautet:

$$3\alpha_K \int_{\tilde{V}} \tilde{\rho} \tilde{f}_r \mathbf{e}_r \cdot (\delta \tilde{u}_r \mathbf{e}_r + \delta \tilde{u}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \delta \tilde{u}_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \, d\tilde{V} = 12\pi \alpha_K \int_{\tilde{r}=0}^1 \tilde{\rho} \tilde{f}_r \delta \tilde{u}_r \tilde{r}^2 \, d\tilde{r} .$$

Insgesamt muss folgende schwache Form gelöst werden:

$$\int_{\tilde{r}=0}^1 \left(\tilde{r}^2 \tilde{T}_{rr} \frac{d\delta \tilde{u}_r}{d\tilde{r}} + 2\tilde{r} \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} \right) \delta \tilde{u}_r \, d\tilde{r} = 3\alpha_K \int_{\tilde{r}=0}^1 \tilde{\rho} \tilde{f}_r \delta \tilde{u}_r \tilde{r}^2 \, d\tilde{r} .$$

Diese Gleichung wurde in FEniCS[®] implementiert und für verschiedene Werte α_K simuliert. Das Resultat für die Verschiebungen ist in Abb. 2.11 zu sehen. Es wird an dieser Stelle festgehalten, dass mit steigendem Wert α_K die Amplitude der Verschiebungen zunimmt. Der Wert α_K beschreibt anschaulich das Verhältnis aus der Schwere der Erde und ihrer Steifigkeit. Diese beiden Kräfte konkurrieren in dem System um das Gleichgewicht. Je größer der Wert α_K angenommen wird, desto ausgeprägter wird die Gravitationswirkung und desto weicher wird das Material.

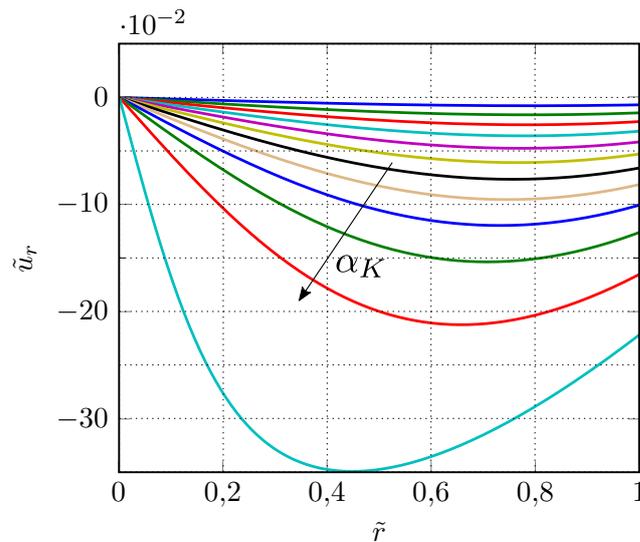


Abb. 2.11.: Mit aktuellem Außenradius $r_E = 6378$ km normierte Verschiebung der Erde für $\nu = 0,38$ mit inkrementell veränderlichem Parameter $\alpha_K = 0,1 \dots 1,2$.

Die Simulation wird für verschiedene Werte α_K durchgeführt. Dabei ist die numerische Lösung nur für $\alpha_K < 1,3$ möglich. Für größere Werte konvergierte die Finite-Elemente-Methode nicht. Ein ähnliches Verhalten wird in Müller und Weiss, 2016, Kap. 3.1 beschrieben. Dort wird das finite Differenzenverfahren und die NDSolve-Funktion von Mathematica benutzt. Der Typus der Differentialgleichung scheint sich für höhere Werte zu ändern, sodass keine oder zu mindestens keine eindeutige Lösung mehr möglich ist.

Ein möglicher Grund hierfür liegt an dem CAUCHY-ALMANSI-Materialgesetz, dessen hyperelastisches Potential nicht polykonvex ist. Die Auswirkungen hiervon werden in Kap. 3.1 ausführlich diskutiert. Dabei wird festgestellt, dass bei hinreichend stark ausgeprägter Kompression unterschiedliche Verformungszustände mathematisch möglich sind (siehe Abb. 3.3).

In Abb. 2.12 ist die Evolution der Massendichte in Bezug auf größer werdende α_K Werte dargestellt. Es ist nicht überraschend, dass mit zunehmenden α_K -Werten die Erde intensiver zusammengepresst wird und die Massendichte stark zunimmt. Um der numerischen Nicht-Konvergenz zu begegnen, wird in Kap. 3 die Konstitutivgleichung für die Spannungen auf ein hyperelastisches MOONEY-RIVLIN Gesetz erweitert. Dieses ist polykonvex und gibt an, für beliebige Belastungen eine eindeutige Lösung angeben zu können. Zunächst wird die Deformation des CAUCHY-ALMANSI-Gesetzes für einen Schichtaufbau der Erde mit Hilfe des *Preliminary Reference Earth Model* bestimmt.

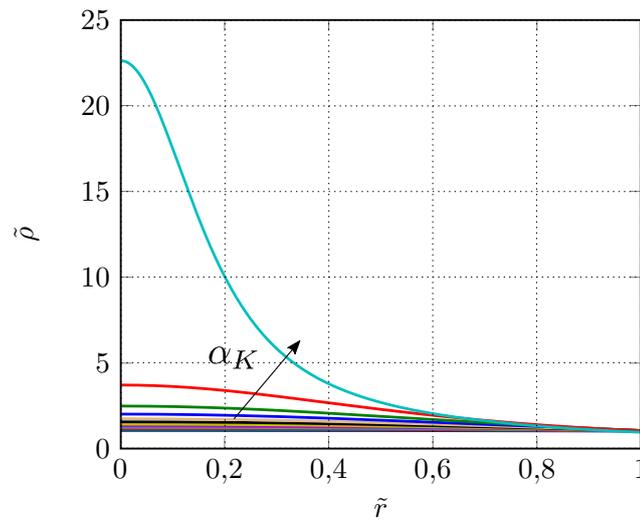


Abb. 2.12.: Mit aktueller mittlerer Dichte $\rho_E = 5515 \text{ kg/m}^3$ normierte Dichteverteilung der Erde für $\nu = 0,38$ mit inkrementell veränderlichem Parameter $\alpha_K = 0,1 \dots 1,2$.

2.4. Physikalisch lineares Mehrschalenmodell

Eine weitere Verfeinerung des Modells ist ein Mehrschalenaufbau der Erde. Die PREM-Daten liefern Werte für die Dichte und die elastischen Konstanten. Damit ist die aktuelle Platzierung gut bekannt. Um diesen Vorteil zu nutzen, soll eine Simulation eines Mehrschichtverbundes erprobt werden. Die Erde wird in neun Bereiche unterteilt. Der entwickelte FE-Code ist auf eine beliebige Anzahl an Schichten erweiterbar.

Die Simulation des Schichtaufbaus mit der FEM erweist sich als schwierig, da neben den Verschiebungen die Stetigkeit der Spannungen an den Bereichsgrenzen sichergestellt werden muss. Dieses Problem tritt vor allem bei Höherer Gradienten Theorie auf und wird in der Forschungsgemeinschaft aktuell stark diskutiert. Forschungsgruppen konstruieren spezielle konforme finite Elemente (siehe Papanicolopoulos, Zervos und Vardoulakis, 2009; Papanicolopoulos und Zervos, 2012; Argyris, Fried und Scharpf, 1968), die den Ansatzraum von vornherein auf Funktionen mit stetigen Ableitungen einschränken. Diese Verfahren sind sehr aufwendig und bis jetzt wenig erprobt.

Diese Arbeit schlägt einen anderen Algorithmus vor, bei dem kontinuierliche LAGRANGE-Elemente erster Ordnung verwendet werden. Diese finiten Elemente haben an den Elementrändern stetige Ansatzfunktionen, jedoch sind deren Ableitungen unstetig. Selbst bei quadratischen und höheren LAGRANGE-Elementen bleibt das Problem bestehen. Es wird durch Implementierung einer Iterationspro-

zedur gelöst. Dabei wird die Stetigkeit bis zu einer definierten Toleranz erreicht. Dabei wird wie folgt vorgegangen.

In jeder der neun Schichten $V^{(i)}$ wird die quasi-statische Impulsbilanz gelöst:

$$-\mathbf{T}^{(i)} \cdot \nabla_{\mathbf{E}} = \rho^{(i)} \mathbf{f}^{(i)}, \quad \forall \mathbf{x} \in V^{(i)}, \quad i \in [1,9].$$

In singulären Punkten müssen die Sprungbilanzen erfüllt werden. Diese beschreiben die physikalischen Rand- und Übergangsbedingungen:

$$[[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}, \quad i \in [1,8].$$

Da das Problem rein radialsymmetrisch modelliert wird, zeigt der Normalenvektor in radiale Richtung $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, und das Problem reduziert sich auf nur eine Dimension. Zusätzlich zu den physikalischen müssen kinematische Rand- und Übergangsbedingungen gesetzt werden. Diese stellen sicher, dass die Verschiebungen stetig sind und somit keine Risse in der Erde entstehen. Als Randbedingungen werden die bereits bekannten Bedingungen am Innen- und Außenrand gesetzt:

$$u_r|_{r=0} = 0, \quad T_{rr}|_{r=r_a} = 0.$$

Bei den Übergängen, d.h. an den inneren Bereichsgrenzen, werden sowohl kinematische Bedingungen:

$$u_r^{(i)}|_{r=r^{(i)}} = u_r^{(i+1)}|_{r=r^{(i)}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}, \quad i \in [1,8], \quad (2.17)$$

als auch physikalische Bedingungen gefordert:

$$T_{rr}^{(i)}|_{r=r^{(i)}} = T_{rr}^{(i+1)}|_{r=r^{(i)}}, \quad i \in [1,8]. \quad (2.18)$$

Da in der aktuellen Platzierung gerechnet wird, wird als Dehnungsmaß der EULER-ALMANSI-Dehnungstensor verwendet:

$$\mathbf{E}^a = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top.$$

Analog zu den Ausführungen im Kapitel 2.3 hat der Deformationsgradient nur noch Einträge auf der Diagonalen:

$$\mathbf{F} = \left(1 - \frac{du_r}{dr}\right)^{-1} \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_R + \left(1 - \frac{u_r}{r}\right)^{-1} (\mathbf{e}_\vartheta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Theta + \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Phi).$$

Damit ist der EULER-ALMANSI-Dehnungstensor ebenfalls diagonal. Es wird das CAUCHY-ALMANSI-Materialgesetz für \mathbf{T} gewählt:

$$\mathbf{T} = \lambda \text{Sp}(\mathbf{E}^a) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^a.$$

Für die Gravitationswirkung wird die POISSON-Gleichung für das gesamte Gebiet gelöst:

$$\Delta_{\text{E}}U = 4\pi G\rho .$$

Hier wird ein wichtiger Vorteil der aktuellen Platzierung deutlich. Dadurch, dass das Problem in der aktuellen Platzierung gelöst wird, ist das Gravitationspotential und damit auch die Gravitationsbeschleunigung nicht mit der Impulsbilanz gekoppelt. Die POISSON-Gleichung wird für das gesamte Gebiet gelöst, da diese nur von der aktuellen Dichte abhängt. Die Dichteverteilung ist aus den PREM-Daten bekannt.

Der Radius, die Dichte und das Potential werden mit dem aktuellen Außenradius der Erde r_{E} , der mittleren aktuellen Dichte der Erde ρ_{E} und der Gravitationskonstante $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg s}^2$ normiert:

$$r = r_{\text{E}}\tilde{r}, \quad \nabla_{\text{E}} = \frac{1}{r_{\text{E}}}\tilde{\nabla}_{\text{E}}, \quad \rho = \rho_{\text{E}}\tilde{\rho}, \quad U = 4\pi G\rho_{\text{E}}r_{\text{E}}^2\tilde{U} ,$$

Die dimensionslose POISSON-Gleichung und entsprechende Randbedingungen lauten:

$$\tilde{\Delta}\tilde{U} = \tilde{\rho}, \quad \left. \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0, \quad \tilde{U}|_{\tilde{r}=1} = 0 .$$

Dies wird in eine schwache Formulierung für das gesamte Gebiet \tilde{V} überführt:

$$\int_{\tilde{V}} \tilde{\Delta}\tilde{U}\delta\tilde{U} dV = \int_{\tilde{V}} \tilde{\rho}\delta\tilde{U} d\tilde{V} .$$

Die Form wird in Kugelkoordinaten ausgewertet:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{r}=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^1 \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \right) \delta\tilde{U} \tilde{r}^2 \sin\vartheta d\tilde{r} d\vartheta d\varphi \\ = \int_{\tilde{r}=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^1 \tilde{\rho}\delta\tilde{U} \tilde{r}^2 \sin\vartheta d\tilde{r} d\vartheta d\varphi . \end{aligned}$$

Die ϑ - und φ -Integrationen können direkt ausgeführt werden, da der Integrand bei reiner Radialsymmetrie unabhängig von beiden Variablen ist. Es resultiert der Faktor 4π , der auf beiden Seiten gekürzt wird. Nach einigen Umformungen und Anwenden der partiellen Integration folgt:

$$-\int_{\tilde{r}=0}^1 \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \frac{d\delta\tilde{U}}{d\tilde{r}} \tilde{r}^2 d\tilde{r} + \left[\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \delta\tilde{U} \right]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} = \int_{\tilde{r}=0}^1 \tilde{\rho}\delta\tilde{U} \tilde{r}^2 d\tilde{r} .$$

Der Randterm verschwindet aufgrund der gewählten Randbedingungen. Das Potential ist bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt. In der Regel wird das Potential im Unendlichen auf Null geeicht. Da dies bei einem endlichen Berechnungsgebiet nicht angewendet werden kann, wird die oben genannte Eichung implementiert. Es zeigt sich, dass das Ergebnis für die Gravitationsbeschleunigung \mathbf{f} unabhängig davon ist, welcher Wert am Außenrand gesetzt wird (siehe Abb. 2.14 auf der nächsten Seite). \tilde{U} kann am Rand $\tilde{r} = 1$ beliebig zwischen

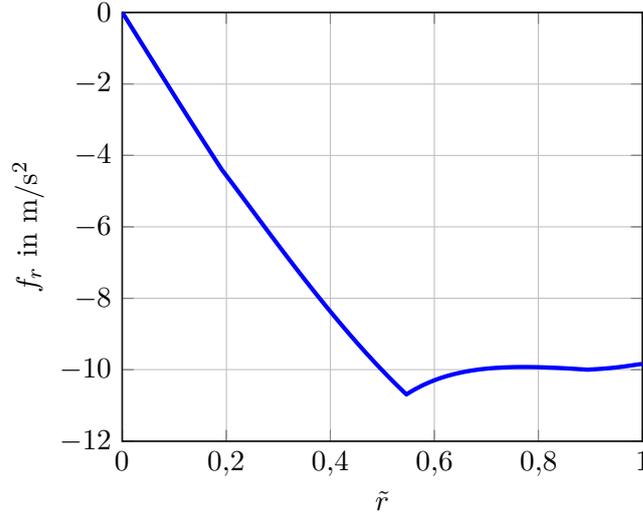


Abb. 2.13.: Die radiale Gravitationsbeschleunigung berechnet aus den PREM-Daten.

-10^7 und 10^7 variieren, ohne eine sichtbare Veränderung in der Gravitationsbeschleunigung zu bewirken. Erst ab einem Wert von 10^8 wurden numerische Artefakte sichtbar (siehe Abb. 2.14). Die Randbedingung am linken Rand $\tilde{r} = 0$ folgt aus der verschwindenden Gravitationsbeschleunigung an dieser Stelle.

Die statische Impulsbilanz in radialer Richtung für jedes Teilgebiet $V^{(i)}$ vereinfacht sich in physikalischen Komponenten zu:

$$\frac{dT_{rr}^{(i)}}{dr} + \frac{2}{r} (T_{rr}^{(i)} - T_{\vartheta\vartheta}^{(i)}) = -\rho^{(i)} f_r^{(i)} .$$

Für die Finite-Elemente-Formulierung folgt für jeden Bereich eine skalarwertige variationelle Formulierung aus der lokalen Impulsbilanz:

$$\begin{aligned} - \int_{r^{(i-1)}}^{r^{(i)}} \frac{dT_{rr}^{(i)}}{dr} \delta u_r^{(i)} r^2 dr + \int_{r^{(i-1)}}^{r^{(i)}} 2r (T_{rr}^{(i)} - T_{\vartheta\vartheta}^{(i)}) \delta u_r^{(i)} dr \\ = - \int_{r^{(i-1)}}^{r^{(i)}} \rho^{(i)} f_r^{(i)} \delta u_r^{(i)} r^2 dr . \end{aligned}$$

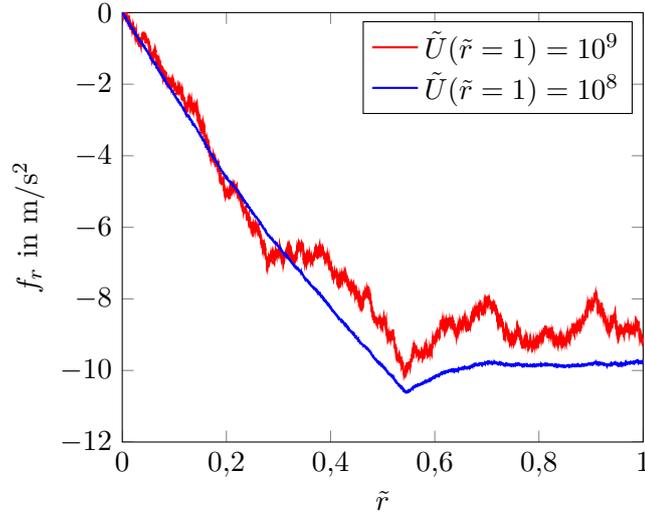


Abb. 2.14.: Die radiale Gravitationsbeschleunigung berechnet aus den PREM-Daten.

Nach der Anwendung der partiellen Integration, dieses Mal nur auf das erste Integral, und nach einigen Umformungen lautet die bereichsbezogene variationelle Form:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{r^{(i-1)}}^{r^{(i)}} T_{rr}^{(i)} \frac{d\delta u_r^{(i)}}{dr} r^2 dr + [T_{rr} \delta u_r r^2]_{r^{(i-1)}}^{r^{(i)}} - \int_{r^{(i-1)}}^{r^{(i)}} 2r T_{\vartheta\vartheta}^{(i)} \delta u_r^{(i)} dr \\
 & = - \int_{r^{(i-1)}}^{r^{(i)}} \rho^{(i)} f_r^{(i)} \delta u_r^{(i)} r^2 dr .
 \end{aligned}$$

An den Bereichsübergängen sollen nun sowohl die Verschiebung (2.17), als auch die Spannung (2.18) vorgegeben werden. Das ist ein recht subtiler Punkt. In der Theorie ist es kein Problem, sowohl kinematische als auch physikalische Zwänge an ein und derselben Stelle vorzugeben. Wenn bei einer FE-Simulation an einer Stelle $r^{(i)}$ eine DIRICHLET-Randbedingung gesetzt wird, dann wird die Testfunktion $\delta u_r^{(i)}$ an dieser Stelle zu Null gesetzt. Wenn nun in der schwachen Form ein Spannungsrandintegral an der Stelle $r^{(i)}$ implementiert wird, dann ist dieser automatisch Null und die NEUMANN-Randbedingung wird bei der Minimierung des Funktionals ignoriert. Die im nächsten Abschnitt beschriebene Prozedur löst dieses Problem durch mehrere Iterationen, wobei in jedem Iterationsdurchlauf an den Bereichsgrenzen jeweils nur DIRICHLET- oder NEUMANN-Randbedingungen gesetzt werden.

Die endgültige zu simulierende variationelle Form entsteht durch Normierung der Spannungen mit dem mittleren Kompressionsmodul $K_E = 517 \text{ GPa}$ und die

geometrischen Größen mit dem aktuellen Außenradius der Erde r_E :

$$T_{rr} = K_E \tilde{T}_{rr}, \quad u_r = r_E \tilde{u}_r, \quad \delta u_r = r_E \delta \tilde{u}_r .$$

Damit lautet die in FEniCS© implementierte nicht-lineare Form:

$$\begin{aligned} - \int_{\tilde{r}^{(i-1)}}^{\tilde{r}^{(i)}} \tilde{T}_{rr}^{(i)} \frac{d\delta \tilde{u}_r^{(i)}}{d\tilde{r}} \tilde{r}^2 d\tilde{r} + \left[\tilde{T}_{rr}^{(i)} \delta \tilde{u}_r^{(i)} \tilde{r}^2 \right]_{\tilde{r}^{(i-1)}}^{\tilde{r}^{(i)}} - \int_{\tilde{r}^{(i-1)}}^{\tilde{r}^{(i)}} 2\tilde{r} \tilde{T}_{\vartheta\vartheta}^{(i)} \delta \tilde{u}_r^{(i)} d\tilde{r} \\ = - \int_{\tilde{r}^{(i-1)}}^{\tilde{r}^{(i)}} \tilde{\rho}^{(i)} \tilde{f}_r^{(i)} \delta \tilde{u}_r^{(i)} \tilde{r}^2 d\tilde{r} , \end{aligned}$$

mit den Spannungskomponenten:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{rr}^{(i)} &= \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \tilde{u}_r^{(i)'} \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{u}_r^{(i)'} \right) + \frac{6\nu}{1+\nu} \frac{\tilde{u}_r^{(i)}}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_r^{(i)}}{\tilde{r}} \right) , \\ \tilde{T}_{\vartheta\vartheta}^{(i)} &= \tilde{T}_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{3\nu}{1+\nu} \tilde{u}_r^{(i)'} \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{u}_r^{(i)'} \right) + \frac{3}{1+\nu} \frac{\tilde{u}_r^{(i)}}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_r^{(i)}}{\tilde{r}} \right) . \end{aligned}$$

Iterationsverfahren

Es wird bei der innersten Schale begonnen und diese gelöst, indem an dessen Innenrand, d.h. bei $\tilde{r} = 0$, die Verschiebungen und am Bereichsaußenrand, d.h. bei $\tilde{r} = \tilde{r}^{(1)}$, die Spannung \tilde{T}_{rr} zu Null gesetzt werden. Damit entsteht vorerst ein Fehler am Außenrand. Nun wird die nächste Schicht gelöst und dieser Schicht wird die resultierende Verschiebung aus der zuvor gelösten Schicht übergeben, d.h. man setzt wiederum eine DIRICHLET-Bedingung am Bereichsinnenrand. Am Außenrand werden ebenso die Spannungen zu Null gesetzt. So wird mit allen folgenden Schalen bis zur äußersten verfahren.

Bis jetzt wurde zwar die Stetigkeit der Verschiebungen erreicht, jedoch sind die Spannungen noch unstetig. Die Randbedingungen für $\tilde{r} = 0$ und $\tilde{r} = 1$ werden richtig erfüllt. Bei den internen Bereichsgrenzen ist das aber nicht der Fall. Durch den ersten Durchlauf und die geforderte DIRICHLET-Bedingung am Bereichsinnenrand $\tilde{r}^{(i)}$ der Schicht $\tilde{V}^{(i+1)}$ sind nicht-triviale Spannungen entstanden. Diese werden im nächsten Iterationsdurchlauf als NEUMANN-Randbedingungen benutzt für die darunter liegende Schicht $\tilde{V}^{(i)}$ und dessen Außenrand $\tilde{r}^{(i)}$. Damit wird ein Informationsfluss von außen nach innen gewährleistet.

Durch diese neuen Spannungsrandbedingungen verändern sich auch die resultierenden Verschiebungen an den Bereichsaußenrändern $\tilde{r}^{(i)}$, wenn die Schicht $\tilde{V}^{(i)}$ berechnet wird. Diese Verschiebungen werden dann wieder an die Schicht

$\tilde{V}^{(i+1)}$ übergeben. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass von innen nach au-

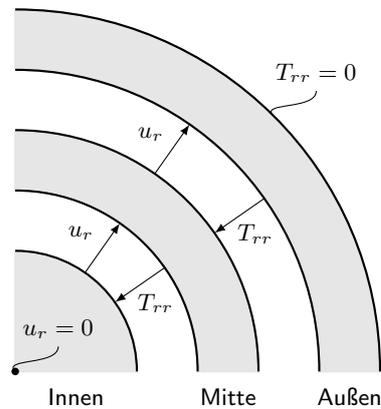


Abb. 2.15.: Schematischer Schalenbau; Die Verschiebungen werden von innen nach außen und die Spannungen von außen nach innen weitergegeben.

ßen die Verschiebungen und von außen nach innen die Spannungen übergeben werden (siehe Abb. 2.15). Dieser Prozess wird solange durchgeführt, bis die Spannungsdifferenz eine definierte Toleranz unterschreitet. Die Überprüfung der Verschiebungsrandbedingung ist nicht notwendig, da bei jeder Iteration durch das Setzen der DIRICHLET-Bedingungen an den Bereichsinnenränder per se die Stetigkeit der Verschiebungen erzwungen wird.

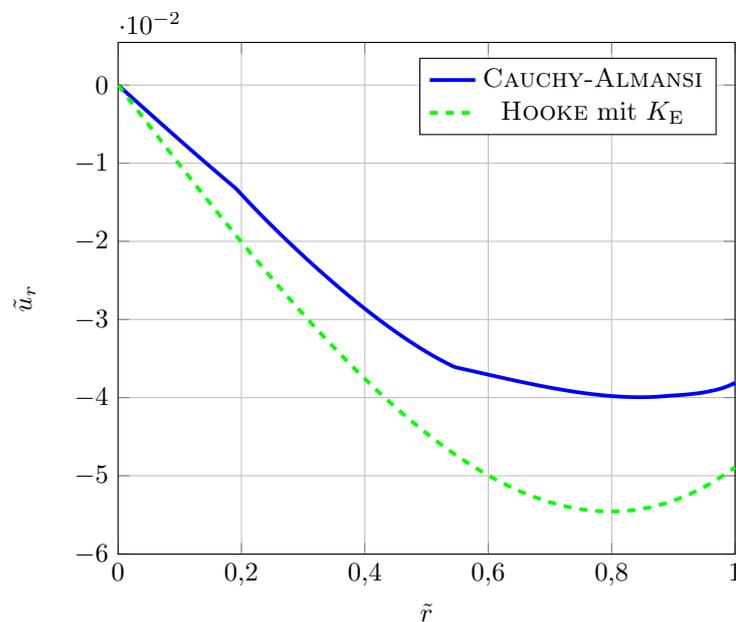


Abb. 2.16.: Normierte radiale Verschiebung dargestellt über den normierten Radius.

Die Umsetzung in FEniCS[®] erfolgt objektorientiert. Aufgrund der Ähnlichkeit der Schalen, wird zunächst eine Klasse `Schale` erzeugt. Von dieser Klasse werden die Unterklassen `Schale_innen`, `Schale_mitte` und `Schale_aussen` abgeleitet. Jede Schaleninstanz hat ihr eigenes Gitter und damit einen eigenen Funktionenraum. Für die endgültige Lösung müssen die einzelnen Schalen zusammengefügt werden. Der Code erlaubt den Schalenbau der Erde in N Schalen mit einer Innenschale, einer Außenschale und $N - 2$ Zwischenschalen.

In Abb. 2.16 ist die Verschiebung in Prozent des Erdradius über den normierten Radius \tilde{r} dargestellt. Die Verschiebung verschwindet im Inneren und nimmt hin zu ihrem Maximum im Außenbereich zu. Bei einem normierten Radius $\tilde{r} \approx 0,85$ wird die maximale Verschiebung von ca. 4% erreicht. In Abb. 2.17 sind die auf

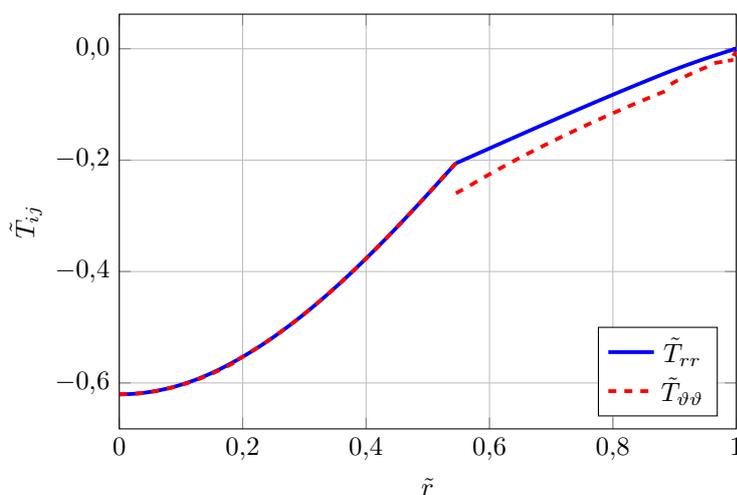


Abb. 2.17.: Mit Kompressionsmodul K_E normierte Spannungskomponenten über den normierten Radius \tilde{r} . Im Kern $\tilde{r} < 0,55$ liegen die Verläufe für \tilde{T}_{rr} und $\tilde{T}_{\vartheta\vartheta}$ übereinander.

den Kompressionsmodul K_E normierten Spannungen \tilde{T}_{rr} und $\tilde{T}_{\vartheta\vartheta}$ dargestellt. Vergleicht man die gewonnenen Daten mit denen der analytischen Rechnung (siehe Müller und Lofink, 2014), so ist eine anfänglich klare Übereinstimmung zu erkennen, welche zur Mitte bzw. zum Rand hin geringer wird. Da es sich bei der Mittelung der Materialparameter um eine starke Vereinfachung handelt, ist diese Abweichung zu erwarten.

In Abb. 2.18 auf der nächsten Seite sind die Dehnungen dargestellt. Die Radial- und die Tangentialkomponente des Dehnungstensors haben im Erdmittelpunkt den selben Wert. Die Radialkomponente weist Sprünge auf. Daran sieht man die Unstetigkeit der radialen Ableitungen $\partial\tilde{u}_r/\partial\tilde{r}$ (siehe Gl. (2.13)). Die Tangentialkomponente ist dagegen stetig. Der LOVE-Radius liegt bei diesem Modell bei $\tilde{r}_{\text{Love}} \approx 0,85$. Dies entspricht dem Nulldurchgang der radialen Dehnungskom-

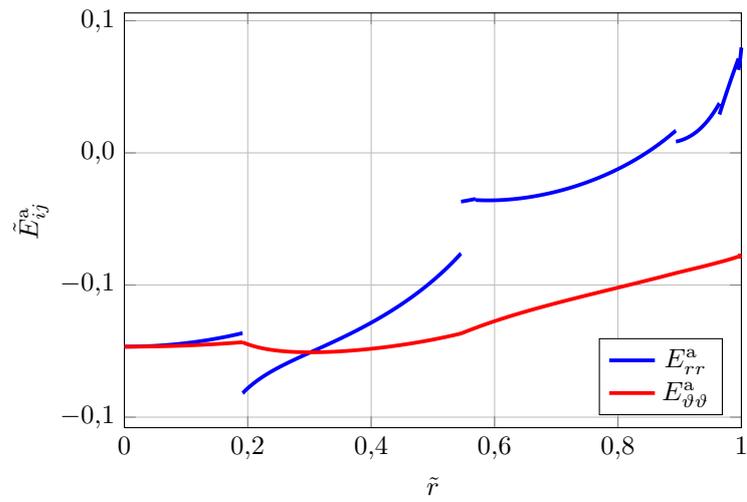


Abb. 2.18.: EULER-ALMANSI-Dehnungen über den normierten Radius \tilde{r} für eine geometrisch nicht-lineare Simulation.

ponente E_{rr}^a . Das hier umgesetzte Mehrschalenmodell erlaubt eine potentiell bessere Beschreibung des Sachverhaltes.

3. Hyperelastische Analyse

Die hyperelastischen Gesetze sollen zunächst auf die Dehnung eines Klotzes angewendet werden, um den Code zu verifizieren. Danach erfolgt die Implementierung der Erde mit einem MOONEY-RIVLIN-Materialgesetz.

3.1. Referenzproblem mit ST. VENANT-KIRCHHOFF

Man beginnt bei dem Prinzip der virtuellen Arbeit unter Vernachlässigung der Trägheitsterme:

$$\oint_{\partial\bar{V}} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} \, d\bar{A} + \int_{\bar{V}} \bar{\rho}\mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} \, d\bar{V} = \int_{\bar{V}} \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{F} \, d\bar{V} .$$

Um die Spannungsterme zu unterscheiden, wurde der Term der äußeren Oberflächenlast mit dem Superskript ext versehen. Dem gegenüber steht die innere Formänderungsenergiedichte, die als Reaktion auf die äußeren Lasten entsteht. Um die Simulation zu verifizieren, wird sie mit einer analytischen Lösung verglichen.

Es wird der in Abb. 3.1 gezeigte Klotz betrachtet. Es wird sowohl für die Bezugsplatzierung als auch für die aktuelle Platzierung dieselbe kartesische Basis $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ verwendet. Der Klotz soll von einer Seite in

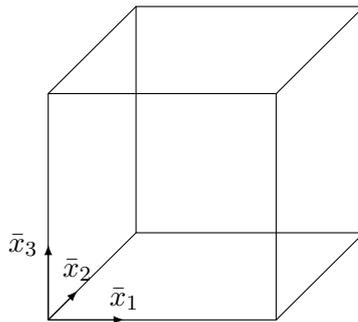


Abb. 3.1.: Ausgangskonfiguration des Klotzes mit kartesischer Basis.

\mathbf{e}_1 -Richtung gedrückt und gerade so gelagert werden, dass er sich frei in \mathbf{e}_2 - und \mathbf{e}_3 -Richtung ausdehnen kann. Für die Komponenten der Bewegung $\boldsymbol{\chi}$ ist dadurch

folgender Ansatz sinnvoll:

$$\chi_1(\bar{\mathbf{x}}) = \alpha \bar{x}_1, \quad \chi_2(\bar{\mathbf{x}}) = \beta \bar{x}_2, \quad \chi_3(\bar{\mathbf{x}}) = \gamma \bar{x}_3.$$

Die Komponenten der Verschiebung $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i = u_J \bar{\mathbf{e}}_J$ lauten:

$$u_1(\bar{\mathbf{x}}) = (\alpha - 1)\bar{x}_1, \quad u_2(\bar{\mathbf{x}}) = (\beta - 1)\bar{x}_2, \quad u_3(\bar{\mathbf{x}}) = (\gamma - 1)\bar{x}_3.$$

Daraus berechnet sich der Deformationsgradient zu:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_J} \mathbf{e}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_J = \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 + \beta \mathbf{e}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \gamma \mathbf{e}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3.$$

Der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor folgt dann zu:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \alpha^2 \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 + \beta^2 \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \gamma^2 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3.$$

Aus dem linken CAUCHY-GREEN-Dehnungstensor ergibt sich der GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left[(\alpha^2 - 1) \bar{\mathbf{P}}_1 + (\beta^2 - 1) \bar{\mathbf{P}}_2 + (\gamma^2 - 1) \bar{\mathbf{P}}_3 \right].$$

Die Formänderungsenergie dichte \bar{w}_{SVK} des ST. VENANT-KIRCHHOFF-Materials ist gegeben durch:

$$\bar{w}_{\text{SVK}} = \frac{\lambda}{2} \text{Sp}(\mathbf{E})^2 + \mu \text{Sp}(\mathbf{E}^2).$$

Durch die Diagonalgestalt des Dehnungstensors lassen sich die einzelnen Summanden einfach bestimmen:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\text{SVK}} &= \frac{\lambda}{8} \left[(\alpha^2 - 1) + (\beta^2 - 1) + (\gamma^2 - 1) \right]^2 \\ &\quad + \frac{\mu}{4} \left[(\alpha^2 - 1)^2 + (\beta^2 - 1)^2 + (\gamma^2 - 1)^2 \right] \end{aligned}$$

Die Spannungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{\partial \bar{w}_{\text{SVK}}}{\partial \mathbf{E}} = \lambda \text{Sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \\ &= \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[(\alpha^2 - 1) + (\beta^2 - 1) + (\gamma^2 - 1) \right] + \mu (\alpha^2 - 1) \right\} \bar{\mathbf{P}}_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[(\alpha^2 - 1) + (\beta^2 - 1) + (\gamma^2 - 1) \right] + \mu (\beta^2 - 1) \right\} \bar{\mathbf{P}}_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[(\alpha^2 - 1) + (\beta^2 - 1) + (\gamma^2 - 1) \right] + \mu (\gamma^2 - 1) \right\} \bar{\mathbf{P}}_3. \end{aligned}$$

Die Spannungskomponenten sind erforderlich, da ein eindimensionalen Spannungszustand erzwungen wird. Dazu wird die linke Fläche $A_1 = \{\mathbf{x} \in \bar{V} \mid \bar{x}_1 = 0\}$ durch drei Verschiebungsrandbedingungen gelagert (siehe Abb. 3.2):

$$u_1|_{\bar{x}_1=0} = 0, \quad u_2|_{\bar{x}_1=0, \bar{x}_2=0} = 0, \quad u_3|_{\bar{x}_1=0, \bar{x}_2=0, \bar{x}_3=0} = 0 .$$

Auf der rechten Fläche $A_2 = \{\mathbf{x} \in \bar{V} \mid \bar{x}_1 = L\}$ wird eine DIRICHLET-Bedingung

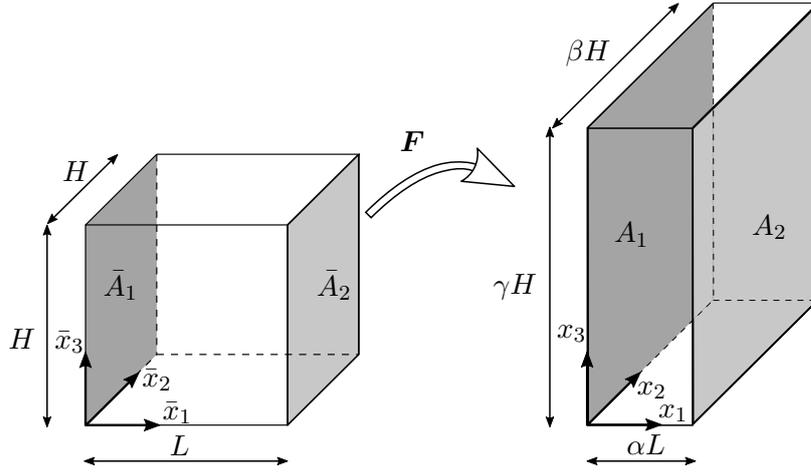


Abb. 3.2.: Skizze des simulierten Klotzes mit verwendeter Bezeichnung.

in Abhängigkeit von α vorgegeben. Die restlichen Flächen bleiben frei, d.h. hier herrscht Spannungsfreiheit:

$$\mathbf{t}^{\text{ext}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_3=0} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_3=H} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_2=0} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_2=H} = \mathbf{0} . \quad (3.1)$$

Durch die erlaubten Deformationen ist der Deformationsgradient \mathbf{F} und der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \mathbf{S} diagonal. Für den CAUCHY-Spannungstensor folgt daraus ebenfalls die Diagonalität:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top = T_{11} \mathbf{E}_{11} + T_{22} \mathbf{E}_{22} + T_{33} \mathbf{E}_{33} . \quad (3.2)$$

Die lokale statische Impulsbilanz unter Vernachlässigung der Gravitation lautet:

$$\mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}} = 0 , \quad \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = 0 .$$

Hieraus folgt, dass die CAUCHY-Spannungskomponenten nur noch lineare Funktionen x_i sein können:

$$T_{11} = A_1 x_1 + B_1 , \quad T_{22} = A_2 x_2 + B_2 , \quad T_{33} = A_3 x_3 + B_3 .$$

Mit den Randbedingungen (3.1) ist anschaulich, dass die Komponenten T_{22} und

T_{33} im gesamten Klotz verschwinden. Mit der Beziehung (3.2) verschwinden ebenso die Komponenten S_{22} und S_{33} . Daraus lassen sich die Koeffizienten β und γ abhängig von α darstellen:

$$\begin{aligned} S_{22} &= \frac{\lambda}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3) + \mu (\beta^2 - 1) = 0 \\ S_{33} &= \frac{\lambda}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3) + \mu (\gamma^2 - 1) = 0 . \end{aligned}$$

Durch das Subtrahieren der beiden Gleichungen, folgt zunächst die Gleichheit $\beta^2 = \gamma^2$. Durch das Einsetzen in die verbleibende Gleichung, gilt:

$$\beta^2 = \gamma^2 = \frac{1}{2} \frac{3\lambda + 2\mu - \lambda\alpha^2}{\lambda + \mu} .$$

Dies ermöglicht, die Formänderungsenergiedichte \bar{w}_{SVK} nur noch in Abhängigkeit von α zu formulieren:

$$\bar{w}_{\text{SVK}} = \frac{(\alpha^2 - 1)^2 \mu (3\lambda + 2\mu)}{8(\lambda + \mu)} .$$

Die gesamte innere Formänderungsenergie W^{int} ist dann gegeben durch:

$$W^{\text{int}} = \int_{\bar{V}} \bar{w}_{\text{SVK}} d\bar{V} = \bar{w}_{\text{SVK}} \bar{V} = \bar{w}_{\text{SVK}} L H^2 .$$

Die Variation derselbigen kann nur noch durch eine Änderung von α hervorgerufen werden:

$$\delta W^{\text{int}} = \bar{V} \frac{\partial \bar{w}_{\text{SVK}}}{\partial \alpha} \delta \alpha = \bar{V} \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} \delta \alpha .$$

Die Variation der äußeren Lasten ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \delta W^{\text{ext}} &= \int_{\bar{A}_2} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\bar{A} = \int_{\bar{A}_2} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \alpha} \delta \alpha d\bar{A} \\ &= \int_{\bar{A}_2} t_1^{\text{ext}} \bar{x}_1 \delta \alpha d\bar{A} = \bar{A}_2 t_1^{\text{ext}} L \delta \alpha = FL \delta \alpha . \end{aligned}$$

Aus der Gleichheit der äußeren und inneren virtuellen Arbeit folgt für die Kraft F schließlich:

$$F = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} H^2 \alpha (\alpha^2 - 1) .$$

Die analytische Lösung des hyperelastischen ST. VENANT-KIRCHHOFF-Modells für einen Klotz mit Ausgangslänge L und quadratischer Querschnittsfläche H^2 lautet in Abhängigkeit vom Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν :

$$F = \frac{1}{2}EH^2\alpha(\alpha^2 - 1). \quad (3.3)$$

Interessant ist die Tatsache, dass das Ergebnis nicht von der Querkontraktionszahl ν abhängt. Das Resultat ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

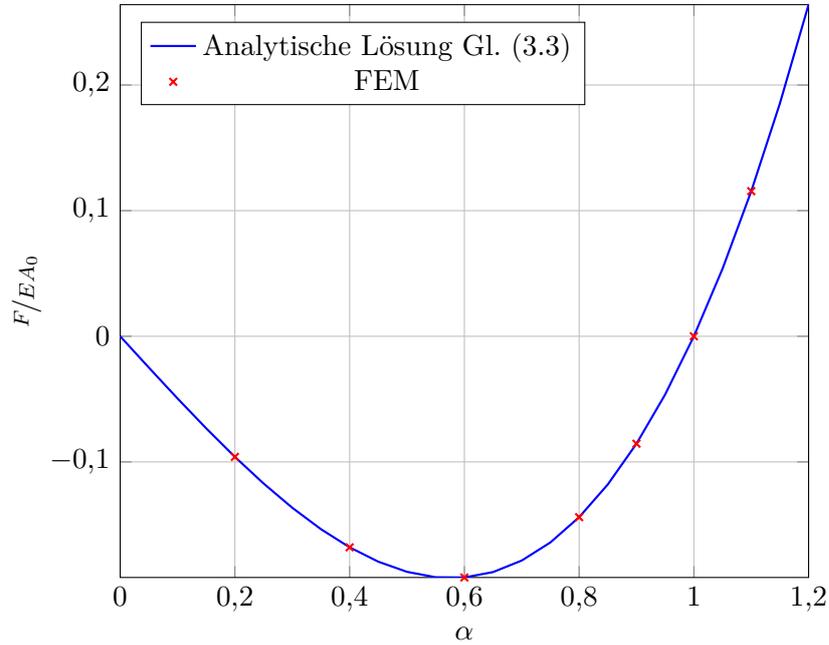


Abb. 3.3.: Gegenüberstellung der analytischen Lösung für den hyperelastischen Klotz nach ST. VENANT-KIRCHHOFF und der entsprechenden FE-Simulation.

Das entsprechende FE-Programm ermittelt die Verschiebungen anhand der variationellen Form der Impulsbilanz in Bezugsplatzierung:

$$\int_{\bar{V}} \bar{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} - \oint_{\partial \bar{V}} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{A} + \int_{\bar{V}} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \delta \mathbf{F}^\top \, d\bar{V} - \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} = 0 .$$

Für den quasistatischen Fall und unter Vernachlässigung der Gravitation folgt:

$$- \oint_{\partial \bar{V}} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{A} + \int_{\bar{V}} \frac{\partial \bar{w}_{\text{SVK}}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{F} \, d\bar{V} = 0 .$$

Diese Bilanz lässt sich ohne Weiteres interpretieren, denn sie folgt direkt aus der

Energiebilanz. Das linke Integral beschreibt die virtuelle externe Arbeit und das rechte die virtuelle innere Formänderungsenergie.

$$-\delta W^{\text{ext}} + \delta W^{\text{int}} = 0 .$$

Zur Berechnung der numerischen Punkte in Abb. 3.3 gibt es zwei Möglichkeiten: entweder es werden die Spannung oder die Verschiebung an der Fläche A_2 vorgegeben. Um die Simulation besser mit der analytischen Lösung vergleichen zu können, soll in beiden Fällen die normierte Kraft $F/E\bar{A}$ bestimmt werden. Dabei ist die Kraft gegeben durch:

$$F = \int_{A_2} \mathbf{t} \, dA = \int_{A_2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{\bar{A}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\bar{A} = \int_{\bar{A}_2} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \, d\bar{A} .$$

Die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung ist durch den Gradienten des Potentials gegeben:

$$\mathbf{S} = \frac{d\bar{w}_{\text{SVK}}}{d\mathbf{E}} = \lambda \text{Sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} .$$

Es wurden beide Möglichkeiten implementiert. Wurde die DIRICHLET-Randbedingung, d.h. Verschiebung, vorgegeben, dann konnte die analytische Lösung punktgenau abgerastert werden (siehe Abb. 3.3). Dabei fallen mehrere Besonderheiten auf. Wenn die Verschiebungsrandbedingung vom undeformierten Bezugszustand mit $\alpha = 1$ inkrementell erhöht wird, dann wird die resultierende Last auf der Fläche A_2 betragsmäßig größer.

Bei $\alpha \approx 0,6$ gibt es ein lokales Minimum und es folgt ein Bereich in dem der Klotz zwar weiter zusammengedrückt wird, die resultierende Last aber betragsmäßig abnimmt. Dieser Vorgang zieht sich bis $\alpha = 0$ hin, dort beträgt die Last Null. Das entspricht dem Zustand wenn der Klotz zu einer Ebene zusammengedrückt wurde, die sich in x_2 - und x_3 -Richtung unendlich weit erstreckt. Dieser Bereich ist unphysikalisch.

Wenn die Verschiebungsrandbedingung auf negative α -Werte gesetzt wird, dann ist immer noch eine Lösung berechenbar. Sie entspricht dem Zustand, bei dem der Klotz „umgestülpt“ und auf der anderen Seite wieder langgezogen wird. Physikalisch sind diese Zustände nicht mehr realisierbar, und es stellt sich die Frage, wozu diese Ergebnisse hier vorgestellt werden. Wenn man sich einer Simulation widmet, bei der statt der Verschiebungsrandbedingung eine äußere Last, d.h. NEUMANN-Randbedingung, vorgegeben wird, dann wird der Zweck klar.

Analog zu der Simulation mit Verschiebungsrandbedingung wird bei einer undeformierten Konfiguration begonnen und die äußere Drucklast inkrementell erhöht (siehe Abb. 3.4). Bis zum lokalen Minimum ist der Verlauf erwartungsgemäß. In

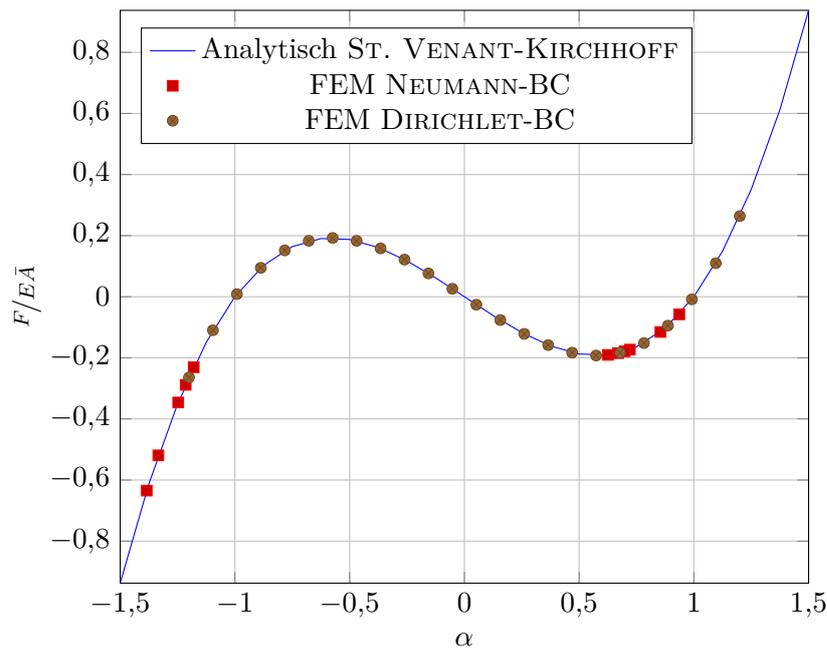


Abb. 3.4.: Unterschiede bei der Implementierung der Simulation. Bei Vorgabe von Verschiebungen, d.h. α , ist das Resultat stets eindeutig. Für die Definition von Spannungsrandbedingungen existiert ein mehrdeutiger Bereich.

Abb. 3.5 sind einige Zwischenkonfigurationen abgebildet. Man sieht, wie der Klotz durch die zunehmende Druckbelastung immer flacher wird. Danach springt die Lösung jedoch zu negativen α -Werten. Wenn man sich den deformierten Zustände in Abb. 3.6 ansieht, wird klar, welcher mathematisch korrekte Zustand bestimmt wurde, nämlich der des umgestülpten Würfels. Dies ist jedoch unphysikalisch. Im Bereich $F/E\bar{\Delta} \in (-0.2, 0.2)$ ist die Funktion nicht bijektiv, sodass für eine Druckspannung unterschiedliche α -Werte existieren. Das ST. VENANT-KIRCHHOFF-Materialgesetz zeigt an dieser Stelle Schwächen. Das könnte der Grund für die numerischen Probleme bei der Simulation des physikalisch linearen Modells der Erde sein.

3.2. Referenzproblem mit MOONEY-RIVLIN

In diesem Abschnitt wird der Klotz mit dem physikalisch nicht-linearen kompressiblen MOONEY-RIVLIN-Gesetz nach Ciarlet, 1988 untersucht.

Ciarlet, 1988 und Ball, 1976 zeigen in ihren Arbeiten, dass eine Lösung nur möglich ist, wenn die Energiedichte eine polykonvexe und koerzitive Funktion ist. Koerzitive Funktion bedeutet im kontinuumstheoretischen Kontext, dass

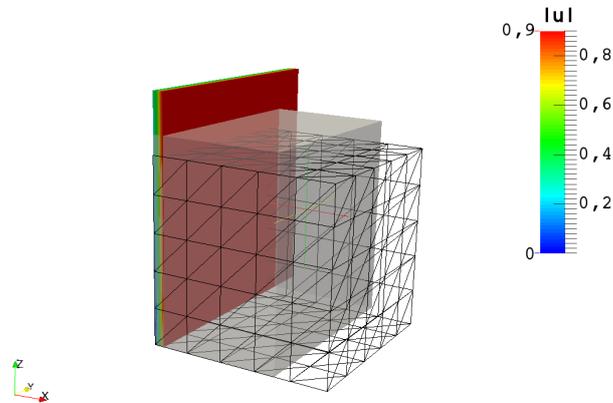


Abb. 3.5.: Zunehmende Deformation des Klotzes durch zunehmende Druckbelastung.

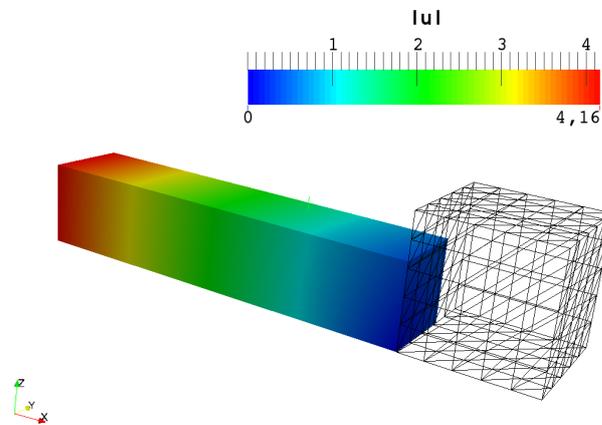


Abb. 3.6.: Unphysikalische Lösung des elementaren Würfels bei negativen α Werten. Der undeformierte Klotz ist als Drahtgitter dargestellt. Bei genügend hoher Druckkraft auf die rechte Fläche wird der Klotz umgestülpt.

die Energiedichte $\bar{w}_F(I_F, II_F, III_F)$ für alle Argumente $I_F, II_F, III_F \in [0, \infty[$ an den Bereichsgrenzen rapide gegen unendlich strebt. Wird das Beispiel aus Kap. 3.1 nochmal angeschaut, dann müsste die Drucklast betragsmäßig immer weiter zunehmen und für $\alpha \rightarrow 0$ unendlich groß werden.

Polykonvexität bedeutet, dass die Funktion \bar{w}_F in jedem Argument $I_F, II_F, III_F \in [0, \infty[$ konvex ist. Mathematisch soll exemplarisch für I_F gelten:

$$w(tI_{F_1} + (1-t)I_{F_2}, \bullet, \bullet) \leq tw(I_{F_1}, \bullet, \bullet) + (1-t)w(I_{F_2}, \bullet, \bullet) \\ \text{mit } t \in [0, 1].$$

Anschaulich bedeutet das für eine skalare Funktion, dass die Verbindungsgerade zwischen den Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ stets oberhalb aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in [x_1, x_2]$ ist (siehe Abb. 3.7). Ciarlet, 1988 gibt die kompressible

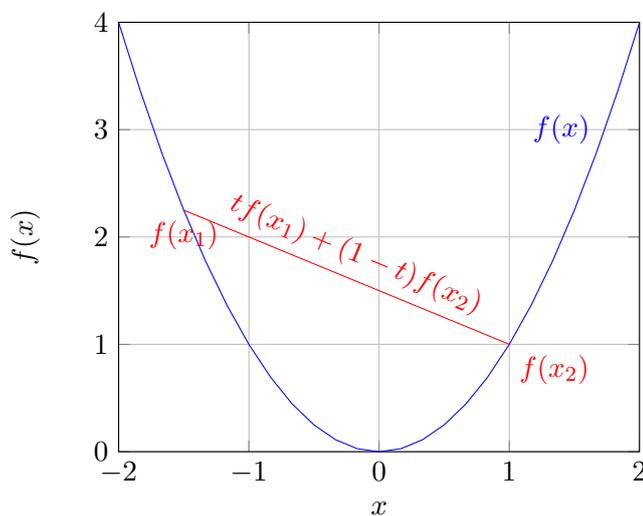


Abb. 3.7.: Konvexe skalare Funktion mit Kontrollgerade.

MOONEY-RIVLIN-Energiedichte mit folgender Gleichung an:

$$\bar{w}_{\text{MR}} = a \|\mathbf{F}\|^2 + b \|\mathbf{F}^{\text{cof}}\|^2 + c \det^2 \mathbf{F} - d \ln \det \mathbf{F} - w_0.$$

Die darin enthaltenen Größen a, b, c, d sind Materialkonstanten. Die Variable w_0 ist ein Eichparameter, der später bestimmt wird. Diese Gleichung kann ebenfalls mit den Hauptinvarianten des rechten CAUCHY-GREEN-Verzerrungstensors \mathbf{C}

geschrieben werden. Dazu sind folgende Identitäten hilfreich:

$$\begin{aligned} I_C &= \text{Sp}(\mathbf{C}) = \text{Sp}(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F} : \mathbf{F} = \|\mathbf{F}\|^2, \\ II_C &= \text{Sp}(\mathbf{C}^{\text{cof}}) = \text{Sp}(\mathbf{F}^{\text{cof}\top} \cdot \mathbf{F}^{\text{cof}}) = \|\mathbf{F}^{\text{cof}}\|^2, \\ III_C &= \det \mathbf{C} = \det(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) = \det^2 \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Damit ist die Formänderungsenergiedichte gegeben durch:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\text{MR}} &= aI_C + bII_C + cIII_C - \frac{d}{2} \ln III_C + w_0, \\ \text{mit} \quad a &= \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{4}x, \quad b = \frac{\lambda}{4}x, \quad c = \frac{\lambda}{4}(1-x), \quad d = \frac{\lambda}{2} + \mu. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Für eine beliebige Wahl von $x \in]0,1[$ ist die Funktion polykonvex und koerzitiv. Dadurch ist die Existenz der Lösung für beliebige Werte garantiert. Die Energie enthält für den Spezialfall $b = 0$ die kompressible Neo-HOOKE-Energiedichte. Die Konstante w_0 ist durch die Forderung bestimmt, dass die Energiedichte für den undeformierten Ausgangszustand verschwindet. Für den Ausgangszustand gilt $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ und für die Invarianten von \mathbf{C} :

$$I_C = 3, \quad II_C = 3, \quad III_C = 1.$$

Für die Energiedichte gilt dann:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\text{MR}}(I_C = 3, II_C = 3, III_C = 1) &= 3a + 3b + c + w_0 = 0 \\ \Rightarrow w_0 &= -(3a + 3b + c). \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Formänderungsenergiedichte wie folgt formulieren:

$$\bar{w}_{\text{MR}} = a(I_C - 3) + b(II_C - 3) + c(III_C - 1) - \frac{d}{2} \ln III_C.$$

Bertram, 2005 gibt hingegen für diese Formänderungsenergiedichte die folgende Gleichung an:

$$\bar{w}_{\text{MR}} = \frac{\lambda}{4}(III_C - 1) - \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \ln III_C + \frac{\mu}{2}(I_C - 3).$$

Diese Gleichung lässt sich aus Gl. (3.4) reproduzieren, wenn $x = 0$ gewählt wird. Laut Ciarlet, 1988 liegt das aber außerhalb des polykonvexen Geltungsbereiches. Diese Formänderungsenergiedichte soll implementiert werden. Das ist mit dem bestehenden Code unkompliziert, denn die Formänderungsenergiedichte und die Berechnung der äußeren Last sind das Einzige, was sich bei der gesamten

Prozedur ändert:

$$F = \int_{\bar{A}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\bar{A} .$$

Diese Beziehung wurde beim ST. VENANT-KIRCHHOFF-Material bereits gefunden, jedoch sind die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen hier anders:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2 \frac{d\bar{w}_{MR}}{d\mathbf{C}} \\ &= 2 \frac{d}{d\mathbf{C}} \left(a(I_C - 3) + b(II_C - 3) + c(III_C - 1) - \frac{d}{2} \ln III_C \right) \\ &= 2a\mathbf{I} + 2bI_C\mathbf{I} - 2b\mathbf{C} + 2cIII_C\mathbf{C}^{-1} - d\mathbf{C}^{-1} \\ &= (2a + 2bI_C)\mathbf{I} - 2b\mathbf{C} + (2cIII_C - d)\mathbf{C}^{-1} . \end{aligned}$$

Zur Analyse des MOONEY-RIVLIN-Gesetzes wurde erneut der Klotz von Abschnitt 3.1 simuliert. Bei Vorgabe der Kraft am rechten Rand A_2 ergaben sich die in Abb.

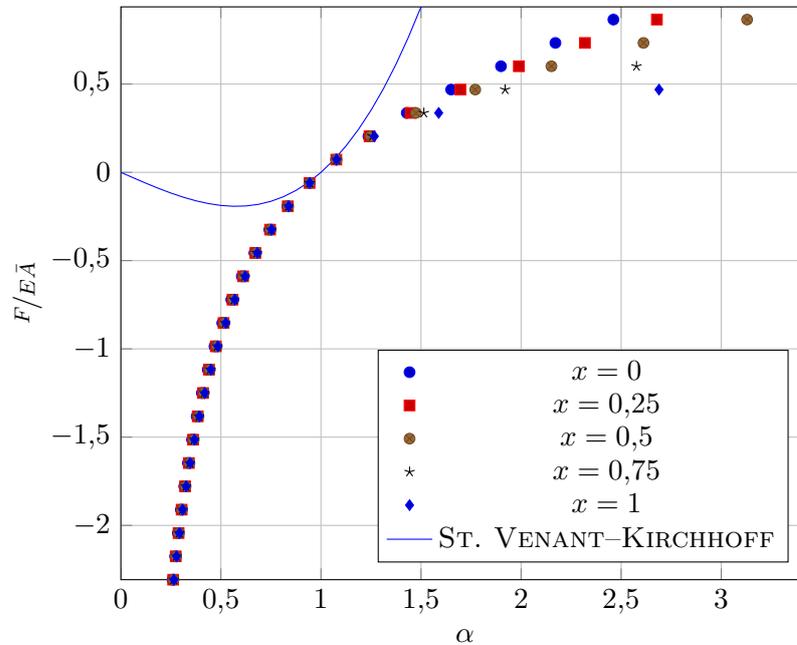


Abb. 3.8.: Vergleich der verschiedenen Formänderungsenergiedichten für unterschiedliche Parameter x nach Ciarlet, 1988.

3.8 dargestellten Verläufe. Zum Vergleich ist die analytische Lösung für das ST. VENANT-KIRCHHOFF-Material dargestellt. An der Stelle $\alpha = 1$ überlappen sich alle Graphen. Das kommt durch die Anpassung des MOONEY-RIVLIN-Modells an das ST. VENANT-KIRCHHOFF-Gesetz zustande. Die Materialkennwerte in Gl. 3.4 wurden in Ciarlet, 1988 gerade so gewählt, dass die Energiedichtefunktionen

bis auf Terme dritter Ordnung übereinstimmen:

$$\bar{w}_{\text{MR}} = \bar{w}_{\text{SVK}} + \mathcal{O}(\|\mathbf{E}\|^3).$$

Das wird auch in der Abb. 3.8 deutlich. Unabhängig von der Wahl von x sind alle Graphen in der Umgebung von $\alpha = 1$ gleich.

Zusätzlich zur Polykonvexität wird in der Arbeit Ciarlet, 1988 gezeigt, dass die Funktion koerzitiv ist. Koerzitivität bedeutet mathematisch, dass stets zwei Parameter γ_1, γ_2 existieren, so dass gilt:

$$\bar{w}_F \geq \gamma_1(\|\mathbf{F}\|^2 + \|\mathbf{F}^{\text{cof}}\|^2 + \det \mathbf{F}^2) + \gamma_2.$$

Diese Bedingung lässt sich anschaulicher mit den Hauptinvarianten von \mathbf{C} interpretieren:

$$\bar{w}_F \geq \gamma_1(I_C + II_C + III_C) + \gamma_2.$$

Die Bedingung stellt sicher, dass die Funktionen für $\|\mathbf{F}\| \rightarrow \infty$ und $\|\mathbf{F}\| \rightarrow 0$ über alle Grenzen wachsen:

$$\lim_{\|\mathbf{F}\| \rightarrow \infty} \bar{w}_F = \infty, \quad \lim_{\|\mathbf{F}\| \rightarrow 0} \bar{w}_F = -\infty.$$

Für alle MOONEY-RIVLIN-Funktionen sind die Bedingungen in Abb. 3.8 erfüllt, jedoch nicht für das ST. VENANT-KIRCHHOFF-Material.

Bei den Simulationen wurden die Randwerte, also $x = 0$ und $x = 1$, ebenfalls untersucht, obwohl sie in der Arbeit Ciarlet, 1988 aus dem Intervall für x ausgeschlossen wurden. Damit soll ein Vergleich zu der Formulierung von Bertram, 2005 hergestellt werden. Die Parameter in dieser Arbeit lassen sich nur durch $x = 0$ reproduzieren. Abb. 3.8 zeigt, dass im Druckbereich, d.h. $F/E\bar{A} < 0$, die Verläufe fast identisch sind. Im Zugbereich hingegen sind teils starke Abweichungen zu erkennen je nach Wahl von x .

In Abb. 3.9 wurde das Modell nach Bertram, 2005; Ciarlet, 1988 für $x = 0$ für verschiedene Arten von Randbedingungen simuliert, um ähnliche Effekte wie beim ST. VENANT-KIRCHHOFF-Gesetz auszuschließen. Abb. 3.9 zeigt, dass es für dieses hyperelastische Gesetz keine erkennbaren Unterschiede gibt, unabhängig davon ob der Klotz verschiebungsgesteuert oder kraftgesteuert simuliert wird.

3.3. Mehrschalenmodell der Erde nach MOONEY-RIVLIN

Dieser Abschnitt behandelt die Anwendung des MOONEY-RIVLIN-Materialgesetzes auf die Simulation der Erde in sphärischen Koordinaten. Es soll die Deformation einer Kugel berechnet werden, deren Verschiebungen ausschließlich

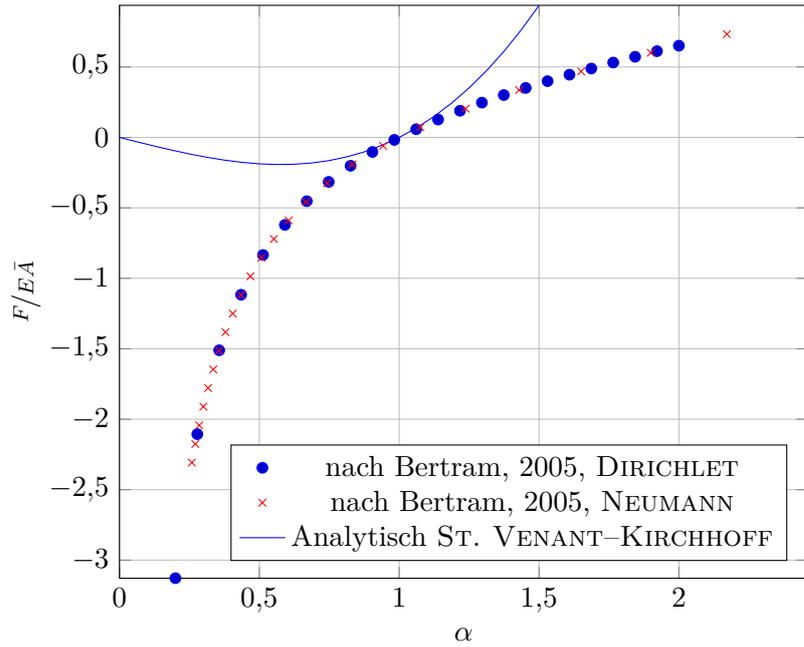


Abb. 3.9.: Vergleich der verschiedenen Formänderungsenergiedichten für das kompressible MOONEY-RIVLIN-Material nach Bertram, 2005 und Ciarlet, 1988.

radialsymmetrisch sind:

$$r = R + u_R(R), \quad \vartheta = \Theta, \quad \varphi = \Phi.$$

Unter dieser Annahme ist der Deformationsgradient diagonal:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial z^i}{\partial \bar{z}^J} \mathbf{g}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^J \\ &= (1 + u_{R,R}) \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_R + 1(r\mathbf{e}_\vartheta) \otimes \left(\frac{1}{R}\bar{\mathbf{e}}_\Theta\right) + 1(r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi) \otimes \left(\frac{1}{R \sin \Theta} \bar{\mathbf{e}}_\Phi\right) \\ &= (1 + u_{R,R}) \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_R + \frac{r}{R} \mathbf{e}_\vartheta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Theta + \frac{r}{R} \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Phi. \end{aligned}$$

Der symmetrische rechte CAUCHY-GREEN-Tensor ist ebenfalls diagonal:

$$\mathbf{C} = (1 + u_{R,R})^2 \bar{\mathbf{e}}_R \otimes \bar{\mathbf{e}}_R + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \bar{\mathbf{e}}_\Theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \bar{\mathbf{e}}_\Phi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Phi.$$

Diese Gleichung wird mittels der bereits eingeführten Projektoren kompakter formuliert. Der Projektor $\bar{\mathbf{P}}_R$ projiziert jeden beliebigen Vektor senkrecht in die

\bar{e}_R -Richtung. Für die anderen Komponenten gilt das analog:

$$\mathbf{C} = (1 + u_{R,R})^2 \bar{\mathbf{P}}_R + \left(1 + \frac{u_R}{R}\right)^2 (\bar{\mathbf{P}}_\Theta + \bar{\mathbf{P}}_\Phi) .$$

In dieser Gestalt können die Eigenwerte abgelesen werden:

$$\lambda_1^C = (1 + u_{R,R})^2 , \quad \lambda_2^C = \lambda_3^C = \left(1 + \frac{u_R}{R}\right)^2 .$$

Aus der Diagonalgestalt wird die Inverse bestimmt:

$$\mathbf{C}^{-1} = (1 + u_{R,R})^{-2} \bar{\mathbf{E}}_R + \left(1 + \frac{u_R}{R}\right)^{-2} (\bar{\mathbf{E}}_\Theta + \bar{\mathbf{E}}_\Phi) .$$

Diese Größen sind notwendig, um die polykonvexe MOONEY-RIVLIN-Formänderungsenergiedichte nach Ciarlet, 1988 aufzustellen:

$$\bar{w}_{MR} = a(I_C - 3) + b(II_C - 3) + c(III_C - 1) - \frac{d}{2} \ln III_C .$$

Da die Eigenwerte der Deformation bekannt sind, kann die Formänderungsenergiedichte in Abhängigkeit der Eigenwerte aufgeschrieben werden. Folgende Beziehungen zwischen den Invarianten und den Eigenwerten eines symmetrischen Tensors sind hilfreich:

$$I_A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad II_A = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad III_A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 .$$

Wird diese Gleichung auf den rechten CAUCHY-GREEN-Tensor angewendet, lässt sich die Formänderungsenergiedichte in Abhängigkeit der Eigenwerte formulieren:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{MR} = a \left(\lambda_1^C + 2\lambda_2^C - 3 \right) + b \left(2\lambda_1^C \lambda_2^C + (\lambda_2^C)^2 - 3 \right) + \\ + c \left(\lambda_1^C (\lambda_2^C)^2 - 1 \right) - \frac{d}{2} \ln \left(\lambda_1^C (\lambda_2^C)^2 \right) . \end{aligned}$$

An dieser Stelle soll auf eine Besonderheit bei der Implementierung hingewiesen werden. Die Simulation findet in der aktuellen Platzierung statt, denn es ist der einzige eindeutige bzw. bekannte Zustand. Das einzige Gitter, das erstellt werden kann, ist hiermit das der aktuellen Platzierung. Damit ist für den Rechner nur die aktuelle Position \mathbf{x} bekannt (siehe Abb. 3.10). Da dem Programm nur die Koordinaten der Gitterpunkte bekannt sind, kommt es zu Schwierigkeiten beim Berechnen von Gradienten von Feldern. Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode werden Feldgrößen stets als Linearkombination aus Koeffizientenvektor und

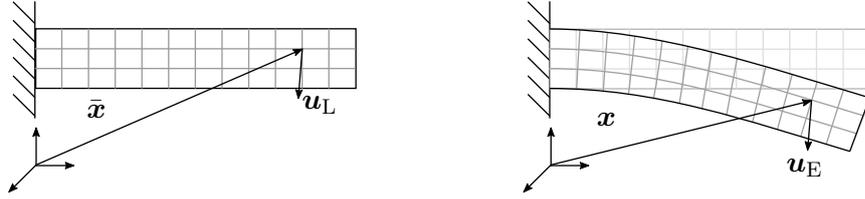


Abb. 3.10.: Verschiebung \mathbf{u} dargestellt in der Bezugsplozierung als LAGRANGE-Funktion $\mathbf{u}_L(\bar{\mathbf{x}}, t)$ und der aktuellen Plozierung als EULER-Funktion $\mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t)$.

Basisfunktionen dargestellt:

$$\mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) .$$

Wird hieraus der Gradient gebildet, so ist in der aktuellen Plozierung nur ein räumlicher Gradient implementierbar:

$$\mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t) \otimes \nabla_E = \sum_{i=1}^N U_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \otimes \nabla_E .$$

Damit sind zwei Aspekte bei der Implementierung der Simulation in der aktuellen Plozierung zu beachten: alle Funktionen müssen in EULERScher Darstellungsform formuliert werden, und es können nur räumliche Gradienten verwendet werden.

Zur Realisierung muss der Deformationsgradient und alle abgeleiteten Größen umgeschrieben werden, sodass alle Funktionen von den aktuellen Koordinaten abhängen:

$$\mathbf{F} = \left(1 - \frac{du_r}{dr}\right)^{-1} \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_R + \left(1 - \frac{u_r}{r}\right)^{-1} (\mathbf{e}_\vartheta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Theta + \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Phi) . \quad (3.5)$$

Damit sind der rechte und linke CAUCHY-GREEN-Tensor gegeben durch:

$$\mathbf{C} = \left(1 - \frac{du_r}{dr}\right)^{-2} \bar{\mathbf{e}}_R \otimes \bar{\mathbf{e}}_R + \left(1 - \frac{u_r}{r}\right)^{-2} (\bar{\mathbf{e}}_\Theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Theta + \bar{\mathbf{e}}_\Phi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\Phi) ,$$

$$\mathbf{B} = \left(1 - \frac{du_r}{dr}\right)^{-2} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(1 - \frac{u_r}{r}\right)^{-2} (\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) .$$

Die Gleichheit der Eigenwerte von \mathbf{C} und \mathbf{B} wird bestätigt. Beide Tensoren unterscheiden sich nur in der Basis.

Für die Simulation der Verschiebung wird das Prinzip der virtuellen Arbeit aus der Bezugsplatzierung in die aktuelle Platzierung transformiert. Alle Trägheitsterme und Oberflächenspannungen werden weggelassen:

$$\delta W^{\text{int}} = \int_V \frac{\delta \bar{w}_{\text{MR}}}{J} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \delta W^{\text{ext}} .$$

Für die Variation der internen Formänderungsenergiedichte ist die Variation der Hauptinvarianten notwendig:

$$\delta \bar{w}_{\text{MR}} = a \delta I_C + b \delta II_C + \left(c - \frac{d}{2} III_C^{-1} \right) \delta III_C .$$

Die Variation der Invarianten lässt sich durch die Variation der Eigenwerte formulieren. Hierbei gelten für den Variationsoperator die gleichen Rechenregeln wie für den Differentialoperator:

$$\begin{aligned} \delta I_C &= \delta \lambda_1^C + 2 \delta \lambda_2^C , \\ \delta II_C &= 2(\lambda_1^C \delta \lambda_2^C + \delta \lambda_1^C \lambda_2^C + \lambda_2^C \delta \lambda_2^C) , \\ \delta III_C &= \delta \lambda_1^C (\lambda_2^C)^2 + 2 \lambda_1^C \lambda_2^C \delta \lambda_2^C . \end{aligned}$$

Die Variation des ersten Eigenwertes λ_1^C entspricht der Richtungsableitung nach GÂTEAUX in Richtung der virtuellen Verschiebung δu_r :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\delta u_r} \lambda_1^C(u_r) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{d(u_r + \varepsilon \delta u_r)}{dr} \right)^{-2} - \left(1 - \frac{du_r}{dr} \right)^{-2} \right] \\ &= \frac{2}{\left(1 - \frac{du_r}{dr} \right)^3} \frac{d\delta u_r}{dr} . \end{aligned}$$

Der zweite Eigenwert folgt zu:

$$\delta \lambda_2^C = \frac{2}{\left(1 - \frac{u_r}{r} \right)^3} \frac{\delta u_r}{r} .$$

Mit diesen Ergebnissen sind die Variationen der Hauptinvarianten bestimmbar. Um diese möglichst kompakt anzugeben, werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\lambda_1 = \left(1 - \frac{du_r}{dr} \right)^{-1} , \quad \lambda_2 = \left(1 - \frac{u_r}{r} \right)^{-1} .$$

Damit sind die Variationen der Invarianten:

$$\begin{aligned}\delta I_C &= 2\lambda_1^3 \frac{d\delta u_r}{dr} + 4\lambda_2^3 \frac{\delta u_r}{r}, \\ \delta II_C &= 4\lambda_2^2 \left[\lambda_2^5 \frac{\delta u_r}{r} + \lambda_1^3 \frac{d\delta u_r}{dr} + \lambda_2 \lambda_1^2 \frac{\delta u_r}{r} \right], \\ \delta III_C &= 2\lambda_1^2 \lambda_2^4 \left[\lambda_1 \frac{d\delta u_r}{dr} + 2\lambda_2 \frac{\delta u_r}{r} \right].\end{aligned}$$

Hieraus lässt sich die Formänderungsenergiedichte formulieren:

$$\begin{aligned}\delta \bar{w}_{MR} &= a \left[2\lambda_1^3 \frac{d\delta u_r}{dr} + 4\lambda_2^3 \frac{\delta u_r}{r} \right] + \\ &+ b \left[4\lambda_2^2 \left[\lambda_2^5 \frac{\delta u_r}{r} + \lambda_1^3 \frac{d\delta u_r}{dr} + \lambda_2 \lambda_1^2 \frac{\delta u_r}{r} \right] \right] + \\ &\quad + \left(c - \frac{d}{2} \lambda_1^2 \lambda_2^4 \right) \left[2\lambda_1^2 \lambda_2^4 \left[\lambda_1 \frac{d\delta u_r}{dr} + 2\lambda_2 \frac{\delta u_r}{r} \right] \right]. \quad (3.6)\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden einheitenbehaftete Größen entdimensionalisiert:

$$\tilde{w}_{MR} = K_E \tilde{\tilde{w}}_{MR}, \quad \delta u_r = r_E \delta \tilde{u}_r, \quad r = r_E \tilde{r}, \quad u_r = r_E \tilde{u}_r, \quad \mathbf{f} = 4\pi G \rho_E r_E \tilde{\mathbf{f}}.$$

Für die Simulation wurden die volumetrischen Lasten in Form der Feldgröße \mathbf{f} aus der Lösung der POISSON-Gleichung bestimmt. Um die Verschiebungen zu bestimmen, wurde das Prinzip der virtuellen Arbeit in die aktuelle Platzierung transformiert:

$$K_E \int_{\tilde{V}} \frac{\delta \tilde{\tilde{w}}_{MR}}{J} d\tilde{V} - 4\pi G \rho_E^2 r_E^2 \int_{\tilde{V}} \tilde{\rho} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \delta \tilde{u}_r d\tilde{V} = 0.$$

Die Integration über ϑ und φ kann direkt ausgeführt werden, da durch die Symmetrieannahme keiner der Integranden von diesen Koordinaten abhängt. Dies bringt den Faktor 4π in beiden Integralen hervor. Die gesamte Gleichung wird durch den gemittelten Kompressionsmodul K_E und 4π geteilt und der Parameter α_K erneut identifiziert:

$$\int_{\tilde{r}=0}^1 \frac{\delta \tilde{\tilde{w}}_{MR}}{J} \tilde{r}^2 d\tilde{r} - 3\alpha_K \int_{\tilde{r}=0}^1 \tilde{\rho} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \delta \tilde{u}_r \tilde{r}^2 d\tilde{r} = 0. \quad (3.7)$$

Für die normierten Materialkonstanten a, b, c und d in Gl. (3.6) wird x konform zu den Ausführungen in Kap. 3.2 zwischen 0 und 1 gewählt:

$$\tilde{a} = \frac{1}{4K_E} (2\mu + \lambda x), \quad \tilde{b} = \frac{\lambda x}{4K_E}, \quad \tilde{c} = \frac{\lambda}{4K_E} (1 - x), \quad \tilde{d} = \frac{1}{2K_E} (\lambda + 2\mu).$$

Die Determinante des Deformationsgradienten lässt sich durch die eingeführten

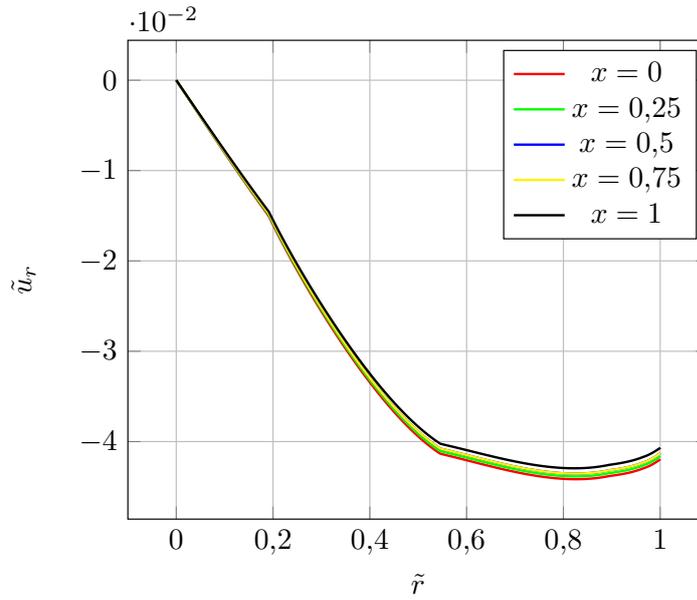


Abb. 3.11.: Radiale Verschiebung für ausgewählte Werte des Parameters x für die hyperelastische MOONEY-RIVLIN-Simulation einer eigengravitierenden Erde mit PREM-Materialdaten.

Eigenwerte λ_1 und λ_2 formulieren:

$$J = III_F = \det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2^2 .$$

Der Integrand im ersten Integral in Gl. (3.7) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{w}_{MR}}{J} \tilde{r}^2 = & 2\tilde{r} \delta \tilde{u}_r \left(2\tilde{a} \lambda_1^{-1} \lambda_2 + 2\tilde{b} (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^5) - 2\tilde{c} \lambda_1 \lambda_2^2 + \tilde{d} \lambda_2 \right) + \\ & + \tilde{r}^2 \frac{\partial \delta \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}} \left(2\tilde{a} \lambda_1^2 \lambda_2^{-2} + 4\tilde{b} \lambda_1^2 + 2\tilde{c} \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \tilde{d} \lambda_1 \right) . \end{aligned}$$

Diese Funktion wurde in FEniCS© implementiert. Als Randbedingungen wurden die Verschiebungen im Erdinneren und die Oberflächenspannungen am äußeren Rand Null gesetzt. Das Ergebnis für die Verschiebungen u_r für ausgewählte Parameter x ist in Abb. 3.11 zu sehen.

Der Einfluss des Parameters x ist marginal; die Verschiebungen betragen maximal 4%. Die sprunghaften Änderungen im Verlauf finden sich an den Schichtgrenzen wieder. Dieser Sachverhalt ist bei den Dehnungskomponenten des GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensors ausgeprägter (siehe Abb. 3.12). Dabei lässt sich die Lage des LOVE-Radius zu $\tilde{r}_{Love} = 0,825$ bestimmen. In Abb. 3.13 auf Seite 59 ist die Konvergenzstudie zu der gemachten Simulation abgebildet. Dabei wurde die Knotenanzahl von 10 bis hin zu 10240 Zellen immer wieder verdoppelt. Der quadratische Fehler wurde über das gesamte Integrationsgebiet im Bezug auf die

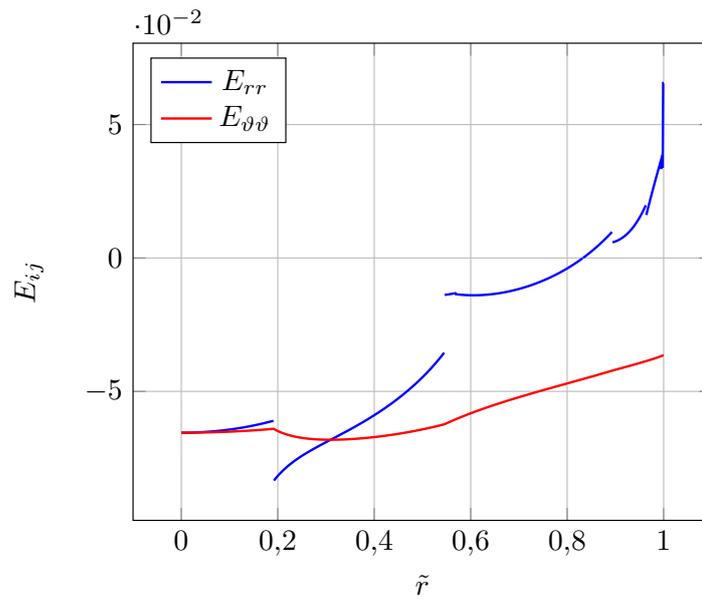


Abb. 3.12.: Dehnungskomponenten E_{rr} und $E_{\vartheta\vartheta} = E_{\varphi\varphi}$ für die hyperelastische MOONEY-RIVLIN-Simulation einer eigengravitierenden Erde mit PREM-Materialdaten.

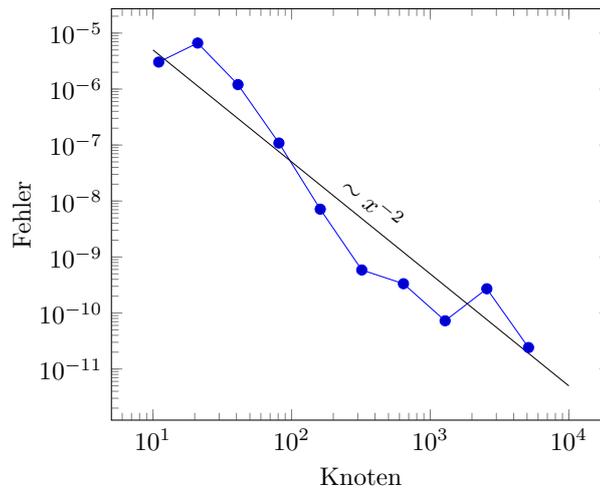


Abb. 3.13.: Konvergenzanalyse für die hyperelastische Erde mit PREM-Daten mit 10 Knoten bis 10240 Knoten.

kleinste Schrittweite berechnet:

$$\text{Fehler}_i = \int_{\tilde{r}=0}^1 (\tilde{u}_{r,i} - \tilde{u}_{r,\text{finest}})^2 d\tilde{r} .$$

Der Test zeigt eine quadratische Konvergenz.

Als weiteres Ergebnis ist die berechnete Massendichte $\bar{\rho}$ der Bezugsplatzierung im Vergleich zur implementierten PREM Dichte in der aktuellen Platzierung abgebildet (siehe Abb. 3.14). Man sieht, wie sich die Massendichte durch die Kompression

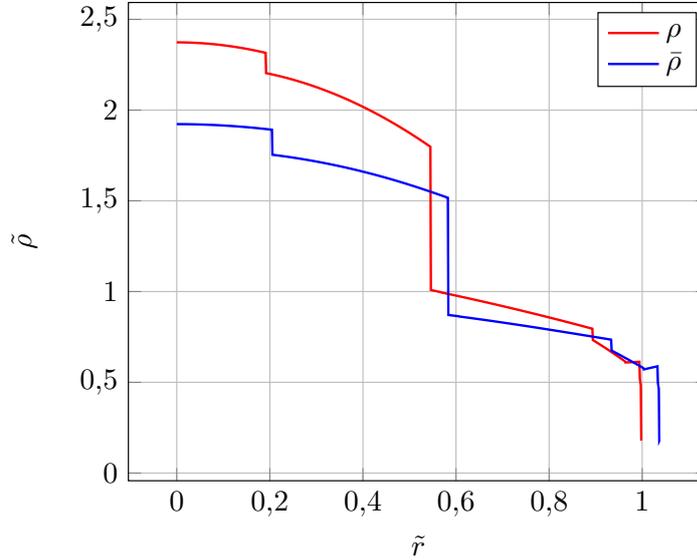


Abb. 3.14.: Vergleich der aktuellen Massendichte nach PREM und der berechneten Massendichte in der Bezugsplatzierung.

der Erde erhöht. Da beide Funktionen auf den aktuellen Radius r_E normiert sind, geht der Definitionsbereich der Massendichte in der Bezugsplatzierung über den Wert $\tilde{r} = 1$ hinaus.

Die Spannungen lassen sich aus der internen virtuellen Energiedichte bestimmen. Es gilt nach Gl. (2.16):

$$\delta\bar{w} = \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{F} = (J\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top}) \cdot \delta\mathbf{F} \stackrel{!}{=} \frac{\partial\bar{w}}{\partial\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{F} .$$

Daraus folgt die Bestimmungsformel für die CAUCHY-Spannungen:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \frac{\partial\bar{w}}{\partial\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\top = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\bar{w}}{\partial\lambda_i} \frac{\partial\lambda_i}{\partial\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\top .$$

Die Ableitung der Eigenwerte nach dem Deformationsgradient ist in Gl. (3.5) zu sehen:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i , \quad \frac{\partial\lambda_i}{\partial\mathbf{F}} = \mathbf{e}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i .$$

Die Richtigkeit dieser Formel lässt sich durch einen Trick beweisen:

$$1 = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{F}} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{e}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i .$$

Die einfache Kontraktion mit der Transponierten des Deformationsgradienten liefert den CAUCHY-Spannungstensor in Spektraldarstellung:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \lambda_i} \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i .$$

Hieraus lassen sich für den Fall der rein radialsymmetrischen Erde die Hauptspannungen ablesen:

$$T_{rr} = \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \lambda_1} , \quad T_{\vartheta\vartheta} = T_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \lambda_2} .$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Funktionen lassen sich die Spannungen in Abhängigkeit der Hauptdehnungen λ_1 schreiben:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{rr} &= 2\tilde{a} \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} + 2\tilde{b} \lambda_1 + 2\tilde{c} \lambda_1 \lambda_2^2 - \tilde{d} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} , \\ \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} = \tilde{T}_{\varphi\varphi} &= 4\tilde{a} \frac{1}{\lambda_1} + 4\tilde{b} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \right) + 4\tilde{c} \lambda_1 \lambda_2^2 - 2\tilde{d} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} . \end{aligned}$$

Die normierten Hauptspannungen sind in Abb. 3.15 dargestellt. Die Spannungsrandbedingung am Außenrand $\tilde{r} = 0$ ist erfüllt. An der Grenzschicht zwischen innerem und äußerem Kern ist ein Sprung erkennbar. Das liegt daran, dass die Stetigkeit der radialen Spannungen nur schwach erfüllt.

Stetigkeit der Spannungen im schwachen Sinne

Im Gegensatz zum Kap. 2.4 wurde keine Iterationsprozedur implementiert, sondern die Erde als Ganzes in einem Gebiet V simuliert. Um die Fragen nach der Annahme und der Gültigkeit einer solchen Simulation zu beantworten, muss die Finite-Elemente-Methode genauer untersucht werden. Erste Überlegungen beginnen bei der lokalen statischen Impulsbilanz in AP. Hieraus wird eine schwache Form im Sinne des GALERKIN-Verfahrens erstellt:

$$-\mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}} = \rho \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad - \int_V (\mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV . \quad (3.8)$$

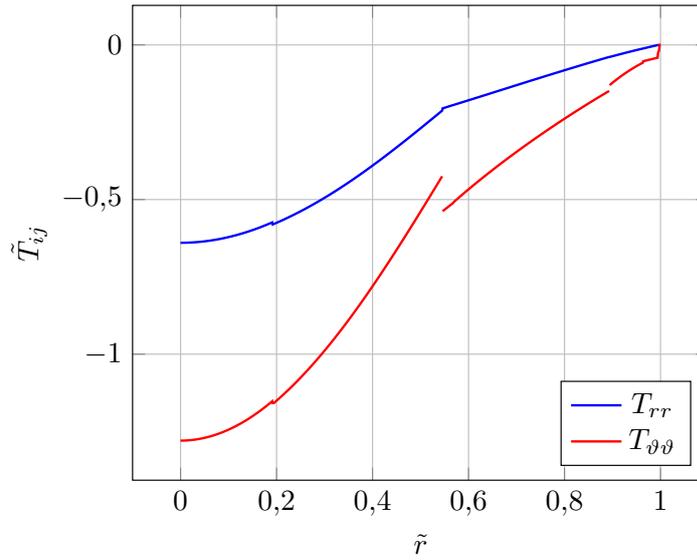


Abb. 3.15.: Hauptspannungen T_{rr} und $T_{\vartheta\vartheta} = T_{\varphi\varphi}$ der hyperelastischen Mooney Rivlin Materials der eigengravitierenden Erde mit PREM Daten.

Hierauf werden die partielle Integration und der GAUSSsche Integralsatz angewendet. Man gelangt zu einer Form die implementiert werden kann:

$$\int_V \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{E}}) dV - \oint_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV . \quad (3.9)$$

Dabei wird die Annahme getroffen, dass die Spannungen \mathbf{T} stetig sind, sonst wäre der GAUSSsche Integralsatz nicht anwendbar. Um den dadurch verursachten Fehler aufzudecken, werden die finiten Elemente genauer untersucht. Bei der Erstellung eines Finite-Elemente-Netzes wird das Gebiet V in eine endliche Anzahl N einzelner Zellen V_e unterteilt:

$$V = \bigcup_{e=1}^N V_e .$$

Der Index e steht als Laufindex über allen Elementen und ist deshalb als Variable gekennzeichnet. Zudem beschreibt er, dass es sich um einzelne Elementvolumen handelt.

Wenn wir nun eine numerische Simulation mit der Finite-Elemente-Methode durchführen, dann werden intern die Integrale aus Gl. (3.8) zunächst für jedes Element V_e gebildet und anschließend aufsummiert:

$$-\sum_{e=1}^N \int_{V_e} (\mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV = \sum_{e=1}^N \int_{V_e} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV .$$

Der Spannungsterm wird partiell integriert:

$$-\sum_{e=1}^N \int_{V_e} (\mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = -\sum_{e=1}^N \int_{V_e} (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{E}} \, dV + \sum_{e=1}^N \int_{V_e} \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{E}}) \, dV .$$

Auf das erste Integral der rechten Seite wird der GAUSSsche Integralsatz angewendet. Dies ist möglich, denn es wird über das Elementvolumen integriert. In diesem sind alle Funktionen mindestens stetig:

$$\sum_{e=1}^N \int_{V_e} (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{E}} \, dV = \sum_{e=1}^N \oint_{\partial V_e} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA .$$

Damit lautet die schwache Form der Impulsbilanz:

$$\sum_{e=1}^N \int_{V_e} \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{E}}) \, dV - \sum_{e=1}^N \oint_{\partial V_e} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \sum_{e=1}^N \int_{V_e} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV .$$

Durch die Unstetigkeit der PREM-Daten an den Schichtgrenzen sind die Funktionen $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ im gesamten Gebiet V unstetig. Man geht davon aus, dass die Funktionen an jeder Elementgrenze unstetig sein können. Durch die Implementierung von linearen LAGRANGE-Finite-Elementen ist eine Unstetigkeit innerhalb der Elemente ausgeschlossen.

Die Volumenintegrale sind unproblematisch:

$$\int_V \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{E}}) \, dV - \sum_{e=1}^N \oint_{\partial V_e} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV .$$

Das Integral über die Elementoberflächen soll an dieser Stelle genauer betrachtet werden. In Abb. 3.16 ist dazu eine exemplarische Triangulation des Gebiets V dargestellt und daraus zwei benachbarte Elemente V_i und V_{i+1} herausgegriffen. Die Summe über die Elementoberflächen für diese zwei Elemente ausgeschrieben lautet nun:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^N \oint_{\partial V_e} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \\ &= \dots + \oint_{\partial V_i} (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \delta \mathbf{u}_i \, dA + \oint_{\partial V_{i+1}} (\mathbf{T}_{i+1} \cdot \mathbf{n}_{i+1}) \cdot \delta \mathbf{u}_{i+1} \, dA + \dots \\ &= \dots + \oint_{\partial V_i \setminus A_s} (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \delta \mathbf{u}_i \, dA + \int_{A_s} (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \delta \mathbf{u}_i \, dA + \\ &+ \int_{\partial V_{i+1} \setminus A_s} (\mathbf{T}_{i+1} \cdot \mathbf{n}_{i+1}) \cdot \delta \mathbf{u}_{i+1} \, dA + \int_{A_s} (\mathbf{T}_{i+1} \cdot \mathbf{n}_{i+1}) \cdot \delta \mathbf{u}_{i+1} \, dA + \dots \end{aligned}$$

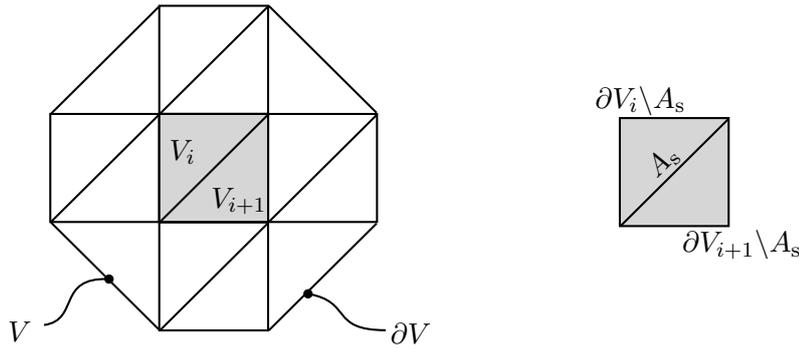


Abb. 3.16.: Exemplarisches Netz aus finiten Elementen mit zwei herausgegriffenen benachbarten Zellen V_i und V_{i+1} und deren gemeinsamer Grenzfläche A_s .

Die Testfunktion ist ebenfalls eine LAGRANGE-Funktion erster Ordnung. Damit ist $\delta \mathbf{u}$ an der Grenzfläche A_s stetig und die Normalenvektoren sind entgegengesetzt gerichtet:

$$\delta \mathbf{u}_i|_{A_s} = \delta \mathbf{u}_{i+1}|_{A_s} \quad , \quad \mathbf{n}_i|_{A_s} = -\mathbf{n}_{i+1}|_{A_s} \quad .$$

Dadurch lassen sich die Integrale über die gemeinsame Fläche A_s durch einen Sprungterm zusammenfassen:

$$\sum_{e=1}^N \oint_{\partial V_e} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \dots + \int_{A_s} ([[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \delta \mathbf{u}_i \, dA + \dots \quad .$$

Bei innen liegenden Elementen ist stets ein Sprungterm zu berücksichtigen. Bei den am Rand liegenden Elementen gibt es keinen benachbarten Partner, sodass folgende Integrale stehen bleiben:

$$\sum_{e=1}^N \oint_{\partial V_e} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \oint_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{A_{\text{int}}} ([[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \quad ,$$

mit $A_{\text{int}} = \bigcup_{e=1}^N \partial V_e \setminus \partial V \quad .$

Wenn die schwache Form der statischen Impulsbilanz nochmal angesehen wird, dann müsste statt Gl. (3.9) eigentlich geschrieben werden:

$$\int_V \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \nabla_E) \, dV - \oint_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{A_{\text{int}}} ([[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \quad .$$

Physikalisch folgt aus den Sprungbilanzen gerade, dass der Sprung der Spannungen in Normalenrichtung verschwinden muss:

$$[[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n}|_{A_{\text{int}}} = 0 .$$

Damit ist es physikalisch gesehen richtig, das Integral über A_{int} wegzulassen. Numerisch bedeutet dies, dass diese Bedingung allerdings nur schwach erfüllt wird, indem Sie zusammen mit den anderen Termen in der variationellen Form minimiert wird, ähnlich einer NEUMANN-Randbedingung. Dies könnte den kleinen Sprung in Abb. 3.15 an der Grenzschicht zwischen innerem und äußerem Erdkern erklären.

4. Zusammenfassung und Ausblick

4.1. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den elastischen Deformationen der Erde aufgrund ihrer Eigengravitation. Dabei wurde zunächst eine erste Schätzung vorgestellt, bei der die Deformationen einer homogenen Eisenkugel analytisch berechnet wurden. Es wurde das *Preliminary Reference Earth Model* erörtert und eine Homogenisierung der Materialparameter entwickelt. Daraufhin wurde die finite Deformationstheorie auf die Erde angewendet und dadurch Verschiebungen, Spannungen und Dehnungen für ein physikalisch lineares und physikalisch nicht-lineares Materialmodell bestimmt.

Abb. 4.1 zeigt die radialen Verschiebungen für die drei untersuchten Erdmo-

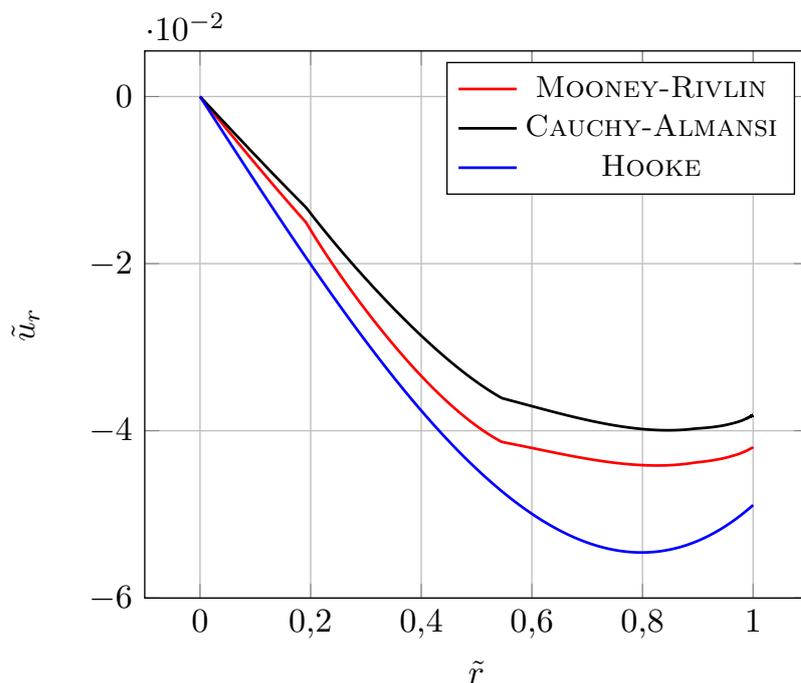


Abb. 4.1.: Vergleich der normierten radialen Verschiebungen für die analytische Lösung mit HOOKE, und die FEM-Simulation mit CAUCHY-ALMANSI und MOONEY-RIVLIN mit PREM-Materialdaten.

delle. Das HOOKEsche Modell weist die größten Verschiebungen auf und das physikalisch lineare Modell nach CAUCHY-ALMANSI die kleinsten. Das MOONEY-RIVLIN-Modell liegt dazwischen. Die Verläufe sind bei beiden hyperelastischen Gesetzen sehr ähnlich. Das wird durch die zugrunde liegende PREM-Daten begründet. Es ist ein deutlicher Knick am Übergang von Erdkern zum Erdmantel zu erkennen. Es ist die Stelle, an der die Materialparameter den größten Sprung aufweisen. Beim geometrisch linearen Modell nach HOOKE wurden effektive elastische Parameter verwendet.

Die Verschiebungen sind im gesamten Bereich negativ und haben ein lokales Minimum. Das lokale Minimum befindet sich beim LOVE-Radius:

$$\tilde{r}_{\text{Love,MR}} \approx 0,826, \quad \tilde{r}_{\text{Love,CA}} \approx 0,845, \quad \tilde{r}_{\text{Love,H}} \approx 0,8.$$

An dieser Stelle betragen die Verschiebungen 4% bis 5,5%. Das ergibt eine Abweichung von 30% relativ zum kleinsten Wert.

Abb. 4.2 zeigt die radialen CAUCHY-Spannungen für die drei untersuchten

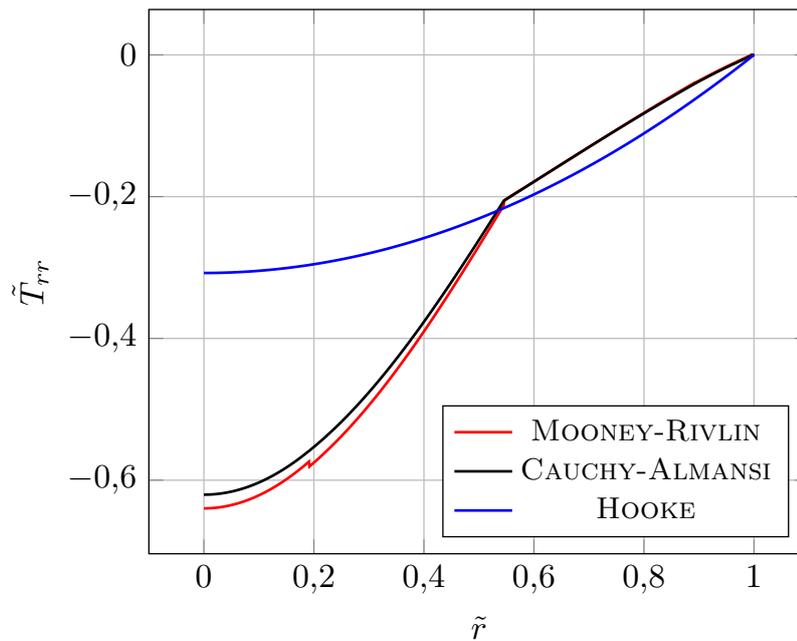


Abb. 4.2.: Vergleich der normierten radialen Spannungen für die analytische Lösung mit Hooke, und die FEM-Simulation mit CAUCHY-ALMANSI und MOONEY-RIVLIN mit PREM-Materialdaten.

Modelle. Die Spannungen sind im gesamten Definitionsbereich negativ, d.h. kompressiv. Sie verschwinden am äußeren Rand $\tilde{r} = 1$. Somit wird die gesetzte NEUMANN-Randbedingung erfüllt. Alle drei Modelle haben im Bereich des Erdmantels $\tilde{r} > 0,55$ sehr ähnliche Verläufe. Das liegt an den kleinen Dehnungen

in diesem Bereich. Die Materialgesetze sind so konstruiert, dass sie bei kleinen Dehnungen gegen das HOOKEsche Materialgesetz konvergieren.

Im Erdkern gibt es deutliche Unterschiede. Der größte Wert im Erdinneren entsteht beim MOONEY-RIVLIN-Materialmodell. Hier ist $T_{rr}(\tilde{r} = 0) \approx 330$ GPa. Das korrespondiert gut mit den Ergebnissen in Anzellini u. a., 2013. Bei CAUCHY-ALMANSI ergibt sich eine radiale Spannung von 320 GPa. Der kleinste Wert ergibt sich bei dem HOOKEschen Modell mit 160 GPa. Das entspricht einem relativen Unterschied von 100 % bis 106 % zwischen der Theorie kleiner Dehnungen und der finiten Deformationstheorie.

Wenn die Umfangsspannungen hinzugezogen werden um den hydrostatischen Druck zu bestimmen, dann ergibt sich für die MOONEY-RIVLIN-Simulation:

$$p = -\frac{1}{3}\text{Sp}(\mathbf{T}) \Rightarrow p_{\text{MR}} \approx 550 \text{ GPa} .$$

Für das CAUCHY-ALMANSI-Materialmodell ist der hydrostatische Druck p_{CA} durch die Gleichheit der Radial- und Umfangsspannungen im Erdinneren bereits mit 320 GPa gegeben.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Ergebnisse konsistent sind. Trotz unterschiedlicher Annahmen, z.B. homogene vs. heterogene elastische Materialdaten, korrelieren die Ergebnisse an Stellen mit kleinen Deformationen im Erdmantel. Im Erdkern hingegen ist eine Berechnung mit der finiten Deformationstheorie obligatorisch.

4.2. Beitrag zur Forschungsgemeinschaft

Die vorliegende Arbeit enthält sowohl bereits veröffentlichte Ergebnisse (siehe Müller und Lofink, 2014; Lofink und Müller, 2015), als auch neue. Die neuen Ergebnisse sind in den folgenden Punkten zusammengefasst:

- Bestimmung effektiver elastischer Konstanten für die Erde mit dem Homogenisierungsverfahren von KACHANOV und SEVOSTIANOV.
- Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit in aktueller Platzierung für quasi-statische radial-symmetrische Problemstellungen in Kugelkoordinaten und Reduktion der resultierenden variationellen Form auf eine skalare Gleichung.
- Entwicklung und Implementierung einer Iterationsprozedur um die Stetigkeit der radialen Verschiebungen und Spannungen bei finiten LAGRANGE-Elementen sicher zu stellen.
- Bestimmung der finiten Deformationen einer eigengravitierenden Kugel mit radiusabhängigen PREM-Materialparametern mit einem physikalisch

linearen, geometrisch nicht-linearen Konstitutivgesetz in der aktuellen Platzierung.

- Bestimmung der finiten Deformationen einer eigengravitierenden Kugel mit radiusabhängigen PREM-Materialparametern mit einem physikalisch nicht-linearen, hyperelastischen MOONEY-RIVLIN-Konstitutivgesetz in der aktuellen Platzierung.
- Beitrag zur Diskussion über die Notwendigkeit einer geometrisch nicht-linearen Beschreibung der Erddeformationen. Die Ergebnisse zeigen, dass bei allen vorgestellten Modellen die Deformationen den Rahmen der geometrisch linearen Theorie übersteigen.

4.3. Ausblick

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zu einem Thema, das bereits von KELVIN, RAYLEIGH, LOVE und JEANS im späten 19. Jahrhundert diskutiert wurde. Sie soll zeigen, dass das Thema nach wie vor interessante Fragestellungen liefert. Mögliche weitere Forschungsarbeiten sind:

- Berücksichtigung der Anisotropie der elastischen Eigenschaften. In Dzionowski und Anderson, 1987 werden transversal-isotrope Daten für die Erde angegeben. Damit lässt sich eine weitere Präzisierung des Erdmodells bestimmen, indem die Anisotropie der elastischen Eigenschaften in den Materialfunktionen berücksichtigt wird.
- Die Erweiterung des Modells auf visko-elastische Deformation ist interessant, da der äußere Kern der Erde in einem fluid-artigen Zustand ist. Es stellt sich die Frage nach der Größenordnung von visko-elastische Deformationen und ob sie mit den elastischen Deformationen vergleichbar sind.

A. Koordinatensysteme

An dieser Stelle werden die in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme rekapituliert. Es werden die kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten vorgestellt. Neben der verwendeten Notation, werden wichtige Transformationsformeln gezeigt.

A.1. Kartesische Koordinaten

Die kartesische Basis wird durch drei orthonormale Einheitsvektoren und entsprechende Koordinaten definiert: Allgemein lässt sich jeder Vektor im Raum

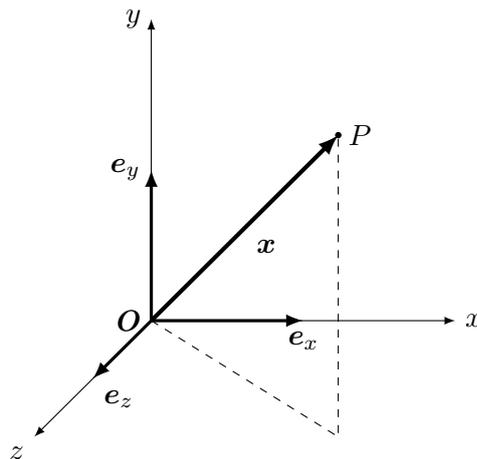


Abb. A.1.: Kartesische Basis und Koordinaten.

schreiben als Linearkombination aus Koordinaten und Basisvektoren. Bei kartesischen Koordinaten sind die Basisvektoren Einheitsvektoren und die ko- und kontravarianten Basen sind identisch:

$$\mathbf{x} = z^i \mathbf{g}_i = z_i \mathbf{g}^i = x_i \mathbf{e}_i = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z .$$

Die Metrik und die CHRISTOFFEL-Symbole sind trivial und werden hier für einen sinnvollen Vergleich zu den Kugelkoordinaten angegeben:

$$G_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = G^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{ijk} = \Gamma_i{}^j{}_k = 0 .$$

Der Nabla-Operator ist gegeben durch:

$$\nabla(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial z^i} \mathbf{g}^i = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial(\bullet)}{\partial z} \mathbf{e}_z .$$

Das differentielle Volumenelement ist das Produkt aus den drei infinitesimalen Längenelementen :

$$dV = dx dy dz .$$

A.2. Kugelkoordinaten

Bei der Beschreibung der Deformation von Himmelskörpern sind Kugelkoordinaten angepasster im Vergleich zu kartesischen Koordinaten. Dadurch lassen sich Ergebnisse kompakter darstellen. Kugelkoordinaten sind im Gegensatz zu den kartesischen Koordinaten ortsabhängig (siehe Abb. A.2). Die Transformation

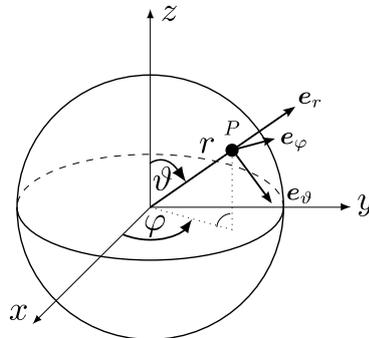


Abb. A.2.: Kugelkoordinaten mit lokaler Basis $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi\}$.

zwischen kartesischen Koordinaten $\{x, y, z\}$ und Kugelkoordinaten $\{r, \vartheta, \varphi\}$ ist:

$$\begin{aligned} x &= x^1 = r \sin \vartheta \cos \varphi = z^1 \sin z^2 \cos z^3 , \\ y &= x^2 = r \sin \vartheta \sin \varphi = z^1 \sin z^2 \sin z^3 , \\ z &= x^3 = r \cos \vartheta = z^1 \cos z^2 . \end{aligned}$$

Aus dieser Definition lassen sich kovariante Basisvektoren (Tangentenvektoren):

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= \mathbf{g}_r = \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z , \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{g}_\vartheta = r \mathbf{e}_\vartheta = r (\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \vartheta \mathbf{e}_z) , \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{g}_\varphi = r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi = r \sin \vartheta (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y + 0 \mathbf{e}_z) ,\end{aligned}$$

und kontravariante Basisvektoren (Gradientenvektoren):

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1 &= \mathbf{g}^r = \mathbf{g}_r = \mathbf{e}_r , \\ \mathbf{g}^2 &= \mathbf{g}^\vartheta = \frac{1}{r^2} \mathbf{g}_\vartheta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta , \\ \mathbf{g}^3 &= \mathbf{g}^\varphi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \mathbf{g}_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi .\end{aligned}$$

ableiten. Die Metrik dieser orthogonalen Basis ist gegeben durch:

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{bmatrix}.$$

Für Ableitung der Basisvektoren \mathbf{g}_i sind die CHRISTOFFEL-Koeffizienten zuständig. Die meisten der 27 Komponenten dieser Matrix sind Null. Die einzigen von Null verschiedenen Komponenten sind:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^2{}_2 &= \Gamma_1^3{}_3 = \Gamma_2^2{}_1 = \Gamma_3^3{}_3 = \frac{1}{r} , \\ \Gamma_2^1{}_2 &= -r , \\ \Gamma_2^3{}_3 &= \Gamma_3^3{}_2 = \cot \vartheta , \\ \Gamma_3^1{}_3 &= -r \sin^2 \vartheta , \\ \Gamma_3^2{}_3 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta .\end{aligned}$$

Die einzigen von Null verschiedenen CHRISTOFFEL-Symbole Γ_{ijk} sind :

$$\begin{aligned}\Gamma_{122} &= \Gamma_{221} = -\Gamma_{212} = r \\ \Gamma_{133} &= \Gamma_{331} = -\Gamma_{313} = r \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{233} &= \Gamma_{332} = -\Gamma_{323} = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitung der Basisvektoren sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial z^k} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi}{\partial \vartheta} & \frac{\partial r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_\vartheta & \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_\vartheta & -r \mathbf{e}_r & r \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi & r \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi & -r \sin^2 \vartheta \mathbf{e}_r - r \sin \vartheta \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial z^k} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_\vartheta & \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ 0 & -\mathbf{e}_r & \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ 0 & 0 & -\sin \vartheta \mathbf{e}_r - \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Das differentielle Volumenelement ist in Kugelkoordinaten gegeben durch:

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

B. Kinematik

In diesem Kapitel werden Größen zur Beschreibung der Deformation der Erde erörtert. Zunächst wird der Deformationsgradient \mathbf{F} eingeführt. Anschließend werden andere Dehnungsmaße gezeigt und Transformationen zwischen aktueller und Bezugsplatzierung beleuchtet.

B.1. EULER- und LAGRANGE-Darstellung

In der Kontinuumstheorie gibt es zwei grundsätzliche Beschreibungsweisen: EULER- und LAGRANGE-Darstellung. Die EULER-Darstellung betrachtet einen räumlichen Punkt oder eine Feldgröße an einem festen räumlichen Punkt. Wenn sich die Materie bewegt, ändert sich die Position der materiellen Punkte. Der räumliche Punkt bleibt davon unberührt. Die EULER-Darstellung eignet sich dafür materieunabhängige Größen zu beschreiben, z.B. wenn die Temperatur mit einem Thermometer an einer Position bestimmt wird. Es wird die Feldgröße Temperatur an einer festen Raumposition ermittelt. Einzelne Partikel strömen an der Messspitze vorbei, sodass zu jedem Zeitpunkt ein anderes Teilchen die Messspitze berührt:

$$\phi_E = \phi_E(\mathbf{x}, t) .$$

Bei der LAGRANGE-Darstellung interessiert man sich für das Verhalten eines bestimmten Partikels. Zu verschiedenen Zeitpunkten wird das Messinstrument mitgeführt und man misst eine Feldgröße stets für das gleiche Partikel. Ein Dehnmessstreifen wird z.B. auf einen anfänglich unverformten Ausleger geklebt. Sobald verschiedene Gewichte oder Belastungen den Ausleger verformen, bewegt sich der Messstreifen mit dem Ausleger mit und zeichnet die Dehnung z.B. für ein und dasselbe Partikel auf:

$$\phi_L = \phi_L(\bar{\mathbf{x}}, t) .$$

Beide Darstellungen sind über die Bewegungsbeziehungen ineinander überführbar und werden als äquivalent und gleichberechtigt behandelt. Die aktuelle Position eines Partikels \mathbf{x} lässt sich durch eine bijektive Funktion darstellen:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\bar{\mathbf{x}}, t) , \quad \bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t) .$$

Die Funktion χ wird Bewegung genannt. Der Unterschied zwischen den beiden Darstellungen wird relevant, wenn zeitliche Änderungen von Feldgrößen untersucht werden. Dabei treten verschiedene zeitliche Ableitungen auf. Die materielle Ableitung beschreibt die Änderung einer Feldgröße ϕ , wenn ein konkretes Teilchen festgehalten wird:

$$\frac{d\phi}{dt} := \left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}=\text{const.}} = \left. \frac{\partial\phi_{\text{L}}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}=\text{const.}} = \left. \frac{\partial\phi_{\text{E}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}=\text{const.}} + (\phi_{\text{E}} \otimes \nabla_{\text{E}}) \cdot \left. \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}=\text{const.}} . \quad (\text{B.1})$$

Der letzte Term beschreibt die materielle Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v} = \left. \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}=\text{const.}} = \frac{d\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{dt} .$$

Die beiden letzten Bestandteile in Gl. (B.1) werden als lokale und konvektive Ableitung bezeichnet. Der lokale Teil beschreibt die Änderung der Feldgröße am gleichen Raumpunkt. Der konvektive Anteil eine Änderung aufgrund einer Materialbewegung dar.

B.2. Deformationsgradient und verschiedene Dehnungsmaße

Bei der Untersuchung von finiten Deformationen müssen die aktuelle Platzierung und die Bezugsplatzierung gesondert betrachtet werden. Für die Transformation zwischen den Platzierungen spielt der Deformationsgradient eine zentrale Rolle:

$$\mathbf{F} = F^i{}_J \mathbf{g}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^J = \frac{\partial z^i}{\partial \bar{z}^J} \mathbf{g}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^J , \quad \mathbf{F} \in \text{Inv}^+ .$$

Dabei bezeichnen z^i und \bar{z}^J jeweils Koordinaten der Ortsvektoren in der aktuellen und der Bezugsplatzierung. Ebenso bezieht sich \mathbf{g}_i auf den kovarianten Basisvektor in der aktuellen Platzierung und $\bar{\mathbf{g}}^J$ auf den kontravarianten Basisvektor in der Bezugsplatzierung. Der Deformationsgradient wird so genannt, weil er der materielle Gradient der Bewegung χ ist:

$$\mathbf{F} = \chi \otimes \nabla_{\text{L}} = (z^i \mathbf{g}_i) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^J} \bar{\mathbf{g}}^J \right) = \frac{\partial z^i}{\partial \bar{z}^J} \mathbf{g}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^J .$$

Die Wirkung des Deformationsgradienten lässt sich anhand der Abb. B.1 veranschaulichen. Als Vermittler zwischen Bezugsplatzierung und aktueller Platzierung

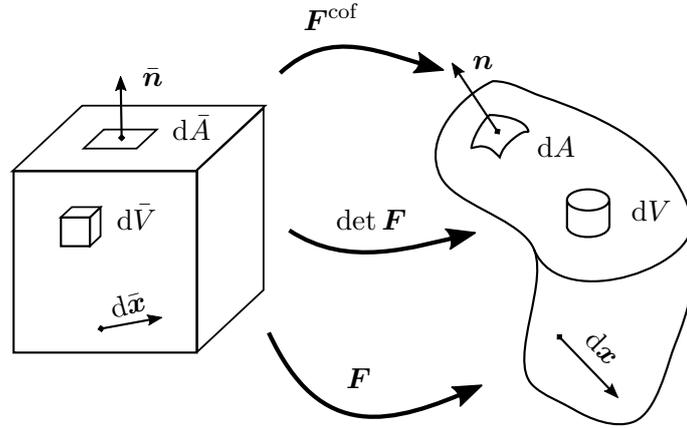


Abb. B.1.: Deformationsgradient als Vermittler zwischen Bezugsplatzierung und aktueller Platzierung.

transformiert er das infinitesimale Linien-, Flächen- und Volumenelement:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{F} \cdot d\bar{\mathbf{x}}, & \mathbf{n} dA &= \mathbf{F}^{\text{cof}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\bar{A}, & dV &= J d\bar{V}, \\ \text{mit } \mathbf{F}^{\text{cof}} &= J\mathbf{F}^{-\top}, & J &= \det(\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Bereits in diesen Formeln tauchen Inverse und Transponierte des Deformationsgradienten auf. Da \mathbf{F} ein Zwei-Bein-Tensor ist, ist die Darstellung der verschiedenen Formen des Tensors nicht immer evident:

$$\mathbf{F}^{\top} = \frac{\partial z^i}{\partial \bar{z}^J} \bar{\mathbf{g}}^J \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \bar{z}^N}{\partial z^m} \bar{\mathbf{g}}_N \otimes \mathbf{g}^m, \quad \mathbf{F}^{-\top} = \frac{\partial \bar{z}^N}{\partial z^m} \mathbf{g}^m \otimes \bar{\mathbf{g}}_N.$$

Durch die polare Zerlegung wird der Deformationsgradient \mathbf{F} in einen orthogonalen Drehtensor \mathbf{R} und einen Streckungstensor \mathbf{U} aufgespalten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} \in \text{Orth}, \mathbf{U} \in \text{Psym}.$$

Die polare Zerlegung funktioniert auch andersherum:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} \in \text{Orth}, \mathbf{V} \in \text{Psym}.$$

Daher werden \mathbf{V} linker Strecktensor und \mathbf{U} rechter Strecktensor genannt.

Der Deformationsgradient \mathbf{F} eignet sich nur bedingt dazu die Deformation eines Körpers zu messen, da er zum Teil reine Starrkörperrotation enthält. Würde man das HOOKEsches Gesetz zugrunde legen, das eine lineare Beziehung zwischen den Spannungen und den Dehnungen konstituiert, dann würden Starrkörperrotation Spannungen im Körper induzieren. Das ist unphysikalisch und begründet die Notwendigkeit anderer Deformationsmaße.

Durch den Vergleich der Länge eines infinitesimalen Linienelementes (genauer dessen Quadrat) in aktuelle Platzierung (AP) und Bezugsplatzierung (BP):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{d}\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{d}\bar{\mathbf{x}}\|^2 &= \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} - \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{I} \cdot \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} ,\end{aligned}$$

zeigt sich der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor \mathbf{C} . Dieser wird auch als Metrik-tensor der Deformation bezeichnet. Die Differenz aus CAUCHY-GREEN-Tensor und Einheitstensor gibt die Änderung der Betragsquadrate wieder. Wenn die Änderung auf beide Platzierungen gleichverteilt wird, führt das auf die Definition des GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensors:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) .$$

In der letzten Gleichung ist zu sehen, dass reine Drehungen im CAUCHY-GREEN-Tensor und GREEN-LAGRANGE-Tensor nicht relevant sind.

Wenn man dieselbe Differenz, bezogen auf die aktuellen Linienelemente betrachtet, dann entsteht der linke CAUCHY-GREEN-Tensor $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} - \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} - (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} - \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} = \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} .\end{aligned}$$

Analog zum GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor existiert ein räumliches Gegenstück in Form des EULER-ALMANSI-Dehnungstensors:

$$\mathbf{E}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) .$$

In der geometrisch linearen Theorie wird ausschließlich der linearisierte Dehnungstensor verwendet. In diesem Zusammenhang hat der Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \mathbf{u} \otimes \nabla_L$ eine zentrale Rolle:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\chi} \otimes \nabla_L = (\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) \otimes \nabla_L = \mathbf{I} + \mathbf{H} ,$$

In dieser Theorie ist der Betrag ε der Deformation sehr klein:

$$\varepsilon := \|\mathbf{H}\| = \sqrt{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}} \ll 1 .$$

Größen werden in der geometrisch linearen Theorie als annähernd gleich gesehen, wenn sie sich nur in Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ unterscheiden:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}((\mathbf{I} + \mathbf{H}^\top) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}) - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \approx \mathbf{E}^{\text{lin}} .\end{aligned}\tag{B.3}$$

Analog lässt sich zeigen, dass für kleine Verformungen der EULER-ALMANSI-Dehnungstensor annähernd gleich dem linearisierten Dehnungstensor \mathbf{E}^{lin} ist.

B.3. Hauptachsen- bzw. Spektraldarstellung

Der CAUCHY-GREEN-Tensor ist symmetrisch:

$$\mathbf{C}^\top = (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F})^\top = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} \in \text{Sym} ,$$

und positiv definit, denn es gilt für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}\|^2 > 0 .$$

Die Gleichheit ist ausgeschlossen, da $\mathbf{F} \in \text{Inv}^+$. Damit ist $\mathbf{C} \in \text{Psym}$, und es lassen sich die Eigenwerte λ_i^C und normierten Eigenvektoren $\bar{\mathbf{n}}_i$ stets ermitteln:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^C \bar{\mathbf{n}}_i \otimes \bar{\mathbf{n}}_i .$$

Der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor entspricht dem Quadrat des rechten Strecktensors \mathbf{U} . Damit sind die Eigenwerte des rechten Strecktensors durch die Wurzel gegeben. Da \mathbf{C} positiv definit ist, sind alle Eigenwerte positiv und die Wurzel reell:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \bar{\mathbf{n}}_i \otimes \bar{\mathbf{n}}_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i = \sqrt{\lambda_i^C} .$$

Der Rotationstensor lässt sich dann durch die Inverse des rechten Strecktensors ermitteln:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{U}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \bar{\mathbf{n}}_i \otimes \bar{\mathbf{n}}_i .$$

Analog dazu lässt sich auch der linke Strecktensor identifizieren, indem man zunächst den linken CAUCHY-GREEN-Tensor \mathbf{B} berechnet und danach die Eigenwerte und Eigenvektoren ermittelt:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^B \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i . \quad (\text{B.4})$$

Daraus folgt die Spektraldarstellung des linken Strecktensors:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i^B} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i .$$

Durch die beiden Strecktensoren lässt sich ein Zusammenhang zwischen \mathbf{C} und \mathbf{B} herstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{R}^\top) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{R}^\top \\ &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 (\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i) \otimes (\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Der Drehtensor lässt den Betrag eines Vektors unverändert:

$$\|\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i\|^2 = (\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i) \cdot (\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i) = \bar{\mathbf{n}}_i \cdot (\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i) = \bar{\mathbf{n}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}_i = \|\bar{\mathbf{n}}_i\|^2 .$$

Wenn alle Eigenwerte von \mathbf{U} verschieden sind, dann ist die Spektraldarstellung eindeutig. Aus dem Vergleich von Gleichungen (B.4) und (B.5) resultiert die Gleichheit der Eigenwerte von \mathbf{B} und \mathbf{C} . Der Unterschied ist die gedrehte Basis:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 (\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i) \otimes (\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i) = \mathbf{R} * \mathbf{C} .$$

Das Attribut materiell oder räumlich wird ersichtlich, wenn man die Komponentendarstellung von \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (F^i{}_J \bar{g}^J \otimes \mathbf{g}_i) \cdot (F^k{}_L \mathbf{g}_k \otimes \bar{g}^L) = F^i{}_J F^k{}_L (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k) \bar{g}^J \otimes \bar{g}^L \\ &= F^i{}_J G_{ik} F^k{}_L \bar{g}^J \otimes \bar{g}^L , \end{aligned}$$

und \mathbf{B} betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (F^k{}_L \mathbf{g}_k \otimes \bar{g}^L) \cdot (F^i{}_J \bar{g}^J \otimes \mathbf{g}_i) = F^i{}_J F^k{}_L (\bar{g}^L \cdot \bar{g}^J) \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_i \\ &= F^i{}_J \bar{G}^{LJ} F^k{}_L \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_i . \end{aligned}$$

Unabhängig davon, ob rein kovariant oder kontravariant formuliert wird, sind beide „Füße“ der Basisdyade bei \mathbf{C} in der BP und bei \mathbf{B} in der AP. Das gleiche gilt für den materiellen Tensor \mathbf{E} und den räumlichen Tensor \mathbf{E}^a .

Mit den Eigenwerten λ_i^2 und den Eigenvektoren $\bar{\mathbf{n}}_i$ lässt sich eine eindeutige Projektordarstellung im Hauptachsensystem formulieren:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \bar{\mathbf{n}}_i \otimes \bar{\mathbf{n}}_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \bar{\mathbf{P}}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{P}}_i = \bar{\mathbf{n}}_i \otimes \bar{\mathbf{n}}_i ,$$

beziehungsweise für den linken CAUCHY-GREEN-Strecktensor:

$$B = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 P_i \quad \text{mit} \quad P_i = \underline{n}_i \otimes \underline{n}_i .$$

Die unterstrichenen Indizes bei der Definition der Projektoren bedeuten, dass hier keine Summenkonvention angewendet wird. Eigenprojektoren haben folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} P_i \cdot P_i &= P_i && \text{idempotent,} \\ P_i \cdot P_j &= \mathbf{0} && \text{orthogonal,} \\ \sum_{i=1}^3 P_i &= I && \text{vollständig .} \end{aligned}$$

Für den Fall, dass es mehrfache Eigenwerte gibt, lässt sich eine eindeutige Spektraldarstellung durch ein Projektorsystem herstellen. Bei einem doppelten Eigenwert $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$ existiert ein eindeutiger normierter Eigenvektor \underline{n}_1 zum ersten Eigenwert. Aus diesem wird der erste Eigenprojektor definiert:

$$P_1 = \underline{n}_1 \otimes \underline{n}_1 \quad \text{mit} \quad P_1 \cdot P_1 = \underbrace{(\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_1)}_{=1} \underline{n}_1 \otimes \underline{n}_1 = P_1 .$$

Damit ist P_1 idempotent. Der Eigenvektor P_1 projiziert jeden Vektor senkrecht in \underline{n}_1 -Richtung (Abb. B.2):

$$P_1 \cdot \underline{a} = (\underline{n}_1 \cdot \underline{a}) \underline{n}_1 , \quad P_1 \cdot \underline{a} \parallel \underline{n}_1 .$$

Der zweite Eigenprojektor wird definiert durch Subtraktion vom Einheitstensor:

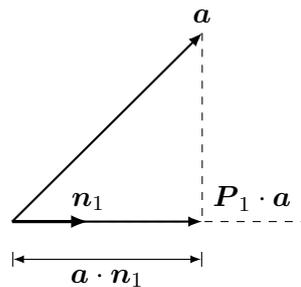


Abb. B.2.: Projektion eines beliebigen Vektors \underline{a} durch den Eigenprojektor P_1 in \underline{n}_1 -Richtung.

$$\begin{aligned} P_2 &= I - P_1 \\ \text{mit} \quad P_2 \cdot P_2 &= (I - P_1) \cdot (I - P_1) = I - P_1 - P_1 + P_1 = P_2 . \end{aligned}$$

Die so definierten Eigenprojektoren stehen senkrecht aufeinander und bilden ein vollständiges System:

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{I} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{P}_i .$$

Mit den Eigenprojektoren lässt sich auch eine eindeutige Spektraldarstellung bei Vorhandensein von mehrfachen Eigenwerten konstruieren:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{P}_i \stackrel{\text{hier}}{=} \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 .$$

Für den Fall, dass alle Eigenwerte gleich sind $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, existiert nur noch ein Projektor, nämlich der Einheitstensor \mathbf{I} .

Mit den bekannten Eigenwerten eines symmetrischen Tensors lassen sich deren Invarianten berechnen:

$$I_U = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 , \quad II_U = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 , \quad III_U = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 .$$

Die erste und dritte Invariante entsprechen der Spur und der Determinante eines Tensors. Das ist eindeutig, da ein Tensor in Hauptachsendarstellung nur noch Diagonaleinträge hat. Die zweite Invariante lässt sich alternative mit dem Kofaktor berechnen:

$$II_U = \text{Sp}(\mathbf{U}^{\text{cof}}) = \text{Sp}(\det(\mathbf{U})\mathbf{U}^{-\top}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) .$$

Vor allem in der Hyperelastizität beschreiben die drei Invarianten des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors \mathbf{C} anschaulich die jeweilige lokale Deformation der Linien-, Flächen- und Volumenelemente (siehe Kap. 3.3).

Ableitung der Hauptinvarianten

In der Hyperelastizität werden vielfach Energiefunktionen nach Tensoren abgeleitet. Da Energiefunktionen als Materialfunktionen dem Prinzip der Materialtheorie unterliegen, sind sie in der Regel als Funktionen der Hauptinvarianten eines Tensors gegeben. Deshalb sind Ableitungen der Hauptinvarianten nach den Tensoren oft nützlich:

$$\begin{aligned} \frac{dI_A}{d\mathbf{A}} &= \mathbf{I} \\ \frac{dII_A}{d\mathbf{A}} &= I_A \mathbf{I} - \mathbf{A}^\top \\ \frac{dIII_A}{d\mathbf{A}} &= \mathbf{A}^{\text{cof}} = III_A \mathbf{A}^{-\top} . \end{aligned}$$

B.4. EUKLIDISCHE TRANSFORMATION

Die EUKLIDISCHE Transformation ermöglicht den Übergang in ein mitbewegtes System. Sie beschreibt aber auch einen Beobachterwechsel. Wir gehen von zwei Beobachtern A und B aus. Beobachter A sieht den Punkt P bezogen auf seinen Ursprung O . Beobachter B sieht den gleichen Punkt, jedoch in seinem eigenen Raum mit Ursprung Q^* . Der Ursprung des Beobachters A erscheint für Beobachter B als Punkt O^* und ebenso Punkt P^* (siehe Abb. B.3). Der Abstand

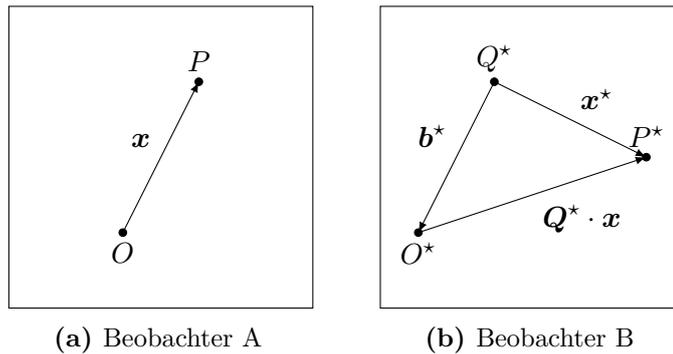


Abb. B.3.: Beobachterwechsel im Sinne der EUKLIDISCHEN Transformation.

zwischen den Punkten O und P ist identisch zu dem von O^* und P^* :

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{O^*P^*}\| .$$

Wenn die Beträge der Vektoren gleich sind, können sie sich nur noch um eine reine Rotation $Q^* \in Orth^+$ unterscheiden. Der Ursprung von Beobachter A wird vom Beobachter B durch den Ortsvektor b^* wahrgenommen.

Damit ergibt sich die EUKLIDISCHE Transformation für den Beobachterwechsel des Ortsvektors:

$$x^* = Q^* \cdot x + b^* .$$

Die Rücktransformation ist durch die Orthogonalitätsbedingung $Q^{*\top} \cdot Q^* = I$ gegeben:

$$x = Q^{*\top} \cdot (x^* - b^*) .$$

Nun wird die Geschwindigkeit eines materiellen Teilchens untersucht. Die Referenzplatzierung wird invariant gegenüber einem Beobachterwechsel angenommen. Damit ist die aktuelle Position x eines materiellen Punktes \bar{x} durch die Bewegung

$\chi(\bar{x}, t)$ gegeben:

$$\mathbf{x} = \chi(\bar{x}, t), \quad \mathbf{x}^* = \chi^*(\bar{x}, t) = \mathbf{Q}^*(t) \cdot \chi(\bar{x}, t) + \mathbf{b}^*(t).$$

In beiden Funktionen χ und χ^* sind die Argumente \bar{x} und t . Das bedeutet, dass beide Beobachter sich auf eine und dieselbe Bezugsplatzierung geeinigt haben.

Die materielle Geschwindigkeit eines Partikels wird durch die partielle zeitliche Ableitung bestimmt, wobei der materielle Punkt festgehalten wird:

$$\mathbf{v} = \left. \frac{\partial \chi(\bar{x}, t)}{\partial t} \right|_{\bar{x}=\text{konst.}} = \chi(\bar{x}, t)^{\bullet} =: \frac{d\chi}{dt}. \quad (\text{B.6})$$

Beobachter B sieht hingegen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \left. \frac{\partial \chi^*(\bar{x}, t)}{\partial t} \right|_{\bar{x}=\text{konst.}} \\ &= \mathbf{Q}^*(t)^{\bullet} \cdot \chi(\bar{x}, t) + \mathbf{Q}^*(t) \cdot \chi(\bar{x}, t)^{\bullet} + \mathbf{b}^*(t)^{\bullet} \\ &= \mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^*) + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b}^{*\bullet}. \end{aligned}$$

Der Tensor $\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{Q}^{*\top}$ ist antimetrisch. Wenn man die Orthogonalitätsbedingung auf beiden Seiten ableitet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{\bullet} &= (\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q}^{*\top})^{\bullet} = (\mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q}^{*\top\bullet}) = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} = -\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q}^{*\top\bullet} = -(\mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{Q}^{*\top})^{\top}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Für einen antimetrischen Tensor 2. Stufe existiert stets ein axialer Vektor $\boldsymbol{\omega}$, der folgende Identität erfüllt:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

Damit lässt sich die Geschwindigkeit schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \boldsymbol{\Omega}^* \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^*) + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b}^{*\bullet} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^*) + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b}^{*\bullet}. \end{aligned}$$

Die Transformationsvorschrift der Geschwindigkeit entspricht damit nicht einer reinen Drehung, d.h. $\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{v}$. Folglich ist die Geschwindigkeit kein räumlich objektiver Vektor. Analog zur Geschwindigkeit lässt sich die Beschleunigung durch erneute zeitliche Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= \boldsymbol{\Omega}^{*\bullet} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^*) - \boldsymbol{\Omega}^* \cdot [\boldsymbol{\Omega}^* \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^*)] + \\ &\quad + 2\boldsymbol{\Omega}^* \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{b}^{*\bullet}) + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^{*\bullet\bullet}. \end{aligned}$$

Wie zuvor kann auch diese Transformation mit dem axialen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ geschrieben werden:

$$\mathbf{a}^* = \boldsymbol{\omega}^\bullet \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^*) - \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^*)] + 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}^* - \mathbf{b}^{\bullet\bullet}) + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^{\bullet\bullet} .$$

Damit ist gezeigt, dass die Beschleunigung ebenso wenig ein objektiver Vektor wie die Geschwindigkeit ist.

Die Objektivität wird in Kap. D verwendet, um die möglichen Einflussgrößen für die Materialgleichungen einzugrenzen. In diesem Kontext werden Transformationen der Deformationsmaße unter einer EUKLIDischen Transformation benötigt; allen voran der Deformationsgradient. Beobachter B misst den Deformationsgradienten in seinem Punktraum:

$$\mathbf{F}^* = \boldsymbol{\chi}^* \otimes \nabla_L = (\mathbf{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\chi}(\bar{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{b}(t)) \otimes \nabla_L = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} .$$

Analog zum Deformationsgradienten können Formeln für den CAUCHY-GREEN-Tensor und den GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* &= \mathbf{F}^{*\top} \cdot \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C} , \\ \mathbf{E}^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}^* - \mathbf{I}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{E} . \end{aligned}$$

Man nennt diese beiden Tensoren aufgrund der beschriebenen Transformationseigenschaft auch materiell invariant, denn die Basisdyaden befinden sich komplett in der Bezugsplatzierung $\mathbf{E} = E^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}_j$. Wenn man Größen ansieht, deren Basisdyaden sich vollständig in der aktuellen Platzierung befinden, dann gilt unter der EUKLIDischen Transformation:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^* &= \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}^{*\top} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} * \mathbf{B} , \\ \mathbf{E}^{a*} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}^* - \mathbf{B}^{*-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^\top) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^\top) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} * \mathbf{E}^a . \end{aligned}$$

Die beiden Maße \mathbf{B} und \mathbf{E}^a sind räumlich objektiv, denn sie transformieren sich durch eine Drehung mit \mathbf{Q} .

Räumliche Größen transformieren sich unter der Wirkung der EUKLIDischen Transformation durch eine Drehung mit \mathbf{Q} und materielle Größen verbleiben invariant:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} , \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{Q} * \mathbf{B} , \quad \mathbf{E}^{a*} = \mathbf{Q} * \mathbf{E}^a .$$

C. Physikalische Gesetze

In der Kontinuumsmechanik bzw. -thermodynamik operiert man auf der Kontinuums skala. Dabei sind die einzelnen atomaren Teilchen nicht mehr zu erkennen. Das Material wird als zusammenhängendes Objekt betrachtet. Es besitzt bestimmte Eigenschaften, die das makroskopische Verhalten des Materials charakterisieren. Durch die Kontinuität der Objekte kann deren Zustand durch Felder beschrieben werden. Diese unterliegen bestimmtem axiomatischen Bilanzgleichungen, die in diesem Kapitel vorgestellt werden.

C.1. Mechanische Bilanzen in regulären Punkten

Eine Bilanzgleichung beschreibt die zeitliche Änderung einer extensiven Größe Ψ und entsprechender Dichte ψ . Die Änderung entsteht entweder durch einen Oberflächenfluss oder durch eine volumetrische Produktion oder Zufuhr (Müller, 2014, Kap. 3.3):

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi \, dV = - \oint_{\partial V} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_V [p + z] \, dV . \quad (\text{C.1})$$

Dabei wird ein materieller Körper V ohne Singularitäten betrachtet. Die zeitliche Ableitung auf der linken Seite ist eine materielle zeitliche Ableitung im Sinne von Gl. (B.6), d.h. es wird der materielle Punkt mit Ortsvektor $\bar{\mathbf{x}}$ fest gehalten.

Bei der finiten Deformation ist es oft notwendig, zwischen der Bezugsplatzierung und der aktuellen Platzierung hin und her zu transformieren. Mit den Identitäten aus Gl. (B.2) lassen sich die Bilanzgleichungen in die Bezugsplatzierung überführen:

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{V}} \psi_L J \, d\bar{V} = - \oint_{\partial \bar{V}} \boldsymbol{\phi}_L \cdot J \mathbf{F}^{-\top} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\bar{A} + \int_{\bar{V}} [p_L + z_L] J \, d\bar{V} .$$

Hierbei wurde zwischen der EULER- und der LAGRANGE-Darstellung differenziert:

$$\psi = \psi_E(\mathbf{x}, t) = \psi_L(\bar{\mathbf{x}}, t) .$$

In den Integranden finden sich die entsprechenden Dichten der BP wieder.

Mit dem GAUSSSchen Integralsatz folgt die allgemeine lokale Bilanz in der BP:

$$\frac{d\bar{\psi}_L}{dt} = \bar{\phi} \cdot \nabla_L + \bar{p}_L + \bar{z}_L ,$$

mit $\bar{\psi}_L = J\psi_L$, $\bar{\phi}_L = \phi_L \cdot \mathbf{F}^{\text{cof}}$, $\bar{p}_L = Jp_L$, $\bar{z}_L = Jz_L$.

Die Bezugsplatzierung ist fest und damit sind die Integrationsgebiete \bar{V} und $\partial\bar{V}$ zeitlich konstant. Dadurch lässt sich die zeitliche Ableitung in das Integral ziehen und auf den Integranden anwenden:

$$\int_{\bar{V}} \frac{d(\psi_L J)}{dt} d\bar{V} = \int_{\bar{V}} \left(\frac{d\psi_L}{dt} J + \psi_L \frac{dJ}{dt} \right) d\bar{V} .$$

Dabei ist die zeitliche Ableitung der JACOBI-Determinante gegeben durch:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\bar{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} = J \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^\bullet = J \mathbf{I} \cdot (\mathbf{F}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1}) = J \text{Sp}(\mathbf{L}) .$$

Die Änderung der JACOBI-Determinante ist bestimmt durch die Determinante selbst und den Geschwindigkeitsgradienten:

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \otimes \nabla_E = \mathbf{v} \otimes \nabla_L \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial^2 \chi(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t \partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot \mathbf{F}^{-1} .$$

Die Verknüpfung des Geschwindigkeitsgradienten zum Deformationsgradienten wird anhand der zeitlichen Änderung eines Linienelementes $d\mathbf{x}$ hergeleitet:

$$\frac{d d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{F} \cdot d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} .$$

Für die Spur des Geschwindigkeitsgradienten folgt:

$$\text{Sp}(\mathbf{L}) = \mathbf{v} \cdot \nabla_E = \text{div} \mathbf{v} .$$

Die linke Seite der allgemeinen Bilanzgleichung lautet:

$$\int_{\bar{V}} \frac{d(\psi_L J)}{dt} d\bar{V} = \int_{\bar{V}} \left(\frac{d\psi_L}{dt} J + \psi_L J (\mathbf{v} \cdot \nabla_E) \right) d\bar{V} .$$

Durch den Umweg über die Bezugsplatzierung konnte die zeitliche Ableitung in das Integral gezogen und so die zeitliche Änderung des Integrationsvolumens V berücksichtigt werden. Beim Wechsel in die aktuelle Platzierung folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi_E dV = \int_V \left(\frac{d\psi_E}{dt} + \psi_E (\mathbf{v} \cdot \nabla_E) \right) dV . \quad (\text{C.2})$$

Die materielle zeitliche Ableitung eines EULERSchen Feldes hat einen lokalen und einen konvektiven Anteil. Der konvektive Anteil kann mit dem hinteren Terme in Gl. (C.2) zusammengefasst werden. Wenn man darauf den GAUSSSchen Integralsatz anzuwenden, dann führt das zum REYNOLDS-Transporttheorem (siehe Müller, 2014, Kap. 3.4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \psi_E dV &= \int_V \left(\frac{\partial \psi_E}{\partial t} + (\psi_E \mathbf{v}) \cdot \nabla_E \right) dV \\ &= \int_V \frac{\partial \psi_E}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \psi_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA . \end{aligned}$$

Die rechte Seite der allgemeinen Bilanz (C.1) bedarf einmaliger Anwendung des GAUSSSchen Integralsatzes auf den Flussterm:

$$- \oint_{\partial V} \phi_E \cdot \mathbf{n} dA + \int_V (p_E + z_E) dV = - \int_V \phi_E \cdot \nabla_E dV + \int_V (p_E + z_E) dV .$$

Unter der Voraussetzung, dass die globale Bilanz für jedes Untervolumen des materiellen Körpers gleichermaßen erfüllt sein muss, folgt die allgemeine lokale Bilanz in der AP:

$$\frac{\partial \psi_E}{\partial t} + (\psi_E \mathbf{v}) \cdot \nabla_E = \phi_E \cdot \nabla_E + (p_E + z_E) .$$

Masse

Die Massenbilanz besagt, dass Materie weder erschaffen noch vernichtet werden kann. Damit ist die Masse eine Erhaltungsgröße, und es gilt für ein materielles Volumen:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_m dm = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 .$$

In dieser Arbeit werden ausschließlich materielle Systeme betrachtet. Dadurch sind nur nicht-materielle Flüsse über die Berandung des Gebiets möglich. Offene Systeme sind nicht Gegenstand der Untersuchung. Es kann keine Masse zur oder von der Umgebung über die Berandung fließen. Damit verschwinden der Fluss-, der Produktion- und der Zufuhrterm in der globalen Massenbilanz und die lokale Bilanz in der BP ist gegeben durch:

$$\frac{d}{dt} (\rho_L J) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_L J = \text{konst.} = \bar{\rho}_L .$$

Hierbei ist $\bar{\rho}_L$ die Dichte in der Bezugsplatzierung. Das wird deutlich, wenn man die Gesamtmasse in der Ausgangskonfiguration hinschreibt:

$$\bar{m} = \int_{\bar{V}} \bar{\rho}_L d\bar{V} = \int_V \rho dV = m .$$

In Zukunft wird auf den Index L verzichtet, beim Nabla-Operator bleibt der Index erhalten.

Die lokale Massenbilanz in der aktuellen Platzierung lautet nach Anwendung des REYNOLDSSchen Transporttheorems:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_E \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 .$$

Impuls

Die Impulsbilanz stellt das klassische 2. NEWTONSche Gesetz für ein Kontinuum dar. Es besagt, dass der Impuls eines materiellen Volumens nur durch einwirkende Kräfte verändert werden kann. Nach NEWTON und CAUCHY können diese Kräfte in Oberflächen- und Volumenkräfte unterteilt werden. In globaler Form ist die Bilanz gegeben durch:

$$\frac{d}{dt} \int_m \mathbf{v} dm = \oint_{\partial V} \mathbf{t} dA + \int_m \mathbf{f} dm .$$

In Bertram, 2005, Kap. 3.4) wird über die Tetraederargumentation nach CAUCHY gezeigt, dass der Spannungsvektor \mathbf{t} linear von der Flächennormalen \mathbf{n} abhängen muss. Zusammen mit der Massendichte ρ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{f} dV .$$

Hierbei findet man in der Literatur verschiedene Definitionen hinsichtlich der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Multiplikation. Da hier nur nicht polare Medien betrachten werden, ist der Spannungstensor \mathbf{T} stets symmetrisch.

Analog zur Massenbilanz lässt sich eine lokale oder punktuelle Formulierung herleiten. Dabei wird ebenfalls das REYNOLDS-Transporttheorem sowie der GAUSSsche Integralsatz verwendet (nachzulesen bei Müller, 2011, Kap. 3.4).

Die diskutierte Impulsbilanz ergibt:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}} + \rho \mathbf{f} .$$

Diese Gleichung lautet in der Bezugsplatzierung:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{L}} + \bar{\rho} \mathbf{f} , \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = J \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} .$$

Dabei ist \mathbf{P} der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor, welcher dem Nominalspannungstensor $\boldsymbol{\Sigma}$ ähnlich ist. Beide sind sogenannte Zwei-Bein-Tensoren, derer ein Bein in der aktuellen und das andere in der Bezugsplatzierung steht. Der Unterschied zwischen dem Nominalspannungstensor und dem 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ist die Anordnung der Basis:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{Ij} \bar{\mathbf{e}}_I \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{P} = P_{iJ} \mathbf{e}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_J .$$

Der Zusammenhang zum CAUCHY-Spannungstensor ist:

$$\boldsymbol{\Sigma} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{P}^{\top} .$$

Da $\boldsymbol{\Sigma}$ und \mathbf{P} nicht symmetrisch sind, ist es wichtig, auf welcher Seite der Normalenvektor multipliziert wird. Es gilt für den Spannungsvektor in aktueller und materieller Konfiguration:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} dA &= \bar{\mathbf{t}} d\bar{A}, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA &= \bar{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{T} \cdot J \mathbf{F}^{-1}) d\bar{A} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} d\bar{A} = \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\bar{A} . \end{aligned}$$

Mit der Nominalspannung kann die Impulsbilanz wie folgt geschrieben werden:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \bar{\rho} \mathbf{f} .$$

Für nicht polare Medien führt die Drehimpulsbilanz zur Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors, d.h. $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\top}$. Wird diese Eigenschaft auf den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor übertragen, so folgt:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{\top} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^{\top} .$$

C.2. Thermodynamische Bilanzen in regulären Punkten

Bei der Energiebilanz unterscheidet man zwischen verschiedenen Bilanzen, da es verschiedene Energien bzw. unterschiedliche Ausführungsformen gibt. Erhaltend

ist nur die Gesamtenergie, welche sich additiv aus allen zu betrachtenden Energien zusammensetzt. In der Kontinuumsmechanik bzw. -thermodynamik beschränkt man sich auf die innere Energie E^{int} und die kinetische Energie E^{kin} . Die Gesamtenergie kann durch mechanische Leistung oder Wärme verändert werden (1. Hauptsatz der Thermodynamik):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + u \right) dV = \oint_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV - \oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho r dV .$$

Die lokale Form der Gesamtenergiebilanz lautet in der aktuellen Platzierung:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \cdot \nabla_{\mathbf{E}} + \rho \mathbf{f} - \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{E}} + \rho r .$$

Analog dazu lautet die Gesamtbilanz in der Bezugsplatzierung:

$$\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}) \cdot \nabla_{\mathbf{L}} + \bar{\rho} \mathbf{f} - \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{L}} + \bar{\rho} r ,$$

wobei der materielle Wärmeflussvektor mit dem Kofaktor bestimmt wird:

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{F}^{\text{cof}} = J \mathbf{q} \cdot \mathbf{F}^{-\top} .$$

Die Bilanz der kinetischen Energie folgt aus der lokalen Impulsbilanz durch skalares Heranmultiplizieren mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} und Integrieren über das Gesamtvolumen:

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dV = \int_V (\mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV .$$

Um zur Bilanz der kinetischen Energie zu gelangen, werden die ersten beiden Integrale modifiziert. Im ersten Integral lässt sich der Geschwindigkeitsterm mithilfe der Produktregel zusammenfassen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} .$$

Beim zweiten Integral wird ebenfalls die Produktregel angewendet, dieses Mal jedoch auf das Produkt aus Spannungstensor \mathbf{T} und Geschwindigkeit \mathbf{v} :

$$(\mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{E}} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{E}}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{E}} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} .$$

Die zeitliche Ableitung lässt sich mit der Massenbilanz aus dem Integral ziehen, und es folgt die Bilanz der kinetischen Energie:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{L} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV .$$

Der zweite Term auf der linken Seite ist im Gegensatz zu den Termen auf der rechten Seite nicht abschaltbar. Er beschreibt die innere Energieproduktion, daher ist die kinetische Energie keine Erhaltungsgröße. Dies gilt auch für die Bilanz der inneren Energie. Sie resultiert aus der Subtraktion der kinetischen Bilanz von der Gesamtenergiebilanz:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV - \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{L} dV = - \oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho r dV .$$

Die lokale Form der inneren Energiebilanz in der aktuellen Platzierung lautet:

$$\rho \frac{du}{dt} - \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{L} = -\mathbf{q} \cdot \nabla_E + \rho r .$$

Das Äquivalent dieser Gleichung in der Bezugsplatzierung ist:

$$\bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet = -\bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla_L + \bar{\rho} r .$$

Auch in dieser Bilanz taucht derselbe Produktionsterm $\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{L}$ wie in der kinetischen Bilanz auf. Dieser Term ist für den Transport von Energie zwischen kinetischer und innerer Energiebilanz verantwortlich.

Dieser Produktionsterm beschreibt die innere Spannungsleistung. Er wird später relevant, weshalb hier noch einige alternative Repräsentationen dieses Terms aufgeführt seien:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{L} dV &= \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot (\mathbf{F}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1}) dV = \int_{\bar{V}} (J\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top}) \cdot \cdot \mathbf{F}^\bullet d\bar{V} \\ &= \int_{\bar{V}} \mathbf{P} \cdot \cdot \mathbf{F}^\bullet d\bar{V} . \end{aligned}$$

Damit ist eine Relation für den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor hergestellt. Eine weitere Darstellung ergibt sich aus der Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors \mathbf{T} . Da der Raum der symmetrischen Tensoren 2. Stufe bezogen auf die doppelte Überschiebung senkrecht auf dem Raum der antisymmetrischen Tensoren 2. Stufe steht, gilt:

$$\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{L} = \mathbf{T} \cdot \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W}) = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{D} , \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^\top) , \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^\top) .$$

Der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten lässt sich in Verbindung bringen zur Rate des GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensors :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L}^\top + \mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{\bullet\top} + \mathbf{F}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{\bullet\top} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ &= \mathbf{F}^{-\top} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\bullet\top} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}^\bullet) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{E}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1} . \end{aligned}$$

Daraus resultiert eine weitere Darstellungsform des Produktionsterms in Abhängigkeit des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \, dV &= \int_{\bar{V}} J \mathbf{T} \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \mathbf{E}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1}) \, d\bar{V} \\ &= \int_{\bar{V}} (J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top}) \cdot \mathbf{E}^\bullet \, d\bar{V} = \int_{\bar{V}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}^\bullet \, d\bar{V} . \end{aligned}$$

C.3. Entropiegleichung

Die bisher vorgestellten Bilanzen müssen um eine weitere Gleichung erweitert werden. Denn bisher ist es zum Beispiel möglich, dass Wärme von einem niedrigen Temperaturniveau zu einem hohen Niveau fließt. Die Natur zeigt, dass das nicht passiert. Die eindeutige Prozessrichtung wird durch den 2. Hauptsatz der Thermodynamik festgelegt (siehe Truesdell und Toupin, 1960): Für die Entropie gilt der 2. Hauptsatz der Thermodynamik nach Truesdell und Toupin, 1960:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s \, dV \geq \int_V \rho \frac{r}{T} \, dV - \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dA .$$

Hierbei ist s die Entropiedichte. Die absolute Temperatur T ist stets größer Null, sodass hier keine Singularität für die Gleichung entsteht. Anschaulich besagt der 2. Hauptsatz, dass die Entropieänderung für ideale Prozesse genau dem Entropiefluss entspricht, hervorgerufen durch Strahlung und Wärmefluss. Für reale (irreversible) Prozesse muss die Entropieänderung mindestens dem genannten Zuwachs entsprechen.

Um von der globalen auf die lokale Formulierung zu kommen, wird auf das Oberflächenintegral der GAUSSSche Integralsatz angewendet. Außerdem wird die zeitliche Ableitung mithilfe des Transporttheorems in den Integranden gezogen:

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \rho \frac{r}{T} - \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{E}} .$$

Die Divergenz kann nach den Differentiationsregeln aufgelöst werden:

$$\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{E}} = -\frac{1}{T^2}(\nabla_{\mathbf{E}}T) \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{E}}.$$

Damit lässt sich die lokale Entropieungleichung schreiben:

$$\rho T \frac{ds}{dt} \geq \rho r + \frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot (\nabla_{\mathbf{E}}T) - \nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{q}.$$

In dieser Gleichung ist der mechanische Einfluss indirekt erkennbar. Es wird durch Hinzuziehen der Bilanz der inneren Energie anschaulicher:

$$\rho \frac{du}{dt} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \rho r - \nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{q}.$$

Damit gilt für die lokale Entropieungleichung:

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{du}{dt} \right) \geq -\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot (\nabla_{\mathbf{E}}T).$$

Mit der Einführung der freien HELMHOLTZ-Energiedichte f gilt:

$$f := u - Ts \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{dT}{dt}s - T \frac{ds}{dt}.$$

Damit ergibt sich die CLAUSIUS-DUHEM-Entropieungleichung in aktueller Platzierung für reguläre Punkte:

$$-\rho \frac{df}{dt} - \rho \frac{dT}{dt}s + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} \geq 0, \quad \mathbf{h} = \nabla_{\mathbf{E}}T.$$

Analog zur aktuellen Platzierung lässt sich auch die Entropieungleichung in der Bezugsplatzierung formulieren. Dazu wird die globale Entropieungleichung mit bekannten Rechenregeln transformiert:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{V}} \bar{\rho} s \, d\bar{V} \geq \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \frac{r}{T} \, d\bar{V} - \oint_{\partial \bar{V}} \frac{\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{n}}}{T} \, d\bar{A}.$$

Die lokale Formulierung der Entropieungleichung in Bezugsplatzierung für reguläre Punkte ist:

$$-\bar{\rho} \frac{\partial f}{\partial t} - \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t}s + \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{T}\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{h}} \geq 0, \quad \bar{\mathbf{h}} = \nabla_{\mathbf{L}}T. \quad (\text{C.3})$$

Mit \mathbf{h} bzw. $\bar{\mathbf{h}}$ wird der räumliche bzw. materielle Temperaturgradient bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich mechanische Phänomene untersucht. Eine etwaige Temperaturdiffusion ist nicht Gegenstand der Untersuchung.

Wird ein isothermer Prozess angenommen, so ist die Temperatur sowohl zeitlich als auch ortsgebunden konstant und von der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung bleibt nur noch die CLAUSIUS-PLANCK-Ungleichung:

$$-\bar{\rho} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}^\bullet = -\bar{\rho} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^\bullet \geq 0 ,$$

oder in aktueller Platzierung:

$$-\rho \frac{df}{dt} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \geq 0 .$$

C.4. Bilanzen in singulären Punkten

Aus den Bilanzgleichungen und entsprechenden Materialgleichungen resultieren Differentialgleichungen in Ort und Zeit. Um diese lösen zu können, bedarf es Anfangs- und Randbedingungen. Erst dann ist das entstandene Anfangsrandwertproblem wohldefiniert und kann analytisch oder numerisch gelöst werden.

Betrachtet werden nur zeitunabhängige Gleichungen, die stationäre oder quasi-stationäre Prozesse beschreiben. Damit sind nur Randbedingungen relevant. Diese folgen aus den singulären Bilanzgleichungen, in denen für die Grenzflächen die Sprünge in den Feldgrößen übrig bleiben. Es gilt eine Beschränkung auf Grenzflächen ohne eigene Flächendichte (siehe Müller, 2011, Kap. 5.9). Die singuläre Fläche ist damit eine gedachte Fläche. In Realität verändern sich die Felder in dieser Übergangszone stetig. Jedoch ist diese Zone so klein und die Gradienten in diesem Bereich so groß, dass es auf der Kontinuums skala nicht aufgelöst werden kann. Somit wird von einer Unstetigkeitsstelle gesprochen.

Zur Veranschaulichung wird vom folgenden Szenario ausgegangen. Es existiert ein Gebiet V , das aus den beiden Teilgebieten V^+ und V^- besteht (siehe Abb. C.1):

$$V = V^+ \cup V^- , \quad A_s = V^+ \cap V^- .$$

Das Problem entsteht beim REYNOLDS-Transporttheorem, wenn der GAUSSsche Satz angewendet wird. Dieser ist nur für stetige Gebiete anwendbar. Die beiden stetigen Gebiete V^+ und V^- können jedoch einzeln analysiert und so das REYNOLDS-Transporttheorem angewendet werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{V^\pm} \psi dV = \int_{V^\pm} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma^\pm} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A_s} \psi^\pm \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^\pm dA . \quad (\text{C.4})$$

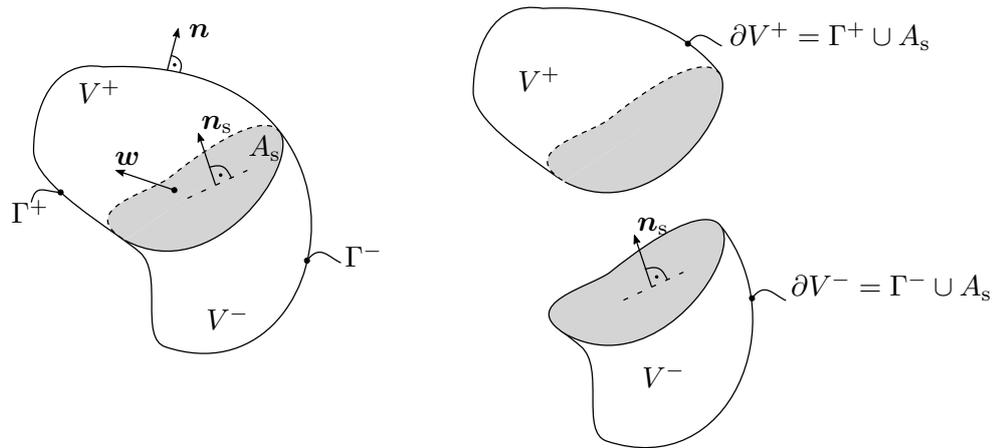


Abb. C.1.: Gebiet mit singulärer Fläche ohne eigene Flächendichte.

Diese Gleichung steht stellvertretend für zwei Gleichungen; eine Gleichung für das jeweilige Gebiet V^+ und V^- . Hierbei sind auf der rechten Seite des REYNOLDS-Transporttheorems zwei Besonderheiten zu beachten. Zum einen besteht der Rand ∂V^\pm des Gebietes V^\pm stets aus zwei Teilen: einer materiellen Fläche Γ^\pm und einer gedachten immateriellen Fläche A_s . Deshalb tauchen auf der rechten Seite zwei Flächenintegrale auf. Da die Fläche Γ^\pm eine materielle Fläche ist, entsteht bei der Anwendung des REYNOLDS-Transporttheorems die materielle Geschwindigkeit \mathbf{v} . Wird die singuläre Fläche A_s untersucht, dann steht dort die Geschwindigkeit der Fläche \mathbf{w} .

Die zweite Besonderheit betrifft den Integranden der singulären Fläche. Da es eine Unstetigkeitsstelle ist, sind der links- und rechtsseitige Grenzwert der Feldgröße ψ an dieser Stelle unterschiedlich. Wenn man sich aus dem Gebiet V^+ einem Punkt der Grenzfläche A_s nähert, dann entspricht der Grenzwert:

$$\psi^+ = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_s} \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V^+, \mathbf{x}_s \in A_s.$$

Analog dazu ist der Grenzwert auf der anderen Seite:

$$\psi^- = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_s} \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V^-, \mathbf{x}_s \in A_s.$$

Dementsprechend muss es für jedes Gebiet einen Normalenvektor \mathbf{n}^\pm geben. Beim Normalenvektor wird gefordert, dass er stets nach außen weist, d.h. er zeigt vom Gebiet V^\pm weg. In Abb. C.1 ist ein Normalenvektor \mathbf{n}_s für die singuläre Fläche eingeführt, der vom Gebiet V^- zum Gebiet V^+ zeigt. Damit sind die bereichsspezifischen Normalenvektoren auf der singulären Fläche gegeben durch (siehe Abb. C.1 rechts):

$$\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}_s, \quad \mathbf{n}^- = \mathbf{n}_s.$$

Die linke Seite der allgemeinen Bilanz einer extensiven Größe mit der volumenspezifischen Dichte ψ für das gesamte Gebiet folgt nun aus der Summe über beiden Teilgebiete V^+ und V^- (siehe Gl. (C.4)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V^+ \cup V^-} \psi \, dV &= \int_{V^+ \cup V^-} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dV + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \\ &\quad - \int_{A_s} \psi^+ \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_s \, dA + \int_{A_s} \psi^- \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_s \, dA . \end{aligned}$$

Durch das Einführen der Sprungklammern können die beiden letzten Integrale $[[\psi]] = \psi^+ - \psi^-$ zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V^+ \cup V^-} \psi \, dV &= \int_{V^+ \cup V^-} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dV + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \\ &\quad - \int_{A_s} [[\psi]] \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_s \, dA . \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Bilanzgleichung bereitet keine Probleme. Es werden lediglich bereichsspezifische Größen eingeführt:

$$\Phi + P + S = \Phi^+ + \Phi^- + P^+ + P^- + S^+ + S^- .$$

Damit ist die rechte Seite der globalen singulären Bilanz gegeben durch:

$$\Phi + P + S = - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{V^+ \cup V^-} (p + z) \, dV .$$

Zusammen mit Gl. (C.5) ergibt sich die globale singuläre Bilanz:

$$\begin{aligned} \int_{V^+ \cup V^-} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dV + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_{A_s} [[\psi]] \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_s \, dA \\ = - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{V^+ \cup V^-} (p + z) \, dV . \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

Um zur lokalen singulären Bilanz zu gelangen, sei das Pillendosenargument angewendet (siehe Abb. C.2). Ein Punkt P auf der singulären Fläche wird festgelegt. Es wird eine gedachte zylindrische Pillendose zunächst auf eine Fläche zusammengezogen, d.h. $h \rightarrow 0$. Dadurch verschwinden alle Volumenintegrale in Gl. (C.6). Die Integrale über die Oberflächen Γ^+ und Γ^- reduzieren sich auf die Oberflächen A_1 und A_3 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\Psi}{dt} = \int_{A_1} \psi^+ \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}^+ \, dA + \int_{A_3} \psi^- \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}^- \, dA - \int_{A_2} [[\psi]] \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_s \, dA .$$

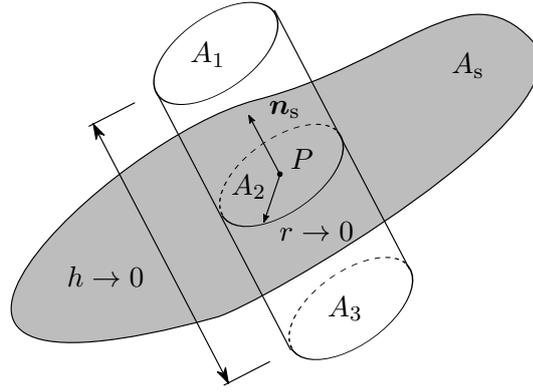


Abb. C.2.: Gedachte Pillendose um einen Punkt P der singulären Fläche A_s .

Dabei müssen bei der Grenzwertbildung, die jeweiligen links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Feldgrößen angesetzt werden. Bei der rechten Seite der Bilanz (C.5) steht nun:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\Phi + P + S) = - \int_{A_1} \phi^+ \cdot \mathbf{n}^+ dA - \int_{A_3} \phi^- \cdot \mathbf{n}^- dA .$$

Wenn der Radius der Pillendose auf Null reduzieren, d.h. $r \rightarrow 0$, dann sind die Normalenvektoren \mathbf{n}^+ und \mathbf{n}^- kollinear zu \mathbf{n}_s und die Bilanzgleichung reduziert sich auf eine punktuelle Gleichung:

$$\psi^+ \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}_s - \psi^- \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}_s - [[\psi]] \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_s = -\phi^+ \cdot \mathbf{n}_s + \phi^- \cdot \mathbf{n}_s .$$

Die einzelnen Größen können nun durch Sprungklammern zusammengefasst werden:

$$[[\psi \mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n}_s - [[\psi]] \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_s = -[[\phi]] \cdot \mathbf{n}_s .$$

Die linken Terme können zusammengefasst werden.

Damit ist die allgemeine lokale Bilanz für Punkte einer singulären Fläche „ohne Eigenleben“ gegeben durch:

$$[[\psi(\mathbf{v} - \mathbf{w})]] \cdot \mathbf{n}_s = -[[\phi]] \cdot \mathbf{n}_s , \quad \forall \mathbf{x} \in A_s . \quad (\text{C.7})$$

Der Term auf der linken Seite entspricht dem konvektiven Fluss der Feldgröße ψ über die Grenzfläche A_s . Neben dem konvektiven Fluss ist der nicht-konvektive Fluss in der singulären Bilanz übrig geblieben.

In Abb. C.1 ist die Fläche A_s , im Gegensatz zu Γ^\pm , keine materielle Fläche.

Dadurch ist sie die einzige Fläche, über die ein konvektiver Fluss möglich ist. Der Zufluss in das Gebiet V^+ ist $\psi^+(\mathbf{v}^+ - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}^+$. Dabei beschreibt $(\mathbf{v}^+ - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}^+$ die Normalkomponenten der relativen Geschwindigkeit, also die Komponente der Geschwindigkeit, mit der ψ^+ effektiv ins Gebiet V^+ strömt.

Für den Fall einer materiellen Grenzfläche bewegt sich die Grenzfläche A_s mit der selben Geschwindigkeit wie die Randpartikel, d.h. $\mathbf{v}^+ = \mathbf{w} = \mathbf{v}^-$. Dadurch bleibt in der singulären Bilanz (C.7) nur noch der Sprung über den nicht-konvektiven Fluss:

$$\llbracket \phi \rrbracket \cdot \mathbf{n}_s = 0 .$$

Konkrete Sprungbilanzen für Masse, Impuls und Energie

Die in dieser Arbeit relevanten singulären lokalen Bilanzen sollen an dieser Stelle explizit dargestellt werden. Dazu werden die allgemeine Gl. (C.7), die volumetrische Dichte ψ und die Flussdichte ϕ aus den vorhergehenden Kap.n C.1, C.1 und C.2 benutzt. Für die Massenbilanz folgt in singulären Punkten:

$$\llbracket \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \rrbracket \cdot \mathbf{n}_s = 0 , \quad x \in A_s .$$

Die singuläre Bilanz für den Impuls enthält einen Sprung der Normalspannungen an der Grenzfläche A_s :

$$\llbracket \rho \mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \mathbf{T} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_s = 0 , \quad x \in A_s . \quad (\text{C.8})$$

Die singuläre Bilanz der Gesamtenergie ist:

$$\llbracket \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + u \right) (\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_s = 0 , \quad x \in A_s .$$

C.5. NEWTONSches Gravitationsgesetz

Das NEWTONSche Gravitationsgesetz beschreibt in seiner einfachsten Form die Kraftwirkung zwischen zwei Punktmassen. Wendet man sich der eigengravitierenden Erde zu, wird es komplizierter. Diese Kapitel erläutert das NEWTONSche Gravitationspotential und wie es berechnet werden kann.

Die Gravitationskraft \mathbf{k} nach Newton wirkt auf eine Punktmasse m infolge der Punktmasse m' :

$$\mathbf{k} = -G \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r} = m \left(-Gm' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) = m \mathbf{f} . \quad (\text{C.9})$$

Die benutzten Vektoren sind in Abb. C.3 abgebildet. In Gl. (C.9) wurde zusätzlich die Gravitationsbeschleunigung \mathbf{f} eingeführt. Die Gravitationskraft \mathbf{k} ist die

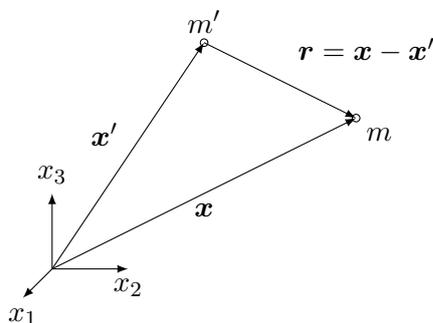


Abb. C.3.: Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen m und m' .

Kraft die infolge der Gegenwart von Masse m' auf Masse m wirkt. Da die Masse m in Richtung der Masse m' gezogen wird, zeigt die Kraft entgegengesetzt zu \mathbf{r} .

Die Gravitationsbeschleunigung ist das Feld, das die Punktladung m' erzeugt. Dieses Feld ist rotationsfrei und damit konservativ:

$$\text{rot } \mathbf{f} = - \left(-Gm' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \nabla_{\mathbf{E}} \times \nabla_{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' .$$

An dieser Stelle ist die Rotation bezüglich \mathbf{x} gemeint. Damit ist die Gravitationskraft eine konservative Kraft und es existiert ein skalares Potential U :

$$\mathbf{f} = -\nabla_{\mathbf{E}} U .$$

Das Potential einer Punktmasse m' ist gegeben durch:

$$U = -G \frac{m'}{r} . \tag{C.10}$$

Hierbei wird der Gradient von $1/r$ gebraucht, der aus der Richtungsableitung nach GÂTEAUX folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{d\mathbf{x}} \frac{1}{r} &= d \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2 d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\underbrace{\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}}_{\nabla_{\mathbf{E}} \frac{1}{r}} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{x} . \end{aligned}$$

Damit folgt die Gültigkeit der Gl. (C.10):

$$\mathbf{f} = -\nabla_{\mathbf{E}} U = -\nabla_{\mathbf{E}} \left(-\frac{Gm'}{r} \right) = Gm' \nabla_{\mathbf{E}} \frac{1}{r} = Gm' \frac{d r^{-1}}{d \mathbf{x}} = -Gm' \frac{\mathbf{r}}{r^3} .$$

Die Gleichung wird singular für $r = 0$. Das ist der Fall, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. In dieser Umgebung wächst das Potential über alle Grenzen. Das erscheint sinnvoll, denn das würde bedeuten, dass die Testpunktmasse m' unendlich nah an die felderzeugende Masse m herangebracht wird.

Da der Gradient ein linearer Operator ist, ist die Gravitationsbeschleunigung von N felderzeugenden Massen gegeben durch die Summe über alle Massen m'_i :

$$U(\mathbf{x}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m'_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|} .$$

Für eine kontinuierlich verteilte Masse gilt dann:

$$U(\mathbf{x}) = -G \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' .$$

Es stellt sich die Frage, wie ein Potential für ein gegebenes Vektorfeld \mathbf{f} bestimmt

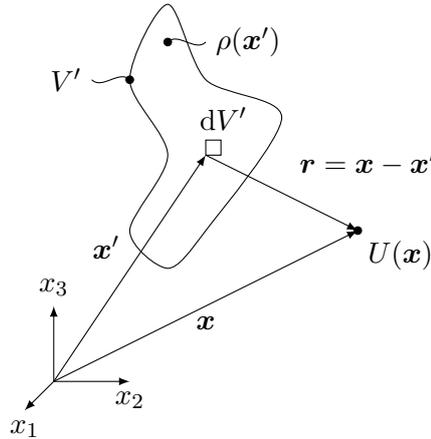


Abb. C.4.: Potential an der Stelle \mathbf{x} einer kontinuierlich verteilten felderzeugenden Masse mit Dichte $\rho(\mathbf{x}')$.

werden kann. Die Antwort liegt im LAPLACE-Operator. Wenn die Divergenz des Gradientenfeldes \mathbf{f} z.B. in kartesischer Basis gebildet wird:

$$-\nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{f} = \Delta_{\mathbf{E}} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} ,$$

dann verbleibt nur eine skalare Gleichung. Im Falle der Punktmasse m' gilt:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{f} &= -\nabla_{\mathbf{E}} \cdot (\nabla_{\mathbf{E}} U) = Gm' \left(\underbrace{(\nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{r})}_3 \frac{1}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{E}} \frac{1}{r^3} \right) \right) \\ &= Gm' \left(\frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \left(-\frac{3}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right) = 0 .\end{aligned}$$

Dabei wurde folgendes Zwischenergebnis verwendet:

$$\nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{r} = \nabla_{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} = 3 ,$$

denn der Gradient bezieht sich auf den Beobachterpunkt \mathbf{x} .

Daraus folgt, dass das Potentialfeld $U(\mathbf{x})$ einer Punktmasse m' an der Stelle \mathbf{x}' bestimmt werden kann, wenn folgende LAPLACE-Gleichung gelöst wird:

$$\Delta_{\mathbf{E}} U = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' . \quad (\text{C.11})$$

Auf eine verteilte Massendichte angewendet gilt:

$$\begin{aligned}U &= -G \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{r} dV' \\ \mathbf{f} &= -\nabla_{\mathbf{E}} U = -G \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV' , \\ \nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{f} &= -G \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{E}} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV' .\end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Die Divergenz im letzten Integral ist außer im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ immer Null. Wäre man an dem Potentialfeld außerhalb des felderzeugenden Volumens interessiert, dann wäre die Bestimmungsgleichung die bereits thematisierte LAPLACE-Gleichung (C.11). Da die vorliegende Arbeit sich mit der eigengravitierenden Erde befasst, ist an dieser Stelle ausschließlich das Feld innerhalb des Volumens V' relevant.

Die Schwierigkeit liegt darin, dass die Divergenz im Integranden für $r = 0$ nicht definiert ist. Dieses Problem ist wohl bekannt in Physikbüchern, vor allem in der Elektrodynamik (siehe Henke, 2011; Stratton, 1941; Griffiths, 1999). Die Definitionslücke an der Stelle $r = 0$ wird durch Einführen der DIRAC-Delta-Distribution geschlossen:

$$\nabla_{\mathbf{E}} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) := 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) .$$

Setzt man das Resultat in Gleichung (C.12), dann folgt aus der Filtereigenschaft

der DIRAC-Distribution:

$$\nabla_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{f}|_{\mathbf{x}} = -G \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') 4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' = -4\pi G \rho(\mathbf{x}) .$$

Das Gravitationspotential U im Inneren einer verteilten Masse mit Volumen V und Dichte ρ genügt der POISSON-Gleichung:

$$\Delta_{\mathbf{E}} U = 4\pi G \rho , \quad \mathbf{x} \in V .$$

D. Materialmodelle

In diesem Kapitel werden verschiedene Materialmodelle vorgestellt. Diese Arbeit beschränkt sich auf elastische Phänomene, deshalb erfolgt zunächst eine thermodynamisch-konsistente Herleitung der Elastizität.

D.1. Elastizität

Unter Materialgesetzen werden in der Kontinuumsmechanik Gleichungen verstanden, die Belastung mit der Verformung verknüpfen. Die Belastungsseite wird durch einen Spannungstensor und die Verformung durch einen Dehnungstensor repräsentiert. Wie bereits gezeigt, existieren unterschiedliche Spannungs- und Dehnungstensoren und Materialgesetze. Dabei werden die Bewegung χ und die Temperatur T als unabhängige Zustandsgrößen verstanden. Alle übrigen Größen, wie die Spannungen, die innere Energie oder die Entropie sind davon abhängige Größen. Diese Sichtweise hat sich in der Kontinuumsmechanik und -thermodynamik etabliert und soll auch in dieser Arbeit übernommen werden.

Alle hier vorgestellten Gesetze unterliegen den folgenden Prinzipien:

- Prinzip des Determinismus
- Prinzip der lokalen Wirkung für ein einfaches Material (*simple material*)
- Prinzip der Objektivität unter EUKLID-Transformation
- Prinzip der Invarianz bei einer überlagerten Starrkörperbewegung
- Prinzip der Forminvarianz bei einem Beobachterwechsel.

Das Prinzip vom Determinismus wurde bereits im vorherigen Paragraph implizit verwendet. Es wurde angenommen, dass die Spannungen und alle anderen abhängigen Größen nur von den aktuellen und den vergangenen Bewegungen des Körpers $\chi(\bar{\mathbf{x}}, \tau)|_{\tau=0}^t$ abhängen, nicht jedoch von zukünftigen Bewegungen. Das Gleiche gilt für die Temperatur $T(\bar{\mathbf{x}}, \tau)|_{\tau=0}^t$.

Das Prinzip der lokalen Wirkung schränkt den räumlichen Einfluss auf das Materialgesetz ein (im Gegensatz zum Determinismusprinzip, das den zeitlichen Einfluss beschränkt). Es besagt, dass nur die unmittelbare Umgebung die abhängigen Größen bestimmt. In dieser Arbeit gilt die Einschränkung auf einfache

Materialien, bei denen der Einfluss sogar nur auf die infinitesimale Umgebung begrenzt ist. Dadurch wird nur der erster Gradient einer unabhängigen Größe als Einflussparameter betrachtet. Höhere Gradienten werden ausgeschlossen. Damit ist der Zustandsraum durch $\left\{ \boldsymbol{\chi}, \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_{\tau=0}^t \right\}$ gegeben. Analog zum materiellen Gradienten der Bewegung wird der materielle Gradient der Temperatur $\bar{\mathbf{h}} = \nabla_{\mathbf{L}} T$ betrachtet.

Das Prinzip der Invarianz bei überlagerter Starrkörpermodifikation (EUKLID-Invarianz) hilft, die Anzahl der Zustandvariablen zu reduzieren. Aus Kapitel B.4 ist bekannt, dass die Bewegung unter der Wirkung der EUKLID-Transformation $\boldsymbol{\chi}^*$ durch die folgende Formel berechnet wird:

$$\boldsymbol{\chi}^*(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \mathbf{Q}^*(\tau) \cdot \boldsymbol{\chi}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) + \mathbf{b}^*(\tau), \quad \mathbf{Q} \in Orth^+ .$$

Daraus folgt die Transformation des Deformationsgradienten:

$$\mathbf{F}^* = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{Q}^*(\tau) \cdot \boldsymbol{\chi}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) + \mathbf{b}^*(\tau)) = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{F} .$$

Damit transformiert sich der Deformationsgradient weder materiell invariant noch räumlich objektiv.

Die Temperatur transformiert sich als skalare Größe invariant bzw. objektiv. Das gilt auch für den Temperaturgradienten, vorausgesetzt, man wählt den materiellen Gradienten:

$$T^* = T, \quad \bar{\mathbf{h}}^* = \bar{\mathbf{h}} .$$

Ein räumlicher Temperaturgradient hingegen transformiert sich räumlich objektiv:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^* &= \nabla_{\mathbf{E}}^* T^* = \nabla_{\mathbf{L}}^* T^* \cdot \mathbf{F}^{*-1} = \nabla_{\mathbf{L}} T \cdot (F^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{*-1}) \\ &= \nabla_{\mathbf{E}} T \cdot \mathbf{Q}^{*\top} = \mathbf{Q}^* \cdot \nabla_{\mathbf{E}} T = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{h} . \end{aligned}$$

Das Prinzip der Invarianz bei überlagerter Starrkörpermodifikation besagt, dass die Formänderungsenergiegedichte bei einer überlagerten Starrkörpermodifikation invariant ist:

$$w = w^* = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{L}^* . \quad (\text{D.1})$$

Diese Bedingung hat zur Folge, dass sich die CAUCHY-Spannungen räumlich objektiv transformieren. Zur Veranschaulichung werden alle Sterngrößen in

Gl. (D.1) ersetzt. Für den Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^* &= \mathbf{F}^{*\bullet} \cdot \mathbf{F}^{*-1} = (\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{F})^\bullet \cdot (\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{F})^{-1} \\ &= (\mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{F}^\bullet) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{*-1}) = \mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} .\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird in die Spannungsleistung eingesetzt:

$$w^* = \mathbf{T}^* \cdot (\mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} + \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{*\top}) .$$

Der erste Summand in der Klammer $\mathbf{Q}^{*\bullet} \cdot \mathbf{Q}^{*\top}$ ist ein antimetrischer Tensor 2. Stufe (siehe Gl. (B.7)). Die doppelte Überschiebung mit dem symmetrischen Spannungstensor \mathbf{T}^* ist stets Null. Daraus folgt für die Invarianz der Spannungsleistung:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{Q}^{*\top} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{Q}^*) \cdot \mathbf{L} .$$

Da diese Gleichung für beliebige kinematische Prozesse $\mathbf{L} \in \text{Lin}$ gültig ist, folgt daraus die Transformation des Spannungstensors:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} .$$

Für das konstitutive Gesetz muss damit folgende Gleichheit gelten:

$$\mathbf{T}^* = \mathfrak{F}_T^* \left\{ \boldsymbol{\chi}^*, \mathbf{F}^*, T^*, \mathbf{h}^*|_{\tau=0}^t \right\} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathfrak{F}_T \left\{ \boldsymbol{\chi}, \mathbf{F}, T, \mathbf{h}|_{\tau=0}^t \right\} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} .$$

Hierbei bezeichnet \mathfrak{F}_T ein Funktional der in geschweiften Klammern stehenden Funktionen. Die Funktionale sind verschieden, je nach dem, welcher Beobachter die Zustandsgrößen misst. Wird jedoch das Prinzip der Forminvarianz angewendet, dann gilt:

$$\mathbf{Q}^* \cdot \mathfrak{F}_T \left\{ \boldsymbol{\chi}, \mathbf{F}, T, \mathbf{h}|_{\tau=0}^t \right\} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} = \mathfrak{F}_T \left\{ \boldsymbol{\chi}^*, \mathbf{F}^*, T^*, \mathbf{h}^*|_{\tau=0}^t \right\} .$$

Aus beiden Prinzipien zusammen folgt:

$$\mathbf{Q}^* \cdot \mathfrak{F}_T \left\{ \boldsymbol{\chi}, \dots |_{\tau=0}^t \right\} \cdot \mathbf{Q}^{*\top} = \mathfrak{F}_T \left\{ \mathbf{Q}^* \cdot \boldsymbol{\chi} + \mathbf{b}^*, \dots |_{\tau=0}^t \right\} .$$

Für eine spezielle EUKLID-Transformation, bei der eine reine Starrkörpertranslation mit \mathbf{b} ohne Rotation $\mathbf{Q}^* = \mathbf{I}$ erfolgt:

$$\mathfrak{F}_T \left\{ \boldsymbol{\chi}, \dots |_{\tau=0}^t \right\} = \mathfrak{F}_T \left\{ \boldsymbol{\chi} + \mathbf{b}^*, \dots |_{\tau=0}^t \right\} .$$

Durch eine Veränderung von \mathbf{b} , wäre das erste Argument des Funktionals \mathfrak{F}_T auf der rechten Seite beliebig groß wählbar. Auf der linken Seite gäbe es hingegen

keine Änderung. Die einzige konsistente Forderung ist, dass das Funktional \mathfrak{F}_T unabhängig von der Bewegung sein muss.

Durch analoge Betrachtungen folgt die Unabhängigkeit des Wärmeflusses \mathbf{q} , der freien HELMHOLTZ-Energie f und der Entropie s von der Bewegung χ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathfrak{F}_T \left\{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_{\tau=0}^t \right\}, & \mathbf{q} &= \mathfrak{F}_q \left\{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_{\tau=0}^t \right\}, \\ f &= \mathfrak{F}_f \left\{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_{\tau=0}^t \right\}, & s &= \mathfrak{F}_s \left\{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_{\tau=0}^t \right\}. \end{aligned}$$

Die nächste wesentliche Einschränkung betrifft den Einfluss des Prozesses bzw. der vergangenen Deformationen auf die aktuellen kalorisch dynamischen Größen. Diese Arbeit befasst sich ausschließlich mit der Elastizität. Es wird davon ausgegangen, dass die Spannungen nur von den aktuellen Dehnungen abhängen. Relevant ist der Endzustand, der Deformationsweg wird vernachlässigt.

Die aktuellen kalorisch-dynamischen Größen sind damit ausschließlich vom aktuellen thermo-kinematischen Zustand abhängig:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathfrak{F}_T \left\{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_t \right\} = \mathcal{F}_T(\mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}}), & \mathbf{q} &= \mathfrak{F}_q \left\{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_t \right\} = \mathcal{F}_q(\mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}}), \\ f &= \mathfrak{F}_f \left\{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_t \right\} = \mathcal{F}_f(\mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}}), & s &= \mathfrak{F}_s \left\{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \Big|_t \right\} = \mathcal{F}_s(\mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}}). \end{aligned}$$

Die Rate der freien HELMHOLTZ-Energiedichte ist durch die ermittelten Abhängigkeiten gegeben:

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}})}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} \right|_{T, \bar{\mathbf{h}}} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{\mathbf{F}, \bar{\mathbf{h}}} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{h}}} \right|_{\mathbf{F}, T} \cdot \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}.$$

Dieses Ergebnis wird in die Entropiegleichung (C.3) eingesetzt:

$$-\bar{\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\bullet + \frac{\partial f}{\partial T} T^\bullet + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{h}}} \cdot \bar{\mathbf{h}}^\bullet \right) - \bar{\rho} s T^\bullet + \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^\bullet - \frac{1}{T} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{h}} \geq 0.$$

Die Gleichung wird umgestellt und die Raten der unabhängigen Zustandgrößen ausgeklammert:

$$\left(-\bar{\rho} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} + \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{F}^\bullet - \bar{\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial T} + s \right) T^\bullet - \bar{\rho} \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{h}}} \cdot \bar{\mathbf{h}}^\bullet - \frac{1}{T} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{h}} \geq 0.$$

Diese Gleichung gilt für jeden thermo-kinematischen Zustand $\{\mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}}\}$. Die Größen \mathbf{F}^\bullet , T^\bullet und $\bar{\mathbf{h}}^\bullet$ sind nicht Teil des Zustandsraumes und können unabhängig vom Zustand variiert werden. So könnte man z.B. bei einem festen Wert $(-\bar{\rho} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} + \mathbf{P})$ so lange die Deformationsrate \mathbf{F}^\bullet variieren, bis die doppelte Überschreitung aus beiden negativ wird. Wählt man bei diesem Vorgang die Raten

T^\bullet , $\bar{\mathbf{h}}^\bullet$ und den Temperaturgradient $\bar{\mathbf{h}}$ zu Null, dann wäre ein Widerspruch zum 2. Hauptsatz der Thermodynamik erzeugt.

Die einzige Möglichkeit das Prinzip zu erfüllen besteht darin, dass stets gilt:

$$-\bar{\rho} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} \right|_{T, \bar{\mathbf{h}}} + \mathbf{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \bar{\rho} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} \right|_{T, \bar{\mathbf{h}}} . \quad (\text{D.2})$$

Analoge Überlegungen führen zu den Gleichheiten:

$$s = - \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{\mathbf{F}, \bar{\mathbf{h}}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{h}}} \right|_{\mathbf{F}, T} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \mathcal{F}_f \{ \mathbf{F}, T, \bar{\mathbf{h}} \} .$$

Mit diesen Gleichungen resultiert für den Wärmefluss außerdem die Bedingung:

$$\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{h}} \leq 0 .$$

In dieser Arbeit wird die Erde isotherm modelliert. Daraus resultiert, dass die Temperatur in den meisten Gleichungen nur noch als Parameter involviert ist. Für die Entropie folgt allerdings:

$$s = \mathcal{F}_s \{ \mathbf{F}, T \} = - \left. \frac{\partial f(\mathbf{F}, T)}{\partial T} \right|_{\mathbf{F}} = 0 .$$

Damit hängt die freie HELMHOLTZ-Energiedichte nur vom Deformationsgradienten ab. Aus Gl. (D.2) folgt, dass f als Potential für die Spannungen fungiert. Die Resultate für die vorliegende Arbeit sind hier nochmal zusammengefasst.

Für die Elastizität folgt aus den Prinzipien der Materialtheorie und den Hauptsätzen der Thermodynamik:

$$\mathbf{P} = \bar{\rho} \frac{df}{d\mathbf{F}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{\text{cof}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \rho \frac{df}{d\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\top . \quad (\text{D.3})$$

Die Funktion der freien HELMHOLTZ-Energiedichte kann in eine reduzierte Form überführt werden. Statt der Variable \mathbf{F} wird der rechte Strecktensor \mathbf{U} verwendet. Das ist eine Reduktion, denn der Deformationsgradient hat neun unabhängige Komponenten. Der rechte Strecktensor als Objekt der positiv-definiten symmetrischen Tensoren 2. Stufe hat nur noch sechs unabhängige Komponenten. Dies wird durch nochmaliges Anwenden der Prinzipien der Invarianz gegenüber Starrkörpertransformation und der Forminvarianz dieses mal jedoch für die freie HELMHOLTZ-Energiedichte erreicht:

$$f(\mathbf{F}) = f^*(\mathbf{F}^*) = f(\mathbf{F}^*) = f(\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{F}) .$$

Wird für den Drehtensor \mathbf{Q}^* speziell den Drehtensor \mathbf{R}^\top aus der polaren Dekom-

position vom Deformationsgradient $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ gewählt, dann gilt:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{F}^*) = f(\mathbf{U}) = f(\mathbf{F}) .$$

Die Funktion der freien HELMHOLTZ-Energiedichte wird damit auf die Tensoren aus *Psym* eingeschränkt. Die Funktion selbst bleibt unverändert.

Für die Spannungen kann ebenso eine reduzierte Form hergeleitet werden. In Gl. (D.3) ist zu sehen, dass \mathbf{T} nur als Funktion des Deformationsgradienten gegeben ist: $\mathbf{T} = \mathcal{F}_T(\mathbf{F})$. Wenn wiederum der Drehtensor \mathbf{R}^\top für die EUKLIDISCHE Transformation gewählt wird, dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* &= \mathbf{R}^\top \cdot \mathcal{F}_T(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{R} = \mathcal{F}_T(\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{F}) = \mathcal{F}_T(\mathbf{U}) \\ &\Rightarrow \mathbf{T} = \mathcal{F}_T(\mathbf{F}) = \mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_T(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^\top . \end{aligned}$$

Hieraus kann eine Darstellungsform für die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen \mathbf{S} hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} = J\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_T(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{-1} \\ &= \det(\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathcal{F}_T(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathcal{F}_S(\mathbf{U}) . \end{aligned}$$

Diese Form ist günstig, wenn das Material bestimmte Symmetrieeigenschaften besitzt. Es wird von materieller Symmetrie ausgegangen und darunter gewisse Vorzugsrichtungen des Materials verstanden. So besitzt z.B. ein Glasfaserverbundwerkstoff durch senkrecht zu einander angeordnete Glasfasern orthotrope Materialeigenschaften, eine Drehung des Materials um 90° verändert nicht die elastischen Eigenschaften (siehe Abb. D.1).

Mathematisch gesehen wird eine materielle Symmetrie durch eine Modifikation \mathbf{A} der Bezugsplatzierung beschrieben, die keinen Effekt auf den deformierten Zustand aufweist (siehe Abb. D.1):

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}_T(\mathbf{F}) = \mathcal{F}_T(\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}) = \hat{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{A} \in Orth^+ .$$

Im Gegensatz zum Prinzip der EUKLID-INVARIANZ, erfolgt hier zuerst die Drehung der Bezugsplatzierung mit \mathbf{A} . Anschließend wird diese mit \mathbf{F} deformiert und mit dem ursprünglichen Ergebnis verglichen. Damit die materielle Symmetrie mit dem Materialgesetz korrekt abgebildet wird, muss die Funktion $\mathcal{F}_T(\bullet)$ für die modifizierte Deformation $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}$ und für die ursprüngliche Deformation \mathbf{F} den gleichen Funktionswert für die CAUCHY-Spannungen \mathbf{T} liefern.

Für den 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor als Funktion des linken Streck-

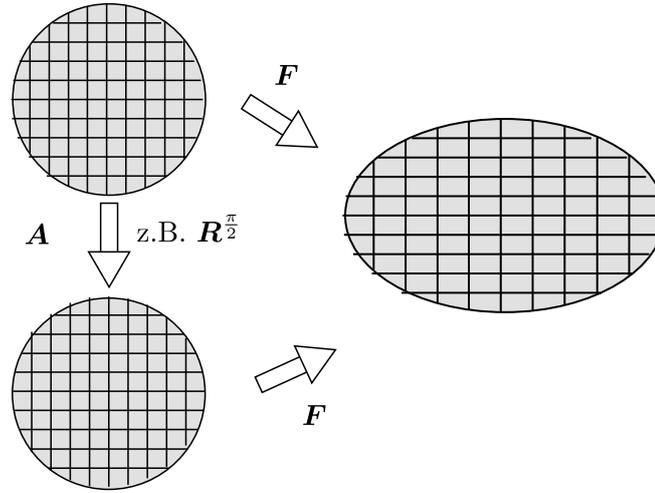


Abb. D.1.: Veranschaulichung materieller Symmetrie: Modifikation \mathbf{A} mit anschließender Deformation \mathbf{F} führt zum gleichen Resultat wie alleinige Deformation \mathbf{F} .

tensors sieht diese Bedingung anders aus:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} &= \det(\hat{\mathbf{F}}) \hat{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-\top} = \underbrace{J \det(\mathbf{A})}_{=1} \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Der rechte Strecktensor transformiert sich dabei:

$$\hat{\mathbf{U}} = \sqrt{\hat{\mathbf{C}}} = \sqrt{\hat{\mathbf{F}}^\top \cdot \hat{\mathbf{F}}} = \sqrt{\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} . \quad (\text{D.5})$$

Aus den Gleichungen (D.4) und (D.5) folgt die materielle Symmetrieeigenschaft für den 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor $\mathbf{S} = \mathcal{F}_S(\mathbf{U})$:

$$\mathbf{A}^\top \cdot \mathcal{F}_S(\mathbf{U}) \mathbf{A} = \mathcal{F}_S(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}) .$$

Eine tensorielle Funktion, die diese Eigenschaft für alle Drehtensoren erfüllt, beschreibt einen isotropen Festkörper:

$$\forall \mathbf{A} \in \text{Orth}^+ : \mathbf{A}^\top \cdot \mathcal{F}_S(\mathbf{U}) \mathbf{A} = \mathcal{F}_S(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}) .$$

Mathematisch gesehen entspricht das einer isotropen Tensorfunktion, die nach Richter, 1948 als quadratische Funktion der Dehnungen beschrieben werden

kann:

$$\mathbf{S} = \mathcal{F}_S(\mathbf{U}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U} + \alpha_3 \mathbf{U}^2 .$$

Die drei skalaren Koeffizienten $\alpha_0(I_U, II_U, III_U)$, $\alpha_1(I_U, II_U, III_U)$ und $\alpha_2(I_U, II_U, III_U)$ sind Funktionen der Invarianten des Strecktensors. Durch Ersetzen des rechten Strecktensors können die Funktionen in Abhängigkeit vom linken CAUCHY-GREEN- oder dem GREEN-LAGRANGE-Strecktensor formuliert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{C} + \beta_2 \mathbf{C}^2 , \\ \mathbf{S} &= \gamma_0 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{E}^2 . \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Dabei hängen die Funktionen β_i und γ_i jeweils von den Invarianten der unabhängigen Dehnungstensoren ab.

D.2. Lineare Elastizität

Bei der linearen Elastizität wird ein linearer Zusammenhang der Spannungen und Dehnungen konstituiert. Einer der bekanntesten Vertreter eines physikalisch linearen Gesetzes ist das isotrope ST. VENANT-KIRCHHOFF-Materialgesetz:

$$\mathbf{S} = \gamma_0 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{E}, \quad \gamma_0 = \lambda I_E = \lambda \text{Sp}(\mathbf{E}) , \quad \gamma_1 = 2\mu . \quad (\text{D.7})$$

Hierbei sind λ und μ die elastischen LAMÉ-Konstanten. Diese Beziehung kommt durch das Linearisieren der Gl. (D.6) um $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ zustande (siehe Bertram, 2005, Kap. 6.7). Obwohl das Gesetz kleine Dehnungen beschreibt, ist es in der Lage, beliebig große Rotationen zu bewältigen.

Wird diese Gleichung zusätzlich noch geometrisch auf beiden Seiten linearisiert (siehe Gl. (B.3)), dann entsteht das HOOKESche Gesetz:

$$\mathbf{T} = \lambda \text{Sp}(\mathbf{E}^{\text{lin}}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^{\text{lin}} . \quad (\text{D.8})$$

Das HOOKESche und das ST. VENANT-KIRCHHOFF-Gesetz lassen sich über die Steifigkeitstetrade formulieren:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{E} , \quad \mathbf{T} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{E}^{\text{lin}} \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I} . \quad (\text{D.9})$$

Hierbei ist \mathbb{I} der Einheitstensor 4. Stufe im Sinne der doppelten Überschiebung mit einem beliebigen Tensor 2. Stufe:

$$\mathbb{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbb{I} = \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Lin} .$$

Im anisotropen Fall kann die Steifigkeitstetrade \mathbb{C} zu einem komplizierten Tensor

4. Stufe verallgemeinert werden. Als Tensor 4. Stufe hat die Steifigkeitstetrad in dreidimensionalen Raum $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ Komponenten. Durch die Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors und die Symmetrie des Dehnungstensors reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf $6 \times 6 = 36$, da der Steifigkeitstensor die linke und rechte Subsymmetrie besitzt. Bei Gleichheit der Formänderungsenergiegedichte und der komplementären Formänderungsenergiegedichte reduziert sich die Anzahl auf 21 unabhängige Komponenten:

$$\mathbb{C}^\top = \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbb{C} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbb{C}^\top \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}.$$

Bei einem isotropen Material besitzt die Steifigkeitstetrad, wie bereits in Gl. (D.9) gezeigt, 2 unabhängige Materialkonstanten. Hierbei werden im ST. VENANT-KIRCHHOFF-Gesetz die LAMÉ-Konstanten λ und μ als elastische Parameter verwendet. Streng genommen müsste man hier andere Materialparameter einsetzen als im HOOKESchen Gesetz. Wenn wir uns jedoch die experimentelle Bestimmung der elastischen Parameter ansehen, so erfolgt dies klassisch mit einer Zugmaschine aus einem Spannungs-Dehnungsdiagramm (siehe Abb. D.2 aus Macherauch und Zoch, 2011, Kap. 23). Dabei wird der Elastizitätsmodul aus dem folgenden Verhältnis berechnet:

$$E = \frac{\Delta \sigma_n}{\Delta \varepsilon_t} = \frac{F_{eS} L_0}{A_0 \Delta L_{eS}}.$$

Die Nennspannung σ_n wird durch den Quotienten aus aktueller Kraft und Aus-

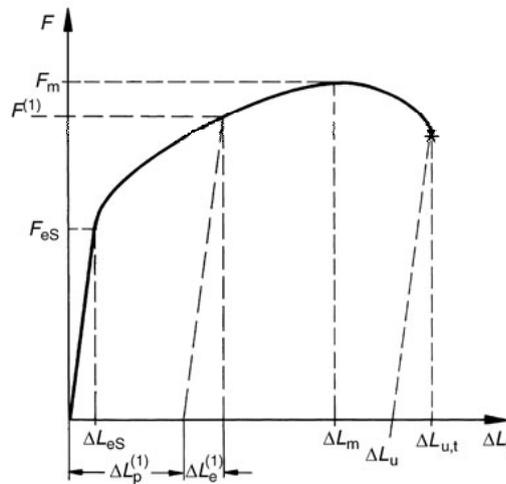


Abb. D.2.: Kraft-Totallängenänderungs-Diagramm zur Bestimmung von mechanischen Materialparametern aus Macherauch und Zoch, 2011, Kap. 23.

gangsquerschnittsfläche A_0 berechnet. Das entspricht eher einer Nominal- oder 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung. Ebenso wird die Totaldehnung ε_t im elastischen

Bereich durch den Quotienten aus aktueller Längenänderung bezogen auf die Ausgangslänge L_0 bestimmt. Das entspricht eher einer GREEN-LAGRANGE-Dehnung.

Diese Unterschiede sind nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Es werden die gleichen elastischen Parameter verwendet, unabhängig davon, ob Gl. (D.7) oder Gl. (D.8) angewendet wird. Analog wird in der aktuellen Platzierung ein HOOKE ähnliches Gesetz verwendet, das den Zusammenhang von CAUCHY-Spannungen und EULER-ALMANSI-Dehnungen beschreibt:

$$\mathbf{T} = \lambda \text{Sp}(\mathbf{E}^a) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^a .$$

Dieses Gesetz wird im weiteren mit CAUCHY-ALMANSI-Materialmodell referenziert.

D.3. Hyperelastizität

Bei einem hyperelastischen Material existiert ein Potential, also eine skalare Funktion aus derer durch Ableiten nach dem Dehnungsmaß auf die Spannungen geschlossen werden kann. Im Gegensatz zur linearen Elastizität kann der Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen nicht linear sein. Relevant ist, dass Spannungen ausschließlich von den aktuellen Dehnung abhängen und nicht von der gesamten Deformationshistorie. Darin liegt die Abgrenzung zur Plastizität.

Die Hyperelastizität wird nach Bertram, 2005, Kap. 7.2 definiert. Ein Material wird hyperelastisch genannt, wenn eine freie HELMHOLTZ-Energiedichte $f : Inv^+ \rightarrow R$ existiert, deren Ableitung dem Deformationsgradienten des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors entspricht (siehe Gl. (D.3)):

$$\mathbf{P} = \bar{\rho} \frac{df(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}} .$$

Das Produkt aus Massendichte $\bar{\rho}$ und freier Energiedichte beschreibt die volumenspezifische Formänderungsenergie \bar{w}_F , deren Rate der spezifischen Spannungsleistung entspricht:

$$\bar{w}_F^\bullet = (\bar{\rho} f)^\bullet = \frac{d\bar{w}_F}{d\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\bullet = \bar{\rho} \frac{df}{d\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\bullet = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^\bullet .$$

Die CAUCHY-Spannungen können ebenfalls als Funktion von \bar{w}_F dargestellt werden (siehe Gl. (D.3)):

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{\text{cof}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^\top = \frac{1}{J} \frac{d\bar{w}_F}{d\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\top .$$

Bei bekannter Formänderungsenergiegedichte lässt sich die Spannung damit als

Ableitung nach dem Deformationsgradienten \mathbf{F} ermitteln. Die Formänderungsenergiegedichte kann durch Einschränkung des Definitionsbereiches auf positiv definite symmetrische Tensoren 2. Stufe in eine reduzierte Form überführt werden, analog zur freien HELMHOLTZ-Energiegedichte. Faktisch wird \mathbf{F} durch \mathbf{U} ersetzt:

$$\bar{w}_F(\mathbf{F}) = \bar{w}_F(\mathbf{U}) =: \bar{w}_U(\mathbf{U}) .$$

Die Formänderungsenergiegedichte kann auch in Abhängigkeit von \mathbf{C} und \mathbf{E} geschrieben werden:

$$\bar{w}_C(\mathbf{C}) = \bar{w}_E(\mathbf{E}) = \bar{w}_U(\mathbf{U}) .$$

Daraus ergeben sich für den 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor folgende Relationen, je nach Art der Formänderungsenergiegedichte:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^\bullet = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^\bullet = \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}^\bullet \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = 2 \frac{d\bar{w}_C}{d\mathbf{C}} = \frac{d\bar{w}_E}{d\mathbf{E}} .$$

Diese Formen werden in Kap. 3.3 bei der Beschreibung der finiten Deformationen benötigt.

D.4. Preliminary Reference Earth Model

Das *Preliminary Reference Earth Model*, kurz PREM nach Dziewonski und Anderson, 1987 ist eine experimentelle Auswertung von geodätischen Daten. Es enthält radiusabhängige Werte für die Massendichte ρ und Werte für elastische Konstanten. In diesem Kapitel werden die Daten zusammengetragen und in LAMÉ-Konstanten überführt.

Als Randbedingungen werden der Außenradius r_E die Masse m_E und das Massenträgheitsmoment Θ_E der Erde verwendet:

$$r_E = 6371 \text{ km}, \quad m_E = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad \Theta_E = 0,3308 m_E r_E^2.$$

Neben diesen werden Messdaten von freien langwelligen Oberflächenwellen und seismische elastische Wellen im Körperinneren zur Auswertung benutzt. Da elastische Wellen sich in vorgespannten Körpern anders ausbreiten als in spannungsfreien, sollte der Spannungszustand der Erde für eine Auswertung bekannt sein. Die Arbeiten von Babich und Guz', 1978; Chaljub u. a., 2007; Geller, 1988; Valette, 1986 zeigen, dass dieser Einfluss in einer vorgespannten Sphäre vernachlässigbar ist. Dabei muss die Vorspannung deviatorfrei sein. In dieser Arbeit werden die Werte des PREM als gegeben angenommen.

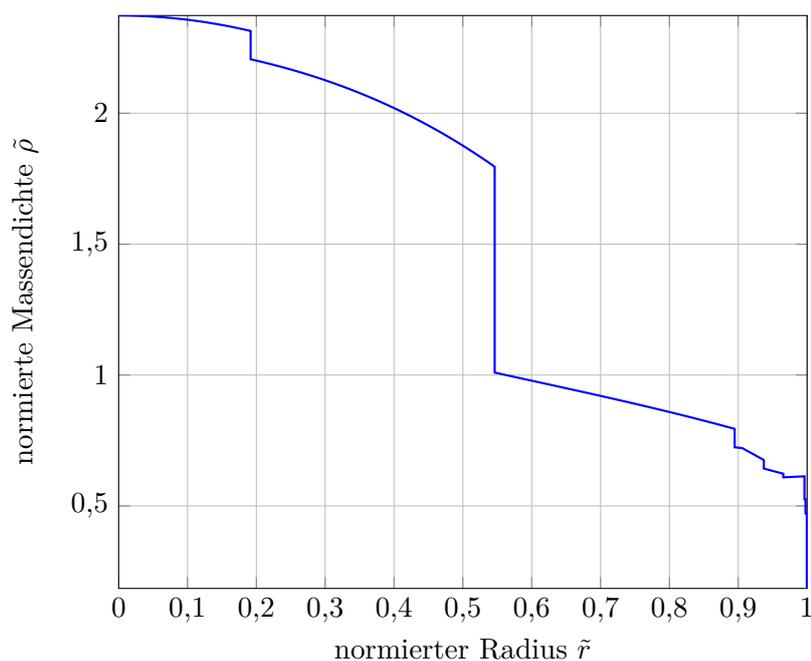


Abb. D.3.: Normierte Massendichte $\bar{\rho}$ im Erdinneren aufgetragen über den normierten Erdradius.

Das Innere der Erde wird in neun Schalen aufgeteilt. Die verwendeten Daten sind

im Anhang F zusammengetragen. In Abb. D.3 ist die Massendichte dargestellt. An den Sprungstellen befinden sich jeweils die Übergänge von einer Schicht zur nächsten. Die elastischen Konstanten werden in der Veröffentlichung Dziewonski und Anderson, 1987 aus den horizontalen und vertikalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Kompressionswellen v_{PH} , v_{PV} und Scherwellen v_{SH} , v_{SV} abgeleitet:

$$\begin{aligned} A &= \rho v_{\text{PH}}^2 = C_{11} , & C &= \rho v_{\text{PV}}^2 = C_{33} , & N &= \rho v_{\text{SH}}^2 = C_{66} , \\ L &= \rho v_{\text{SV}}^2 = C_{44} , & F &= \eta(A - 2L) . \end{aligned}$$

Es wird die Nomenklatur aus dem Werk Love (1944, Art. 103–111) benutzt. In seiner Arbeit gibt Love (1944) die Formänderungsenergiedichte \bar{w}_F für einen elastischen Körper mit folgender Gleichung an:

$$\begin{aligned} \bar{w}_F &= \frac{1}{2} C_{11} \varepsilon_{xx}^2 + C_{12} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + C_{13} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + C_{14} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yz} + C_{15} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zx} + C_{16} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xy} + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_{22} \varepsilon_{yy}^2 + C_{23} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + C_{24} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{yz} + C_{25} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zx} + C_{26} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xy} + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_{33} \varepsilon_{zz}^2 + C_{34} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{yz} + C_{35} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{zx} + C_{36} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy} + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_{44} \varepsilon_{yz}^2 + C_{45} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} + C_{46} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xy} + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_{55} \varepsilon_{zx}^2 + C_{56} \varepsilon_{zx} \varepsilon_{xy} + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_{66} \varepsilon_{xy}^2 . \end{aligned}$$

Die C_{IJ} stehen für die Einträge des Steifigkeitstensors in VOIGTScher Notation. Die Superindizes I, J bündeln zwei „normale“ Indizes zu einem und laufen jeweils von 1 bis 6. Der Zusammenhang ist wie folgt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ \cdot & 2 & 4 \\ \cdot & \cdot & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ \cdot & 22 & 23 \\ \cdot & \cdot & 33 \end{bmatrix} .$$

Neben dieser Vereinfachung ist bei einigen Komponenten der Faktor 2 zu beachten. Dazu soll die Spannung σ_{11} exemplarisch genauer betrachtet werden:

$$\mathbf{T} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{E}^{\text{lin}} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j .$$

Die Summe wird beispielhaft für die Komponente T_{11} ausgeschrieben:

$$T_{11} = \underbrace{C_{1111}}_{C_{11}} \varepsilon_{11} + \underbrace{C_{1122}}_{C_{12}} \varepsilon_{22} + \underbrace{C_{1133}}_{C_{13}} \varepsilon_{33} + \underbrace{2C_{1123}}_{C_{14}} \varepsilon_{23} + \underbrace{2C_{1113}}_{C_{15}} \varepsilon_{13} + \underbrace{2C_{1112}}_{C_{16}} \varepsilon_{12} .$$

In dieser Gleichung ist zu erkennen, an welcher Stelle der Faktor 2 berücksichtigt werden muss.

Die Formänderungsenergiedichte für einen linear elastischen Festkörper sieht in moderner Notation wie folgt aus (siehe Müller und Ferber, 2008, Kap. 5.3.2):

$$\bar{w}_F = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^{\text{lin}} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^{\text{lin}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^{\text{lin}} .$$

Wenn es sich um einen transversal isotropen Körper handelt, wie es bei der Erde laut Dziewonski und Anderson, 1987 der Fall ist, dann lässt sich die Formänderungsenergiedichte nach Love, 1944 schreiben als:

$$2\bar{w}_F = A (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + C \varepsilon_{zz}^2 + 2F (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) \varepsilon_{zz} + 2(A - 2N) \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xx} + \\ + L (\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + N \varepsilon_{xy}^2 .$$

Damit ist die Steifigkeitsmatrix in VOIGT-Notation gegeben:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} A & 2(A - 2N) & 2(A - 2N) & 0 & 0 & 0 \\ & A & 2(A - 2N) & 0 & 0 & 0 \\ & & C & 0 & 0 & 0 \\ & & & L & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & L & 0 \\ & & & & & N \end{bmatrix} .$$

Bei der Erde ist die Abweichung von der Isotropie sehr gering und wird in dieser Arbeit vernachlässigt. Für diesen Fall gilt nach Dziewonski und Anderson, 1987:

$$A = C, \quad L = N, \quad \eta = 1 .$$

Damit vereinfachen sich die Einträge des Steifigkeitstensors:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} A & 2F & 2F & 0 & 0 & 0 \\ & A & 2F & 0 & 0 & 0 \\ & & A & 0 & 0 & 0 \\ & & & N & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & N & 0 \\ & & & & & N \end{bmatrix} .$$

Aus diesen Konstanten lassen sich über folgende Zusammenhänge der Kompressionsmodul und die Querkontraktionszahl ermitteln:

$$A = \frac{3K(1 - \nu)}{1 + \nu} = \lambda + 2\mu, \quad 2F = \frac{3K\nu}{1 + \nu} = \lambda, \quad N = \frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)} = \mu .$$

Die Ergebnisse für den Kompressionsmodul und die Querkontraktionszahl sind in Abb. D.4 dargestellt. Entsprechende Abb. für die LAMÉ-Konstanten befinden sich im Anhang F in Abb. F.2 und Abb. F.1.

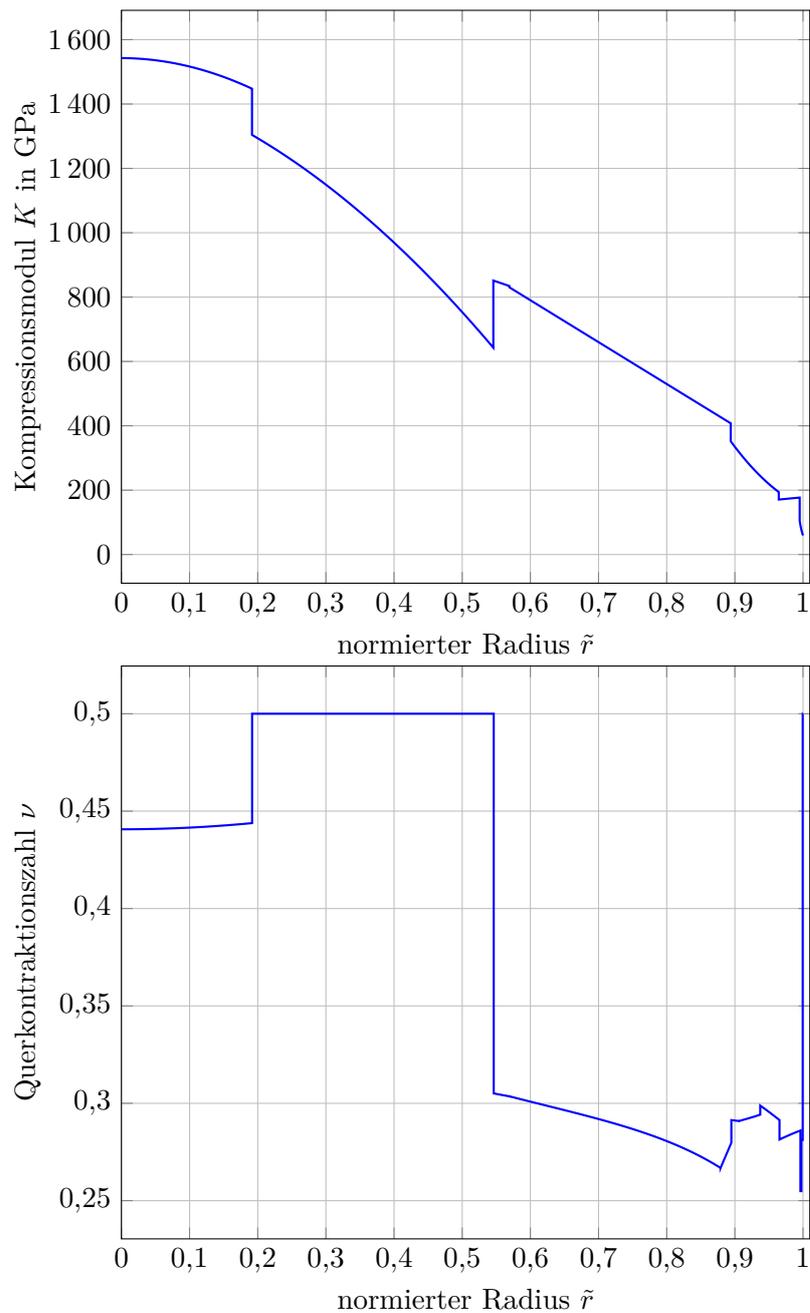


Abb. D.4.: Kompressionsmodul und Querkontraktionszahl über den normierten Radius \tilde{r} nach PREM.

Für die numerische Simulation ist eine Normierung auf einen mittleren Kompressionsmodul sinnvoll. Dabei wäre die Normierung bezogen auf den Radius nicht zutreffend, denn diese würde die Volumenunterschiede der einzelnen Schichten

nicht berücksichtigen. Statt dessen wird auf das volumenspezifisch normiert:

$$K^{\text{mittel}} = \frac{\int_V K(r) dV}{\int_V dV} .$$

Bei reiner Radialsymmetrie kann die Volumenintegration einzig auf den Radius r

Tab. D.1.: Die über das jeweilige Schichtvolumen gemittelten Kompressionsmodul-Werte.

Schicht	1	2	3	4	5	6	7	8
K^{mittel} in GPa	1510	1011	843	619	265	172	176	78

reduziert werden, da der Integrand weder von ϑ noch von φ abhängt. Desweiteren wird der Radius mit dem Außenradius $r = r_E \tilde{r}$ substituiert. Das ermöglicht, über den normierten Radius zu integrieren, da die Werte für den Kompressionsmodul als Funktion von eben diesen gegeben sind:

$$K^{\text{mittel}} = \frac{4\pi \int_{r=0}^{r_E} K(\tilde{r}) r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r_E^3} = \frac{3}{r_E^3} \int_{\tilde{r}=0}^1 K(\tilde{r}) r_E^3 \tilde{r}^2 d\tilde{r} = 3 \int_{\tilde{r}=0}^1 K(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r} .$$

Für die PREM-Verteilung ergibt sich ein mittlerer Kompressionsmodul von $K^{\text{mittel}} = 547$ GPa.

In Kap. 2.2 wird das Homogenisierungsverfahren von KACHANOV und SEVOSTIANOV angewendet. Dafür sind bereichsbezogene Mittelwerte für den Kompressionsmodul notwendig. Die Werte hierfür sind in der Tab. D.1 zusammengetragen.

E. Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode entwickelte sich in den letzten zwei Jahrzehnten stetig zu einem der wichtigsten numerischen Verfahren in der Festkörpermechanik. Mit der FEM können Näherungslösungen für Anfangs- und Randwertprobleme gefunden werden. Zu diesem Thema wurden mehrere Arbeiten verfasst, hier seien nur einige genannt: Bonet und Wood, 1997; Zienkiewicz und Taylor, 2005; Bathe, 2008; Holzapfel, 2000. Die Finite-Elemente-Methode basiert auf dem Variationsprinzip das auf Truesdell und Toupin, 1960 zurückzuführen ist.

E.1. Variation und Richtungsableitung

Die Variation einer Größe lässt sich anschaulich durch die Richtungsableitung nach GÂTEAUX erklären (siehe Holzapfel, 2000, Kap. 8):

$$\delta f(\mathbf{u}) = \mathcal{D}_{\delta \mathbf{u}} f(\mathbf{u}) = \left. \frac{d}{dh} f(\mathbf{u} + h\delta \mathbf{u}) \right|_{h=0} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} .$$

Bei der Variation stellt sich die Frage: Wie ändert sich f , wenn eine infinitesimal kleine gedachte Änderung der Eingangsgröße \mathbf{u} impliziert wird? Die Variation beinhaltet das Differential $\partial f / \partial \mathbf{u}$, dieses beschreibt in erster Näherung die Sensitivität der Funktion f auf eine Änderung der Größe \mathbf{u} .

E.2. Prinzip der virtuellen Arbeit

Um die Verschiebung mit der Finiten-Elemente-Methode zu simulieren bedarf es einer variationellen Form der Bilanzgleichungen. Dabei genügt es in der Regel, die Impulsbilanz zu simulieren, denn die Massenbilanz und die Drehimpulsbilanz sind durch:

$$\rho J = \bar{\rho}, \quad \mathbf{T}^\top = \mathbf{T} ,$$

implizit enthalten.

Es wird von einem Gebiet \bar{V} ausgegangen, dessen Rand disjunkt in einen DIRICHLET-Rand $\bar{\Gamma}^D$ und NEUMANN-Rand $\bar{\Gamma}^N$ unterteilt ist (siehe Abb. E.1):

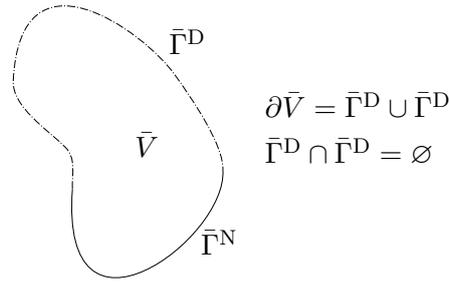


Abb. E.1.: Skizze für das Gebiet \bar{V} mit DIRICHLET- und NEUMANN-Rand.

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla_L \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \bar{\rho} \mathbf{f} , \quad \mathbf{u}|_{\bar{\Gamma}^D} = \mathbf{u}^{\text{ext}} , \quad \bar{\mathbf{t}}|_{\bar{\Gamma}^N} = \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} .$$

Bei der Berechnung einer numerischen Näherungslösung für die Verschiebung wird bei der Finiten-Elemente-Methode eine virtuelle Verschiebung eingeführt:

$$\mathbf{u}_{\text{solve}} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} .$$

Damit die numerische Lösungsfunktion $\mathbf{u}_{\text{solve}}$ den DIRICHLET-Bedingungen der tatsächlichen Funktion \mathbf{u} entsprechen kann, muss die virtuelle Verschiebung an den DIRICHLET-Rändern Null sein:

$$\delta \mathbf{u}|_{\bar{\Gamma}^D} = 0 .$$

Eine DIRICHLET-Bedingung wird als wesentliche Randbedingung bezeichnet, weil sie den Raum der Funktion $\delta \mathbf{u}$ einschränkt. Dies muss bei der computergestützten Umsetzung beachtet und entsprechend implementiert werden.

GALERKIN-Verfahren

Es wird von der lokalen Impulsbilanz in BP ausgegangen, diese mit der Testfunktion skalar $\delta \mathbf{u}$ multipliziert und über das gesamte Gebiet \bar{V} integriert:

$$\int_{\bar{V}} \bar{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} + \int_{\bar{V}} (\nabla_L \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} = \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} .$$

Die partielle Integration wird auf das Spannungsgintegral angewendet:

$$\int_{\bar{V}} (\nabla_L \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} = \oint_{\partial \bar{V}} \bar{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \, d\bar{A} - \int_{\bar{V}} \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \nabla_L) \, d\bar{V} ,$$

und die Differentiation auf die Testfunktion verlagert. Mit dem Satz von GAUSS resultiert ein Oberflächenintegral, in dem die NEUMANN-Randbedingung unter-

gebracht wird:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} + \int_{\bar{V}} \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{L}}) \, d\bar{V} \\ = \int_{\bar{\Gamma}^{\text{N}}} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{A} + \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} . \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Die Spannungsrandbedingung ist als NEUMANN-Randbedingung ein Teil der variationellen Form und wird deshalb als natürliche Randbedingung bezeichnet. Da $\delta \mathbf{u}$ auf dem DIRICHLET-Rand $\bar{\Gamma}^{\text{D}}$ verschwindet, bleibt nur das Integral über den NEUMANN-Rand $\bar{\Gamma}^{\text{N}}$ in der Gleichung.

Die Funktion $\delta \mathbf{u}$ wird im Finite-Elemente-Kontext Testfunktion bezeichnet. Man kann sich vorstellen, dass die Impulsbilanz durch verschiedene Funktionen $\delta \mathbf{u}$ getestet wird. Es wird also überprüft, ob Gl. (E.1) erfüllt ist. Die gesuchte Funktion soll für jede Testfunktion die Gl. (E.1) erfüllen. Je größer die Anzahl an Testfunktionen, desto genauer wird das Ergebnis für die gesuchte Funktion. Würde man hypothetisch mit unendlich vielen Funktionen testen, wäre die Lösung exakt (Fundamentalsatz der Variationsrechnung siehe Hughes, 1987; Marsden und Hughes, 1994).

Um einen Bezug zur Energiebilanz herzustellen, wird die Variation des Deformationsgradienten eingeführt:

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{L}} .$$

Damit lässt sich die Gleichung (E.1) umformen zu:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} + \int_{\bar{V}} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{F}^{\text{T}} \, d\bar{V} \\ - \int_{\bar{\Gamma}^{\text{N}}} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{A} - \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Die Integrale über $\bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}}$ und \mathbf{f} beschreiben die Arbeit der äußeren Lasten δW^{ext} entlang einer gedachten Verschiebung $\delta \mathbf{u}$. Das Integral über den Spannungen $\boldsymbol{\Sigma}$ gibt die virtuelle innere mechanische Arbeit δW^{int} wieder. Zusammen mit der virtuellen kinetischen Energie ist die innere virtuelle Arbeit im Gleichgewicht mit der äußeren virtuellen Arbeit. Da in dieser Arbeit ausschließlich statische bzw. quasi-statische Vorgänge betrachtet werden, ist der Trägheitsterm zu vernachlässigen:

$$\begin{aligned} \delta W^{\text{int}} - \delta W^{\text{ext}} &= 0 , \\ \delta W^{\text{int}} &= \int_{\bar{V}} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{F}^{\text{T}} \, d\bar{V} , \quad \delta W^{\text{ext}} = \int_{\bar{\Gamma}^{\text{N}}} \bar{\mathbf{t}}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{A} + \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{V} . \end{aligned}$$

Die interne virtuelle Arbeit lässt sich bei Vorhandensein eines hyperelastischen Materials mit Potential \bar{w}_F als Variation derselbigen interpretieren:

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{F}^\top = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{F} = \frac{\partial \bar{w}_F}{\partial \mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{F} = \delta \bar{w}_F .$$

Damit sind die interne Arbeit und die Variation derselbigen gegeben:

$$W^{\text{int}} = \int_{\bar{V}} \bar{w}_F(\mathbf{F}) \, d\bar{V}, \quad \delta W^{\text{int}} = \int_{\bar{V}} \delta \bar{w}_F(\mathbf{F}) \, d\bar{V} .$$

Das hier beschriebene Verfahren ist GALERKIN-Verfahren. Es wird von der starken Formulierung (lokale Bilanz) ausgegangen und eine schwache Form hergeleitet. Die variationelle Form wird als schwach bezeichnet, weil die Funktion \mathbf{u} geringeren Differentiationsansprüchen genügt. Die lokale Impulsbilanz enthält den Term $\nabla_L \cdot \boldsymbol{\Sigma}$. Dieser ist über das Materialgesetz mit der zweiten Ableitung der Verschiebungen \mathbf{u} verknüpft. Also muss die Verschiebung mindestens zweimal differenzierbar sein. Die variationelle Form (E.2) enthält nur noch erste Ableitungen.

Bei der Simulation werden ausschließlich kontinuierliche LAGRANGE-Elemente erster Ordnung verwendet (siehe Abb. E.2). Der entsprechende Funktionenraum

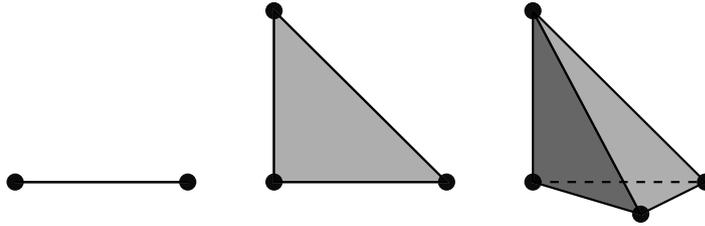


Abb. E.2.: Lineare LAGRANGE-Elemente erster Ordnung in 1D, 2D und 3D (aus Logg, Mardal und Wells, 2012).

ist der SOBOLEV-Raum erster Ordnung (siehe Holzapfel, 2000, Kap. 8). Jede Komponentenfunktion auf jedem finiten Element ist linear. Die Funktionen sind innerhalb der Elemente stetig differenzierbar. An den Elementgrenzen sind die Funktionen stetig, jedoch können sie dort Knicke haben, d.h. müssen also nicht differenzierbar sein.

Prinzip der virtuellen Arbeit in aktueller Platzierung

Analog zur Referenzplatzierung lässt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit auch für die aktuelle Platzierung herleiten. Es wird wieder von der Impulsbilanz ausgegangen:

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{T} \cdot \nabla_E + \rho \mathbf{f} .$$

Es wird mit einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ multipliziert und über das gesamte Gebiet integriert. Anschließend wird partielle Integration angewendet und NEUMANN-Randbedingungen durch den GAUSS-Integralsatz inkludiert:

$$\int_V \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{E}}) dV = \int_{\Gamma^N} \mathbf{t}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV . \quad (\text{E.3})$$

Formulierungen (E.2) und (E.3) sind äquivalent, d.h. sie können durch Transformation auf die entsprechende Platzierung gewonnen werden. Der räumliche Gradient von $\delta \mathbf{u}$ lässt sich durch einen materiellen Gradienten ersetzen, wodurch die Variation des Deformationsgradienten $\delta \mathbf{F}$ entsteht:

$$\int_V \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) dV = \int_{\Gamma^N} \mathbf{t}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV .$$

Durch die Symmetrie des Spannungstensors \mathbf{T} , wird der symmetrische Anteil des Gradienten der virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{E}}$ verwendet. Das ist möglich, da die doppelte Überschiebung des symmetrischen Spannungstensors mit dem antimetrischen Anteil des virtuellen Dehnungstensors stets Null ergibt:

$$\int_V \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{E}} \otimes \delta \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{E}} \otimes \delta \mathbf{u})^{\top}) dV = \int_{\Gamma^N} \mathbf{t}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV .$$

Für diese Arbeit sind beide Formulierungen relevant, da die Simulation je nach Problem sowohl in der Bezugsplatzierung als auch in der aktuellen Platzierung bestimmt wird.

E.3. NEWTON-RAPHSON-Verfahren

Das Prinzip der virtuellen Arbeit ergibt in der Regel ein nicht-lineares Funktional in \mathbf{u} . Um eine nicht-lineare Gleichung zu lösen wird das NEWTON-RAPHSON-Linearisierungsverfahren angewendet (siehe Bonet und Wood, 1997, Kap. 6 und Holzapfel, 2000, Kap. 8). Das nicht-lineare Problem wird durch viele Linearisierungen ersetzt. In jeder Iteration wird ein lineares Problem gelöst (siehe Marsden und Hughes, 1994, Kap. 4). Es wird das Funktional Π definiert, das von \mathbf{u} und $\delta \mathbf{u}$ abhängt. Da bezüglich \mathbf{u} linearisiert wird, ist $\delta \mathbf{u}$ für die Linearisierung nur ein Parameter, sodass seine Abhängigkeit nicht explizit erwähnt wird. Aus

dem Prinzip der virtuellen Arbeit folgt:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \delta W^{\text{int}} - \delta W^{\text{ext}} = 0 .$$

Um die Nullstelle zu bestimmen wird Π in eine TAYLOR-Reihe um die Stelle \mathbf{u} entwickelt und so ein Schritt $\Delta \mathbf{u}$ in Richtung Nullstelle gemacht:

$$\Pi(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) + \Delta \Pi(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{u}) .$$

Die Änderung $\Delta \Pi$ ist wiederum die Richtungsableitung nach GÂTEAUX:

$$\Delta \Pi = \mathcal{D}_{\Delta \mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u} .$$

Die TAYLOR-Reihe wird nach dem ersten Glied abgebrochen. Im Idealfall befindet sich $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$ im Nullpunkt. Um $\Delta \mathbf{u}$ zu bestimmen, muss das folgende lineare System für $\Delta \mathbf{u}$ gelöst werden:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u} = \Pi(\mathbf{u}) . \quad (\text{E.4})$$

Das Vorgehen ist in Abb. E.3 schematisch dargestellt. Es wird mit einer anfäng-

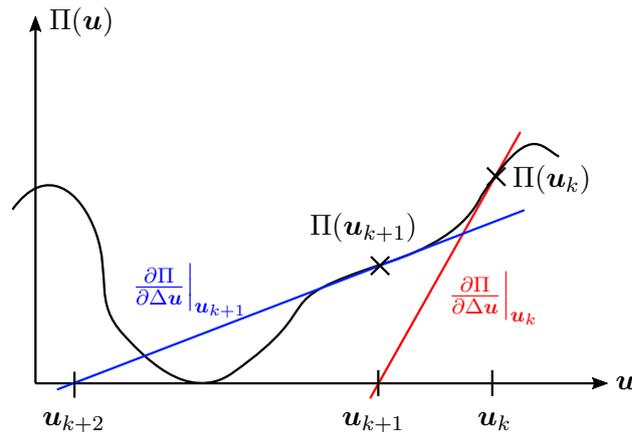


Abb. E.3.: Schematische Darstellung des NEWTON-RAPHSON-Algorithmus für zwei Iterationsschritte beginnend mit \mathbf{u}_k .

lichen Schätzung \mathbf{u}_0 begonnen und der Anstieg $\partial \Pi / \partial \Delta \mathbf{u}$ bestimmt. Damit wird $\Delta \mathbf{u}$ aus Gl. (E.4) berechnet und ein Schritt in Richtung Nullstelle $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}$ gemacht. Dieses Prozedere wird solange durchgeführt, bis der Betrag der Änderung $\|\Delta \mathbf{u}\|$ kleiner ist als eine definierte Toleranz. In Abb. E.3 ist das Prozedere für eine Schätzung \mathbf{u}_k dargestellt.

F. Daten des *Preliminary Reference Earth Model*

Die in den Simulationen verwendeten Materialdaten des PREM sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

r [km]	ρ [g/cm ³]	v_{PV} [km/s]	v_{PH} [km/s]	v_{SV} [km/s]	v_{SH} [km/s]	η [–]
0	1,02	1,45	1,45	0	0	1
1	1,02	1,45	1,45	0	0	1
2	1,02	1,45	1,45	0	0	1
3	1,02	1,45	1,45	0	0	1
3	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
4	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
5	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
6	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
7	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
8	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
9	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
10	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
11	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
12	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
13	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
14	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
15	2,6	5,8	5,8	3,2	3,2	1
15	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
16	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
17	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
18	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
19	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
20	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
21	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
22	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
23	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
24,4	2,9	6,8	6,8	3,9	3,9	1
24,4	3,38075	8,02206	8,19032	4,39602	4,6118	0,90039
25	3,38068	8,02138	8,18988	4,39616	4,61126	0,90062
26	3,38057	8,02024	8,18916	4,39639	4,61037	0,90101

r [km]	ρ [g/cm ³]	v_{PV} [km/s]	v_{PH} [km/s]	v_{SV} [km/s]	v_{SH} [km/s]	η [—]
27	3,38047	8,01911	8,18843	4,39662	4,60947	0,9014
28	3,38036	8,01798	8,18771	4,39685	4,60857	0,90179
29	3,38025	8,01684	8,18698	4,39708	4,60767	0,90218
30	3,38014	8,01571	8,18626	4,39731	4,60678	0,90257
31	3,38003	8,01458	8,18553	4,39754	4,60588	0,90296
32	3,37992	8,01345	8,18481	4,39777	4,60498	0,90335
33	3,37981	8,01231	8,18408	4,398	4,60408	0,90373
34	3,3797	8,01118	8,18336	4,39823	4,60319	0,90412
35	3,3796	8,01005	8,18263	4,39846	4,60229	0,90451
40	3,37905	8,00438	8,17901	4,39962	4,5978	0,90646
45	3,37851	7,99872	8,17539	4,40077	4,59332	0,9084
50	3,37797	7,99305	8,17176	4,40192	4,58883	0,91035
60	3,37688	7,98172	8,16452	4,40422	4,57985	0,91424
70	3,37579	7,97039	8,15727	4,40653	4,57088	0,91812
80	3,37471	7,95906	8,15002	4,40883	4,5619	0,92201
80	3,37471	7,95906	8,15002	4,40883	4,5619	0,92201
90	3,37362	7,94773	8,14278	4,41113	4,55293	0,9259
100	3,37253	7,93641	8,13553	4,41344	4,54396	0,92979
110	3,37145	7,92508	8,12828	4,41574	4,53498	0,93368
120	3,37036	7,91375	8,12103	4,41805	4,52601	0,93757
130	3,36927	7,90242	8,11379	4,42035	4,51703	0,94146
140	3,36818	7,89109	8,10654	4,42265	4,50806	0,94535
150	3,3671	7,87976	8,09929	4,42496	4,49908	0,94924
160	3,36601	7,86843	8,09204	4,42726	4,49011	0,95313
170	3,36492	7,8571	8,0848	4,42957	4,48113	0,95702
180	3,36384	7,84577	8,07755	4,43187	4,47216	0,96091
190	3,36275	7,83444	8,0703	4,43417	4,46319	0,96479
200	3,36166	7,82311	8,06306	4,43648	4,45421	0,96868
210	3,36058	7,81178	8,05581	4,43878	4,44524	0,97257
220	3,35949	7,80045	8,04856	4,44109	4,43626	0,97646
220	3,43577	8,55895	8,55895	4,6439	4,6439	1
230	3,44175	8,57819	8,57819	4,6509	4,6509	1
240	3,44772	8,59743	8,59743	4,6579	4,6579	1
250	3,45369	8,61666	8,61666	4,6649	4,6649	1
260	3,45966	8,6359	8,6359	4,6719	4,6719	1
270	3,46563	8,65514	8,65514	4,6789	4,6789	1
280	3,4716	8,67438	8,67438	4,6859	4,6859	1
290	3,47758	8,69362	8,69362	4,6929	4,6929	1
300	3,48355	8,71286	8,71286	4,6999	4,6999	1
310	3,48952	8,7321	8,7321	4,7069	4,7069	1
320	3,49549	8,75133	8,75133	4,7139	4,7139	1

r [km]	ρ [g/cm ³]	v_{PV} [km/s]	v_{PH} [km/s]	v_{SV} [km/s]	v_{SH} [km/s]	η [—]
330	3,50146	8,77057	8,77057	4,7209	4,7209	1
340	3,50743	8,78981	8,78981	4,7279	4,7279	1
350	3,51341	8,80905	8,80905	4,7349	4,7349	1
360	3,51938	8,82829	8,82829	4,7419	4,7419	1
370	3,52535	8,84753	8,84753	4,7489	4,7489	1
380	3,53132	8,86677	8,86677	4,7559	4,7559	1
390	3,53729	8,886	8,886	4,7629	4,7629	1
400	3,54326	8,90524	8,90524	4,7699	4,7699	1
400	3,72375	9,13392	9,13392	4,93249	4,93249	1
410	3,73635	9,18511	9,18511	4,96166	4,96166	1
420	3,74895	9,23631	9,23631	4,99083	4,99083	1
430	3,76156	9,2875	9,2875	5,02	5,02	1
440	3,77416	9,3387	9,3387	5,04918	5,04918	1
450	3,78677	9,38989	9,38989	5,07835	5,07835	1
460	3,79937	9,44109	9,44109	5,10752	5,10752	1
470	3,81197	9,49228	9,49228	5,13669	5,13669	1
480	3,82458	9,54348	9,54348	5,16586	5,16586	1
490	3,83718	9,59468	9,59468	5,19504	5,19504	1
500	3,84978	9,64587	9,64587	5,22421	5,22421	1
510	3,86239	9,69707	9,69707	5,25338	5,25338	1
520	3,87499	9,74826	9,74826	5,28255	5,28255	1
530	3,88759	9,79946	9,79946	5,31173	5,31173	1
540	3,9002	9,85065	9,85065	5,3409	5,3409	1
550	3,9128	9,90185	9,90185	5,37007	5,37007	1
560	3,92541	9,95304	9,95304	5,39924	5,39924	1
570	3,93801	10,00424	10,00424	5,42841	5,42841	1
580	3,95061	10,05543	10,05543	5,45759	5,45759	1
590	3,96322	10,10663	10,10663	5,48676	5,48676	1
600	3,97582	10,15783	10,15783	5,51593	5,51593	1
600	3,97582	10,15776	10,15776	5,51602	5,51602	1
610	3,97815	10,17325	10,17325	5,52376	5,52376	1
620	3,98048	10,18874	10,18874	5,5315	5,5315	1
630	3,98281	10,20422	10,20422	5,53924	5,53924	1
640	3,98514	10,21971	10,21971	5,54699	5,54699	1
650	3,98746	10,2352	10,2352	5,55473	5,55473	1
660	3,98979	10,25069	10,25069	5,56247	5,56247	1
670	3,99212	10,26617	10,26617	5,57021	5,57021	1
670	4,38074	10,75132	10,75132	5,94513	5,94513	1
685,3	4,39029	10,79897	10,79897	5,98986	5,98986	1
735,3	4,42128	10,95459	10,95459	6,13609	6,13609	1
771	4,4432	11,0656	11,0656	6,24054	6,24054	1

r [km]	ρ [g/cm ³]	v_{PV} [km/s]	v_{PH} [km/s]	v_{SV} [km/s]	v_{SH} [km/s]	η [–]
771	4,4432	11,06559	11,06559	6,24039	6,24039	1
785,3	4,45194	11,09179	11,09179	6,25067	6,25067	1
835,3	4,48228	11,18192	11,18192	6,28608	6,28608	1
885,3	4,51232	11,26984	11,26984	6,32065	6,32065	1
935,3	4,54206	11,35563	11,35563	6,35442	6,35442	1
985,3	4,5715	11,43936	11,43936	6,38742	6,38742	1
1035,3	4,60067	11,5211	11,5211	6,41967	6,41967	1
1085,3	4,62956	11,60095	11,60095	6,4512	6,4512	1
1135,3	4,65819	11,67896	11,67896	6,48204	6,48204	1
1185,3	4,68656	11,75523	11,75523	6,5122	6,5122	1
1235,3	4,71469	11,82983	11,82983	6,54173	6,54173	1
1285,3	4,74259	11,90283	11,90283	6,57064	6,57064	1
1335,3	4,77025	11,97431	11,97431	6,59897	6,59897	1
1385,3	4,7977	12,04435	12,04435	6,62674	6,62674	1
1435,3	4,82493	12,11304	12,11304	6,65398	6,65398	1
1485,3	4,85196	12,18043	12,18043	6,68071	6,68071	1
1535,3	4,87881	12,24662	12,24662	6,70696	6,70696	1
1585,3	4,90547	12,31167	12,31167	6,73276	6,73276	1
1635,3	4,93195	12,37567	12,37567	6,75813	6,75813	1
1685,3	4,95827	12,4387	12,4387	6,78311	6,78311	1
1735,3	4,98443	12,50083	12,50083	6,80771	6,80771	1
1785,3	5,01045	12,56213	12,56213	6,83197	6,83197	1
1835,3	5,03633	12,62269	12,62269	6,85592	6,85592	1
1885,3	5,06208	12,68258	12,68258	6,87957	6,87957	1
1935,3	5,0877	12,74188	12,74188	6,90296	6,90296	1
1985,3	5,11322	12,80067	12,80067	6,92611	6,92611	1
2035,3	5,13863	12,85902	12,85902	6,94906	6,94906	1
2085,3	5,16395	12,91702	12,91702	6,97182	6,97182	1
2135,3	5,18919	12,97473	12,97473	6,99442	6,99442	1
2185,3	5,21434	13,03224	13,03224	7,0169	7,0169	1
2235,3	5,23944	13,08963	13,08963	7,03927	7,03927	1
2285,3	5,26447	13,14696	13,14696	7,06157	7,06157	1
2335,3	5,28945	13,20432	13,20432	7,08382	7,08382	1
2385,3	5,3144	13,26179	13,26179	7,10605	7,10605	1
2435,3	5,33931	13,31944	13,31944	7,12828	7,12828	1
2485,3	5,3642	13,37735	13,37735	7,15055	7,15055	1
2535,3	5,38908	13,4356	13,4356	7,17287	7,17287	1
2585,3	5,41395	13,49426	13,49426	7,19529	7,19529	1
2635,3	5,43883	13,55341	13,55341	7,21781	7,21781	1
2685,3	5,46372	13,61313	13,61313	7,24048	7,24048	1
2735,3	5,48863	13,6735	13,6735	7,26331	7,26331	1

r [km]	ρ [g/cm ³]	v_{PV} [km/s]	v_{PH} [km/s]	v_{SV} [km/s]	v_{SH} [km/s]	η [—]
2741	5,49148	13,68042	13,68042	7,26593	7,26593	1
2741	5,49148	13,68044	13,68044	7,26597	7,26597	1
2785,3	5,51358	13,69098	13,69098	7,26563	7,26563	1
2835,3	5,53856	13,70302	13,70302	7,2652	7,2652	1
2885,3	5,5636	13,71522	13,71522	7,26471	7,26471	1
2891	5,56646	13,71662	13,71662	7,26465	7,26465	1
2891	9,90344	8,06479	8,06479	0	0	1
2971	10,02942	8,19943	8,19943	0	0	1
3071	10,18136	8,36024	8,36024	0	0	1
3171	10,32727	8,51302	8,51302	0	0	1
3271	10,46729	8,65809	8,65809	0	0	1
3371	10,60153	8,79577	8,79577	0	0	1
3471	10,73013	8,92636	8,92636	0	0	1
3571	10,85322	9,05019	9,05019	0	0	1
3671	10,97092	9,16756	9,16756	0	0	1
3771	11,08336	9,2788	9,2788	0	0	1
3871	11,19067	9,38422	9,38422	0	0	1
3971	11,29298	9,48413	9,48413	0	0	1
4071	11,39042	9,57885	9,57885	0	0	1
4149,5	11,46358	9,64977	9,64977	0	0	1
4171	11,48311	9,66869	9,66869	0	0	1
4271	11,57119	9,75397	9,75397	0	0	1
4371	11,65478	9,835	9,835	0	0	1
4471	11,73401	9,9121	9,9121	0	0	1
4571	11,809	9,98558	9,98558	0	0	1
4671	11,87989	10,05576	10,05576	0	0	1
4771	11,94681	10,12295	10,12295	0	0	1
4871	12,00988	10,18747	10,18747	0	0	1
4971	12,06923	10,24963	10,24963	0	0	1
5071	12,12499	10,30975	10,30975	0	0	1
5149,5	12,16633	10,35572	10,35572	0	0	1
5149,5	12,76361	11,02826	11,02826	3,50431	3,50431	1
5153,9	12,76595	11,02994	11,02994	3,50549	3,50549	1
5171	12,77495	11,03642	11,03642	3,51002	3,51002	1
5271	12,82503	11,07249	11,07249	3,53522	3,53522	1
5371	12,87076	11,10541	11,10541	3,55823	3,55823	1
5471	12,91213	11,1352	11,1352	3,57905	3,57905	1
5571	12,94914	11,16186	11,16186	3,59767	3,59767	1
5671	12,98181	11,18537	11,18537	3,61411	3,61411	1
5771	13,01011	11,20576	11,20576	3,62835	3,62835	1
5871	13,03406	11,223	11,223	3,64041	3,64041	1

r [km]	ρ [g/cm ³]	v_{PV} [km/s]	v_{PH} [km/s]	v_{SV} [km/s]	v_{SH} [km/s]	η [—]
5971	13,05366	11,23711	11,23711	3,65027	3,65027	1
6071	13,0689	11,24809	11,24809	3,65794	3,65794	1
6171	13,07979	11,25593	11,25593	3,66342	3,66342	1
6271	13,08632	11,26063	11,26063	3,6667	3,6667	1
6371	13,0885	11,2622	11,2622	3,6678	3,6678	1

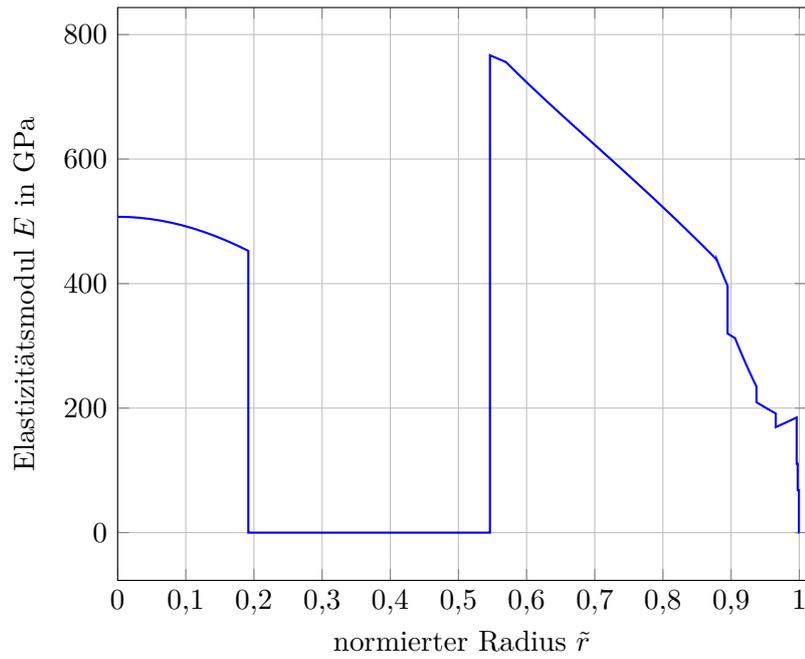


Abb. F.1.: Elastizitätsmodul für die Erde.

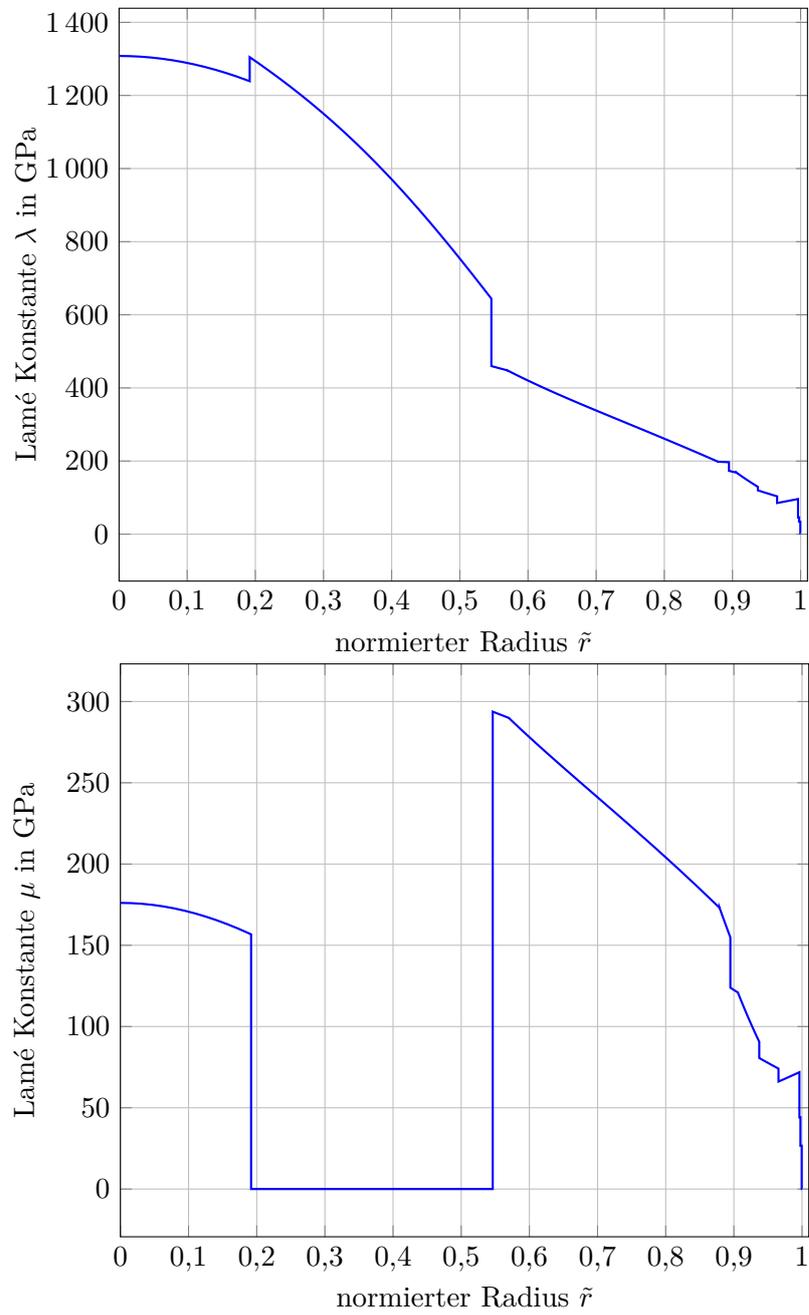


Abb. F.2.: Elastische LAMÉ-Konstanten für eine isotrope Erde.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung der Deformation durch die Eigengravitation.	7
2.2	Normierte Verschiebung $\tilde{u}_r = u_r/R_a$ des geometrisch linearen Modells mit anfänglich konstanter Massendichte.	12
2.3	Komponenten des Dehnungstensors \mathbf{E}^{lin} des geometrisch linearen Modells der Erde nach HOOKE.	13
2.4	Normierte Spannungskomponenten $\tilde{T}_{rr} = T_{rr}/K$ und $\tilde{T}_{\varphi\varphi} = \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} = T_{\varphi\varphi}/K = T_{\vartheta\vartheta}/K$ über den normierten Radius.	13
2.5	Dimensionslose Dichteverteilung für den geometrisch linearen Fall.	15
2.6	Normierte Verschiebungen $\tilde{u}_r = u_r/r_E$ über den normierten Radius $\tilde{r} = r/r_E$ für ein Zwei-Schalen-Modell der Erde. Dabei wird der innere Kern aus Eisen ($E_i = 210$ GPa, $\nu_i = 0,3$, $\rho_i = 1000$ kg/m ³) und der Mantel aus Silikat ($E_o = 100$ GPa, $\nu_o = 0,17$, $\rho_o = 4600$ kg/m ³) modelliert. Zum Vergleich ist die Lösung für die homogene Kugel aus Eisen dargestellt (Müller und Weiss, 2016).	17
2.7	Normierte radiale Spannungen $T_{rr}/\lambda_i + 2\mu_i$ über den normierten Radius $\tilde{r} = r/r_E$ für ein Zwei-Schalen-Modell der Erde. Dabei wird der innere Kern aus Eisen ($E_i = 210$ GPa, $\nu_i = 0,3$, $\rho_i = 1000$ kg/m ³) und der Mantel aus Silikat ($E_o = 100$ GPa, $\nu_o = 0,17$, $\rho_o = 4600$ kg/m ³) modelliert. Zum Vergleich ist die Lösung für die homogene Kugel aus Eisen dargestellt (Müller und Weiss, 2016).	18
2.8	Drei-Schalen-Modell der Erde bestehend aus dem inneren Kern (vorwiegend festes Eisen Fe _s), dem äußeren Kern (vorwiegend flüssiges Eisen Fe _l) und dem Mantel (vorwiegend festes Gestein SiO ₂).	20
2.9	Schematische Darstellung des Homogenisierungsverfahrens.	20
2.10	Normierte Verschiebung $\tilde{u}_r = u_r/r_E$ des homogenisierten geometrisch linearen Modells mit anfänglich konstanten Dichte $\rho_E = 5515$ kg/m ³ , Außenradius $r_E = 6378$ km und den effektiven elastischen Konstanten $K_E = 517$ GPa und $\nu_E = 0,378$ im Vergleich zur analytischen Lösung der homogenen Erde aus Eisen ($K_{\text{Fe}} = 175$ GPa, $\nu_{\text{Fe}} = 0,3$) und der Zwei-Schicht-Lösung Fe-SiO ₂ aus Müller und Weiss, 2016.	23

2.11	Mit aktuellem Außenradius $r_E = 6378$ km normierte Verschiebung der Erde für $\nu = 0,38$ mit inkrementell veränderlichem Parameter $\alpha_K = 0,1 \dots 1,2$	30
2.12	Mit aktueller mittlerer Dichte $\rho_E = 5515$ kg/m ³ normierte Dichteverteilung der Erde für $\nu = 0,38$ mit inkrementell veränderlichem Parameter $\alpha_K = 0,1 \dots 1,2$	31
2.13	Die radiale Gravitationsbeschleunigung berechnet aus den PREM-Daten.	34
2.14	Die radiale Gravitationsbeschleunigung berechnet aus den PREM-Daten.	35
2.15	Schematischer Schalenaufbau; Die Verschiebungen werden von innen nach außen und die Spannungen von außen nach innen weitergegeben.	37
2.16	Normierte radiale Verschiebung dargestellt über den normierten Radius.	37
2.17	Mit Kompressionsmodul K_E normierte Spannungskomponenten über den normierten Radius \tilde{r} . Im Kern $\tilde{r} < 0,55$ liegen die Verläufe für \tilde{T}_{rr} und $\tilde{T}_{\vartheta\vartheta}$ übereinander.	38
2.18	EULER-ALMANSI-Dehnungen über den normierten Radius \tilde{r} für eine geometrisch nicht-lineare Simulation.	39
3.1	Ausgangskonfiguration des Klotzes mit kartesischer Basis. . . .	41
3.2	Skizze des simulierten Klotzes mit verwendeter Bezeichnung. . .	43
3.3	Gegenüberstellung der analytischen Lösung für den hyperelastischen Klotz nach ST. VENANT-KIRCHHOFF und der entsprechenden FE-Simulation.	45
3.4	Unterschiede bei der Implementierung der Simulation. Bei Vorgabe von Verschiebungen, d.h. α , ist das Resultat stets eindeutig. Für die Definition von Spannungsrandbedingungen existiert ein mehrdeutiger Bereich.	47
3.5	Zunehmende Deformation des Klotzes durch zunehmende Druckbelastung.	48
3.6	Unphysikalische Lösung des elementaren Würfels bei negativen α Werten. Der undeformierte Klotz ist als Drahtgitter dargestellt. Bei genügend hoher Druckkraft auf die rechte Fläche wird der Klotz umgestülpt.	48
3.7	Konvexe skalare Funktion mit Kontrollgerade.	49
3.8	Vergleich der verschiedenen Formänderungsenergiedichten für unterschiedliche Parameter x nach Ciarlet, 1988.	51
3.9	Vergleich der verschiedenen Formänderungsenergiedichten für das kompressible MOONEY-RIVLIN-Material nach Bertram, 2005 und Ciarlet, 1988.	53

3.10	Verschiebung \mathbf{u} dargestellt in der Bezugsplatzierung als LAGRANGE-Funktion $\mathbf{u}_L(\bar{\mathbf{x}}, t)$ und der aktuellen Platzierung als EULER-Funktion $\mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t)$	55
3.11	Radiale Verschiebung für ausgewählte Werte des Parameters x für die hyperelastische MOONEY-RIVLIN-Simulation einer eigengravitierenden Erde mit PREM-Materialdaten.	58
3.12	Dehnungskomponenten E_{rr} und $E_{\vartheta\vartheta} = E_{\varphi\varphi}$ für die hyperelastische MOONEY-RIVLIN-Simulation einer eigengravitierenden Erde mit PREM-Materialdaten.	59
3.13	Konvergenzanalyse für die hyperelastische Erde mit PREM-Daten mit 10 Knoten bis 10240 Knoten.	59
3.14	Vergleich der aktuellen Massendichte nach PREM und der berechneten Massendichte in der Bezugsplatzierung.	60
3.15	Hauptspannungen T_{rr} und $T_{\vartheta\vartheta} = T_{\varphi\varphi}$ der hyperelastischen Mooney Rivlin Materials der eigengravitierenden Erde mit PREM Daten.	62
3.16	Exemplarisches Netz aus finiten Elementen mit zwei herausgegriffenen benachbarten Zellen V_i und V_{i+1} und deren gemeinsamer Grenzfläche A_s	64
4.1	Vergleich der normierten radialen Verschiebungen für die analytische Lösung mit HOOKE, und die FEM-Simulation mit CAUCHY-ALMANSI und MOONEY-RIVLIN mit PREM-Materialdaten.	67
4.2	Vergleich der normierten radialen Spannungen für die analytische Lösung mit Hooke, und die FEM-Simulation mit CAUCHY-ALMANSI und MOONEY-RIVLIN mit PREM-Materialdaten.	68
A.1	Kartesische Basis und Koordinaten.	i
A.2	Kugelkoordinaten mit lokaler Basis $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi\}$	ii
B.1	Deformationsgradient als Vermittler zwischen Bezugsplatzierung und aktueller Platzierung.	vii
B.2	Projektion eines beliebigen Vektors \mathbf{a} durch den Eigenprojektor \mathbf{P}_1 in \mathbf{n}_1 -Richtung.	xi
B.3	Beobachterwechsel im Sinne der EUKLIDischen Transformation.	xiii
C.1	Gebiet mit singulärer Fläche ohne eigene Flächendichte.	xxvii
C.2	Gedachte Pillendose um einen Punkt P der singulären Fläche A_s	xxix
C.3	Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen m und m'	xxxii
C.4	Potential an der Stelle \mathbf{x} einer kontinuierlich verteilten felderzeugenden Masse mit Dichte $\rho(\mathbf{x}')$	xxxii

D.1	Veranschaulichung materieller Symmetrie: Modifikation \mathbf{A} mit anschließender Deformation \mathbf{F} führt zum gleichen Resultat wie alleinige Deformation \mathbf{F}	xli
D.2	Kraft-Totallängenänderungs-Diagramm zur Bestimmung von mechanischen Materialparametern aus Macherauch und Zoch, 2011, Kap. 23.	xliii
D.3	Normierte Massendichte $\tilde{\rho}$ im Erdinneren aufgetragen über den normierten Erdradius.	xlvi
D.4	Kompressionsmodul und Querkontraktionszahl über den normierten Radius \tilde{r} nach PREM.	xlix
E.1	Skizze für das Gebiet \bar{V} mit DIRICHLET- und NEUMANN-Rand.	lii
E.2	Lineare LAGRANGE-Elemente erster Ordnung in 1D, 2D und 3D (aus Logg, Mardal und Wells, 2012).	liv
E.3	Schematische Darstellung des NEWTON-RAPHSON-Algorithmus für zwei Iterationsschritte beginnend mit \mathbf{u}_k	lvi
F.1	Elastizitätsmodul für die Erde.	lxii
F.2	Elastische LAMÉ-Konstanten für eine isotrope Erde.	lxiii

Tabellenverzeichnis

2.1	Gemittelte elastische Konstanten aus PREM für die relevanten Schichten der Homogenisierung.	23
D.1	Die über das jeweilige Schichtvolumen gemittelten Kompressionsmodul-Werte.	1

Literatur

- Anzellini, S. u. a. (2013). „Melting of iron at Earth’s inner core boundary based on fast X-ray diffraction“. In: *Science* 340.6131, S. 464–466.
- Argyris, J. H., I. Fried und D. W. Scharpf (1968). „The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method“. In: *The Aeronautical Journal* 72.692, S. 701–709.
- Babich, S. Y. und A. Guz’ (1978). „Surface waves on a sphere with initial stresses“. In: *International Applied Mechanics* 14.1, S. 1–6.
- Ball, J. M. (1976). „Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity“. In: *Archive for rational mechanics and Analysis* 63.4, S. 337–403.
- Bathe, K.-J. (2008). *Finite element method*. Wiley Online Library.
- Bertram, A. (2005). *Elasticity and plasticity of large deformations*. Springer.
- Bonet, J. und R. D. Wood (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge university press.
- Bose, S. und P. Chattarji (1963). „A note on the finite deformation in the interior of the Earth“. In: *Bull. Calcutta Math. Soc* 55.1, S. 11–18.
- Bower, A. F. (2009). *Applied mechanics of solids*. CRC press.
- Chaljub, E. u. a. (2007). „Spectral-element analysis in seismology“. In: *Advances in Geophysics* 48, S. 365–419.
- Chandrasekhar, S. (1995). *Newton’s Principia for the common reader*. Clarendon Press Oxford.
- Chattarji, P. (1953). „Finite deformation in the interior of the Earth“. In: *Bull. Calcutta Math. Soc* 45, S. 113–118.
- Chree, C. (1889). „The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical co-ordinates their solution and application“. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 14, S. 250.
- Ciarlet, P. G. (1988). *Mathematical Elasticity – Volume I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland. ISBN: 0444702598.
- Dziewonski, A. M. und D. L. Anderson (1987). „Preliminary reference Earth model“. In: *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 25, S. 297–356.
-

- Geller, R. J. (1988). „Elastodynamics in a laterally heterogeneous, self-gravitating body“. In: *Geophysical Journal International* 94.2, S. 271–283.
- Griffiths, D. J. (1999). „Introduction to electrodynamics“. In: *Prentice Hall of India*.
- Henke, H. (2011). *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Springer-Verlag.
- Holzappel, G. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd.
- Hoskins, L. (1910). „The strain of a gravitating, compressible elastic sphere“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 11.2, S. 203–248.
- (1920). „The strain of a gravitating sphere of variable density and elasticity“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 21.1, S. 1–43.
- Hughes, T. J. R. (1987). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Jeffreys, H. und S. Singer (1959). „The Earth: its origin, history and physical constitution“. In: *Physics Today* 12, S. 61.
- Lofink, P. und W. H. Müller (2015). „Finite element investigation of the gravitational and rotational deformation of the Earth“. In: *Proceedings of the International Summer School Conference APM*, S. 228–235.
- Logg, A., K.-A. Mardal und G. Wells (2012). *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*. Bd. 84. Springer Science & Business Media.
- Love, A. E. H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4. Aufl. New York Dover.
- Love, A. E. H. (1911). *Some Problems of Geodynamics: Being an Essay to which the Adams Prize in the University of Cambridge was Adjudged in 1911*. CUP Archive.
- Ma, Y. u. a. (2004). „In situ X-ray diffraction studies of iron to Earth-core conditions“. In: *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 143, S. 455–467.
- Macherauch, E. und H.-W. Zoch (2011). *Praktikum in Werkstoffkunde: 91 ausführliche Versuche aus wichtigen Gebieten der Werkstofftechnik*. Springer-Verlag.
- Mao, H. u. a. (1990). „Static compression of iron to 300 GPa and Fe_{0.8}Ni_{0.2} alloy to 260 GPa: Implications for composition of the core“. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 95.B13, S. 21737–21742.
- Mao, W. L. u. a. (2008). „Experimental determination of the elasticity of iron at high pressure“. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 113.B9.

- Marsden, J. E. und T. J. R. Hughes (1994). *Mathematical foundations of elasticity*. Courier Corporation.
- Müller, W. H. (2011). *Streifzüge durch die Kontinuumstheorie*. Berlin: Springer. ISBN: 978-3-642-198694.
- (2014). *An expedition to continuum theory*. Springer.
- Müller, W. H. und F. Ferber (2008). *Technische Mechanik für Ingenieure*. 3., neu bearbeitete Auflage. Carl Hanser Verlag.
- Müller, W. H. und W. Weiss (2016). *The State of Deformation in Earthlike Self-Gravitating Objects*. Springer.
- Müller, W. H. und P. Lofink (2014). „The Movement of the Earth: Modelling the Flattening Parameter“. In: *Lecture Notes of TICMI*. Bd. 15. Tbilisi University Press, S. 1–40.
- Pan, S. (1963). „Finite deformation in the interior of the Earth“. In: *Proc. Natl. Inst. Sci. India*. Bd. 29. 5, S. 561–577.
- Papanicolopoulos, S.-A. und A. Zervos (2012). „A method for creating a class of triangular C1 finite elements“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 89.11, S. 1437–1450.
- Papanicolopoulos, S.-A., A. Zervos und I. Vardoulakis (2009). „A three-dimensional C1 finite element for gradient elasticity“. In: *International journal for numerical methods in engineering* 77.10, S. 1396–1415.
- Richter, H. (1948). „Das isotrope Elastizitätsgesetz“. In: *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 28.7-8, S. 205–209.
- Seth, B. (1935). „Finite strain in elastic problems“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 234.738, S. 231–264.
- (1939a). „XLI. Some problems of finite strain.—II“. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.183, S. 449–452.
- (1939b). „XXVIII. Some problems of finite strain.—I“. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, S. 286–293.
- Sevostianov, I. und M. Kachanov (2007). „Effect of interphase layers on the overall elastic and conductive properties of matrix composites. Applications to nanosize inclusion“. In: *International Journal of Solids and Structures* 44.3, S. 1304–1315.
- Stratton, J. A. (1941). *Electromagnetic theory. International series in pure and applied physics*. McGraw-Hill Book Company: New York.

- Truesdell, C. und R. Toupin (1960). „Principles of classical mechanics and field theory“. In: *Handbuch der Physik* 3.1, S. 226–793.
- Valette, B. (1986). „About the influence of pre-stress upon adiabatic perturbations of the Earth“. In: *Geophysical Journal International* 85.1, S. 179–208.
- Zienkiewicz, O. C. und R. L. Taylor (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*. Butterworth-heinemann.