

Entwicklung von Fehlererkennungs-, Zustandsschätzungs-, Regelungs- und ganzzahligen Optimalsteuerungsmethoden für pulsierende, detonative Brennkammern anhand eines akustischen Ersatzsystems

vorgelegt von
Dipl.-Ing.
Sascha Dominik Wolff
geb. in Berlin

von der Fakultät III – Prozesswissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Matthias Kraume
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Rudibert King
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Jonas Moeck

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 17. Dezember 2018

Berlin 2019

Kurzfassung

Aktuelle Forschungsbestrebungen zur Effizienzsteigerung von Gasturbinen verfolgen häufig den Ansatz eines Wechsels des zugrundeliegenden Kreisprozesses weg vom Brayton- hin zum Humphrey-Kreisprozess. Eine vielversprechende Möglichkeit, diesen Kreisprozess technisch zu realisieren, ist durch den Einsatz einer pulsierenden, druckerhöhenden Detonationsbrennkammer gegeben. Eine solche Brennkammer besteht üblicherweise aus einer Vielzahl von kreisförmig angeordneten Detonationsrohren, welche über ein ringförmiges Plenum an die nachgeschaltete Turbine angeschlossen sind. Durch den Einsatz von pulsierend betriebenen Detonationsrohren im Umfeld der benachbarten Turbokomponenten der Gasturbine ergibt sich jedoch eine Vielzahl von Herausforderungen.

Die vorliegende Arbeit liefert einen Forschungsbeitrag zur Thematik, wie mit einigen dieser Herausforderungen, durch eine geeignete Feuersynchronisation der Detonationsrohre, umgegangen werden kann, um so einen zuverlässigen Betrieb einer Gasturbine mit pulsierender Detonationsbrennkammer zu ermöglichen. Die dabei untersuchten Herausforderungen sind

- die Minimierung von Druckschwankungen im Ringspaltplenum, um möglichst homogene Anströmbedingungen für eine nachgeschaltete Turbine zu realisieren,
- die zuverlässige Wiederbefüllung der Detonationsrohre mit Frischluft vom Verdichter gegen den Mitteldruck einer druckerhöhenden Brennkammer,
- die Fehlererkennung von ausgefallenen Detonationsrohren mittels Drucksensoren im nachgeschalteten Plenum.

Zu diesem Zweck wird ein rein akustischer Ersatzprüfstand vorgestellt, welcher diese Herausforderungen im Rahmen einer einfach zu handhabenden Umgebung experimentell abbildet. Dabei werden die Detonationsrohre einer pulsierenden Detonationsbrennkammer durch Lautsprecher ersetzt, welche die akustische Signatur von Detonationsereignissen imitieren. Diese Lautsprecher sind an ein Ringspaltplenum angeschlossen, welches so gestaltet ist, dass die akustischen Randbedingungen zwischen einer realen Detonationsbrennkammer und dem vorgeschalteten Verdichter bzw. der nachgeschalteten Turbine möglichst gut abgebildet werden.

Für diesen Prüfstand werden verschiedene Modellidentifikationsmethoden vorgestellt, um anschließend auf diesen Modellen basierende Regelungs- und Steuerungsmethoden zur Feuersynchronisation vorzustellen und experimentell zu validieren. Die dabei verwendeten Ansätze sind ganzzahlige Optimalsteuerungsmethoden sowie Extremwertregelungs- und Zustandsschätzmethoden. In verschiedenen Experimenten wird gezeigt, dass mit diesen Ansätzen sowohl eine signifikante Minimierung von Druckschwankungen erzielt werden kann als auch der Wiederbefüllungsvorgang von Detonationsrohren unterstützt werden kann.

Weiterhin werden verschiedene Fehlererkennungsmethoden entwickelt, um Fehlzündungen von Detonationsrohren im laufenden Betrieb zu erkennen. Dabei kommen sowohl auf physikalischen Modellen basierende Mehrfilterverfahren als auch rein datengetriebene neuronale Netze zur Anwendung. Beide Verfahren werden für verschiedenste Fehlerfälle experimentell bezüglich ihrer Klassifikationsgüte verglichen.

Abschließend wird eine Zustandsschätzmethodik vorgestellt und in numerischen Simulationen validiert, welche es erlaubt die fluiddynamischen Zustände innerhalb eines Detonationsrohres zwischen zwei Feuerzyklen, basierend auf einzelnen Druckmessungen, zu schätzen. Dies ermöglicht potentiell eine Rekonstruktion von experimentell nicht messbaren physikalischen Größen, was wiederum zu einem besseren Verständnis fluiddynamischer Vorgänge einer pulsierenden Verbrennung beitragen kann.

Abstract

Current research projects with the objective to enhance thermal efficiency of gas turbines propose a change of the underlying thermodynamic cycle from the Brayton cycle to the Humphrey cycle. A promising concept for a technical realization of this cycle is given by the so-called pulsed detonation combustor which exploits a pressure gain combustion process. Such a set-up potentially features a number of detonation tubes which are arranged in a circular manner and are connected to a downstream turbine via an annular plenum. However, integrating pulsating detonation tubes within the environment of the neighboring turbo components of a gas turbine causes several challenges.

This thesis contributes to the mentioned field of research by proposing firing synchronization methods that enable to tackle some of these challenges and thereby, render possible a reliable operation of a gas turbine that features a pulsating detonation combustor. The investigated challenges are

- the minimization of pressure fluctuations in the annular plenum to realize homogeneous inflow conditions for a downstream turbine,
- a reliable refilling process of the detonation tubes which have to be refilled with air from an upstream compressor against the high pressure level supplied by a pressure gain combustor,
- a detection of misfiring detonation tubes based on pressure sensors which are located in the downstream annular plenum.

A surrogate acoustic set-up is proposed that allows reproducing these challenges without the need for handling complex combustion processes. To this end, the detonation tubes of a pulsed detonation combustor are replaced by loudspeakers mimicking the acoustic signature of individual detonation events. These loudspeakers are connected to an annular plenum that is designed to capture the acoustic boundary conditions of a real detonation combustor that is integrated between an upstream compressor and a downstream turbine.

Several model identification strategies are applied to the set-up allowing a description of the acoustic behavior of the system. Based on these models, different open and closed-loop control methods are introduced to calculate firing synchronizations which are experimentally validated, accordingly. The proposed firing synchronization approaches are based on mixed-integer optimization as well as extremum seeking control and state estimation methods. A variety of different experiments are conducted demonstrating that a significant minimization of pressure fluctuations inside the annular plenum can be achieved by choosing a firing synchronization calculated based on these methods. Furthermore, it is shown that the refilling process of the detonation tubes can be supported.

Detecting misfiring of individual detonation tubes during operation is enabled by introducing appropriate fault detection strategies. A multi-filter approach exploiting a physics-based theoretical model of the test rig is applied as well as data-driven neural network. The classification quality achieved for a variety of experiments is compared for both methods.

Finally, a state estimation method is introduced which allows estimating the states of the flow field inside a detonation tube between two firing cycles based on single pressure measurements. The state estimation method is validated by numerical simulations. This approach

potentially offers a deeper insight into the flow characteristics of pulsating detonation combustion since physical quantities can be reconstructed that cannot be measured by sensors.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Problemstellung und Gliederung	4
2	Stand der Forschung	9
2.1	Druckerhöhende Verbrennung	9
2.2	Regelungs- und Fehlererkennungsmethoden	13
3	Grundlagen und Methoden	15
3.1	Euler-Gleichungen und akustische Wellengleichung	15
3.1.1	Akustische Wellengleichung	16
3.1.2	Wellengleichung in Zylinderkoordinaten	18
3.1.3	Inhomogene Wellengleichung, akustische Übertragungsfunktion und Zustandsraummodell der Ringspaltgeometrie	21
3.2	Modellierung mittels Supervektoren und Impulsantworten	27
3.3	Zustandsschätzung	29
3.3.1	Erweitertes Kalman-Filter	30
3.3.2	Sigmapunkt-Kalman-Filter	32
3.4	Modelldiskriminierung und Mehrfiltermethode	35
3.4.1	Modelldiskriminierung mittels bayesscher Wahrscheinlichkeit	35
3.4.2	Mehrfiltermethode	36
3.5	Überwachtes Lernen und neuronale Netze	37
3.5.1	Grundsätzlicher Aufbau neuronaler Netze	38
3.5.2	Überwachtes Lernen für Klassifikationsaufgaben	40
3.5.3	Erweiterte Topologien von neuronalen Netzwerken	45
3.6	Extremwertregelung	50
3.6.1	Grundsätzlicher Aufbau einer Extremwertregelung	50
3.6.2	Gradientenschätzung	51
3.7	Lineare und quadratische gemischt-ganzzahlige Optimierung	52
3.7.1	Optimierung spezieller Gütekriterien	53
4	Beschreibung des akustischen Prüfstands	55
4.1	Aufbau des akustischen Prüfstands	55
4.2	Definition und Nomenklatur von Feuermustern	56
4.3	Fehlerabschätzung zur Annahme linearer Akustik	57
5	Regelung und Steuerung von akustischen Moden am Ringspaltplenum	61
5.1	Zustandsschätzung und Extremwertregelung einzelner Druckmoden	61
5.1.1	Bestimmung sinnvoller Feuermuster	61
5.1.2	Kennfeldberechnung	63
5.1.3	Schätzung der Modenamplitude	66
5.1.4	Aufbau der Extremwertregelung und experimentelle Ergebnisse	67

5.2	Binäre Optimalsteuerung	71
5.2.1	Modell des Versuchsstands	71
5.2.2	Optimierungsproblem als quadratisches Programm	74
5.2.3	Experimentelle Ergebnisse	75
5.2.4	Diskussion zur Anwendbarkeit in einer realen Detonationsbrennkammer	81
6	Erkennen von ausgefallenen Lautsprechern am Ringspaltplenum	85
6.1	Systemidentifikation	85
6.2	Fehlererkennung mittels Mehrfiltermethode	91
6.2.1	Aufbau der Mehrfiltermethode	92
6.2.2	Beschreibung der Experimente	92
6.2.3	Experimentelle Ergebnisse	94
6.3	Fehlererkennung mittels neuronaler Netze	103
6.3.1	Zielstellung	104
6.3.2	Auswahl der Eingangsmerkmale und Aufbau des neuronalen Netzes . .	105
6.3.3	Generierung der Trainings- und Testdaten	107
6.3.4	Training des neuronalen Netzes und Qualität der Fehlererkennung . .	107
7	Zustandsschätzung für die 1-D Euler-Gleichungen	111
7.1	Detonationszyklus und Abstraktion zur Beschreibung des Zyklus mit 1-D Euler-Gleichungen	112
7.2	Euler-Gleichungen und numerischer Löser	113
7.2.1	1-D Euler-Gleichungen	113
7.3	Definition des Modells	115
7.4	Numerische Ergebnisse der Zustandsschätzung	116
7.4.1	Parameter des SPKF und gewählte Sensorpositionen	116
8	Fazit	125

Symbolverzeichnis

Große lateinische Buchstaben

\mathbf{A}_{AK}	Dynamikmatrix des akustischen Zustandsraummodells des Ringspalts
\mathbf{A}_{LS}	Dynamikmatrix des Zustandsraummodells aller Lautsprecher
$\mathbf{A}_{LS,\kappa}$	Dynamikmatrix des Zustandsraummodells des κ -ten Lautsprechers
\mathbf{A}_j	Dynamikmatrix des Systems der j -ten Modellhypothese
\mathbf{A}_ψ	Dynamikmatrix des akustischen Zustandsraummodells der ψ -te Eigenmode des Ringspalts
A	Oberfläche des akustischen Systems
\check{A}	Oberfläche des akustischen Systems als Integrationsvariable
A_l, A_m, A_{lm}	Konstanten zum Anpassen an Anfangs- und Randbedingungen
A_κ	Oberfläche des akustischen Systems, auf welcher der Quellterm f_κ wirkt
\mathbf{B}_{AK}	Aktuationsmatrix des akustischen Zustandsraummodells des Ringspalts
\mathbf{B}_{LS}	Aktuationsmatrix des Zustandsraummodells aller Lautsprecher
\mathbf{B}_j	Aktuationsmatrix des Systems der j -ten Modellhypothese
$B_{LS,\kappa}$	magnetische Flussdichte des Permanentmagneten des κ -ten Lautsprechers
B_l, B_m, B_{lm}	Konstanten zum Anpassen an Anfangs- und Randbedingungen
B_{tP}	Klassifikationsschwellwert
\mathbf{C}_{AK}	Messmatrix des akustischen Zustandsraummodells des Ringspalts
\mathbf{C}_{LS}	Messmatrix des Zustandsraummodells aller Lautsprecher
\mathbf{C}_j	Messmatrix des Systems der j -ten Modellhypothese
\mathbf{D}	Koeffizientenmatrix der linken Seite der linearen Nebenbedingung
$\check{\mathbf{D}}$	Koeffizientenmatrix der linken Seite der linearen Nebenbedingung mit ganzzahligem Parametervektor
\mathbf{D}_{gt}	Datensatz der <i>ground truth</i>
\mathbf{D}_{te}	Testdatensatz
\mathbf{D}_{tr}	Trainingsdatensatz
E	Energiedichte des Fluids
\tilde{E}	normierte Energiedichte des Fluids
\mathbf{F}	Dynamikmatrix des linearisierten Systems
\underline{F}	Vektor mit gestapelten Zustandsgrößen
$\tilde{\underline{F}}$	Vektor mit gestapelten normierten Zustandsgrößen
F_F	vorliegender Fehlerfall
$F_{LS,\kappa}$	auf die Membran des κ -ten Lautsprechers wirkende Kraft
F_M	ausgewählte Fehlerhypothese
F_{M_m}	wahrscheinlichste Modellhypothese
\mathcal{G}	fouriertransformierte Greensche Funktion
G	Greensche Funktion
\mathbf{H}	Messmatrix des linearisierten Systems
$\mathcal{H}_{\kappa j}$	Übertragungsfunktion vom κ -ten Systemeingang zum j -ten Systemausgang

Inhaltsverzeichnis

J	Gütefunktion der <i>categorical cross-entropy</i>
J_E	Gütefunktional des Extremwertreglers
J_M	Anzahl der Modellhypothesen im Mehrfilterverfahren
J_T	Summe der Fehlerquadrate von $\tilde{T} - \hat{\mu}_{\tilde{T}}$
J_{te}	Gütefunktion für den Testdatensatz
J_{tr}	Gütefunktion für den Trainingsdatensatz
J_v	Summe der Fehlerquadrate von $\tilde{v}_{x_\perp} - \hat{\mu}_{\tilde{v}_x}$
\mathbf{K}	Kalman-Matrix
\mathbf{K}_j	Kalman-Matrix des j -ten Kalman-Filters
L	Länge der Ringelemente des Ringspalts
L_{LS}	Induktivität der Spule, für alle Lautsprecher gültig
$L_{LS,\kappa}$	Induktivität der Spule des κ -ten Lautsprechers
M_f	Feuermuster
M_r	Modellhypothese des realen Prozesses
M_j	j -te Modellhypothese
$\hat{\mathbf{P}}_{a_E}$	geschätzte Kovarianzmatrix von a_E
\mathbf{P}_x	Kovarianzmatrix von \underline{x}
$\hat{\mathbf{P}}_x$	geschätzte Kovarianzmatrix von \underline{x}
\mathbf{P}_{x_j}	Kovarianzmatrix von \underline{x}_j
$\hat{\mathbf{P}}_{x_j}$	geschätzte Kovarianzmatrix von \underline{x}_j
$\hat{\mathbf{P}}_{xy}$	geschätzte Kreuzkovarianzmatrix von \underline{x} und \underline{y}
$\hat{\mathbf{P}}_y$	geschätzte Kovarianzmatrix von \underline{y}
$\hat{\mathbf{P}}_{y_j}$	geschätzte Kovarianzmatrix von \underline{y}_j
P_j	bedingte Wahrscheinlichkeit der j -ten Modellhypothese
\mathbf{Q}	Kovarianzmatrix des Systemrauschens
\mathbf{Q}_j	Kovarianzmatrix des Systemrauschens der j -ten Modellhypothese
\mathbf{R}	Kovarianzmatrix des Messrauschens
\mathbf{R}_j	Kovarianzmatrix des Messrauschens der j -ten Modellhypothese
R	Radius des äußeren Ringelements des Ringspalts
R_{LS}	elektrischer Widerstand der Spule, für alle Lautsprecher gültig
$R_{LS,\kappa}$	elektrischer Widerstand der Spule des κ -ten Lautsprechers
$\mathbf{S}^{n,\epsilon}$	zyklische Permutationsmatrix, verschiebt die Elemente eines Vektor mit n Elementen rotativ um ϵ Elemente
S_{uu}	spektrale Leistungsdichte von u_{det}
\tilde{S}_{uu}	normierte spektrale Leistungsdichte von u_{det}
\tilde{T}	Vektor mit gestapelten normierten Temperaturen des Fluids in allen numerischen Volumenelementen
T	Temperatur des Fluids
\tilde{T}	normierte Temperatur des Fluids
\bar{T}	Referenztemperatur
\underline{U}	Supervektor, beinhaltet alle zeitdiskreten Systemeingänge einer Periode
\underline{U}_{LS}	Supervektor, beinhaltet das Steuersignal aller Lautsprecher über eine Periode
$\underline{U}_{\text{det}}$	Supervektor, beinhaltet alle zeitdiskreten Werte von u_{det} über eine Periode
$\underline{U}_{\delta_{\text{dp}},j}$	Supervektor, beinhaltet alle Werte von $\underline{u}_{\delta_{\text{dp}},j}$ für eine vollständige Periode
V	Volumen des akustischen Systems

\check{V}	Volumen des akustischen Systems als Integrationsvariable
\mathbf{X}	Eingangstensor in ein <i>convolutional layer</i>
$\check{\mathbf{X}}$	Untermenge von \mathbf{X}
\mathbf{X}_{gt}	gesammelte Merkmalsvektoren der <i>ground truth</i>
\mathbf{X}_i	Merkmalstensor der i -ten Stichprobe
$\check{\mathbf{X}}_{n_{\check{\mathbf{x}}_x}}$	Menge aller betrachteten $\check{\mathbf{X}}$ in einem <i>convolutional layer</i>
\mathbf{X}_{te}	gesammelte Merkmalsvektoren des Testdatensatzes
\mathbf{X}_{tr}	gesammelte Merkmalsvektoren des Trainingsdatensatzes
\mathbf{Y}	Ausgangstensor aus einem <i>convolutional layer</i>
$\underline{\tilde{\mathbf{X}}}_{\perp}^y$	Vektor mit normierten Sensorpositionen
\mathbf{Y}_{gt}	gesammelte Klassifikationsvektoren der <i>ground truth</i>
\mathbf{Y}_{te}	gesammelte Klassifikationsvektoren des Testdatensatzes
\mathbf{Y}_{tr}	gesammelte Klassifikationsvektoren des Trainingsdatensatzes
\underline{Y}	Supervektor, beinhaltet alle zeitdiskreten Systemausgänge einer Periode
$\underline{Y}_{\delta_{\text{dp}},j}$	Supervektor, beinhaltet den Systemausgang für eine vollständige Periode, wenn das System durch $\underline{U}_{\delta_{\text{dp}},j}$ angeregt wurde

Kleine lateinische Buchstaben

a	Faktor zwischen dem Radius des äußeren und inneren Ringelements des Ringspalts
$a_1 - a_5$	Parameter, um die Zeitbereiche zur Formulierung der verschiedenen Optimierungsanforderungen an den Zeitverlauf des Drucks zu definieren
a_c	Verstärkungsfaktor der Kosinus-Mode
a_E	Amplitude der vollständig ausgebildeten Saugwelle
\hat{a}_E	geschätzte Amplitude der vollständig ausgebildeten Saugwelle
\tilde{a}_E	normierte Amplitude der vollständig ausgebildeten Saugwelle
\bar{b}	Bias
$\underline{b}_{\text{LS},\kappa}$	Aktuationsvektor des Zustandsraummodells des κ -ten Lautsprechers
$\underline{b}_{\kappa,\psi}$	Aktuationsvektor des akustischen Zustandsraummodells der ψ -te Eigenmode des Ringspalts
$\underline{c}_{\text{LS},\kappa}$	Messvektor des Zustandsraummodells des κ -ten Lautsprechers
$\underline{c}_{j,\psi}$	Messvektor des Zustandsraummodells der ψ -te Eigenmode des Ringspalts für den j -ten Systemausgang
c	Schallgeschwindigkeit
c_{LS}	Steifigkeit der Membranaufhängung, für alle Lautsprecher gültig
$c_{\text{LS},\kappa}$	Steifigkeit der Membranaufhängung des κ -ten Lautsprechers
c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
d_{LS}	geschwindigkeitsproportionale Dämpfung, für alle Lautsprecher gültig
$d_{\text{LS},\kappa}$	geschwindigkeitsproportionale Dämpfung des κ -ten Lautsprechers
e	spezifische innere Energie
\underline{f}	deterministischer Anteil der nichtlinearen Systemdynamik
$\underline{\hat{f}}$	vektorielle Aktivierungsfunktion eines Neurons
$\underline{\ell}$	fouriertransformierte akustische Quelle auf der Oberfläche
$\underline{\ell}_{\kappa}$	fouriertransformierter Quellterm, welcher auf der Oberfläche A_{κ} wirkt
f	akustische Quelle auf der Oberfläche

Inhaltsverzeichnis

f_o	radiale Eigenmode des Ringspalts
f_f	Feuerfrequenz der Lautsprecher
\tilde{f}_f	normierte Feuerfrequenz der Lautsprecher
\bar{f}_i	i -tes Element von \bar{f}
f_s	Abtastfrequenz
\underline{g}	Gewichtungsvektor des linearen Anteils des Gütefunktional
g_o	azimutale Eigenmode des Ringspalts
g_E	Gradient des Gütefunktional J_E am Arbeitspunkt u_E^*
\hat{g}_E	geschätzter Gradienten des Gütefunktional am Arbeitspunkt u_E^*
\underline{h}	deterministischer Anteil der nichtlinearen Messgleichung
\check{h}	fouriertransformierte akustische Quelle im Volumen
h	akustische Quelle im Volumen
h_o	axiale Eigenmode des Ringspalts
$h_{\delta\delta}$	Impulsanregung in Ort und Zeit
i_A	Variable des Startpunkts, ab dem Elemente aus \mathbf{X} in $\check{\mathbf{X}}$ enthalten sind
$i_{LS,\kappa}(t)$	elektrischer Strom durch die Spule des κ -ten Lautsprechers
i_e	Startpunkt des letzten $\check{\mathbf{X}}(i_A = i_e)$
i_f	Zyklusnummer
i_p	Anzahl der Zeitschritte in einer Periode
i_s	Startpunkt des ersten $\check{\mathbf{X}}(i_A = i_s)$
j	Zählvariable
k	Zeitschritt
k_p	Druckverhältnis zwischen p_p und p_m
l	Ordnung der axialen Eigenmode des Ringspalts
\bar{l}	Referenzlänge
l_P	Abstandsmaß der Klassifikationsgenauigkeit
\bar{l}_P	Abstandsmaß zwischen wahrscheinlichster und zweitwahrscheinlichster Modellhypothese
$l_{LS,\kappa}$	Länge des stromdurchflossenen Leiters innerhalb des Magnetfelds des κ -ten Lautsprechers
m	Ordnung der azimutalen Eigenmode des Ringspalts
m_{LS}	Masse der Lautsprechermembran, für alle Lautsprecher gültig
$m_{LS,\kappa}$	Masse der Lautsprechermembran des κ -ten Lautsprechers
\underline{n}	Normalenvektor, aus dem Volumen heraus orientiert
n	Ordnung der radialen Eigenmode des Ringspalts
n_D	Anzahl der Zeilen in \mathbf{D}
$n_{\check{D}}$	Anzahl der Zeilen in $\check{\mathbf{D}}$
n_E	Anzahl der numerischen Volumenelemente
n_f	Anzahl der Filter in einem <i>convolutional layer</i>
n_{gt}	Anzahl der Stichproben im Datensatz der <i>ground truth</i>
n_s	Anzahl an zu überspringenden Rohren
n_u	Dimension von \underline{u} und $u_{\delta dp,j}$
$n_{u_{AK}}$	Dimension von \underline{u}_{AK}
$n_{x_{AK}}$	Dimension von \underline{x}_{AK}
$n_{u_{LS}}$	Anzahl der Lautsprecher

n_{X_x}	Dimension von \mathbf{X} in x -Richtung
$n_{\check{X}_x}$	Dimension von $\check{\mathbf{X}}$ in x -Richtung
n_{X_y}	Dimension von \mathbf{X} in y -Richtung
n_{X_z}	Dimension von \mathbf{X} in z -Richtung
$n_{\underline{x}}$	Dimension von \underline{x}
n_x	Dimension von x
$n_{\bar{x}}$	Anzahl der Eingangsknoten in ein Neuron
$n_{x_{LS}}$	Dimension von x_{LS}
n_{Y_x}	Dimension von \mathbf{Y} in x -Richtung
n_{Y_y}	Dimension von \mathbf{Y} in y -Richtung
n_{Y_z}	Dimension von \mathbf{Y} in z -Richtung
n_y	Dimension von \underline{y}
$n_{\bar{y}}$	Dimension von \bar{y}
$n_{y_{AK}}$	Dimension von \underline{y}_{AK}
$n_{y_{LS}}$	Dimension von \underline{y}_{LS}
n_{y_E}	Dimension von \underline{y}_E
n_{x_ψ}	Dimension von \underline{x}_ψ
$n_{\bar{\xi}}$	Dimension von $\bar{\xi}$
n_θ	Dimension von $\underline{\theta}$
n_{θ_R}	Dimension von $\underline{\theta}_R$
n_{θ_Z}	Dimension von $\underline{\theta}_Z$
n_{Ω_∞}	Anzahl der Zeilen in Ω_∞
n_{Γ_A}	Anzahl der Elemente in Γ_A
$n_{\Omega_{\max}}$	Anzahl der Zeilen in Ω_{\max}
n_χ	Anzahl der Sigmapunkte bzw. Spalten in χ, χ^*, Υ und Υ^*
p'	fouriertransformierter akustischer Druck bei beliebiger Anregung sowohl im Volumen als auch auf der Oberfläche
p'_{h_δ}	fouriertransformierter akustischer Druck bei Anregung durch beliebige Punktquelle im Volumen
p'_j	fouriertransformierter akustischer Druck am j -ten Systemausgang
p	statischer Druck des Fluids
\tilde{p}	normierter statischer Druck des Fluids
p'	akustische Druckschwankung
p_0	Gleichanteil des statischen Drucks des Fluids
p_U	statischer Umgebungsdruck
\tilde{p}_U	normierter statischer Umgebungsdruck
p'_{h_δ}	akustischer Druck bei Anregung durch beliebige Punktquelle
p'_j	akustischer Druck am j -ten Mikrofon
\tilde{p}'_j	normierter akustischer Druck am j -ten Mikrofon
$\tilde{\tilde{p}}'_j$	normierter, prädizierter akustischer Druck am j -ten Mikrofon
$p'_{j,\psi}$	Anteil der ψ -ten Eigenmode des Ringspalts am akustischen Druck des j -ten Systemausgangs
p_m	statischer Mitteldruck im Plenum
p_p	Druckniveau der zu überlagernden Druckwellen
p'_p	relatives Druckniveau der zu überlagernden Druckwellen

Inhaltsverzeichnis

$p'_{\text{sup,lin}}$	linear superponierte Druckschwankung
p'_{δ}	Systemantwort des Ringspalts auf einen Dirac-Impuls in der Beschleunigung der Lautsprechermembran
\underline{q}	Vektor mit gestapelten Zustandsgrößen
$\tilde{\underline{q}}$	Vektor mit gestapelten normierten Zustandsgrößen
q_{∞}	Gewichtungsparameter
\underline{r}	rechte Seite der linearen Nebenbedingung
$\tilde{\underline{r}}$	rechte Seite der linearen Nebenbedingung mit ganzzahligem Parametervektor
\hat{r}_j	Innovation des j -ten KF der Mehrfiltermethode
r_h	fouriertransformierter beliebiger Zeitverlauf der Anregung einer akustischen Punktquelle
r_o	radiale Koordinate des zylindrischen Koordinatensystems
r_h	beliebiger Zeitverlauf der Anregung einer akustischen Punktquelle
$j'_{o\kappa}$	2-Norm von $\underline{v}'_{o\kappa}$
$s'_{o\kappa}$	2-Norm von $\underline{v}'_{o\kappa}$ und Systemeingang des κ -ten Lautsprechers in das Zustandsraummodell des Ringspalts
s_x	<i>stride</i>
t	kontinuierliche Zeit
\tilde{t}	normierte Zeit
\bar{t}	Referenzzeit
t_f	Funktion zum Festlegen der Feuerzeitpunkte der Lautsprecher
t_{off}	individuelle Totzeit eines Lautsprechers
\underline{u}	Vektor des Systemeingangs
$\underline{u}_{\text{AK}}$	Eingangsvektor des akustischen Zustandsraummodells des Ringspalts
$\underline{u}_{\text{LS}}$	Vektor mit Steuersignal für die Lautsprecher
$\underline{u}_{\delta_{\text{dp}},j}$	vektorieller Systemeingang mit periodischem Einheitsimpuls δ_{dp} am j -ten Element
u_{E}	Streckeneingang der EWR
u_{E}^*	Arbeitspunkt des Streckeneingangs der EWR
$u_{\text{LS},\kappa}$	Steuerspannung des κ -ten Lautsprechers
u_{det}	Steuersignal für einen Lautsprecher, wenn dieser ein Detonationsereignis simulieren soll
\tilde{u}_{det}	normiertes Steuersignal für einen Lautsprecher, wenn dieser ein Detonationsereignis simulieren soll
$\underline{v}'_{o\kappa}$	fouriertransformierter Vektor der akustischen Schnelle, welche auf der Oberfläche A_{κ} als Quelle wirkt
\underline{v}_{\perp}	Geschwindigkeitsvektor des Fluids in kartesischen Koordinaten
\underline{v}'_{\perp}	Vektor der akustischen Schnelle in kartesischen Koordinaten
\underline{v}'_o	Vektor der akustischen Schnelle in Zylinderkoordinaten
$\underline{v}'_{o\kappa}$	Vektor der akustischen Schnelle, welche auf der Oberfläche A_{κ} als Quelle wirkt
$\underline{v}_{0\perp}$	Gleichanteil des Geschwindigkeitsvektors des Fluids in kartesischen Koordinaten
$\tilde{\underline{v}}_{x\perp}$	Vektor mit gestapelten normierten Geschwindigkeiten des Fluids in allen numerischen Volumenelementen
$v_{\text{LS},\kappa}$	Geschwindigkeit der Lautsprechermembran des κ -ten Lautsprechers
$v'_{r_o}, v'_{\varphi_o}, v'_{z_o}$	radialer, azimuthaler bzw. axialer Anteil der akustischen Schnelle

$v_{x_{\perp}}, v_{y_{\perp}}, v_{z_{\perp}}$	Geschwindigkeit des Fluids in Koordinatenrichtung x_{\perp}, y_{\perp} bzw. z_{\perp}
$\tilde{v}_{x_{\perp}}$	normierte Geschwindigkeit des Fluids in x_{\perp} -Richtung
$\bar{v}_{x_{\perp}}$	Referenzgeschwindigkeit in x_{\perp} -Richtung
\underline{w}	Systemrauschen
$\bar{\underline{w}}$	Vektor mit den Gewichten eines Neurons
$\bar{\underline{w}}_i$	Vektor mit den Gewichten des zugehörigen i -ten Neurons
\underline{w}_j	Vektor des Systemrauschens des Systems der j -ten Modellhypothese
w_i^c	Gewichtsparameter zum Berechnen der geschätzten Größen $\hat{\mathbf{P}}_x$ und $\hat{\mathbf{P}}_y$
w_i^m	Gewichtsparameter zum Berechnen der geschätzten Größen $\hat{\underline{\mu}}_x$ und $\hat{\underline{\mu}}_y$
\bar{w}_i	i -tes Element in $\bar{\underline{w}}$
\underline{x}	Eingangsvektor der Eingabeschicht
$\bar{\underline{x}}$	Eingangsvektor in ein Neuron
\underline{x}_i	Merkmalsvektor der i -ten Stichprobe
\underline{x}	Zustandsvektor
$\hat{\underline{x}}$	geschätzter Zustandsvektor
\underline{x}_{\perp}	Koordinatenvektor des kartesischen Koordinatensystems
\underline{x}_{\circ}	Koordinatenvektor des zylindrischen Koordinatensystems
\underline{x}_{\circ}^*	spezifischer Ortsvektor in Zylinderkoordinaten
$\check{\underline{x}}_{\circ}$	Koordinatenvektor des zylindrischen Koordinatensystems als Integrationsvariable
$\underline{x}_{\circ j}^*$	Ortsvektor des j -ten Systemausgangs
$\underline{x}_{\circ \kappa}$	Koordinatenvektor des zylindrisch Koordinatensystems, welcher nur auf der Oberfläche A_{κ} definiert ist
$\underline{x}_{\circ \kappa}^*$	Ortsvektor des Flächenschwerpunkts von A_{κ} und des κ -ten Systemeingangs
\underline{x}_{AK}	Zustandsvektor des akustischen Zustandsraummodells des Ringspalts
\underline{x}_{LS}	Zustandsvektor des Zustandsraummodells aller Lautsprecher
$\underline{x}_{LS, \kappa}$	Zustandsvektor des Zustandsraummodells des κ -ten Lautsprechers
\underline{x}_j	Zustandsvektor des Systems der j -ten Modellhypothese
\underline{x}_{ψ}	Zustandsvektor des akustischen Zustandsraummodells der ψ -te Eigenmode des Ringspalts
\bar{x}_i	i -tes Element von $\bar{\underline{x}}$
x_{\perp}	x -Koordinate des kartesischen Koordinatensystems
\tilde{x}_{\perp}	normierte x -Koordinate des kartesischen Koordinatensystems
$\tilde{x}_{\perp j}^x$	normierte Position des j -ten Volumenelements zur Adressierung der Zustände
$\tilde{x}_{\perp j}^y$	normierte Position des j -ten Volumenelements zur Adressierung der Sensoren
$\hat{\underline{y}}$	Ausgangsvektor der Ausgabeschicht
$\bar{\underline{y}}$	Ausgangsvektor aus der Aktivierungsfunktion \bar{f}
\underline{y}_i	i -ter Klassifikationsvektor der <i>ground truth</i>
$\hat{\underline{y}}_i$	prädizierter Ausgangsvektor der Ausgabeschicht der i -ten Stichprobe
\underline{y}	Vektor des Systemausgangs
$\hat{\underline{y}}$	geschätzter Vektor des Systemausgangs
\underline{y}_{AK}	Ausgangsvektor des akustischen Zustandsraummodells des Ringspalts
\underline{y}_E	Vektor der Messwerte der Strecke innerhalb einer EWR
\underline{y}_{LS}	Ausgangsvektor des Zustandsraummodells aller Lautsprecher
\underline{y}_j	Vektor des Systemausgangs des Systems der j -ten Modellhypothese

Inhaltsverzeichnis

\underline{y}_r	Vektor des Systemausgangs des realen Systems
$\underline{y}_{\delta_{dp},j}$	periodischer, vektorieller Systemausgang, wenn das System durch $\underline{u}_{\delta_{dp},j}$ ange- regt wurde
y_{\perp}	y -Koordinate des kartesischen Koordinatensystems
\bar{y}_i	i -tes Element von $\bar{\underline{y}}$
z_{\perp}	z -Koordinate des kartesischen Koordinatensystems
z_o	axiale Koordinate des zylindrischen Koordinatensystems

Große griechische Buchstaben

Γ_A	Menge, welche alle möglichen Werte für i_A enthält
$\Delta\omega$	Additive Änderung der Gewichtsparameter in einem Gradientenschritt
$\Delta J_{E,d}$	Änderung von $J_{E,d}$ von einem Zeitschritt zum nächsten
Δt	zeitliche Schrittweite
$\Delta \tilde{t}$	normierte Zeitschrittweite
Δu_E	Änderung von u_E von einem Zeitschritt zum nächsten
Λ_{lm}	gemeinsamer Parameter der frequenzabhängigen, modalen Koeffizienten der l, m -ten Kosinus- und Sinus-Eigenmode
$\Lambda_{c,lm}, \Lambda_{s,lm}$	Parameter der frequenzabhängigen, modalen Koeffizienten der l, m -ten Kosinus- bzw. Sinus-Eigenmode
Λ_{ψ}	gemeinsamer Parameter der frequenzabhängigen, modalen Koeffizienten der ψ -ten Kosinus- und Sinus-Eigenmode
Ξ	Menge aller möglichen Fehlerhypothesen
$\tilde{\Pi}$	normierte, kumulative Leistungsdichte von u_{det}
Υ	Matrix, deren i -te Spalte gerade $\underline{\Upsilon}_i$ entspricht
Υ^*	Matrix, deren i -te Spalte gerade $\underline{\Upsilon}_i^*$ entspricht
$\underline{\Upsilon}_i$	Zustandsvektor des i -ten Sigmapunkts zur Propagation durch die Messglei- chung
$\underline{\Upsilon}_i^*$	Zustandsvektor des i -ten Sigmapunkts nach der Propagation durch die Mess- gleichung
Φ	Abbildungsvorschrift zwischen \underline{U} und \underline{Y}
Φ	Dynamikmatrix zur linearen Abbildung von \underline{U} nach \underline{Y} , beinhaltet die periodi- sche Impulsantwort des periodischen Systems in Form einer Toeplitz-Matrix
$\Phi_{c,lm}, \Phi_{s,lm}$	l, m -te Kosinus- bzw. Sinus-Eigenmode des Ringspalts
$\Phi_{c,\psi}, \Phi_{s,\psi}$	ψ -te Kosinus- bzw. Sinus-Eigenmode des Ringspalts
Ψ	Parameter zur Beschränkung der Anzahl von berücksichtigten Eigenmoden im Zustandsraummodell des akustischen Systems
Ω	Gewichtungsmatrix des quadratischen Anteils des Gütefunktional
Ω_2	Gewichtungsmatrix zur Gewichtung des 2-Norm Anteils
Ω_{∞}	Gewichtungsmatrix zur Gewichtung des <i>inf</i> -Norm Anteils
Ω_{max}	Gewichtungsmatrix zur Gewichtung des max-Norm Anteils

Kleine griechische Buchstaben

α	Parameter zum Einstellen der Streuung der Sigmapunkte um $\hat{\underline{\mu}}_x$
α_E	Parameter zur Schrittweitenanpassung der EWR
α_d	Parameter der akustischen Dämpfung

$\alpha_{d,lm}$	Parameter der modalen akustischen Dämpfung der l, m -ten Mode
$\alpha_{d,\psi}$	Parameter der modalen akustischen Dämpfung der ψ -ten Mode
β	Skalierungsparameter des Sigmapunkt-Filters
β_E	Amplitude der Perturbation der EWR
γ	Isentropenexponent
ϵ	Zählvariable
η	Schrittweite
η_c, η_s	frequenzabhängige modale Koeffizienten der Kosinus- bzw. Sinus-Eigenmoden
$\underline{\theta}$	Parametervektor
$\underline{\theta}^*$	Parametervektor mit optimalen Parametern
$\underline{\theta}_R$	Parametervektor mit reellwertigen Parametern
$\underline{\theta}_R^*$	Parametervektor mit optimalen reellwertigen Parametern
$\theta_{R,\infty}$	Hilfsvariable zur Berücksichtigung des ∞ -Norm Anteils
$\theta_{R,\max}$	Hilfsvariable zur Berücksichtigung des max-Norm Anteils
$\underline{\theta}_Z$	Parametervektor mit ganzzahligen Parametern
$\underline{\theta}_Z^*$	Parametervektor mit ganzzahligen Parametern und optimalen Parametern
κ	Variable zum Auswählen des κ -ten Lautsprechers
$\tilde{\kappa}$	Hilfsvariable
λ_{L1}	Faktor der L1-Regularisierung
λ	Skalierungsparameter des Sigmapunkt-Filters
$\hat{\underline{\mu}}_{\tilde{T}}$	Vektor des geschätzten Mittelwerts von \tilde{T}
$\hat{\underline{\mu}}_{\tilde{v}_x}$	Vektor des geschätzten Mittelwerts von $\tilde{v}_{x\perp}$
$\underline{\mu}_x$	Vektor des Mittelwerts von \underline{x}
$\hat{\underline{\mu}}_x$	Vektor des geschätzten Mittelwerts von \underline{x}
$\underline{\mu}_{x_j}$	Vektor des Mittelwerts von \underline{x}_j
$\hat{\underline{\mu}}_{x_j}$	Vektor des geschätzten Mittelwerts von \underline{x}_j
$\hat{\underline{\mu}}_y$	Vektor des geschätzten Mittelwerts von \underline{y}
$\hat{\underline{\mu}}_{\tilde{T}}$	geschätzter Mittelwert von \tilde{T}
$\hat{\underline{\mu}}_{a_E}$	geschätzter Mittelwert von a_E
$\tilde{\hat{\underline{\mu}}}_{a_E}$	normierter, geschätzter Mittelwert von a_E
$\hat{\underline{\mu}}_{\tilde{p}}$	geschätzter Mittelwert von \tilde{p}
$\hat{\underline{\mu}}_{\tilde{v}_x}$	geschätzter Mittelwert von $\tilde{v}_{x\perp}$
$\hat{\underline{\mu}}_{\tilde{\rho}}$	geschätzter Mittelwert von $\tilde{\rho}$
$\underline{\nu}$	Messrauschen
$\underline{\nu}_j$	Vektor des Messrauschens des Systems der j -ten Modellhypothese
$\underline{\xi}$	Eingangsvektor in die Aktivierungsfunktion \bar{f}
$\underline{\xi}_i$	i -tes Element von $\underline{\xi}$
ρ	Dichte des Fluids
$\bar{\rho}$	Referenzdichte
$\tilde{\rho}$	normierte Dichte des Fluids
ρ'	Schwankungsanteil der Dichte des Fluids
ρ_0	Gleichanteil der Dichte des Fluids
τ	Zeitverschiebung
φ_o	azimutale Koordinate des zylindrischen Koordinatensystems
ϕ_E	Phasenlage der im Ringspalt rotierenden Mode

Inhaltsverzeichnis

$\hat{\phi}_E$	geschätzte Phasenlage der im Ringspalt rotierenden Mode
$\dot{\hat{\phi}}_E$	Rotationsgeschwindigkeit der im Ringspalt rotierenden Mode
$\hat{\dot{\phi}}_E$	geschätzte Rotationsgeschwindigkeit der im Ringspalt rotierenden Mode
\mathbf{X}	Matrix, deren i -te Spalte gerade $\underline{\chi}_i$ entspricht
\mathbf{X}^*	Matrix, deren i -te Spalte gerade $\underline{\chi}_i^*$ entspricht
$\underline{\chi}_i$	Zustandsvektor des i -ten Sigmapunfts zur Propagation durch die Systemdynamik
$\underline{\chi}_i^*$	Zustandsvektor des i -ten Sigmapunfts nach der Propagation durch die Systemdynamik
$\chi_{LS,\kappa}$	Auslenkung der Membran des κ -ten Lautsprechers
ψ	Superindex zur Indizierung von Eigenmoden
$\underline{\omega}$	Vektor mit allen Gewichten des neuronalen Netzes
ω	Kreisfrequenz
$\omega_{01,d}$	Eigenfrequenz des gedämpften Systems der Mode $l = 0, m = 1$
ω_E	Kreisfrequenz der Perturbation der EWR
ω_{lm}	akustische Eigenfrequenz des Ringspalts der l, m -ten Mode
ω_{lmn}	akustische Eigenfrequenz des Ringspalts der l, m, n -ten Mode
ω_ψ	ψ -te Eigenfrequenz des Ringspalts

Zahlenmengen, Operatoren, Normen, und spezielle Matrizen und Vektoren

\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge aller positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{> 0}$	Menge aller positiven reellen Zahlen ohne Null
i	imaginäre Einheit
\otimes	Kronecker-Produkt
$\underline{\mathcal{N}}_i(\underline{\mu}_i, \mathbf{P}_i)$	Vektor $\underline{i} \in \mathbb{R}^{n_i}$ folgt einer mehrdimensionalen Normalverteilung mit dem Mittelwertvektor $\underline{\mu}_i$ und der Kovarianzmatrix \mathbf{P}_i
$\mathcal{F}(\cdot)$	Fourier-Transformationsoperator
$\text{div}_\perp(\cdot)$	Divergenz in kartesischen Koordinaten
$\text{grad}_\perp(\cdot)$	Gradient in kartesischen Koordinaten
$\text{spur}(\cdot)$	Spur einer Matrix
Δ_\perp	Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten
Δ_\circ	Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten
$\delta(\cdot)$	Delta-Distribution
$\delta_d(\cdot)$	Einheitsimpulsfunktion
$\delta_{dp}(\cdot)$	i_p periodischer, zeitdiskreter Einheitsimpuls
$\ \cdot\ $	2-Norm
$\ \cdot\ _\infty$	∞ -Norm
$\mathbf{0}^{i \times j}$	Nullmatrix der Dimension $i \times j$
\mathbf{I}^i	Einheitsmatrix der Dimension $i \times i$
$\underline{0}^i$	Vektor mit Nullen der Dimension i
$\underline{1}^i$	Vektor mit Einsen der Dimension i

Abkürzungen

CRD	<i>continuously rotating detonation</i>
DDT	<i>deflagration to detonation transition</i>
EKF	Erweitertes Kalman-Filter
EWR	Extremwertregelung
KF	Kalman-Filter
LP	lineares Programm
PDC	Detonationsverbrennung (<i>pulsed detonation combustion</i>)
QP	quadratisches Programm
SEC	glatte Verbrennung (<i>shockless explosion combustion</i>)
SPKF	Sigmapunkt-Kalman-Filter

1 Einleitung

1.1 Motivation

Mehr als 20 % der installierten Netto-Leistung zur Stromerzeugung in Deutschland entfiel im Jahr 2017 auf den fossilen Energieträger Gas, welcher hauptsächlich durch die Nutzung von stationären Gasturbinen verstromt wird. Weiterhin werden Gasturbinen aufgrund der hohen Leistungsdichte in nahezu allen Triebwerken von Passagier- und Frachtflugzeugen eingesetzt. Damit entfällt auf diese Technologie ein beträchtlicher Anteil am vom Menschen jährlich generierten Kohlenstoffdioxid. Fast alle Länder der Welt haben sich zu einer massiven Reduktion dieses Treibhausgases zur Verminderung der damit einhergehenden globalen Erwärmung verpflichtet. So ist beispielsweise in den aktuellen Klimaschutzzielen (Stand 2018) für Deutschland festgelegt, dass die Treibhausgasemissionen bis 2030 um 55 % im Vergleich zu 1990 gesenkt werden sollen. Eine Steigerung des Gesamtwirkungsgrads von Gasturbinen trägt somit unmittelbar zur Erfüllung dieser Klimaziele bei. Diese Arbeit soll einen Beitrag zur Realisierung effizienter Gasturbinen liefern.

Seit der Entwicklung der ersten kommerziell genutzten, stationären Gasturbine 1939 bis heute konnte der Gesamtwirkungsgrad von etwa 17 % auf 40 % gesteigert werden. Diese Wirkungsgradsteigerung wurde vor allem durch die Verbesserung einzelner Maschinenkomponenten und die Entwicklung hitzebeständiger Materialien ermöglicht. Dieser Entwicklung sind jedoch technische Grenzen gesetzt, was dazu geführt hat, dass die erzielten Wirkungsgradverbesserungen über die Zeit betrachtet stark abgenommen haben, vergleiche [Gülen, 2015]. Es ist somit nicht zu erwarten, dass durch weitere Anstrengungen in dieser Richtung deutliche Steigerungen des Gesamtwirkungsgrades zu erzielen sind.

Um trotzdem die gewünschte Wirkungsgradsteigerung erreichen zu können, erscheint es sinnvoll, den zugrunde liegenden thermodynamischen Kreisprozess zu ändern. Die dadurch erzielbare Wirkungsgradsteigerung und die Realisierbarkeit des geänderten Kreisprozesses durch eine Gasturbine werden im Folgenden kurz erläutert.

Zunächst wird der in den Abb. 1.1a,b dargestellte klassische, idealisierte Gasturbinenkreisprozess, welcher auch als Brayton-Kreisprozess bezeichnet wird, analysiert. Dazu wird zusätzlich die in Abb. 1.2a gezeigte Schnittansicht einer klassischen Gasturbine, bestehend aus den drei Hauptkomponenten Verdichter, Brennkammer und Turbine, herangezogen. Der Verdichter der Gasturbine wird genutzt, um das Arbeitsmedium Luft zu verdichten. Im idealisierten Brayton-Kreisprozess wird dieser Vorgang als isentrope Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$ approximiert. Dadurch steigt sowohl der Druck als auch die Temperatur des Arbeitsmediums. Anschließend wird das verdichtete Gas in die Brennkammer der Gasturbine geleitet und Treibstoff zugeführt. Das so entstandene Gemisch wird deflagrativ verbrannt. In einer realen Gasturbine bewirkt dies einen Anstieg der Temperatur, wohingegen der Druck des Gases in der Brennkammer minimal abfällt. Im idealisierten Brayton-Kreisprozess wird dieser Druckabfall vernachlässigt und die Zustandsänderung $2 \rightarrow 3$ wird als isobar angenommen. Anschließend strömt das Arbeitsmedium in die Turbine, wo es auf Umgebungsdruck entspannt wird. Dieser Vorgang wird in der Regel als isentrope Zustandsänderung $3 \rightarrow 4$ angenommen. Der Kreisprozess wird durch das Ausströmen in die Umgebung geschlossen, was durch eine isobare Zustandsänderung beschrieben wird. Der absolute Wirkungsgrad des

1 Einleitung

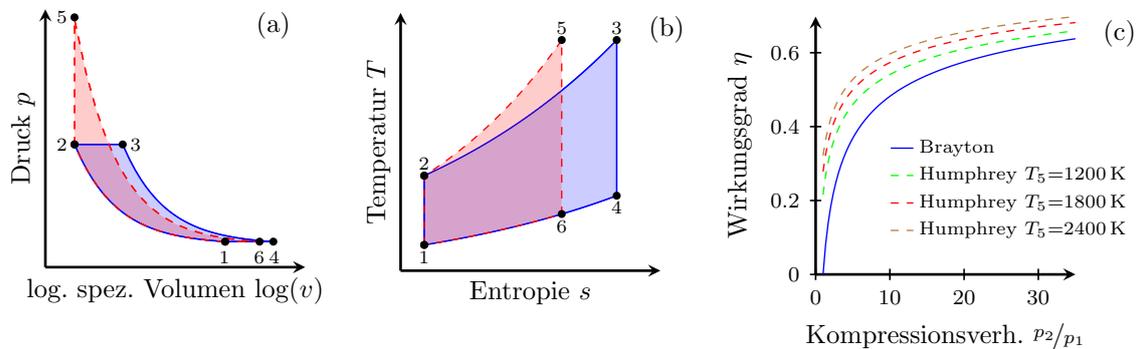


Abbildung 1.1: a) Brayton- und Humphrey-Kreisprozess im p v -Diagramm
 b) Brayton- und Humphrey-Kreisprozess im T s -Diagramm
 c) Energetischer Wirkungsgrad η der beiden Kreisprozesse in Abhängigkeit des Kompressionsverhältnisses p_2/p_1 für unterschiedliche Turbineneintrittstemperaturen T_5

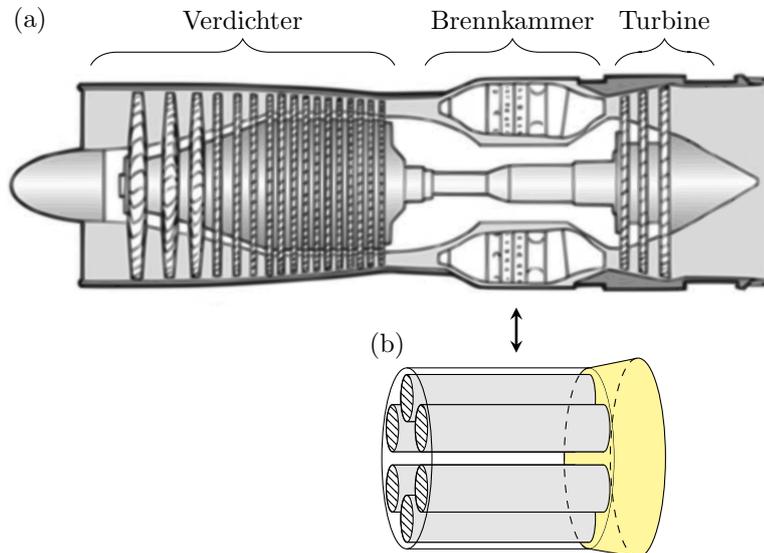


Abbildung 1.2: a) Schnittansicht einer klassischen Gasturbine; Abbildung ist angelehnt an [Bräunling, 2001]
 b) Schematische Darstellung einer Detonationsbrennkammer bestehend aus Detonationsrohren (grau), Einlassventilen (schwarz schraffiert), und einem turbinenseitigen Plenum (gelb); Abbildung ist angelehnt an [Bratkovich et al., 1997]

idealisierten Brayton-Kreisprozesses berechnet sich zu $\eta_{\text{Brayton}} = 1 - T_1/T_2$ und ist in Abb. 1.1c in Abhängigkeit vom Kompressionsverhältnis p_2/p_1 dargestellt.

Als Alternative mit einem höheren Wirkungsgrad soll hier der sogenannte Humphrey-Kreisprozess vorgestellt werden, welcher ebenfalls in den Abb. 1.1a,b verdeutlicht ist. Der wesentliche Unterschied zum Brayton-Kreisprozess liegt im Wechsel von einer isobaren Verbrennung, hin zu einer isochoren Verbrennung. Dadurch steigt bei der zugehörigen Zustandsänderung $2 \rightarrow 5$ in der Brennkammer sowohl die Temperatur, als auch der Druck. Der absolute Wirkungsgrad dieses Kreisprozesses ergibt sich zu $\eta_{\text{Humphrey}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \gamma \frac{(T_5/T_2)^{1/\gamma} - 1}{T_5/T_2 - 1}$, vergleiche [Bussing & Pappas, 1994].¹ Der Wirkungsgrad des Humphrey-Kreisprozesses ist ebenfalls in Abb. 1.1c für unterschiedliche Turbineneintrittstemperaturen T_5 und in Abhängigkeit des Kompressionsverhältnisses dargestellt. Es ist eindeutig zu erkennen, dass der Humphrey-Kreisprozess für einen weiten Bereich von Turbineneintrittstemperaturen einen deutlichen höheren Wirkungsgrad ermöglicht als der Brayton-Kreisprozess.

Da sich die beiden Prozesse durch die Art der Verbrennung unterscheiden, muss auch in der technischen Realisierung eine Änderung des Brennkammeraufbaus erfolgen. Eine Möglichkeit, eine annähernd isochore Verbrennung technisch zu realisieren, ergibt sich durch die Anwendung der sogenannten pulsierenden Detonationsverbrennung, welche auch als *pulsed detonation combustion* (PDC) bezeichnet wird. Die konventionelle, isobar arbeitende Brennkammer wird somit durch eine Detonationsbrennkammer ersetzt. Ein möglicher Aufbau einer solchen Brennkammer ist in Abb. 1.2b schematisch gezeigt.

Bei einer Detonationsverbrennung breitet sich die zugehörige Flammenfront mit vielfacher Schallgeschwindigkeit aus. Dies führt dazu, dass die Verbrennung schneller abläuft, als das verbrannte Gas sich ausdehnen kann, wodurch diese Zustandsänderung als nahezu isochor betrachtet werden kann.

Eine PDC kann im Gegensatz zur deflagrativen Verbrennung nicht als kontinuierlicher Prozess beschrieben werden. Vielmehr wird die PDC durch ihren zyklischen Charakter geprägt. Die einzelnen Schritte eines solchen Zyklus werden im Folgenden kurz beschrieben. Dazu wird zunächst ein einzelnes der in Abb. 1.2b grau markierten Detonationsrohre betrachtet. Das Rohr ist auf der linken Seite mit dem Verdichter über ein schaltbares Ventil verbunden (schraffierte Fläche). Auf der rechten Seite besitzt das Rohr ein offenes Ende, wodurch verbranntes Gas aus dem Rohr in das nachgeschaltete Plenum und anschließend in die Turbine geleitet wird. Die linke bzw. rechte Seite des Rohres wird im Folgenden als Rohreingang bzw. Rohrausgang bezeichnet.

- *Befüllvorgang* – Zu Beginn des Zyklus wird das schaltbare Ventil geöffnet und das Detonationsrohr mit Frischluft vom Verdichter befüllt. Dabei wird gleichzeitig Treibstoff eingespritzt, sodass ein detonationsfähiges Gemisch im Rohr entsteht.
- *Zündvorgang* – Anschließend wird das Ventil geschlossen und durch eine Zündkerze im Rohr am Rohreingang das Gemisch gezündet. Dadurch entsteht zunächst eine deflagrative Verbrennung, mit einer Flammenfront, welche sich in Richtung des Rohrausgangs bewegt.
- *Transitionsprozess* – Über die Lauflänge des Rohres nimmt die Turbulenz in der Flammenfront zu. Dies bewirkt eine Vergrößerung der Oberfläche der Flammenfront, wodurch sich wiederum deren Geschwindigkeit erhöht. Ab einem bestimmten Punkt beschleunigt sich dieser Prozess so stark, dass die Flammenfront sprunghaft auf ein Vielfaches der Schallgeschwindigkeit des verbrannten Gases beschleunigt wird. Ab diesem Punkt liegt eine sogenannte Detonationsverbrennung vor, welche quasi isochor abläuft.

¹Dabei wird das Arbeitsmedium als ideales Gas beschrieben.

1 Einleitung

Der gerade beschriebene Transitionsprozess von deflagrativer Verbrennung zu detonativer Verbrennung wird auch als DDT² bezeichnet. Die Verbrennung vor Abschluss des DDT-Prozesses verläuft annähernd isobar und erzielt somit nicht die gewünschte Wirkungsgraderhöhung. Aus diesem Grund wird in der Regel versucht, durch turbulenzgenerierende Einbauten die DDT in einem möglichst kleinen Abschnitt des Rohrs zu vollziehen, siehe [Gray et al., 2014] und [Gray et al., 2017].

- *Detonationsvorgang* – Das restliche Gemisch im Rohr wird detonativ verbrannt.
- *Ausstoßvorgang* – Der detonativ verbrannte Teil des Gemisches erzeugt eine starke Druckerhöhung innerhalb des Detonationsrohres, wodurch sich ein Großteil des verbrannten Gases in das der Turbine vorgeschaltete Plenum (in Abb. 1.2b gelb markiert) entlädt.
- *Spülvorgang* – Bevor das Rohr nun erneut mit Frischluft aus dem Verdichter und Treibstoff befüllt werden kann, was den Beginn eines neuen Zyklus kennzeichnet, muss ein Luftpuffer in das Verbrennungsrohr eingebracht werden. Dieser Luftpuffer trennt das im Rohr verbliebene, verbrannte Heißgas vom neu zuzuführenden Gemisch und verhindert eine vorzeitige Selbstzündung desselbigen.

Um eine Vielzahl von Verbrennungsrohren parallel betreiben zu können, muss eine konstruktive Anbindung an die umgebenden Gasturbinenkomponenten wie den Verdichter bzw. die Turbine gewährleistet sein. Die Verbrennungsrohre können beispielsweise kreisförmig angeordnet und anschließend durch ein gemeinsames Plenum mit der Turbine verbunden werden, vergleiche Abb. 1.2b. Eine Anbindung an den Verdichter ist ebenso durch ein geeignetes Plenum denkbar.

Die hier beschriebene Realisierung des Humphrey-Kreisprozesses durch Anwendung einer teilweise isochoren, pulsierenden Verbrennung, kann nur in sehr grober Näherung eine kontinuierliche, vollständig isochore Verbrennung approximieren. Die thermodynamische Analyse des Kreisprozesses mit pulsierender Detonationsverbrennung ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten und längst nicht abgeschlossen. Erste vielversprechende Ergebnisse lassen vermuten, dass auch bei Berücksichtigung des instationären Verhaltens der Verbrennung eine signifikante Erhöhung des Wirkungsgrades möglich ist, siehe [Gray et al., 2016].

Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen einer kontinuierlichen und einer pulsierenden, isochoren Verbrennung ergibt sich bei der Betrachtung des Druckniveaus in der Brennkammer. Entsprechend Abb. 1.1a erzeugt eine kontinuierliche, isochore Verbrennung einen starken Druckanstieg auf das Druckniveau p_5 . Im Falle einer pulsierenden Detonationsverbrennung fällt es schwer, ein solches Druckniveau anzugeben, da sich dieses aufgrund des zyklischen Charakters sowohl örtlich als auch zeitlich über einen Detonationszyklus ändert. Es ist jedoch zu vermuten, dass im zeitlichen und örtlichen Mittel das Druckniveau p_5 höher ausfällt als das Druckniveau p_2 nach der letzten Verdichterstufe. Aus diesem Druckunterschied ergeben sich Herausforderungen für die Frischluftversorgung der Detonationsrohre, welche im nächsten Abschnitt genauer diskutiert werden.

1.2 Problemstellung und Gliederung

Aus den obigen Ausführungen lassen sich viele Herausforderungen ableiten, die sich bei der technischen Realisierung des hier beschriebenen Verbrennungskonzeptes in einer Gesamtmaschine inklusive Verdichter, Detonationsbrennkammer und Turbine ergeben werden. Im

²deflagration to detonation transition (DDT)

Rahmen dieser Arbeit werden im Wesentlichen vier Problemstellungen analysiert, welche im Folgenden kurz vorgestellt werden.

- *Zyklische Befüllung der Rohre mit Frischluft* – Um ein Befüllen der Verbrennungsrohre mit Frischluft vom Verdichter und Treibstoff zu ermöglichen, muss der Druckunterschied zwischen Brennkammer und Verdichter, für das jeweils zu befüllende Rohr, zumindest lokal und innerhalb eines definierten Zeitfensters negativ sein. Keine der in Kapitel 2 genannten Forschungsarbeiten anderer Wissenschaftler zum Thema PDC beschäftigt sich mit der Problematik der Wiederbefüllung der Verbrennungsrohre. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass bisher zumeist das Verhalten der Detonationsrohre unabhängig von Verdichter und Turbine untersucht wurde. Die wenigen Arbeiten, bei denen eine Kopplung von Komponenten untersucht wurde, reduzieren sich auf die Kombination von Detonationsbrennkammer mit nachgeschalteter Turbine. Da die angesprochene Wiederbefüllungsproblematik erst bei der Kombination aller drei Komponenten auftreten wird, ist bisher nicht geklärt, wie der Druckunterschied zwischen Brennkammer und Verdichter zur Wiederbefüllung der Rohre in einer realen Maschine überwunden werden kann. Ein alternatives druckerhöhendes Verbrennungskonzept, in welchem diese Problematik adressiert wird, findet sich in der pulsierenden, stoßfreien Verbrennung, welche auch als SEC³ bezeichnet wird, siehe [Bobusch et al., 2014]. Durch die resonante Kopplung von Akustik und Verbrennung entstehen dort Saugwellen im Verbrennungsrohr. Diese können genutzt werden, um die Druckdifferenz zwischen Brennkammer und Verdichter kurzzeitig zu überbrücken und somit eine Wiederbefüllung zu ermöglichen. Eine solche zyklische Wiederbefüllung konnte bisher nur in theoretischen Studien gezeigt werden. In experimentellen Untersuchungen einer SEC unter atmosphärischen Bedingungen weisen chemische und akustische Zeitkonstanten nicht das gewünschte Verhältnis auf, um einen resonanten Betrieb zu gewährleisten, siehe [Yücel et al., 2018]. Ob das theoretische Konzept einer zyklischen Wiederbefüllung in gleicher Weise auf die detonative Verbrennung übertragen werden kann, ist ungewiss. Eine Problematik, die sich dabei ergeben könnte, soll hier kurz erläutert werden.

Bei der SEC verbrennt im idealen Fall das komplette Gemisch im Rohr gleichzeitig. Dadurch entsteht zunächst eine stromab laufende Druckwelle, welche am offenen Rohrende als stromauf laufende Saugwelle reflektiert wird. Somit wird diese Saugwelle durch die komplette, am Verbrennungsprozess beteiligte Treibstoffmenge generiert und die Intensität der Saugwelle fällt entsprechend stark aus. Die Amplitude der Saugwelle genügt, um den Druckunterschied zwischen Verbrennungsrohr und Verdichter zu überwinden und den nächsten Befüllvorgang vollständig durchzuführen. Bei der PDC hingegen, wird ein Teil des Gemischs im Rahmen des DDT-Übergangs rein deflagrativ verbrannt. Da dieser Vorgang ohne Druckerhöhung abläuft, trägt der daran beteiligte Teil des Gemischs nicht zur Generierung der Saugwelle bei. Nach dem DDT-Übergang verbrennt der Rest des Gemischs detonativ, wodurch eine Druckwelle generiert wird, welche wiederum als Saugwelle am offenen Rohrende reflektiert wird. Da jedoch nur ein Teil des Gemischs im Rohr zur Generierung der Saugwelle beigetragen hat, ist es fraglich, ob die Intensität der entstehenden Saugwelle ausreichen wird, um das Rohr mit der gleichen Menge Gemisch zu befüllen wie im vorherigen Zyklus. Es besteht also die Gefahr, dass im Vergleich zum vorherigen Zyklus lediglich eine geringere Menge an Gemisch in das Rohr gelangt und somit der Prozess nach einigen Zyklen ausstirbt.

Um dieses Aussterben zu verhindern, müsste die Saugwelle auf eine geeignete Weise

³ *shockless explosion combustion* (SEC)

1 Einleitung

unterstützt werden. Wie bereits oben diskutiert, werden die Verbrennungsrohre voraussichtlich durch ein gemeinsames Plenum mit der Turbine verbunden sein. Somit ist eine Interaktion zwischen den Verbrennungsrohren durch das Plenum möglich. Dies könnte genutzt werden, um mittels einer geeigneten Feuersynchronisation der Detonationsrohre akustische Resonanzen in dem Plenum anzuregen. Dadurch könnte eine im Plenum azimuthal umlaufende Saugwelle generiert werden, welche die Saugwellen in den einzelnen Rohren verstärkt und somit den Wiederbefüllungsprozess unterstützt. Weiterhin wird für einen transienten Lastwechsel der realen Maschine die Füllmenge des Gemischs innerhalb eines Detonationsrohrs einzustellen sein. Auch dabei könnte eine einstellbare Intensität der Saugwelle hilfreich sein.

- *Minimierung der Druckschwankungen im Plenum* – Sollte sich entgegen der obigen Ausführung herausstellen, dass die in einem einzelnen Detonationsrohr entstehende Saugwelle genügt, um eine zuverlässige Wiederbefüllung des Rohres zu garantieren, wird eine im Plenum umlaufende Saugwelle nicht benötigt. In diesem Fall kann versucht werden, durch eine geeignete Feuersynchronisation der Rohre, die Druckschwankungen im Plenum möglichst zu minimieren, um die Belastungen für die nachgeschaltete Turbine zu verringern und die Anströmbedingungen zu verbessern.
- *Wiederbefüllung ausgefallener Detonationsrohre* – Es ist damit zu rechnen, dass während des dauerhaften Betriebs eines Detonationsrohres gelegentlich Fehlzündungen auftreten. Dies bedeutet, dass der DDT-Übergang, z. B. aufgrund von falsch dosiertem Brennstoff im Gemisch, nicht korrekt stattfindet und somit das Entstehen einer Detonation ausbleibt. Da in diesem Fall keine Druckwelle durch die Verbrennung entsteht, ergibt sich auch nicht die zur Wiederbefüllung benötigte reflektierte Saugwelle. Somit muss über Maßnahmen nachgedacht werden, wie ein solches Rohr gegen den höheren Mitteldruck der Brennkammer mit Frischluft vom Verdichter befüllt werden kann. Auch hier ist es denkbar, durch eine geeignete Synchronisation der verbleibenden funktionierenden Brennröhre, unter Ausnutzung der akustischen Kopplung des verbindenden Plenums, eine Saugwelle gezielt im ausgefallenen Rohr zu generieren.
- *Erkennen von ausgefallenen Verbrennungsrohren* – Um Maßnahmen zur Wiederbefüllung ausgefallener Rohre zu ergreifen, muss ein solches zunächst detektiert werden. Diese Erkennung erfolgt anhand von Sensorinformationen aus dem laufenden Prozess. Da durch die Detonationsvorgänge starke Druckschwankungen generiert werden, bietet es sich an, eine Fehlererkennung basierend auf Drucksensoren aufzubauen. Innerhalb eines Verbrennungsrohres entstehen jedoch beim Detonationsvorgang sehr hohe Temperaturspitzen, wodurch ein dauerhafter Betrieb von z. B. Drucksensoren direkt am Rohr entweder nicht oder nur mit sehr aufwändigen Kühlmaßnahmen möglich ist. Aus diesem Grund stellt sich die Frage, ob ausgefallene Rohre alternativ durch etwas weiter stromab, im nachgeschalteten Plenum applizierte Drucksensoren detektiert werden können. Dort werden die Temperaturspitzen durch die fortgeschrittene Homogenisierung der Strömung deutlich geringer ausfallen, was einen dauerhaften Einsatz von Sensoren erleichtert.

Wie bereits erwähnt, werden die hier genannten Problemstellungen erst im Zusammenspiel der drei Hauptkomponenten Verdichter, Detonationsbrennkammer und Turbine auftreten. Eine solche Gesamtmaschine existiert zum Entstehungszeitpunkt dieser Arbeit nicht, es wird allerdings im Rahmen des durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft finanzierten Sonderforschungsbereichs 1029 an der Technischen Universität Berlin an einer Umsetzung gearbeitet. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, frühzeitig Methoden zu entwickeln, welche Lösungsan-

sätze für die oben identifizierten Herausforderungen bieten. Die so gewonnenen Erkenntnisse können dann zu gegebener Zeit zügig auf eine Gesamtmaschine übertragen werden. Zu diesem Zweck wurde im Rahmen dieser Arbeit ein generischer und rein akustischer Prüfstand aufgebaut, welcher eine Untersuchung der Problemstellungen erlaubt, ohne dabei mit Verbrennungsprozessen, Verdichtern oder Turbinen arbeiten zu müssen. In diesem akustischen Prüfstand soll das akustische Verhalten einer Detonationsbrennkammer inklusive nachgeschaltetem Plenum und daran angeschlossener Turbine möglichst gut abgebildet werden. Der grundsätzliche Aufbau folgt dabei der Idee aus Abb. 1.2b, wobei die Detonationsrohre durch Lautsprecher ersetzt werden, welche jeweils künstliche Detonationssignale abspielen und an ein gemeinsames Plenum, entsprechend Abb. 1.2b, angeschlossen sind.⁴

Bei einem realen Detonationsvorgang eines einzelnen Detonationsrohres werden extrem hohe Schwankungen im Druck generiert. Solche Amplituden können nicht durch einen Lautsprecher erzeugt werden. Anstelle dessen wird hier ein künstlich generiertes Detonationssignal mit einer für die Lautsprecher geeigneten Amplitude abgespielt. Somit kann in dieser Arbeit nicht der Anspruch einer direkten Übertragbarkeit der weiter unten präsentierten Ergebnisse auf eine reale Detonationsbrennkammer erhoben werden. Jedoch kann mit dem beschriebenen Versuchsaufbau die lineare akustische Interaktion von Aktuatoren in einem nachgeschalteten Plenum abgebildet werden. Ob es sich bei den akustischen Aktuatoren um reale Detonationsrohre oder Lautsprecher handelt, spielt für die Methodenentwicklung nur eine untergeordnete Rolle, solange die Annahme der linearen Akustik in beiden Fällen hinreichend genau erfüllt ist. In Abschnitt 4.3 wird anhand einer Simulationsstudie gezeigt, dass diese Annahme in erster Näherung zutreffend ist. Dieses Vorgehen erlaubt es, sowohl die Generierung einer im Plenum umlaufenden akustischen Saugwelle zu untersuchen, als auch zu analysieren, wie eine Dämpfung der akustischen Schwankungen im Plenum erzielt werden kann. Weiterhin können auch Fehlererkennungsmethoden zum Erkennen ausgefallener Detonationsrohre untersucht werden. Alle in dieser Arbeit präsentierten, experimentellen Ergebnisse wurden an diesem akustischen Prüfstand generiert.

Diese Arbeit liefert außerdem einen Beitrag zur Zustandsschätzung von Strömungsphänomenen, welche sich durch die 1-D Euler-Gleichungen beschreiben lassen. Basierend auf vereinzelt Informationen aus dem Strömungsprozess, wie z. B. dem statischen Druck an bestimmten Positionen, werden alle Zustandsgrößen des kompletten Strömungsfelds geschätzt. Dies könnte beispielsweise von Interesse sein, um neue Erkenntnisse über fluiddynamische Abläufe innerhalb eines einzelnen Detonationsrohres zu erhalten.

Die Ausführungen dieser Arbeit zu den benannten Problemstellungen sind wie folgt gegliedert.

- *Kapitel 2 - Stand der Forschung*

Dieses Kapitel fasst den aktuellen Stand der Forschung zum Thema druckerhöhender Verbrennung und der in dieser Arbeit angewendeten Regelungsmethoden zusammen. Zusätzlich wird die thematische Einordnung dieser Arbeit im Themenfeld „druckerhöhende Verbrennung“ erläutert.

- *Kapitel 3 - Grundlagen und Methoden*

Das dritte Kapitel beschreibt die für eine Modellbildung notwendigen physikalischen Grundlagen des akustischen Prüfstands. Überdies werden die in dieser Arbeit verwendeten regelungstechnischen Methoden zur Lösung der Wiederbefüllungsproblematik und der Fehlererkennung vorgestellt. Die eingeführten regelungstechnischen Methoden entstammen den Themengebieten der Zustandsschätzung, Mehrfiltermethoden,

⁴Das Wort „Detonationsrohr“ wird im Zusammenhang mit dem akustischen Prüfstand als Synonym zu „Lautsprecher, welcher das akustische Verhalten eines Detonationsrohres näherungsweise abbildet“ verwendet.

1 Einleitung

gemischt-ganzzahlige Optimalsteuerung sowie der Extremwertregelung. Für die spätere Anwendung in der Fehlererkennung wird zusätzlich eine kurze Einführung in die Thematik neuronaler Netze gegeben.

- *Kapitel 4 - Beschreibung des akustischen Prüfstands*

In Kapitel 4 wird der Aufbau des akustischen Prüfstands beschrieben und eine Nomenklatur zur Beschreibung unterschiedlicher Feuermuster eingeführt. Weiterhin wird eine Abschätzung zur Gültigkeit der oben erwähnten Annahme linearer Akustik innerhalb einer Brennkammer mit realen Detonationsrohren diskutiert.

- *Kapitel 5 - Regelung und Steuerung von akustischen Moden am Ringspaltplenum*

Im fünften Kapitel wird ein Teil der zuvor beschriebenen Methoden angewendet, um am akustischen Prüfstand unterschiedliche Anforderungen an den zeitlichen Verlauf von Drücken im Plenum zu realisieren. Dadurch wird gezeigt, wie eine Wiederbefüllung von Detonationsrohren in einer zukünftigen Gesamtmaschine gelingen könnte.

- *Kapitel 6 - Erkennen von ausgefallenen Lautsprechern am Ringspaltplenum*

Hier werden die konkrete Umsetzung der Fehlererkennungsmethoden und die so erzielten Ergebnisse zur Erkennung von ausgefallenen Detonationsrohren diskutiert. Zunächst wird ein modellbasierter Ansatz und anschließend eine datengetriebene Methodik angewendet. Bei letzterer wird die Fehlerklassifikation basierend auf einem neuronalen Netz durchgeführt.

- *Kapitel 7 - Zustandsschätzung für die 1-D Euler-Gleichungen*

In diesem Kapitel wird ein Sigma-Punkt-Kalman-Filter verwendet, um die Zustände eines numerisch simulierten, eindimensionalen Strömungsfeldes, basierend auf einzelnen Druckinformationen, zu rekonstruieren. Die hier vorgestellten Ergebnisse sind rein simulativ, bieten aber einen Ausblick wie eine solche Methode an einem realen Prüfstand zukünftig eingesetzt werden könnte.

- *Kapitel 8 - Fazit*

Das abschließende Kapitel 8 liefert eine Zusammenfassung und ein Fazit dieser Arbeit.

2 Stand der Forschung

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Entwicklung von Fehlererkennungs- und Regelungsstrategien, welche perspektivisch in Gasturbinen mit druckerhöhender Verbrennung eingesetzt werden können, um dort die Erkennung ausgefallener Verbrennungsrohre zu ermöglichen und eine geeignete Feuersynchronisation der Verbrennungsrohre einzustellen. Hier wird ein Überblick über den aktuellen Stand der Forschung zum Thema druckerhöhender Verbrennung gegeben, um die vorliegende Arbeit in diesem Umfeld einordnen zu können. Anschließend wird der aktuelle Stand der Forschung der in dieser Arbeit verwendeten Fehlererkennungs- und Regelungsmethoden präsentiert. Bis auf eigene Vorarbeiten, siehe [Wolff & King, 2014], [Wolff et al., 2015] und [Wolff et al., 2016], sind dem Autor keine weiteren Arbeiten bekannt, die sich methodisch mit der Erkennung ausgefallener Verbrennungsrohre bzw. der Feuersynchronisation von Verbrennungsrohren auseinander gesetzt haben. Infolgedessen werden aktuelle Forschungsarbeiten vorgestellt, in denen die hier verwendeten Methoden auf vergleichbare Problemstellungen angewendet wurden.

2.1 Druckerhöhende Verbrennung

Es existieren verschiedene Ansätze, um eine druckerhöhende Verbrennung zu realisieren. Prinzipiell erlauben diese eine Generierung von Schub auch alleinstehend, also ohne vorgeschalteten Verdichter und nachgeschaltete Turbine.¹ Aus diesem Grund wird zunächst der Stand der Forschung dieser Verbrennungskonzepte losgelöst von einer Integration in eine Gasturbine beschrieben. Anschließend werden aktuelle Arbeiten, die sich mit der Integration dieser Verbrennungskonzepte in eine Gasturbine beschäftigen, erläutert.

Im Wesentlichen existieren vier verschiedene druckerhöhende Verbrennungskonzepte:

- *Pulsstrahltriebwerk* – Eines der ersten realisierten Konzepte einer druckerhöhenden Verbrennung findet sich in Form eines Pulsstrahltriebwerks, welches während des zweiten Weltkriegs unter dem Namen Argus-Rohr zum Antrieb von Marschflugkörpern eingesetzt wurde. Eine Analyse des zugrundeliegenden Mechanismus findet sich in [Putnam et al., 1986]. Ein Pulsstrahltriebwerk besteht aus einem Verbrennungsrohr, wobei ein Rohrende genutzt wird, um die Treibstoff- und Frischgasversorgung zu realisieren und das andere, offene Rohrende zum Ausstoßen des verbrannten Gases dient, wodurch letztlich die Schubwirkung des Triebwerks entsteht. Der Befüll-, Verbrennungs- und Ausstoßvorgang verlaufen sequentiell im Rahmen eines zyklischen Prozesses, wobei die Zyklendauer, genau wie bei dem im vorherigen Kapitel beschriebenen SEC-Prozesses, zeitlich an das akustische Resonanzverhalten des Rohres gekoppelt ist. Die Zündung des Treibstoffgemisches erfolgt dabei durch einen Selbstzündungsvorgang. Die durch die Verbrennung erreichbare Druckerhöhung ist abhängig von vielen Faktoren,

¹Neben diesen Konzepten existieren auch weitere Methoden, wie *nutating disk* und *wave rotor*, welche die Druckerhöhung nicht durch den eigentlichen Verbrennungsvorgang, sondern durch ein mechanisches Abschließen des Brennraums erzielen, siehe [Meitner et al., 2006] und [McClearn et al., 2016]. Auf diese Methoden wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen.

wie bspw. der Geometrie des Brennrohrs und der Feuerfrequenz. Die genauen Zusammenhänge sind nicht vollständig verstanden und Inhalt aktueller Forschungsarbeiten, siehe z.B. [Anand et al., 2018b].

- *Pulsierende, glatte Verbrennung (SEC)* – Das Konzept einer SEC ist bisher rein theoretischer Natur und wurde erstmals von [Bobusch et al., 2014] vorgestellt. Der mechanische Aufbau einer SEC und der zugehörige Verbrennungszyklus wurden bereits im vorherigen Kapitel grob beschrieben. Im idealen Fall verbrennt dabei in jedem Zyklus der komplette im Verbrennungsrohr eingespritzte Treibstoff zeitgleich durch eine Selbstzündung. Somit entsteht eine Gleichraumverbrennung, aus welcher die gewünschte Druckerhöhung resultiert. Da dabei im Gegensatz zur PDC keine Stöße entstehen, ergibt sich theoretisch sowohl ein höherer Wirkungsgrad als auch eine geringere mechanische Belastung der Bauteile. Um diesen homogenen Selbstzündungsvorgang zu realisieren, muss ein vorgegebenes, örtliches Profil des Äquivalenzverhältnisses des eingespritzten Gemisches in axialer Richtung des Rohres durch den Befüllvorgang realisiert werden. Genaue Anforderungen und weitere Details zu diesem Gemischbildungsvorgang finden sich ebenfalls in [Bobusch et al., 2014]. Das für eine homogene Selbstzündung benötigte, örtliche Profil des Äquivalenzverhältnisses wird durch Prozessgrößen wie Temperatur und Druck beeinflusst. Diese Größen unterliegen sowohl örtlich als auch zeitlich betrachtet starken Schwankungen. Aktuelle Vorarbeiten zur Realisierung des SEC-Konzepts verwenden aus diesem Grund komplexe Regelungsmethodiken zur Einstellung der notwendigen, axialen Gemischschichtung, siehe [Schäpel et al., 2015] und [Schäpel et al., 2016].
- *Pulsierende Detonationsverbrennung (PDC)* – Die Idee, die bei einer detonativen Verbrennung resultierende Druckerhöhung zu nutzen, um die Effizienz von Verbrennungskraftmaschinen zu erhöhen, wurde von [Zel'dovich, 1940] vorgestellt. Die technische Umsetzung einer detonativen Verbrennung in Form einer PDC gelang erstmals in [Nicholls et al., 1957]. Die Funktionsweise einer PDC wurde bereits im vorherigen Kapitel ausführlicher vorgestellt, weshalb hier nur kurz die wichtigsten Eigenschaften wiederholt werden. Zur Realisierung einer PDC wird, wie bei den zuvor erwähnten Methoden, ein Rohr als Brennraum verwendet. Im Gegensatz zum Pulsstrahltriebwerk und der SEC erfolgt jedoch keine Selbstzündung des Gemisches. Stattdessen wird die Verbrennung durch eine Zündkerze ausgelöst. Die notwendige Zündenergie, um in dem mit detonationsfähigem Gemisch befüllten Rohr direkt eine detonative Verbrennung auszulösen, kann nicht durch eine Zündkerze bereitgestellt werden. Aus diesem Grund wird durch die Zündkerze zunächst eine deflagrative Verbrennung ausgelöst, welche in einem Transitionsprozess (DDT) über einen Teil der Lauflänge des Rohres in eine Detonation umschlägt. Da eine Detonationsverbrennung mit Überschallgeschwindigkeit abläuft, liegt nach Abschluss des DDT-Vorgangs näherungsweise eine Gleichraumverbrennung und somit eine druckerhöhende Verbrennung vor. Einen guten Überblick zu aktuellen Entwicklungen im Bereich der PDC bieten [Pandey & Debnath, 2016], [Wolański, 2018] und [Wolański, 2013]. Aktuelle Forschungsarbeiten beschäftigen sich unter anderem mit Möglichkeiten zur Reduktion der für die DDT benötigten Rohrlänge, siehe [Gray et al., 2014] und [Gray et al., 2017]. Weiterhin wurde der Multizyklus-Betrieb² einer PDC in [Allgood et al., 2006] untersucht, wobei eine PDC mit einer Feuerfrequenz von maximal 30 Hz betrieben werden konnte. [Matsuoka et al., 2017] gelang es, eine PDC mit einer Feuerfrequenz von 500 Hz zuverlässig zu betreiben. Dabei wurde

²Ein Multizyklus-Betrieb liegt vor, wenn der vollständige PDC-Zyklus mit einer möglichst hohen Wiederholfrequenz über einen längeren Zeitraum realisiert werden kann.

ein verhältnismäßig kleines Brennrrohr mit einer Länge von 120 mm und einem Innendurchmesser von 10 mm verwendet.³ Zum Erreichen solch hoher Feuerfrequenzen ist neben den geringen geometrischen Abmaßen des Detonationsrohrs insbesondere eine Minimierung der für den Spülvorgang des verbrannten Gases benötigten Zeitspanne notwendig. [Matsuoka et al., 2015] beschreiben beispielsweise ein Verfahren, bei welchem Wassertröpfchen in das nach dem Ausstoßvorgang im Rohr verbliebene Heißgas eingespritzt werden. Diese Tröpfchen verdampfen schlagartig bei Kontakt mit dem Heißgas, wodurch dieses sehr schnell aus dem Verbrennungsrohr befördert wird.

- *Kontinuierlich umlaufende Detonation (CRD)*⁴ – Alle bisher beschriebenen Verbrennungskonzepte beziehen sich auf Konfigurationen, in denen die druckerhöhende Verbrennung innerhalb eines Rohres stattfindet. Bei der CRD wird als Brennraum hingegen in der Regel ein Ringspalt verwendet, wobei dieser mit einem detonationsfähigen Gemisch befüllt ist. In diesem Ringspalt bildet sich nach der Zündung durch eine Zündkerze und dem anschließenden DDT-Vorgang eine detonativ verbrennende Flammenfront aus, welche sich azimuthal umlaufend im Ringspalt ausbreitet. Über den Umfang des Ringspalts wird kontinuierlich Treibstoff und Frischgas zugeführt, wodurch die Flammenfront nach einem vollständigen Umlauf durch den Ringspalt erneut auf ein detonationsfähiges Gemisch trifft. Somit kann diese theoretisch für einen beliebigen Zeitraum in Umfangsrichtung umlaufen. Da der DDT-Vorgang nur einmalig beim Starten des Prozesses stattfindet, verbrennt nach Abschluss dieses Transitionsprozesses das gesamte danach eingespritzte Gemisch detonativ, wodurch sich die gewünschte Druckerhöhung ergibt. Ein erster Demonstrator, welcher dieses Konzept umsetzt, wurde von [Voitsekhovskii, 1960] vorgestellt. Mangels Reproduzierbarkeit der dort präsentierten Ergebnisse, siehe [Nicholls et al., 1962], wurde anschließend für viele Jahre nicht mehr an diesem Konzept geforscht. Erst im Jahr 2003 wurde durch [Bykovskii & Vedernikov, 2003] erneut eine experimentelle Umsetzung einer CRD präsentiert, was den Anstoß für viele Forschergruppen gab, erneut an einer zuverlässigen experimentellen Umsetzung einer CRD zu arbeiten. [Li et al., 2018] bietet einen guten Überblick über den aktuellen Stand der Forschung auf diesem Gebiet. Aktuelle Forschungsarbeiten beschäftigen sich vor allem mit der Umsetzung eines dauerhaften Betriebs einer CRD, [Anand et al., 2018a], [Anand & Gutmark, 2018].

Erst eine Integration dieser druckerhöhenden Verbrennungskonzepte in eine Gasturbine erlaubt eine näherungsweise Realisierung des Humphrey-Kreisprozesses und ermöglicht somit einen hohen thermodynamischen Wirkungsgrad der Gesamtmaschine. Der positive Effekt auf den Wirkungsgrad des Humphrey-Zyklus durch Vorschalten eines Verdichters vor die druckerhöhende Brennkammer ist in Abb. 1.1c zu erkennen. Mit steigendem Verdichtungsverhältnis p_2/p_1 steigt auch der Gesamtwirkungsgrad.⁵

Grundsätzlich lassen sich die vier vorgestellten Verbrennungskonzepte in zwei Gruppen einteilen. Die drei erstgenannten Konzepte fallen in die Gruppe der pulsierenden Verbrennung, wohingegen die CRD einen kontinuierlichen Verbrennungsprozess beschreibt. Für den Fall der CRD zeigt Wolański in [Li et al., 2018] im Rahmen einer sehr konzeptionellen, experimentellen Studie, dass der Betrieb einer Gasturbine mit CRD-Brennkammer grundsätzlich möglich ist. Die Gesamtmaschine wurde dabei nur für wenige Sekunden betrieben.

³Für den zuvor beschriebenen Aufbau von [Allgood et al., 2006] wurde ein Brennrrohr mit einer Länge von 1.88 m und einem Innendurchmesser von 5.08 cm verwendet.

⁴*Continuously rotating detonation* (CRD), wird teilweise auch als *rotating detonation engine* bezeichnet

⁵Der geringste Wirkungsgrad wird für ein Verdichtungsverhältnis von $p_2/p_1 = 1$ erreicht, was gerade den Fall ohne vorgeschalteten Verdichter beschreibt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich, abgesehen von diesem Kapitel, ausschließlich mit dem Themengebiet der pulsierenden Verbrennung, weshalb im Folgenden auf diese Gruppe ausführlicher eingegangen wird.⁶ Der Stand der Forschung der Integrationsthematik für die Gruppe der pulsierend betriebenen Verbrennungskonzepte stellt sich sehr differenziert dar:

- *Pulsstrahltriebwerk* – Der erfolgreiche Betrieb eines Pulsstrahltriebwerks, bestehend aus einem einzelnen Verbrennungsrohr in Kombination mit einem Verdichter und einer Turbine aus dem Automotive-Bereich, wurde von [Paxson & Dougherry, 2008] gezeigt. Die Anlage wurde nur für wenige Sekunden betrieben, um eine thermische Überlastung der Turbokomponenten zu vermeiden.
- *SEC* – Dem Autor sind keine experimentellen Arbeiten zur Integration einer SEC in eine Gasturbine bekannt.
- *PDC* – Dem Autor sind keine Arbeiten bekannt, die das Zusammenwirken aller drei Gasturbinenkomponenten, d.h. Verdichter, druckerhöhende Brennkammer und Turbine, für den Fall einer PDC experimentell untersucht haben. Lediglich für eine PDC in Kombination mit einer nachgeschalteten Turbine wurden bereits Experimente durchgeführt. [Glaser et al., 2006] untersuchten in diesem Zusammenhang eine Konfiguration bestehend aus sechs Detonationsrohren und einer nachgeschalteten Turbine bezüglich der erreichbaren Turbinenleistung und des Wirkungsgrades in Abhängigkeit der Fülllänge der Rohre und des Äquivalenzverhältnisses des Treibstoffgemisches. Für diese Parameterstudie wurde ein umlaufendes Feuermuster verwendet und jedes der sechs Rohre mit einer Feuerfrequenz von 10 Hz betrieben.

Eine ähnliche Konfiguration wurde auch von [Rasheed et al., 2009] untersucht, wobei dort acht Detonationsrohre mit einer Feuerfrequenz von 20 Hz betrieben wurden. Die auftretenden Druckschwankungen im Plenum wurden jeweils für den Fall eines umlaufenden Feuermusters bzw. den synchronen Betrieb aller Verbrennungsrohre gemessen. Dabei ergaben sich im Fall des umlaufenden Feuermusters signifikant geringere Werte im Vergleich zum synchronen Feuermuster, sowohl für die im Plenum auftretenden Druckpeaks, als auch den resultierenden Mitteldruck. Im umlaufenden Feuerbetrieb traten jedoch sehr häufig Fehlzündungen auf,⁷ was eine direkte Vergleichbarkeit bezüglich einer Minimierung der Druckschwankungen durch die Feuersynchronisation unmöglich macht. Ausführliche Leistungsmessungen für diese Konfiguration finden sich in [Rasheed et al., 2011].

Alle genannten Arbeiten sind im Wesentlichen Machbarkeitsstudien mit dem Ziel, eine prinzipielle Vereinbarkeit des jeweiligen Verbrennungskonzepts mit den vor- bzw. nachgeschalteten Turbokomponenten zu zeigen, oder um sehr rudimentäre Wirkungsgradanalysen durchführen zu können.

In [Rasheed et al., 2011] wird ausdrücklich auf die Notwendigkeit hingewiesen, dass für einen zukünftigen Dauerbetrieb des dort beschriebenen Aufbaus Feuermuster verwendet werden müssen, welche die auftretenden Druckschwankungen im Plenum minimieren, da ansonsten bereits nach kurzem Betrieb mit schwerwiegenden Beschädigungen der nachgeschalteten Turbine zu rechnen ist. Allerdings wird weder ein konkreter Vorschlag für ein entsprechendes Feuermuster unterbreitet noch auf geeignete Methoden zur Ermittlung desselbigen eingegangen. Die vorliegende Arbeit versucht, diese Forschungslücke zu schließen bzw. Lösungsansätze für diese Problematik zu bieten.

⁶Eine Übertragung der im weiteren Verlauf der Arbeit vorgestellten Fehlererkennungsmethoden auf ein CRD-Konzept ist in modifizierter Weise denkbar, wird hier allerdings nicht adressiert.

⁷In dem in [Rasheed et al., 2009] beschriebenen Experiment, lag bei mindestens einem Viertel aller Schüsse eine Fehlzündung vor.

Die im vorherigen Kapitel beschriebene Wiederbefüllungsproblematik der Verbrennungsrohre, für den Fall einer PDC mit vorgeschaltetem Verdichter, wurde in keiner dem Autor bekannten Arbeit thematisiert bzw. experimentell untersucht. Somit bietet die vorliegende Arbeit an dieser Stelle Lösungsansätze für ein hypothetisches Problem, dessen reales Auftreten erst noch nachgewiesen werden muss.

2.2 Regelungs- und Fehlererkennungsmethoden

Der Stand der Forschung, der in dieser Arbeit verwendeten Methoden, wird durch Anführen aktueller Forschungsarbeiten dargelegt, welche diese Methoden auf vergleichbare Problematiken anwenden.

- *Extremwertregelung* (EWR) – In dieser Arbeit wird zur Generierung einer umlaufenden Saugwelle im Plenum eine spezielle Form der EWR eingesetzt, siehe Abschnitt 5.1. Die Berechnung, der durch den Extremwertregler zu maximierenden Gütefunktion, erfolgt bei diesem Ansatz modellbasiert, wobei Annahmen über die Eigenform einer akustischen Mode verarbeitet werden. [Tan et al., 2018] stellen ebenfalls eine modellbasierte EWR zur Optimierung des Einspritzvorgangs in einem Dieselmotor vor, wobei in diesem Fall ein numerisches Modell des Motors genutzt wird, um sinnvolle Startwerte für die Onlineoptimierung zu generieren.
- *Gemischt-Ganzzahlige Optimierung* – Methoden zur Lösung von gemischt-ganzzahligen Optimierungsaufgaben werden in verschiedensten Aufgabenbereichen angewendet. Vor allem zur Lösung von logistischen Problemstellungen und im Bereich des *Operations Research* kommen diese regelmäßig zum Einsatz, siehe z.B. [Pochet & Wolsey, 2006] bzw. [Wu, 2008]. Liegt eine geringe Komplexität des zu lösenden Optimierungsproblems vor, können diese Methoden auch in Echtzeitanwendungen im Rahmen regelungstechnischer Aufgabenstellungen, wie bspw. in [Schäpel et al., 2018], eingesetzt werden. Das in Abschnitt 5.2 vorgestellte, gemischt-ganzzahlige Optimierungsproblem zur Berechnung sinnvoller Feuersynchronisationen weist eine verhältnismäßig hohe Komplexität auf, weshalb hier eine Echtzeitanwendung ausgeschlossen ist.
- *Fehlererkennung* – Für Fehlererkennungsaufgaben in konventionellen Gasturbinen wurden in der Vergangenheit verschiedenste Methoden, wie z.B.
 - Kalman-Filter [Naderi et al., 2011], [Kobayashi & Simon, 2005], [Kobayashi & Simon, 2006], [Simani et al., 2000], [Shang & Liu, 2011],
 - neuronale Netze [Volponi et al., 2003],
 - Fuzzylogik [Ganguli, 2003],
 - genetische Algorithmen [Sampath & Singh, 2004],
 - Sliding Mode Beobachter [Rahme & Meskin, 2015] und
 - hybride Methoden (modell- und datenbasiert) [Zhang et al., 2013]

eingesetzt. Prinzipiell lassen sich diese Methoden in die Kategorien modellbasiert (Sliding Mode Beobachter, Kalman-Filter), datenbasiert (neuronale Netze, genetische Algorithmen, Fuzzylogik) und hybrid einteilen. Mit allen aufgezählten Methoden konnten in den jeweiligen Arbeiten gute Fehlererkennungsergebnisse erzielt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird aus den beiden erstgenannten Kategorien eine Kalman-Filterbasierte Mehrfiltermethode sowie ein neuronales Netz zur Fehlererkennung angewendet.

In [Wolff et al., 2016] wurde auch ein hybrider Ansatz zur Lösung der in Kapitel 6 formulierten Fehlererkennungsaufgabe vorgestellt.

Im Fall der Verarbeitung akustischer Messdaten, wie in dieser Arbeit, werden insbesondere im Bereich der Spracherkennung neuronale Netze zur Klassifikation eingesetzt. Da akustische Systeme in der Regel eine hochfrequente Abtastung erfordern, müssen große Datensätze verarbeitet werden. Bei einer Auswertung der Zeitdaten durch ein klassisches „*feedforward*“-Netz ergeben sich Optimierungsprobleme, welche durch die große Anzahl an Optimierungsparametern nur schwer zu handhaben sind und zu einer Überanpassung neigen. Aus diesem Grund wurde lange Zeit eine Datenvorverarbeitung durch eine spezielle Transformation in den Frequenzbereich vorgenommen, wobei sogenannte *Mel frequency cepstral coefficients* berechnet werden, die dann zur Klassifikation herangezogen werden können, siehe [Rabiner & Juang, 1993]. Bessere Klassifikationsergebnisse können erzielt werden, wenn mittels spezieller Strukturen direkt auf den Zeitdaten gearbeitet wird, [Tüske et al., 2014], [Hoshen et al., 2015], [Bhargava & Rose, 2015]. Dabei werden häufig sogenannte rekursive neuronale Netze verwendet, welche die akustischen Messdaten sequentiell verarbeiten und interne Rückführungen sowie ein Art von Kurzzeitgedächtnis aufweisen. In aktuellen Arbeiten konnte gezeigt werden, dass mit sogenannten *convolutional neural networks*, welche in Abschnitt 6.3 dieser Arbeit verwendet werden, teilweise noch höhere Klassifikationsgüten erreichbar sind, siehe [Palaz et al., 2013], [van den Oord et al., 2016].

- *Zustandsschätzung für örtlich verteilte, fluidische Systeme* – In Kapitel 7 wird ein Sigmapunkt-Kalman-Filter zur Zustandsschätzung eines Systems, dessen Systemdynamik durch die 1-D Euler-Gleichungen beschrieben ist, eingesetzt. Eine vergleichbare Problematik findet sich im Bereich der Datenassimilation für atmosphärische Wetterdaten. Da die dort angesetzten Modellgleichungen sehr komplex sind, werden sogenannte *Ensemble-Kalman-Filter* zur Zustandsschätzung eingesetzt. Diese verwenden, genau wie das Sigmapunkt-Kalman-Filter, einen stichprobenbasierten Ansatz zur Schätzung der stochastischen Verteilung der Systemzustände, allerdings werden deutlich weniger Stichproben als im Sigmapunkt-Ansatz verwendet. Einen Überblick über den Stand der Forschung auf diesem Gebiet bietet [Houtekamer & Zhang, 2016]. Ein alternativer Ansatz zur Datenassimilation für fluidische Systeme findet sich in optimierungsbasierten Methoden, siehe z.B. [Lemke & Sesterhenn, 2016].

3 Grundlagen und Methoden

In diesem Kapitel werden zunächst die relevanten Grundlagen zur physikalischen Modellierung akustischer Systeme eingeführt. Darauf basierend wird anschließend die physikalische Modellbildung des akustischen Prüfstands vorgestellt. Weiterhin werden hier die Methoden aller in dieser Arbeit angewendeten Regelungs-, Zustandsschätzungs- und Fehlererkennungsverfahren erläutert. Dieser Abschnitt dient gleichzeitig der Einführung der Nomenklatur relevanter Variablen.

3.1 Euler-Gleichungen und akustische Wellengleichung

In diesem Abschnitt wird ausgehend von den homogenen Euler-Gleichungen die homogene, akustische Wellengleichung hergeleitet. Die Lösung dieser Gleichung für eine Ringspaltgeometrie, siehe Abb. 3.1, wird angegeben und dabei die akustischen Eigenmoden und Eigenfrequenzen des Systems eingeführt. Anschließend wird die homogene akustische Wellengleichung erweitert, sodass auch Anregungen des Systems durch akustische Quellen im Volumen und auf der Oberfläche bzw. am Rand des Systems sowie Dissipationseffekte beschrieben werden können. Durch Transformation dieses Gleichungssystems in den Frequenzbereich kann, basierend auf den zuvor eingeführten Eigenmoden und Eigenfrequenzen, eine Lösung für das inhomogene akustische System angegeben werden. Damit wird schließlich eine Beschreibung des Systemverhaltens in Form von Übertragungsfunktionen und eines linearen Zustandsraummodells abgeleitet. Letztgenanntes wird später bei der Fehlererkennung in Abschnitt 6.2 Anwendung finden. Die hier angegebenen Herleitungen der akustischen Gleichungen dienen hauptsächlich zur Einführung der verwendeten Nomenklatur und orientieren sich an den Ausführungen in [Rienstra & Hirschberg, 2013].

Das fluiddynamische Verhalten eines reibungsfreien Fluids, welches weder Quellen noch Senken enthält und auf das keine Volumenkräfte wirken, wird durch die Euler-Gleichungen in differenzieller Form beschrieben

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_{\perp}(\rho \underline{v}_{\perp}) = 0 \quad , \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{v}_{\perp}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\perp}(\rho \underline{v}_{\perp} \underline{v}_{\perp}^T) = -\operatorname{grad}_{\perp}(p) \quad , \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}_{\perp}(\underline{v}_{\perp}(E + p)) = 0 \quad . \quad (3.1c)$$

Die Gleichungen (3.1a), (3.1b) und (3.1c) werden dabei auch als Kontinuitäts-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichung bezeichnet. Die darin enthaltenen Größen ρ , p , $E \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\underline{v}_{\perp} \in \mathbb{R}^3$ beschreiben die Dichte, den Druck, die Energiedichte und die Geschwindigkeit, mit $\underline{v}_{\perp} = [v_{x_{\perp}}, v_{y_{\perp}}, v_{z_{\perp}}]^T$. Dabei bezeichnen $v_{x_{\perp}}$, $v_{y_{\perp}}$, $v_{z_{\perp}}$ die Geschwindigkeitskomponenten des Fluids innerhalb eines infinitesimal kleinen, ortsfesten Volumenausschnitts bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems mit den Koordinaten $\underline{x}_{\perp} = [x_{\perp}, y_{\perp}, z_{\perp}]$. Der Index \perp gibt dabei an, dass sich die betreffende Größe auf das kartesische Koordinatensystem bezieht. Dies ist notwendig, um eindeutig vom weiter unten eingeführten Zylinderkoordina-

3 Grundlagen und Methoden

tensystem, welches durch den Index \circ gekennzeichnet wird, zu unterscheiden. Die Divergenz- und Gradient-Operatoren $\text{div}_\perp(\cdot)$ und $\text{grad}_\perp(\cdot)$ in kartesischen Koordinaten werden wie folgt definiert

$$\text{div}_\perp(\underline{v}_\perp) = \frac{\partial v_{x_\perp}}{\partial x_\perp} + \frac{\partial v_{y_\perp}}{\partial y_\perp} + \frac{\partial v_{z_\perp}}{\partial z_\perp} , \quad (3.2a)$$

$$\text{div}_\perp(\underline{v}_\perp \underline{v}_\perp^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{x_\perp} v_{x_\perp}}{\partial x_\perp} + \frac{\partial v_{x_\perp} v_{y_\perp}}{\partial y_\perp} + \frac{\partial v_{x_\perp} v_{z_\perp}}{\partial z_\perp} \\ \frac{\partial v_{y_\perp} v_{x_\perp}}{\partial x_\perp} + \frac{\partial v_{y_\perp} v_{y_\perp}}{\partial y_\perp} + \frac{\partial v_{y_\perp} v_{z_\perp}}{\partial z_\perp} \\ \frac{\partial v_{z_\perp} v_{x_\perp}}{\partial x_\perp} + \frac{\partial v_{z_\perp} v_{y_\perp}}{\partial y_\perp} + \frac{\partial v_{z_\perp} v_{z_\perp}}{\partial z_\perp} \end{bmatrix} , \quad (3.2b)$$

$$\text{grad}_\perp(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_\perp} & \frac{\partial p}{\partial y_\perp} & \frac{\partial p}{\partial z_\perp} \end{bmatrix}^T , \quad (3.2c)$$

$$\text{grad}_\perp(\underline{v}_\perp) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{x_\perp}}{\partial x_\perp} & \frac{\partial v_{x_\perp}}{\partial y_\perp} & \frac{\partial v_{x_\perp}}{\partial z_\perp} \\ \frac{\partial v_{y_\perp}}{\partial x_\perp} & \frac{\partial v_{y_\perp}}{\partial y_\perp} & \frac{\partial v_{y_\perp}}{\partial z_\perp} \\ \frac{\partial v_{z_\perp}}{\partial x_\perp} & \frac{\partial v_{z_\perp}}{\partial y_\perp} & \frac{\partial v_{z_\perp}}{\partial z_\perp} \end{bmatrix} . \quad (3.2d)$$

Durch Anwendung der Produktregel in (3.1b) und Einsetzen von (3.1a) lässt sich (3.1b) auch als

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}_\perp}{\partial t} + \text{grad}_\perp(\underline{v}_\perp) \underline{v}_\perp \right) = - \text{grad}_\perp(p) \quad (3.3)$$

anschreiben.¹ Die Darstellung entsprechend (3.1b) wird in Kapitel 7 innerhalb des numerischen Simulators verwendet, wohingegen in der folgenden Herleitung der akustischen Wellengleichung die Darstellung aus (3.3) Anwendung findet.

3.1.1 Akustische Wellengleichung

Die Euler-Gleichungen (3.1a), (3.1c), (3.3) beschreiben ein Gleichungssystem mit fünf² skalaren Gleichungen und sechs unbekanntem Größen ($\rho, p, E, v_{x_\perp}, v_{y_\perp}, v_{z_\perp}$). Um diese Unterbestimmtheit aufzulösen, wird eine zusätzliche thermodynamische Zustandsgleichung eingeführt

$$p = p(\rho) . \quad (3.4)$$

Da die Zustandsänderung für akustische Systeme als isentrop angenommen werden kann, wird der Druck nur in Abhängigkeit einer thermodynamischen Größe, nämlich der Dichte ρ angegeben.

Für die weitere Herleitung der akustischen Wellengleichung werden die relevanten Zustandsgrößen Druck p , Dichte ρ und Geschwindigkeit \underline{v}_\perp jeweils in einen Gleich- (gekennzeichnet durch den Index: \circ) und einen Schwankungsanteil (gekennzeichnet durch: $'$) zerlegt

¹Es gilt: $\frac{\partial \rho \underline{v}_\perp}{\partial t} + \text{div}_\perp(\rho \underline{v}_\perp \underline{v}_\perp^T) = \rho \frac{\partial \underline{v}_\perp}{\partial t} + \underbrace{\underline{v}_\perp \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}_\perp(\underline{v}_\perp)}_{=0^3} + \rho \text{grad}_\perp(\underline{v}_\perp) \underline{v}_\perp$. Dabei bezeichnet hier

und im Folgenden 0^j gerade den Nullvektor der Dimension \mathbb{R}^j .

²Gleichung (3.3) ist eine Vektorgleichung und enthält drei Gleichungen (jeweils eine Gleichung pro Richtungskomponente).

3.1 Euler-Gleichungen und akustische Wellengleichung

$$p = p_0 + p' \quad , \quad (3.5a)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad , \quad (3.5b)$$

$$\underline{v}_\perp = \underbrace{\underline{v}_{0\perp}}_{=0^3} + \underline{v}'_\perp \quad . \quad (3.5c)$$

Das in dieser Arbeit untersuchte akustische System beinhaltet keine Grundströmung. Aus diesem Grund wird der Gleichanteil des Geschwindigkeitsvektors zu null angenommen. Die Schwankungsgröße des Geschwindigkeitsvektors wird im Folgenden als akustische Schnelle bezeichnet. Die weiteren Gleichanteile ρ_0 und p_0 werden als zeitlich und räumlich konstant definiert

$$\left[\text{grad}_\perp (\rho_0)^T, \text{grad}_\perp (p_0)^T, \frac{\partial \rho_0}{\partial t}, \frac{\partial p_0}{\partial t} \right]^T = \underline{0}^8 \quad . \quad (3.6)$$

Durch Einsetzen von (3.5) in (3.1a) ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho') + \text{div}_\perp \left(\underbrace{(\rho_0 + \rho')}_{\approx \rho_0} \underline{v}'_\perp \right) = 0 \quad , \quad (3.7)$$

wobei angenommen wurde, dass $(|\rho'| \ll \rho_0)$. Dadurch kann der Schwankungsanteil der Dichte gegenüber dem zugehörigen Gleichanteil vernachlässigt werden. Aus (3.6) folgt, dass der Gleichanteil der Dichte ρ_0 aus dem Divergenz-Operator in (3.7) herausgezogen werden kann und dass die zeitliche Ableitung dieser Größe nicht berücksichtigt werden muss. Damit ergibt sich die „linearisierte“ Kontinuitätsgleichung zu

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div}_\perp (\underline{v}'_\perp) = 0 \quad . \quad (3.8)$$

Für die Impulsgleichung (3.3) ergibt sich nach Anwenden von (3.6)

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \underline{v}'_\perp}{\partial t} + \text{grad}_\perp (\underline{v}'_\perp) \underline{v}'_\perp \right) = - \text{grad}_\perp (p') \quad . \quad (3.9)$$

Auch hier wurde wieder $(|\rho'| \ll \rho_0)$ vorausgesetzt. Weiterhin werden alle Terme höherer Ordnung (Produkte von Schwankungsgrößen) vernachlässigt, was bedeutet, dass der Term $\text{grad}_\perp (\underline{v}'_\perp) \underline{v}'_\perp$ aus (3.9) gestrichen wird. Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich die „linearisierte“ Impulsgleichung zu

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{v}'_\perp}{\partial t} + \text{grad}_\perp (p') = \underline{0}^3 \quad . \quad (3.10)$$

Die Zustandsgleichung (3.4) wird durch eine Taylor Approximation erster Ordnung linearisiert

$$p(\rho) \approx p(\rho_0) + (\rho - \rho_0) \underbrace{\frac{dp}{d\rho} \Big|_{\rho_0}}_{c^2} \quad , \quad (3.11)$$

wobei der Ausdruck $\frac{dp}{d\rho} \Big|_{\rho_0}$ als c^2 definiert wird. Die Variable $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der akustischen Wellen und wird aus diesem Grund auch als Schallgeschwindigkeit bezeichnet.³ Durch Subtraktion von $p(\rho_0)$ ergibt sich aus Gleichung (3.11) die

³Der Term $\frac{dp}{d\rho} \Big|_{\rho_0}$ beschreibt genau genommen lediglich den Gleichanteil der Schallgeschwindigkeit c_0 . Da der Schwankungsanteil c' für die lineare Akustik in der Regel nicht von Interesse ist und $c' \ll c$, gilt hier $c := c_0$.

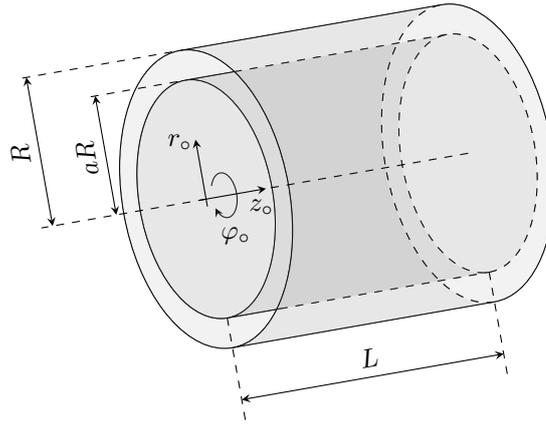


Abbildung 3.1: Schematische Skizze einer Ringspaltgeometrie

linearisierte Zustandsgleichung

$$p' = \rho' c^2 . \quad (3.12)$$

Die Wellengleichung für den Schalldruck lässt sich mittels (3.8), (3.10) und (3.12) herleiten. Dafür wird zunächst die Divergenz von Gleichung (3.10) gebildet und Gleichung (3.8) nach der Zeit abgeleitet. Durch Vertauschen von Zeitableitung und Divergenz ergibt sich somit

$$\rho_0 \operatorname{div}_{\perp} \left(\frac{\partial \underline{v}'_{\perp}}{\partial t} \right) + \Delta_{\perp} p' = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div}_{\perp} \left(\frac{\partial \underline{v}'_{\perp}}{\partial t} \right) = 0 , \quad (3.14)$$

wobei $\Delta_{\perp} = \operatorname{div}_{\perp} (\operatorname{grad}_{\perp} (\cdot))$ den Laplace-Operator beschreibt. Wird nun Gleichung (3.13) von (3.14) abgezogen und zusätzlich die Dichte ρ' mit (3.12) in den Schalldruck p' umgerechnet, erhält man die lineare homogene Wellengleichung für den Schalldruck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta_{\perp} p' = 0 . \quad (3.15)$$

3.1.2 Wellengleichung in Zylinderkoordinaten

Die Wellengleichung (3.15) ist in kartesischen Koordinaten angegeben. Für den in dieser Arbeit untersuchten akustischen Versuchsstand bietet sich eine Beschreibung in Zylinderkoordinaten an. Eine detaillierte Beschreibung dieses Versuchsstands findet sich weiter hinten in Kapitel 4. An dieser Stelle genügt die in Abb. 3.1 gezeigte schematische Darstellung des Versuchsstands, um zum einen das Zylinderkoordinatensystem $\underline{x}_o = [r_o, \varphi_o, z_o]$ und zum anderen die relevanten geometrischen Abmaße einzuführen. Es handelt sich um eine Ringspaltgeometrie, wobei die Länge des Ringspalts mit L , der äußere Radius mit R und der Faktor zwischen dem Radius des äußeren und inneren Rings mit $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnet wird. Weiterhin ist der Ringspalt an beiden Enden (bei $z_o = 0$ und $z_o = L$) durch eine schallharte Wand verschlossen. Der Vektor der akustischen Schnelle in Zylinderkoordinaten wird als $\underline{v}'_o = [v'_{r_o}, v'_{\varphi_o}, v'_{z_o}]^T$, $\underline{v}'_o \in \mathbb{R}^3$, definiert.

Um die Wellengleichung formal in Zylinderkoordinaten anzuschreiben, wird in (3.15) lediglich der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten Δ_{\perp} durch den Laplace-Operator

3.1 Euler-Gleichungen und akustische Wellengleichung

in Zylinderkoordinaten Δ_{\circ} ersetzt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta_{\circ} p' = 0 . \quad (3.16)$$

Um für diese Gleichung eine Lösung zu bestimmen, muss angegeben werden, wie der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten definiert ist. Dazu wird zunächst die Transformation zwischen Zylinderkoordinaten und kartesischen Koordinaten eingeführt

$$\begin{aligned} x_{\perp} &= r_{\circ} \cos \varphi_{\circ} , \\ y_{\perp} &= r_{\circ} \sin \varphi_{\circ} , \\ z_{\perp} &= z_{\circ} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Damit ergibt sich der Laplace-Operator Δ_{\circ} in Zylinderkoordinaten zu

$$\Delta_{\circ}(\cdot) = \frac{1}{r_{\circ}} \frac{\partial}{\partial r_{\circ}} \left(r_{\circ} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r_{\circ}} \right) + \frac{1}{r_{\circ}^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \varphi_{\circ}^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z_{\circ}^2} . \quad (3.18)$$

Mit den Gleichungen (3.16) und (3.18) kann die homogene Wellengleichung in Zylinderkoordinaten angeschrieben werden als

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{r_{\circ}} \frac{\partial}{\partial r_{\circ}} \left(r_{\circ} \frac{\partial p'}{\partial r_{\circ}} \right) - \frac{1}{r_{\circ}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \varphi_{\circ}^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial z_{\circ}^2} = 0 . \quad (3.19)$$

Da die Bestimmung einer Lösung für diese Gleichung Inhalt vieler Lehrbücher ist, wird hier auf eine ausführliche Herleitung verzichtet. Es werden lediglich einige relevante Rechenschritte erläutert, um zu verdeutlichen, welche Annahmen bzw. Approximationen in der angegebenen Lösung enthalten sind, und um die notwendige Nomenklatur einzuführen. Detaillierte Herleitungen finden sich in [Rienstra & Hirschberg, 2013] bzw. [Gelbert, 2013]. Bevor die Lösung für (3.19) angegeben wird, werden zunächst die Randbedingungen für das akustische System aus Abb. 3.1 definiert:

- schallharte Wand bei $r_{\circ} = R$ und $r_{\circ} = aR$

$$\begin{aligned} v'_{r_{\circ}}(r_{\circ} = R, \varphi_{\circ}, z_{\circ}) &= 0 , \quad v'_{r_{\circ}}(r_{\circ} = aR, \varphi_{\circ}, z_{\circ}) = 0 , \\ \text{für } 0 \leq \varphi_{\circ} < 2\pi \text{ und } 0 \leq z_{\circ} \leq L , \end{aligned} \quad (3.20)$$

- schallharte Wand bei $z_{\circ} = 0$ und $z_{\circ} = L$

$$\begin{aligned} v'_{z_{\circ}}(r_{\circ}, \varphi_{\circ}, z_{\circ} = 0) &= 0 , \quad v'_{z_{\circ}}(r_{\circ}, \varphi_{\circ}, z_{\circ} = L) = 0 , \\ \text{für } aR \leq r_{\circ} \leq R \text{ und } 0 \leq \varphi_{\circ} < 2\pi . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Es liegen somit vier Randbedingungen für die akustische Schnelle vor. Diese können mittels der „linearisierten“ Euler-Gleichung (3.10) in Randbedingungen für die Schwankungsgröße des Drucks umgerechnet werden. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial r_{\circ}}(r_{\circ} = R, \varphi_{\circ}, z_{\circ}) &= 0 , \quad \frac{\partial p'}{\partial r_{\circ}}(r_{\circ} = aR, \varphi_{\circ}, z_{\circ}) = 0 , \\ \text{für } 0 \leq \varphi_{\circ} < 2\pi \text{ und } 0 \leq z_{\circ} \leq L , \end{aligned} \quad (3.22)$$

3 Grundlagen und Methoden

und

$$\frac{\partial p'(r_o, \varphi_o, z_o = 0)}{\partial z_o} = 0, \quad \frac{\partial p'(r_o, \varphi_o, z_o = L)}{\partial z_o} = 0, \quad (3.23)$$

für $aR \leq r_o \leq R$ und $0 \leq \varphi_o < 2\pi$.

Die allgemeine Lösung von (3.19) mit den Randbedingungen (3.22) und (3.23) kann durch Anwendung eines Separationsansatzes als

$$p'(r_o, \varphi_o, z_o, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_o(n, r_o) g_o(m, \varphi_o) h_o(l, z_o) e^{i\omega_{lmn}t}, \quad l, m, n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.24)$$

angegeben werden, wobei i die imaginäre Einheit⁴ bezeichnet. Alle drei Funktionen $f_o, g_o, h_o : (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, beschreiben gemeinsam für eine feste Kombination von l, m, n jeweils eine akustische Mode des Ringspalts, deren Eigenfrequenz durch $\omega_{lmn} \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben ist. Die Variablen l, m, n verweisen dabei auf die l -te Axialmode, die m -te Azimutalmode sowie die n -te Radialmode. Die Lösung von (3.19) lässt sich somit als Superposition von unendlich vielen akustischen Eigenmoden darstellen.

Weiter unten wird basierend auf der Beschreibung aus Gl. (3.24) ein niederdimensionales Zustandsraummodell aufgebaut. Dieses kann nur eine endliche Anzahl von akustischen Moden berücksichtigen und soll vor allem den niederfrequenten Bereich gut abbilden. Alle Summanden mit hohen Eigenfrequenzen können somit vernachlässigt werden. Im Vergleich zur axialen und azimutalen Ausdehnung weist die hier untersuchte Ringspaltgeometrie nur eine geringe radiale Ausdehnung auf. Somit gehören zu allen radialen Moden höherer Ordnung ($n > 0$) für beliebige l, m sehr hochfrequente Eigenfrequenzen, siehe [Moeck, 2010]. Aus diesem Grund werden alle Moden für $n > 0$ vernachlässigt.

Der ursprünglich dreidimensionale Raum wird somit auf die zwei Dimensionen φ_o und z_o reduziert. Für den Fall $n = 0$ gilt dann

$$f_o(n = 0, r_o) = 1, \quad (3.25a)$$

$$g_o(m, \varphi_o) = A_m \cos(m \varphi_o) + B_m \sin(m \varphi_o), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \quad (3.25b)$$

$$h_o(l, z_o) = A_l \cos\left(\frac{l\pi}{L} z_o\right) + B_l \sin\left(\frac{l\pi}{L} z_o\right), \quad \forall l \in \mathbb{N}_0. \quad (3.25c)$$

Dabei beschreiben $A_m, B_m, A_l, B_l \in \mathbb{R}$ Konstanten, welche durch die Anfangs- und Randbedingungen des Systems festzulegen sind. Durch die Randbedingung aus (3.23) für $\varphi_o = 0$, ergibt sich $B_l = 0, \forall l$. Damit lässt sich die allgemeine Lösung als

$$p'(\varphi_o, z_o, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(\frac{l\pi}{L} z_o\right) (A_{lm} \cos(m \varphi_o) + B_{lm} \sin(m \varphi_o)) e^{i\omega_{lm}t} \quad (3.26)$$

anschreiben. Dabei gilt $A_{lm} = A_l A_m, B_{lm} = A_l B_m$ und $\omega_{lm} = \omega_{lm0}$. Die Konstanten A_{lm} und B_{lm} werden durch Anfangsbedingungen des Systems festgelegt. Die Eigenfrequenzen ω_{lm} lassen sich für eine Ringspaltgeometrie nur auf numerischem Wege exakt bestimmen. Da die Eigenfrequenzen der akustischen Moden in Abschnitt 6.1 als zu identifizierende Parameter innerhalb eines Optimierungsverfahrens zur Parameteridentifikation verwendet werden, genügt es an dieser Stelle, eine approximative Vorschrift zur Berechnung der Eigenfrequenzen anzugeben. Diese wird später verwendet, um sinnvolle Startwerte für den Optimierungsalgorithmus zu generieren. Für den Fall eines schmalen radialen Spalts lassen sich die Eigenfre-

⁴Es gilt $i^2 = -1$.

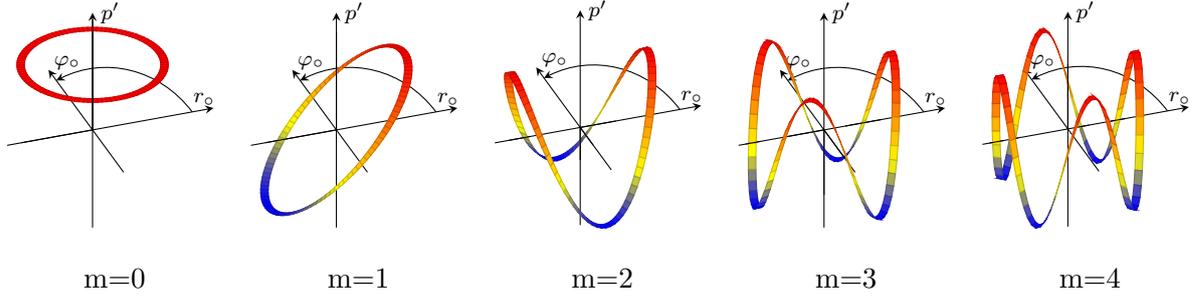


Abbildung 3.2: Dargestellt ist der akustische Druck p' der 0. bis 4. azimuthalen Eigenmode $m=0$ bis $m=4$ innerhalb des Ringspalts entlang der r_0 - φ_0 -Ebene für ein festes z_0 mit $0 < z_0 < L$, einen festen Zeitpunkt und eine beliebige axiale Modenordnung. Da sich die azimuthalen Eigenmoden entsprechend (3.29) jeweils aus einer Linearkombination von Sinus- und Kosinusmode ergeben, können die hier dargestellten Moden zusätzlich entlang der φ_0 -Koordinate beliebig rotiert werden.

quenzen wie folgt approximieren, vergleiche [Moeck, 2010]

$$\omega_{lm} \approx c \sqrt{\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{2m}{R(1+a)}\right)^2} . \quad (3.27)$$

Gleichung (3.26) lässt sich durch Einführen der Abkürzungen

$$\Phi_{c,lm} = \cos\left(\frac{l\pi}{L}z_0\right) \cos(m\varphi_0) , \quad (3.28a)$$

$$\Phi_{s,lm} = \cos\left(\frac{l\pi}{L}z_0\right) \sin(m\varphi_0) , \quad (3.28b)$$

welche im Folgenden als Kosinus- (Index c) bzw. Sinus-Eigenmode (Index s) der Ordnung l, m bezeichnet werden, darstellen als

$$p'(\varphi_0, z_0, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_{lm}\Phi_{c,lm} + B_{lm}\Phi_{s,lm}) e^{i\omega_{lm}t} . \quad (3.29)$$

Zur Veranschaulichung der akustischen Eigenmoden innerhalb des Ringspalts sind in Abb. 3.2 die azimuthalen Eigenmoden bis zur Ordnung $m=4$ exemplarisch dargestellt. Sowohl die Amplituden der einzelnen Moden, als auch deren genaue Ausrichtung entlang der φ_0 -Koordinate wird durch die Parameter A_{lm} und B_{lm} festgelegt, welche sich aus den Anfangsbedingungen des Systems ergeben.

3.1.3 Inhomogene Wellengleichung, akustische Übertragungsfunktion und Zustandsraummodell der Ringspaltgeometrie

Inhomogene Wellengleichung

Mit Gleichung (3.29) ist die Lösung für das dynamische Verhalten des akustischen Felds innerhalb des Ringspalts ohne äußere Anregung gegeben. Um auch den Einfluss von Schallquellen sowie dissipative Dämpfungseffekte abbilden zu können, wird in diesem Abschnitt

3 Grundlagen und Methoden

die homogene Wellengleichung aus (3.16) erweitert, siehe [Schuermans, 2003]

$$c^2 \Delta_o p' - \alpha_d \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = h \quad , \quad (3.30a)$$

$$\underline{n}^T \text{grad}_o(p') = -f \quad . \quad (3.30b)$$

Durch den Faktor $\alpha_d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ lassen sich dissipative Effekte, wie beispielsweise eine Dämpfung der akustischen Moden beschreiben. Mit den Variablen $h, f \in \mathbb{R}$ werden jeweils akustische Quellen im Volumen bzw. auf der Oberfläche des beschriebenen Volumenausschnitts eingeführt. Weiterhin bezeichnet \underline{n} den Normalenvektor der Oberfläche des Volumenausschnitts, welcher aus dem Volumen heraus orientiert ist.

Das Gleichungssystem (3.30) setzt sich zusammen aus der inhomogenen, linearen, partiellen Differenzialgleichung (3.30a) und der zusätzlichen Nebenbedingung (3.30b). Zur Lösung eines solchen Systems bietet sich die Verwendung einer Greenschen Funktion an. Die Greensche Funktion $G(\underline{x}_o, t, \underline{x}_o^*) : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt die Systemantwort innerhalb des betrachteten Volumenausschnitts auf eine Impulsanregung $h_{\delta\delta}(\underline{x}_o, t, \underline{x}_o^*) : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $\underline{x}_o^* \in \mathbb{R}^3$, welche durch

$$h := h_{\delta\delta}(\underline{x}_o, t, \underline{x}_o^*) = \delta(t) \delta(\underline{x}_o - \underline{x}_o^*) \quad , \quad (3.31)$$

und ohne Oberflächenquelle, $f = 0, \forall t, \underline{x}_o$ beschrieben wird. Dabei bezeichnet $\delta(\cdot)$ die Delta-Distribution⁵. Gelingt es, die Greensche Funktion anzugeben, kann damit beispielsweise auch die Systemantwort $p'_{h_\delta}(\underline{x}_o, t) : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow \mathbb{R}$ auf eine beliebige akustische Punktquelle $h_\delta(\underline{x}_o, t, \underline{x}_o^*) : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$, mit

$$h := h_\delta(\underline{x}_o, t, \underline{x}_o^*) = r_h(t) \delta(\underline{x}_o - \underline{x}_o^*) \quad , \quad (3.32)$$

berechnet werden, wobei $r_h(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ einen beliebigen Zeitverlauf einer akustischen Anregung beschreibt. Dafür muss die zeitliche Faltung zwischen G und h_δ berechnet und über das komplette Volumen V des Systems integriert werden

$$p'_{h_\delta}(\underline{x}_o, t, \underline{x}_o^*) = \int_V \int_0^t G(\underline{x}_o, (t - \tau), \check{\underline{x}}_o) h_\delta(\check{\underline{x}}_o, \tau, \underline{x}_o^*) d\tau d\check{V} \quad , \quad (3.33)$$

wobei $\tau \in \mathbb{R}$. Die örtlichen Integrationsvariablen werden mit dem Symbol $\check{\cdot}$ gekennzeichnet. Im Frequenzbereich vereinfacht sich die Faltung zu einer gewöhnlichen Multiplikation

$$\mathcal{F} \left(\int_V \int_0^t G(\underline{x}_o, (t - \tau), \check{\underline{x}}_o) h_\delta(\check{\underline{x}}_o, \tau, \underline{x}_o^*) d\tau d\check{V} \right) = \int_V \mathcal{G}(\underline{x}_o, \omega, \check{\underline{x}}_o) \mathcal{H}(\check{\underline{x}}_o, \omega, \underline{x}_o^*) d\check{V} \quad , \quad (3.34)$$

mit $\mathcal{G} = \mathcal{F}(G)$ und $\mathcal{H} = \mathcal{F}(h)$. Dabei bezeichnet $\mathcal{F}(\cdot)$ die Fourier-Transformation und $\omega \in \mathbb{R}$ die Kreisfrequenz. Alle fouriertransformierten Größen werden in kalligrafischer Schriftart dargestellt. Gleichung (3.34) kann unter Verwendung der Ausblendeigenschaft der δ -Distribution weiter vereinfacht werden zu

$$\mathcal{P}'_{h_\delta}(\underline{x}_o, \omega) = \mathcal{G}(\underline{x}_o, \omega, \underline{x}_o^*) \mathcal{r}_h(\omega) \quad , \quad (3.35)$$

wobei $\mathcal{P}'_{h_\delta} = \mathcal{F}(p'_{h_\delta})$ und $\mathcal{r}_h = \mathcal{F}(r_h)$.

Um den Einfluss örtlich verteilter Quellen, $h(\underline{x}_o, t)$, im betrachteten Volumen und auch örtlich verteilter Quellen auf der Oberfläche, $f(\underline{x}_o, t)$, auf die Systemantwort durch die Green-

⁵Die Delta-Distribution wird definiert als $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ und $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}$.

sche Funktion zu beschreiben, wird zunächst

$$h := h(\underline{x}_o, t) , \quad (3.36)$$

$$f := f(\underline{x}_o, t) , \quad (3.37)$$

definiert⁶. Da jetzt auch Quellen auf der Oberfläche berücksichtigt werden, muss zusätzlich zur Integration über das Volumen \check{V} auch über die Oberfläche \check{A} integriert werden. Die Systemantwort im Frequenzbereich $\check{p}'(\underline{x}_o, \omega) : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich auf diese Weise aus Gleichung (3.30) nach einigen Umformungen und der Transformation in den Frequenzbereich berechnen

$$\check{p}'(\underline{x}_o, \omega) = \int_V \mathcal{G}(\underline{x}_o, \omega, \check{\underline{x}}_o) \check{h}(\check{\underline{x}}_o, \omega) d\check{V} + \oint_A c^2 \mathcal{G}(\underline{x}_o, \omega, \check{\underline{x}}_o) \check{f}(\check{\underline{x}}_o, \omega) d\check{A} , \quad (3.38)$$

mit $\check{f} = \mathcal{F}(f)$. Diese Gleichung kann nur ausgewertet werden, wenn die Greensche Funktion für das gegebene System bekannt ist. Eine Möglichkeit, um \mathcal{G} zu bestimmen, ergibt sich durch die modale Entwicklung mittels der akustischen Eigenmoden $\Phi_{c,lm}$ und $\Phi_{s,lm}$ aus (3.28). Da jede Eigenmode jeweils orthogonal zu allen anderen Eigenmoden des Systems ist, bilden alle Eigenmoden gemeinsam eine vollständige Basis. Somit kann die Greensche Funktion als Linearkombination aller akustischer Eigenmoden des Systems dargestellt werden

$$\mathcal{G}(\underline{x}_o, \omega, \check{\underline{x}}_o) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \eta_c(\check{\underline{x}}_o, \omega) \Phi_{c,lm}(\underline{x}_o) + \eta_s(\check{\underline{x}}_o, \omega) \Phi_{s,lm}(\underline{x}_o) . \quad (3.39)$$

Die frequenzabhängigen modalen Koeffizienten $\eta_c(\check{\underline{x}}_o, \omega), \eta_s(\check{\underline{x}}_o, \omega) : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow \mathbb{C}$ lassen sich bestimmen, indem Gleichung (3.30) fouriertransformiert

$$c^2 \Delta_o \check{p}' - i\omega\alpha_d \check{p}' + \omega^2 \check{p}' = \check{h} , \quad (3.40a)$$

$$\underline{n}^T \text{grad}_o(\check{p}') = -\check{f} \quad (3.40b)$$

und anschließend (3.39) in (3.40a) eingesetzt wird. Nach einer Integration über das Volumen sowie einigen weiteren Umformungen, wobei unter anderem die Orthogonalitätseigenschaft der Eigenmoden ausgenutzt wird, ergibt sich

$$\eta_c(\check{\underline{x}}_o, \omega) = \frac{\Phi_{c,lm}(\check{\underline{x}}_o)}{\Lambda_{c,lm}(\omega^2 - i\omega\alpha_d - \omega_{lm}^2)} , \quad (3.41a)$$

$$\eta_s(\check{\underline{x}}_o, \omega) = \frac{\Phi_{s,lm}(\check{\underline{x}}_o)}{\Lambda_{s,lm}(\omega^2 - i\omega\alpha_d - \omega_{lm}^2)} , \quad (3.41b)$$

mit

$$\Lambda_{c,lm} = \int_V \Phi_{c,lm}(\check{\underline{x}}_o) d\check{V} , \quad (3.42a)$$

$$\Lambda_{s,lm} = \int_V \Phi_{s,lm}(\check{\underline{x}}_o) d\check{V} . \quad (3.42b)$$

⁶Eine Punktquelle im Volumen an der Position \underline{x}_o^* wurde zuvor mit $h_\delta(\underline{x}_o, t, \underline{x}_o^*)$ bezeichnet. Für eine örtlich verteilte Quelle $h(\underline{x}_o, t)$ entfällt die Abhängigkeit vom Parameter \underline{x}_o^* .

3 Grundlagen und Methoden

Durch Auswerten der Integrale in (3.42) erhält man

$$\Lambda_{c,lm} = \frac{L\pi R^2 (1 - a^2)}{(2 - \delta_d(l))(2 - \delta_d(m))} , \quad l, m \in \mathbb{N}_0 , \quad (3.43a)$$

$$\Lambda_{s,lm} = \Lambda_{c,lm} , \quad l \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N} . \quad (3.43b)$$

Dabei bezeichnet $\delta_d(\cdot)$ die Einheitsimpulsfunktion⁷. Die beiden Faktoren $\Lambda_{c,lm} \in \mathbb{R}$ und $\Lambda_{s,lm} \in \mathbb{R}$ unterscheiden sich somit nur für $m = 0$. In diesem Fall gilt für die zu $\Lambda_{s,lm}$ gehörige Sinus-Eigenmode $\Phi_{s,lm} = 0$, siehe (3.28b). Somit kann der Faktor $\Lambda_{s,lm}$ für $m = 0$ beliebig gewählt werden. Diese Erkenntnis wird im Folgenden zur einfacheren Darstellung genutzt, indem

$$\Lambda_{lm} := \Lambda_{c,lm} = \Lambda_{s,lm} , \quad l, m \in \mathbb{N}_0 , \quad (3.44)$$

definiert wird. Somit ist die Greensche Funktion bekannt und durch Einsetzen von (3.41) und (3.39) in (3.38) kann die Bestimmungsgleichung für das vollständige akustische Druckfeld angegeben werden

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(\underline{x}_o, \omega) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_{lm} (\omega^2 - i\omega\alpha_d - \omega_{lm}^2)} \cdots \\ &\cdots \left(\int_V (\Phi_{c,lm}(\check{\underline{x}}_o) \Phi_{c,lm}(\underline{x}_o) + \Phi_{s,lm}(\check{\underline{x}}_o) \Phi_{s,lm}(\underline{x}_o)) \mathcal{H}(\check{\underline{x}}_o, \omega) d\check{V} \cdots \right. \\ &\left. \cdots + \oint_A c^2 (\Phi_{c,lm}(\check{\underline{x}}_o) \Phi_{c,lm}(\underline{x}_o) + \Phi_{s,lm}(\check{\underline{x}}_o) \Phi_{s,lm}(\underline{x}_o)) \mathcal{F}(\check{\underline{x}}_o, \omega) d\check{A} \right) . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Akustische Übertragungsfunktion

In diesem Abschnitt soll basierend auf dem Ergebnis aus (3.45) eine akustische Übertragungsfunktion hergeleitet werden. Diese beschreibt das Übertragungsverhalten im Frequenzbereich zwischen einer akustischen Quelle, wie z. B. \mathcal{F} bzw. \mathcal{H} in (3.45) und der Schwankungsgröße des Drucks \mathcal{P}' an einer beliebigen Position innerhalb des Systems. Um die Integrale in der Bestimmungsgleichung (3.45) auszuwerten, müssen die Quellterme \mathcal{F} bzw. \mathcal{H} genauer spezifiziert werden. Die im Folgenden hergeleitete Übertragungsfunktion wird weiter unten verwendet werden, um das akustische Übertragungsverhalten von auf der Oberfläche des akustischen Systems applizierten Lautsprechern auf den akustischen Druck an einer gewünschten Position zu beschreiben. Da neben den Lautsprechern in dieser Arbeit keine weiteren Quellen von Interesse sind, wird der Quellterm im Volumen zu $\mathcal{H} = 0$ angenommen.

Zur Beschreibung der Anregung durch einen Lautsprecher wird zunächst die Fläche A_κ , mit $A_\kappa \subset A$, definiert, auf welcher der Quellterm $\mathcal{F} := \mathcal{F}_\kappa$ wirken soll. Dabei beschreibt A die komplette Oberfläche des akustischen Systems. Im Folgenden wird angenommen, dass das akustische System aus Abb. 3.1 durch eine akustische Schnelle $\underline{v}'_{o\kappa}(\underline{x}_{o\kappa}, t)$, $\underline{x}_{o\kappa} \in A_\kappa$, angeregt wird, welche senkrecht auf der Oberfläche A_κ steht und in das Volumen V hinein zeigt. Die zugehörige fouriertransformierte Größe ist gegeben durch $\underline{v}'_{o\kappa} = \mathcal{F}(\underline{v}'_{o\kappa})$.

Um die akustische Anregung $\underline{v}'_{o\kappa}(\underline{x}_{o\kappa}, \omega)$ mittels des Quellterms $\mathcal{F}_\kappa(\underline{x}_{o\kappa}, \omega)$ auszudrücken, muss zunächst die „linearisierte“ Impulsgleichung (3.10) in Zylinderkoordinaten transformiert und anschließend im Frequenzbereich dargestellt werden

$$i\omega \rho_0 \underline{v}'_{o\kappa} = -\text{grad}_o(\mathcal{P}') . \quad (3.46)$$

⁷Die Einheitsimpulsfunktion wird definiert als $\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$.

Wird nun (3.46) in (3.40b) eingesetzt, ergibt sich

$$\underbrace{\underline{n}^T \underline{u}'_{o\kappa}}_{=-\|\underline{u}'_{o\kappa}\|_2} \iota \omega \rho_0 = \mathcal{I}_\kappa \quad (3.47)$$

Die hier neu eingeführte Größe $s'_{o\kappa}$ wird weiter unten verwendet, um die durch den Lautsprecher generierte akustische Anregung zu beschreiben. Die zugehörige Größe im Zeitbereich ist gegeben durch $s'_{o\kappa} = \mathcal{F}^{-1}(s'_{o\kappa})$.

Durch Einsetzen von (3.47) in (3.45) erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(\underline{x}_o, \omega) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^2}{\Lambda_{lm} (\omega^2 - \iota \omega \alpha_d - \omega_{lm}^2)} \cdots \\ &\cdots \oint_{A_\kappa} -(\Phi_{c,lm}(\check{\underline{x}}_o) \Phi_{c,lm}(\underline{x}_o) + \Phi_{s,lm}(\check{\underline{x}}_o) \Phi_{s,lm}(\underline{x}_o)) s'_{o\kappa}(\underline{x}_o, \omega) \iota \omega \rho_0 d\tilde{A}_\kappa \quad (3.48) \end{aligned}$$

Um eine einfache Berechnung des Oberflächenintegrals zu ermöglichen, werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Eigenmoden $\Phi_{c,lm}(\underline{x}_o)$ und $\Phi_{s,lm}(\underline{x}_o)$ werden an der Position $\underline{x}_o = \underline{x}_{o\kappa}^* \in A_\kappa$ ausgewertet und die zugehörigen Werte werden als örtlich konstant über den Integrationsbereich A_κ betrachtet. Die Position $\underline{x}_{o\kappa}^*$ beschreibt dabei den Flächenschwerpunkt von A_κ . Diese Annahme stellt eine gute Approximation dar, falls die Fläche A_κ klein gegenüber der akustischen Wellenlänge der hochfrequentesten betrachteten Eigenmode ist. Dies ist für den in dieser Arbeit untersuchten Versuchsstand gegeben.
- Die akustische Anregung ist innerhalb der betrachteten Fläche A_κ örtlich konstant $s'_{o\kappa}(\underline{x}_o, \omega) = s'_{o\kappa}(\omega)$.

Da mit diesen Annahmen keine Variable innerhalb des Integrals von der Integrationsvariablen abhängt, können diese aus dem Integral herausgezogen werden. Somit ergibt sich

$$\mathcal{P}'(\underline{x}_o, \omega) = -s'_{o\kappa}(\omega) \iota \omega c^2 \rho_0 A_\kappa \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Phi_{c,lm}(\underline{x}_{o\kappa}^*) \Phi_{c,lm}(\underline{x}_o) + \Phi_{s,lm}(\underline{x}_{o\kappa}^*) \Phi_{s,lm}(\underline{x}_o)}{\Lambda_{lm} (\omega^2 - \iota \omega \alpha_d - \omega_{lm}^2)} \quad (3.49)$$

Um aus dieser Gleichung eine Übertragungsfunktion zu definieren, muss zunächst der Ortsvektor $\underline{x}_{o\kappa}^*$ eingeführt werden, welcher die Position des betrachteten Systemausgangs beschreibt. Weiterhin wird die verkürzte Schreibweise $\mathcal{P}'_j(\omega) := \mathcal{P}'(\underline{x}_{o\kappa}^*, \omega)$ eingeführt. Durch Auswerten von (3.49) an der Position $\underline{x}_{o\kappa}^*$ und Umstellen nach $\mathcal{P}'_j/s'_{o\kappa}$ lässt sich schließlich der Frequenzgang

$$\mathcal{H}_{\kappa j}(\omega) = \frac{\mathcal{P}'_j}{s'_{o\kappa}} = -\iota \omega c^2 \rho_0 A_\kappa \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Phi_{c,lm}(\underline{x}_{o\kappa}^*) \Phi_{c,lm}(\underline{x}_{o\kappa}^*) + \Phi_{s,lm}(\underline{x}_{o\kappa}^*) \Phi_{s,lm}(\underline{x}_{o\kappa}^*)}{\Lambda_{lm} (\omega^2 - \iota \omega \alpha_{d,lm} - \omega_{lm}^2)} \quad (3.50)$$

definieren, welche das Übertragungsverhalten von einer akustischen Schnelle an der Position $\underline{x}_{o\kappa}^*$ auf die Schwankungsgröße des Drucks an der Position $\underline{x}_{o\kappa}^*$ im Frequenzbereich beschreibt. Um dieses Modell beispielsweise innerhalb eines Fehlererkennungsalgorithmus einzusetzen, ist es notwendig, einige Parameter in (3.50) mittels Parameteridentifikationsverfahren an experimentelle Daten anzupassen, siehe Kapitel 6. Um dabei die Freiheitsgrade für eine Anpassung der akustischen Dämpfung zu erhöhen, wurde der Parameter α_d in (3.49), durch den modalen Dämpfungsparameter $\alpha_{d,lm}$, mit $l, m \in \mathbb{N}_0$, ersetzt. Dadurch wird es möglich, jede akustische Eigenmode unterschiedlich stark zu dämpfen.

Akustisches Zustandsraummodell

Die modellbasierte Fehlererkennung aus Abschnitt 6.2 verwendet ein Zustandsraummodell des akustischen Systems, welches von der Übertragungsfunktion aus (3.50) abgeleitet wird. Da das hier beschriebene Zustandsraummodell in einem Echtzeitsystem zur Anwendung kommt, kann aus Gründen der beschränkten Rechenzeit lediglich eine endliche Zahl von Eigenmoden berücksichtigt werden. Aus diesem Grund wird ein Superindex $\psi \in \{0, 1, \dots, \Psi\}$, mit $\Psi \in \mathbb{N}_0$ eingeführt, durch welchen die $\Psi + 1$ berücksichtigten Eigenmoden indiziert werden können. Dabei gilt $\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_\psi$. Der Superindex ψ ersetzt somit den bisher verwendeten Index lm zur Unterscheidung der einzelnen Eigenmoden.

Für jede der $\Psi + 1$ Eigenmoden wird zunächst ein eigenes Zustandsraummodell definiert. Anschließend können alle betrachteten Eigenbewegungen durch Superposition in einem einzigen Zustandsraummodell zusammengefasst werden. Die Auswirkung der ψ -ten Mode auf den akustischen Druck $p'_{j,\psi}(\underline{x}_{oj}^*, t) \in \mathbb{R}$ an der Position \underline{x}_{oj}^* durch eine Anregung $s'_{o\kappa}(\underline{x}_{o\kappa}^*, t)$ an der Stelle $\underline{x}_{o\kappa}^*$ wird durch folgendes Zustandsraummodell beschrieben

$$\dot{\underline{x}}_\psi(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_\psi & 0 & 0 \\ \omega_\psi & -\alpha_{d,\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_\psi \\ 0 & 0 & \omega_\psi & -\alpha_{d,\psi} \end{bmatrix}}{=\mathbf{A}_\psi} \underline{x}_\psi(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_\kappa}{\Lambda_\psi} \Phi_{c,\psi}(\underline{x}_{o\kappa}^*) \\ 0 \\ \frac{A_\kappa}{\Lambda_\psi} \Phi_{s,\psi}(\underline{x}_{o\kappa}^*) \end{bmatrix}}{=b_{\kappa,\psi}} s'_{o\kappa}(\underline{x}_{o\kappa}^*, t) , \quad (3.51a)$$

$$p'_{j,\psi}(\underline{x}_{oj}^*, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \rho_0 c^2 \Phi_{c,\psi}(\underline{x}_{oj}^*) & 0 & \rho_0 c^2 \Phi_{s,\psi}(\underline{x}_{oj}^*) \end{bmatrix}}_{=c_{j,\psi}^T} \underline{x}_\psi(t) , \quad (3.51b)$$

wobei $\underline{x}_\psi \in \mathbb{R}^{n_{x_\psi}}$, mit $n_{x_\psi} = 4$ und $\mathbf{A}_\psi \in \mathbb{R}^{n_{x_\psi} \times n_{x_\psi}}$, $b_{\kappa,\psi} \in \mathbb{R}^{n_{x_\psi}}$, $c_{j,\psi} \in \mathbb{R}^{n_{x_\psi}}$. Zur Berechnung der vollständigen Systemantwort $p'_j(\underline{x}_{oj}^*, t)$ müssen die Zustandsraummodelle aller betrachteter akustischer Eigenmoden superponiert werden

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_0(t) \\ \vdots \\ \dot{\underline{x}}_\Psi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_\Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0(t) \\ \vdots \\ \underline{x}_\Psi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{\kappa,0} \\ \vdots \\ b_{\kappa,\Psi} \end{bmatrix} s'_{o\kappa}(\underline{x}_{o\kappa}^*, t) , \quad (3.52a)$$

$$p'_j(\underline{x}_{oj}^*, t) = \begin{bmatrix} c_{j,0}^T & \dots & c_{j,\Psi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0(t) \\ \vdots \\ \underline{x}_\Psi(t) \end{bmatrix} . \quad (3.52b)$$

Durch Ausnutzung der Superpositionseigenschaft kann (3.52) erweitert werden, um auch Anregungen durch eine Vielzahl akustischer Quellen zu beschreiben. Dafür wird die Variable $n_{u_{AK}} \in \mathbb{N}_0$ eingeführt, welche die Anzahl der Schallquellen beschreibt und damit $\kappa \in \{1, \dots, n_{u_{AK}}\}$ definiert. Um weiterhin zu ermöglichen, den akustischen Druck an unterschiedlichen Positionen auszuwerten, wird zusätzlich die Variable $n_{y_{AK}} \in \mathbb{N}_0$ eingeführt und damit $j \in \{1, \dots, n_{y_{AK}}\}$ definiert. Das vollständige Zustandsraummodell mit $n_{u_{AK}}$ Schall-

3.2 Modellierung mittels Supervektoren und Impulsantworten

quellen und $n_{y_{AK}}$ Ausgängen ergibt sich mit diesen Definitionen zu

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_0(t) \\ \vdots \\ \dot{\underline{x}}_\Psi(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_\Psi \end{bmatrix}}{=\mathbf{A}_{AK}} \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_0(t) \\ \vdots \\ \underline{x}_\Psi(t) \end{bmatrix}}{=\underline{x}_{AK}} + \overbrace{\begin{bmatrix} b_{1,0} & \cdots & b_{n_{u_{AK}},0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,\Psi} & \cdots & b_{n_{u_{AK}},\Psi} \end{bmatrix}}{=\mathbf{B}_{AK}} \overbrace{\begin{bmatrix} s'_{o1}(\underline{x}_{o1}^*, t) \\ \vdots \\ s'_{on_{u_{AK}}}(\underline{x}_{on_{u_{AK}}}^*, t) \end{bmatrix}}{=\underline{u}_{AK}}, \quad (3.53a)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p'_1(\underline{x}_{o1}^*, t) \\ \vdots \\ p'_{n_{y_{AK}}}(\underline{x}_{on_{y_{AK}}}^*, t) \end{bmatrix}}{=\underline{y}_{AK}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1,0}^T & \cdots & c_{1,\Psi}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n_{y_{AK}},0}^T & \cdots & c_{n_{y_{AK}},\Psi}^T \end{bmatrix}}{=\mathbf{C}_{AK}} \begin{bmatrix} \underline{x}_0(t) \\ \vdots \\ \underline{x}_\Psi(t) \end{bmatrix}, \quad (3.53b)$$

wobei $\underline{x}_{AK} \in \mathbb{R}^{n_{x_{AK}}}$, $n_{x_{AK}} = n_{x_\psi}(\Psi + 1)$, $\mathbf{A}_{AK} \in \mathbb{R}^{n_{x_{AK}} \times n_{x_{AK}}}$, $\mathbf{B}_{AK} \in \mathbb{R}^{n_{x_{AK}} \times n_{u_{AK}}}$, $\mathbf{C}_{AK} \in \mathbb{R}^{n_{y_{AK}} \times n_{x_{AK}}}$, $\underline{u}_{AK} \in \mathbb{R}^{n_{u_{AK}}}$ und $\underline{y}_{AK} \in \mathbb{R}^{n_{y_{AK}}}$. Der hier zusätzlich eingeführte Index AK zeigt an, dass die zugehörigen Größen Bestandteil des Zustandsraummodells sind, welches das dynamische Verhalten des akustischen Feldes der Ringspaltgeometrie beschreibt. Dies ist notwendig, um eine Unterscheidbarkeit zu dem in Abschnitt 6.1 eingeführten Zustandsraummodell zur Beschreibung der Lautsprecherdynamik zu garantieren, welches mit dem Index LS gekennzeichnet wird.

3.2 Modellierung mittels Supervektoren und Impulsantworten

Das im vorherigen Abschnitt vorgestellte Zustandsraummodell (3.53) beschreibt das dynamische Verhalten eines linearen Systems. Viele in dieser Arbeit vorgestellte Methoden verwenden diese Art der Systembeschreibung. Das dynamische Verhalten aller internen Zustände des Systems wird im Zustandsraummodell beschrieben, wodurch es sich unter anderem für den Einsatz im Rahmen einer Zustandsschätzung anbietet. Die in Abschnitt 5.2.3 vorgestellte Methode zur Berechnung einer optimalen Feuersynchronisation benötigt ebenfalls eine mathematische Beschreibung der Dynamik des zu optimierenden Systems, wobei an dieser Stelle ausschließlich das Ein-/Ausgangsverhalten von Interesse ist. Eine genaue Beschreibung der internen Zustände ist somit nicht notwendig. Eine weitere Besonderheit des dort untersuchten Systems ergibt sich in der Periodizität des Eingangssignals, wodurch sich am Ausgang ebenfalls ein periodisches Verhalten einstellt. Weiterhin kann jeder Eingang des Systems zu jedem Zeitpunkt lediglich einen von zwei möglichen Zuständen (0 oder 1) annehmen. Ein solches System kann gut durch ein Modell in der sogenannten Supervektordarstellung beschrieben werden, welche im Folgenden eingeführt wird.

Gegeben sei ein zeitdiskretes System mit dem Eingang $\underline{u}(k) \in \{0, 1\}^{n_u}$ und dem Ausgang $\underline{y}(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$, mit $n_u \in \mathbb{N}$ und $n_y \in \mathbb{N}$. Der Zusammenhang zwischen dem Zeitschritt $k \in \mathbb{N}_0$ und der kontinuierlichen Zeit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist gegeben durch $t = \Delta t \cdot k$, wobei $\Delta t \in \mathbb{R}_{> 0}$ die Schrittweite beschreibt. Sowohl das Eingangs- als auch das zugehörige Ausgangssignal seien periodisch

$$\underline{u}(k) = \underline{u}(k + i_p), \quad \forall k, \quad (3.54a)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{y}(k + i_p), \quad \forall k, \quad (3.54b)$$

3 Grundlagen und Methoden

wobei eine Periode $i_p \in \mathbb{N}$ Zeitschritte beinhaltet. Durch Einführen zweier Supervektoren lassen sich die Ein- und Ausgangsgrößen des Systems über den Zeithorizont einer Periode zusammenfassen

$$\underline{U} = \left[\underline{u}^T(0) \quad \dots \quad \underline{u}^T(i_p - 1) \right]^T, \quad (3.55a)$$

$$\underline{Y} = \left[\underline{y}^T(0) \quad \dots \quad \underline{y}^T(i_p - 1) \right]^T, \quad (3.55b)$$

mit $\underline{U} \in \{0, 1\}^{n_u i_p}$ und $\underline{Y} \in \mathbb{R}^{n_y i_p}$. Der Zusammenhang zwischen \underline{U} und \underline{Y} wird beschrieben durch

$$\underline{Y} = \Phi(\underline{U}), \quad (3.56)$$

wobei $\Phi: \{0, 1\}^{n_u i_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y i_p}$ eine beliebige Abbildungsvorschrift darstellt, welche das Superpositionsprinzip erfüllt. Durch (3.56) ist das Übertragungsverhalten von \underline{U} nach \underline{Y} vollständig beschrieben. Zur Anwendung innerhalb der in Abschnitt 5.2.3 verwendeten Optimierungsmethode muss dieses Übertragungsverhalten allerdings als lineare Abbildung dargestellt werden.⁸ Diese Transformation wird im Folgenden erläutert.

Dazu wird zunächst der periodische Einheitsimpuls $\delta_{dp}(k)$ definiert

$$\delta_{dp}(k) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = i_p \epsilon, \epsilon \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.57)$$

Damit wird folgende periodische Steuerfolge angeschrieben, welche einen periodischen Einheitsimpuls am j -ten Eingang beschreibt⁹

$$\underline{u}_{\delta_{dp},j}(k) = \left[(\underline{Q}^{j-1})^T \delta_{dp}(k) \quad (\underline{Q}^{n_u-j})^T \right]^T, \quad (3.58a)$$

$$(3.58b)$$

wobei $\underline{u}_{\delta_{dp},j} \in \{0, 1\}^{n_u}$. Dieses Signal kann in der Supervektordarstellung für eine Periode angeschrieben werden

$$\underline{U}_{\delta_{dp},j} = \left[\underline{u}_{\delta_{dp},j}^T(0) \quad \dots \quad \underline{u}_{\delta_{dp},j}^T(i_p - 1) \right]^T, \quad (3.59)$$

mit $\underline{U}_{\delta_{dp},j} \in \{0, 1\}^{n_u i_p}$. Die zeitdiskrete Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls $\delta_{dp}(k)$ am j -ten Systemeingang kann somit definiert werden als

$$\underline{Y}_{\delta_{dp},j} = \Phi(\underline{U}_{\delta_{dp},j}), \quad (3.60a)$$

mit $\underline{Y}_{\delta_{dp},j} \in \mathbb{R}^{n_y i_p}$ und

$$\left[\underline{y}_{\delta_{dp},j}^T(0) \quad \dots \quad \underline{y}_{\delta_{dp},j}^T(i_p - 1) \right]^T = \underline{Y}_{\delta_{dp},j}, \quad (3.60b)$$

$$\underline{y}_{\delta_{dp},j}(k) = \underline{y}_{\delta_{dp},j}(k + i_p), \quad \forall k, \quad (3.60c)$$

wobei $\underline{y}_{\delta_{dp},j} \in \mathbb{R}^{n_y}$. Um basierend auf der Impulsantwort (3.60a) die Systemantwort für ein beliebiges Eingangssignal $\underline{U} \in \{0, 1\}^{n_u i_p}$ anzuschreiben, wird zunächst die Matrix $\mathbf{S}^{n, \epsilon}$

⁸Es ist allerdings nicht notwendig, dass das zu modellierende System die damit verbundene Eigenschaft des Verstärkungsprinzips erfüllt, da $\underline{u}(k) \in \{0, 1\}^{n_u}$ und somit $\underline{u}(k)$ nicht beliebig skaliert werden kann.

⁹Alle anderen Systemeingänge werden zunächst zu null gesetzt.

definiert

$$\mathbf{S}^{n,\epsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{\epsilon \times (n-\epsilon)} & \mathbf{I}^\epsilon \\ \mathbf{I}^{n-\epsilon} & \mathbf{0}^{(n-\epsilon) \times \epsilon} \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

mit $\mathbf{S}^{n,\epsilon} \in \{0,1\}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon \in \mathbb{N}_0$, $\epsilon < n$. Wird diese Matrix mit einem Vektor der Dimension n multipliziert, entspricht das Ergebnis dem um ϵ Elemente nach unten verschobenen Eingangsvektor, wobei zusätzlich die letzten ϵ Elemente dieses Vektors an den Anfang verschoben werden. Eine solche Operation wird häufig auch als zyklische Permutation bezeichnet. Durch Ausnutzung des Superpositionsprinzips kann somit die vollständige Systemantwort auf ein Eingangssignal \underline{U} in Form einer linearen Abbildung angeschrieben werden

$$\underline{Y} = \underbrace{\left[\mathbf{S}^{n_y i_p, 0} \left[\underline{Y}_{\delta_{dp}, 1} \quad \dots \quad \underline{Y}_{\delta_{dp}, n_u} \right] \quad \dots \quad \mathbf{S}^{n_y i_p, n_y (i_p - 1)} \left[\underline{Y}_{\delta_{dp}, 1} \quad \dots \quad \underline{Y}_{\delta_{dp}, n_u} \right] \right]}_{=\Phi} \underline{U}. \quad (3.62)$$

Die Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n_y i_p \times n_u i_p}$ beschreibt dabei die gesuchte lineare Abbildungsvorschrift.

3.3 Zustandsschätzung

In dieser Arbeit werden drei verschiedene Zustandsschätzmethoden eingesetzt: das Kalman-Filter (KF), das Erweiterte Kalman-Filter (EKF) sowie das Sigmapunkt-Kalman-Filter (SPKF). Da das KF als Spezialfall des EKF für lineare Systeme angeschrieben werden kann, wird das KF in diesem Abschnitt nicht näher beschrieben, sondern die dafür notwendigen Schritte an entsprechender Stelle erläutert, siehe Abschnitt 3.4.2.

Die in dieser Arbeit erläuterten Zustandsschätzmethoden betrachten ein dynamisches System als stochastischen Prozess. In diesem Zusammenhang wird zunächst die mehrdimensionale Normalverteilung eingeführt. Die Funktion $\mathcal{N}_i(\underline{\mu}_i, \mathbf{P}_i) : (\mathbb{R}^{n_i}, \mathbb{R}^{n_i \times n_i}) \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ beschreibt eine $n_i \in \mathbb{N}$ dimensionale Normalverteilung der Variablen $\underline{i} \in \mathbb{R}^{n_i}$. Der Mittelwert und die Kovarianzmatrix der Variablen \underline{i} werden mit $\underline{\mu}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ und $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ bezeichnet. Nehmen wir an, es sei ein zeitdiskreter, nichtlinearer, stochastischer Prozess der Form

$$\underline{x}(0) \sim \mathcal{N}_x(\underline{\mu}_x(0), \mathbf{P}_x(0)), \quad (3.63a)$$

$$\underline{x}(k) = \underline{f}(\underline{x}(k-1), \underline{u}(k-1), k-1) + \underline{w}(k-1), \quad (3.63b)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}(k), k) + \underline{v}(k), \quad (3.63c)$$

gegeben. Dabei beschreiben $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\underline{\mu}_x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{P}_x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ und $\underline{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$, jeweils die Systemzustände, den Mittelwert und die Kovarianzmatrix der Normalverteilung für die Anfangsbedingung, die Stellgrößen und die Messgrößen. Die im Allgemeinen nichtlinearen Funktionen $\underline{f} : (\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ und $\underline{h} : (\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ definieren jeweils den deterministischen Anteil der Systemdynamik (3.63b) und der Messgleichung (3.63c). Die Variablen $\underline{w} \in \mathbb{R}^{n_x}$ und $\underline{v} \in \mathbb{R}^{n_y}$ bezeichnen unkorrelierte weiße Rauschprozesse, wobei $\underline{w}(k) \sim \mathcal{N}_w(\underline{0}^{n_x}, \mathbf{Q}(k))$ und $\underline{v}(k) \sim \mathcal{N}_v(\underline{0}^{n_y}, \mathbf{R}(k))$ gilt, mit den im Allgemeinen zeitvarianten Kovarianzmatrizen des System- und des Messrauschens $\mathbf{Q}(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ bzw. $\mathbf{R}(k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$.

Zunächst betrachten wir Gl. (3.63a) und (3.63b). Aufgrund der Systemdynamik wird die anfängliche Normalverteilung der Zustände \mathcal{N}_x über die Zeitschritte transformiert. Weiterhin wirkt die Störung \underline{w} auf den Prozess ein, welche die ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsverteilung zusätzlich verzerrt. Falls \underline{f} eine lineare Abbildung beschreibt, kann die Verteilung der Zustände zu jedem Zeitpunkt durch eine Normalverteilung der Form $\underline{x}(k) \sim$

3 Grundlagen und Methoden

$\mathcal{N}_x(\underline{\mu}_x(k), \mathbf{P}_x(k))$ exakt beschrieben werden. Es ändern sich lediglich die zugehörige Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_x(k)$ und der Mittelwert $\underline{\mu}_x(k)$ über die Zeitschritte. Dies gilt jedoch nicht, falls eine nichtlineare Systemdynamik angenommen wird. In diesem Fall kann eine Beschreibung der transformierten Verteilung mittels einer Normalverteilung nur noch eine Approximation darstellen. Die in dieser Arbeit verwendeten Zustandsschätzmethoden, EKF und SPKF, verfolgen einen solchen Approximationsansatz. Die Algorithmen zur Berechnung der approximierten Normalverteilung unterscheiden sich dabei jedoch deutlich. Eine ausführliche Erläuterung dieser Algorithmen findet sich in den jeweiligen Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2, weiter unten.

Bisher wurden lediglich die Gleichungen der Systemdynamik betrachtet. Die hier verwendeten Zustandsschätzmethoden verarbeiten zusätzlich Messdaten aus dem zu schätzenden Prozess. Dafür werden Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\underline{y}(k)$ aus dem nichtlinearen, stochastischen Prozess in (3.63c) benötigt. Gleichung (3.63c) beschreibt genau wie (3.63b) eine im Allgemeinen nichtlineare Transformation. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, welche die Verteilung von $\underline{y}(k)$ beschreibt, entsteht somit aus einer nichtlinearen Transformation der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von $\underline{x}(k)$ und einer zusätzlichen Verzerrung durch den additiven Term $\underline{\nu}(k)$. Wie zuvor wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von $\underline{y}(k)$ sowohl im EKF als auch im SPKF durch eine Normalverteilung approximiert.

Die Aufgabe der Zustandsschätzalgorithmen lässt sich somit wie folgt zusammenfassen: Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von $\underline{x}(k)$ und $\underline{y}(k)$ sollen unter Einbeziehung aller bis zum jeweiligen Zeitpunkt k vorliegenden Messwerte $\underline{y}(0), \dots, \underline{y}(k)$ geschätzt werden. Dazu werden die wirklichen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von $\underline{x}(k)$ und $\underline{y}(k)$ in jedem Zeitschritt durch die geschätzten Normalverteilungen

$$\hat{\underline{x}}(k) \sim \hat{\mathcal{N}}_x(\hat{\underline{\mu}}_x(k), \hat{\mathbf{P}}_x(k)) \quad , \quad (3.64)$$

$$\hat{\underline{y}}(k) \sim \hat{\mathcal{N}}_y(\hat{\underline{\mu}}_y(k), \hat{\mathbf{P}}_y(k)) \quad , \quad (3.65)$$

$$(3.66)$$

approximiert. Die Variablen $\hat{\underline{\mu}}_x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ und $\hat{\mathbf{P}}_x(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ sowie $\hat{\underline{\mu}}_y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ und $\hat{\mathbf{P}}_y(k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ beschreiben den geschätzten Mittelwert und die geschätzte Kovarianzmatrix des Zustands $\underline{x}(k)$ sowie den geschätzten Mittelwert und die geschätzte Kovarianzmatrix der Messung $\underline{y}(k)$.

Beide Methoden (EKF, SPKF) verwenden zur Berechnung dieser Größen eine iterative, sequenzielle Abfolge des sogenannten *time update* und des *measurement update*. Im *time update* wird die Auswirkung der Systemdynamik vom Zeitschritt k zu $k + 1$ auf $\hat{\underline{x}}$ und $\hat{\underline{y}}$ berechnet. Im anschließenden *measurement update* wird dann, basierend auf den Ergebnissen des *time update* und der aktuellen aus dem Prozess erhaltenen Messung, diese Schätzung korrigiert. Im Folgenden wird dieser Vorgang sowohl für das EKF als auch das SPKF im Detail vorgestellt.

3.3.1 Erweitertes Kalman-Filter

Ein Erweitertes Kalman-Filter wird in Abschnitt 5.1 im Rahmen der Extremwertregelung sowohl zur Gradientenschätzung, als auch zur Schätzung der Amplitude und Ausrichtung der ersten azimuthalen Druckmode des akustischen Prüfstands eingesetzt. Die Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen durch Normalverteilungen beruht dabei auf

einer Linearisierung der Systemgleichungen (3.63b) und (3.63c). Im Folgenden werden die Gleichungen des EKF und die zugehörige Nomenklatur eingeführt.

Schätzalgorithmus

Ein EKF für das in (3.63) gegebene System funktioniert entsprechend dem in Algorithmus 3.1 gegebenen Ablauf, siehe [Bar-Shalom et al., 2002]. Die Variablen $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$

Algorithmus 3.1: Erweitertes Kalman-Filter	
Initialisierung:	
$\hat{\underline{\mu}}_x(0), \hat{\mathbf{P}}_x(0)$	(3.67)
Für $k \in \{1, \dots, \infty\}$	
berechne Jacobi-Matrix von \underline{f}:	
$\mathbf{F} = \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}(k-1), k-1)}{\partial \underline{x}} \Big _{\underline{x}=\hat{\underline{\mu}}_x(k-1)}$	(3.68)
time update:	
$\hat{\underline{\mu}}_x(k, -) = \underline{f}(\hat{\underline{\mu}}_x(k-1), \underline{u}(k-1), k-1)$	(3.69)
$\hat{\underline{\mu}}_y(k, -) = \underline{h}(\hat{\underline{\mu}}_x(k, -), k)$	(3.70)
$\hat{\mathbf{P}}_x(k, -) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}_x(k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}(k)$	(3.71)
$\hat{\mathbf{P}}_y(k, -) = \mathbf{H}\hat{\mathbf{P}}_x(k, -)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}(k)$	(3.72)
berechne Jacobi-Matrix von \underline{h}:	
$\mathbf{H} = \frac{\partial \underline{h}(\underline{x}, k)}{\partial \underline{x}} \Big _{\underline{x}=\hat{\underline{\mu}}_x(k, -)}$	(3.73)
measurement update:	
$\mathbf{K}(k) = \hat{\mathbf{P}}_x(k, -)\mathbf{H}^T\hat{\mathbf{P}}_y^{-1}(k, -)$	(3.74)
$\hat{\underline{\mu}}_x(k) = \hat{\underline{\mu}}_x(k, -) + \mathbf{K}(k)(\underline{y}(k) - \hat{\underline{\mu}}_y(k, -))$	(3.75)
$\hat{\mathbf{P}}_x(k) = \hat{\mathbf{P}}_x(k, -) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}\hat{\mathbf{P}}_x(k, -)$	(3.76)
Ende	

und $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ beschreiben dabei die Kalman-Matrix, die Dynamikmatrix der linearisierten Systemdynamik und die Messmatrix des linearisierten Systems. Aus Gründen der Übersicht wurde folgende Abkürzung eingeführt. Alle Variablen, welche das *time update* durchlaufen haben, allerdings noch nicht durch das *measurement update* aktualisiert wurden, werden zusätzlich durch das Argument $(-)$ gekennzeichnet. Bei den Variablen \mathbf{F} und \mathbf{H} wird vollständig auf die Angabe dieses Arguments und Zeitpunktes verzichtet.

In realen Anwendungen sind die Kovarianzmatrizen $\mathbf{Q}(k)$ und $\mathbf{R}(k)$ sowie die Anfangsbedingungen $\hat{\underline{\mu}}_x(0)$ und $\hat{\mathbf{P}}_x(0)$ häufig nicht bekannt, sondern müssen aus zuvor durchzuführenden Experimenten ermittelt werden, siehe z. B. [Schneider & Georgakis, 2013]. In einer alternativen Herangehensweise werden diese Größen als Einstellparameter betrachtet, die verwendet werden, um das vom Anwender gewünschte Konvergenzverhalten des Filters zu erzielen. Diese Variante kommt in allen Anwendungsfällen in dieser Arbeit zum Einsatz. Dabei werden die Kovarianzmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} als zeitinvariant angenommen.

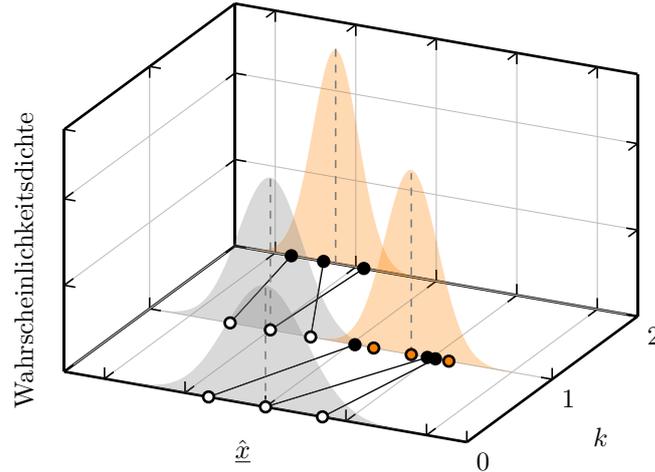


Abbildung 3.3: Funktionsweise der Zustandsschätzung eines SPKF für ein beispielhaftes System mit $n_u = n_x = n_y = 1$. Die grau eingefärbten Flächen beschreiben $\hat{\mathcal{N}}_x$ nach dem *measurement update* und die orange eingefärbten Flächen beschreiben $\hat{\mathcal{N}}_x$ nach dem *time update*.

3.3.2 Sigmoidpunkt-Kalman-Filter

Das in Abschnitt 3.3.1 vorgestellte EKF kann nur dann zur Zustandsschätzung verwendet werden, wenn \underline{f} und \underline{h} aus (3.63) differenzierbar bezüglich \underline{x} sind. Für das numerische Finite-Volumen-Verfahren, welches in Kapitel 7 zur Lösung der Euler-Gleichungen (7.1) eingesetzt wird, ist dies jedoch nicht gegeben. Für solche Systeme bietet sich der Einsatz des sogenannten Sigmoidpunkt-Kalman-Filters an. Dieses kommt ohne eine Berechnung von Gradienten aus und verfolgt einen Stichproben-basierten Ansatz. Die zugrunde liegende Idee wird hier zunächst kurz an einem einfachen Beispiel erläutert und anschließend der vollständige Schätzalgorithmus erklärt.

Abbildung 3.3 demonstriert beispielhaft die Idee des SPKF, indem dieses auf das System (3.63) für den Fall $n_u = n_x = n_y = 1$ angewendet wird. Trotz der gewählten Dimensionen wird aus Übersichtsgründen die in (3.63) eingeführte Nomenklatur verwendet (der Zustand wird beispielsweise weiterhin als Vektor \underline{x} angeschrieben, obwohl dieser nur ein Element enthält). Weiterhin wird auf eine detaillierte mathematische Beschreibung der Funktionen \underline{f} und \underline{h} des Systems an dieser Stelle verzichtet, da sie für die folgenden Erläuterungen nicht von Bedeutung sind.

Die geschätzte Normalverteilung $\hat{\mathcal{N}}_x(\hat{\underline{\mu}}_x(0), \hat{\mathbf{P}}_x(0))$, welche den Zustand $\hat{\underline{x}}(0)$ charakterisiert, ist in Abb. 3.3 als grau eingefärbte Fläche dargestellt. Basierend auf $\hat{\underline{\mu}}_x(0)$ und $\hat{\mathbf{P}}_x(0)$ werden $2n_x + 1 = 3$ Stichproben, sogenannte Sigmoidpunkte, berechnet, welche diese Verteilung repräsentieren (dargestellt durch die weißen Punkte). Die drei Stichproben werden durch den deterministischen Anteil der Systemdynamik \underline{f} der nichtlinearen Systemgleichung (3.63b) einen Zeitschritt vorwärts propagiert. Die resultierenden Sigmoidpunkte sind durch schwarze Punkte gekennzeichnet. Der kausale Zusammenhang der jeweiligen Stichproben zwischen zwei Zeitschritten wird durch schwarze Linien verdeutlicht. Basierend auf den propagierten Sigmoidpunkten und unter Berücksichtigung der Verteilungsfunktion des Systemrauschens \mathcal{N}_w wird die Normalverteilung des geschätzten Systemzustands $\hat{\mathcal{N}}_x(\hat{\underline{\mu}}_x(1, -), \hat{\mathbf{P}}_x(1, -))$ (orange eingefärbte Fläche zum Zeitpunkt $k = 1$) berechnet und die zugehörigen Sigmoidpunkte (orangene Punkte) generiert. Diese neuen Stichproben werden durch die Messgleichung (3.63c) propagiert, um die approximierte Normalverteilung für den Systemausgang

$\hat{\mathcal{N}}_y(\hat{\underline{\mu}}_y(1, -), \hat{\mathbf{P}}_y(1, -))$ zu berechnen (dieser Schritt ist in Abb. 3.3 nicht dargestellt). $\hat{\mathcal{N}}_y$, in Kombination mit der zum Zeitpunkt $k = 1$ aus dem Prozess erhaltenen Messung $\underline{y}(1)$, wird verwendet, um die aktualisierte Normalverteilung $\hat{\mathcal{N}}_x(\hat{\underline{\mu}}_x(1), \hat{\mathbf{P}}_x(1))$ zu schätzen (grau eingefärbte Fläche zum Zeitpunkt $k = 1$). Diese Normalverteilung approximiert somit die unbekannte „wirkliche“ Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\underline{x}(1)$ nach dem *measurement update*. Der beschriebene Ablauf wird für jeden nachfolgenden Zeitschritt komplett wiederholt. Die zugehörigen Gleichungen werden im Folgenden diskutiert.

Schätzalgorithmus

Das SPKF-Schema ist in Algorithmus 3.2 abgebildet, vergleiche [Wan & van der Merwe, 2001]. Zunächst wird die geschätzte Zufallsverteilung $\hat{\mathcal{N}}_x$ durch Wahl von $\hat{\underline{\mu}}_x(0)$ und $\hat{\mathbf{P}}_x(0)$ initialisiert, siehe (3.77). Basierend auf diesen Größen werden die Sigmapunkte $\underline{\chi}(0) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ mittels Gl. (3.78) berechnet,¹⁰ wobei $n_\chi = (2n_x + 1)$, $n_\chi \in \mathbb{N}$, die Anzahl der zu berechnenden Sigmapunkte beschreibt. Der i -te Sigmapunkt $\underline{\chi}_i$ entspricht dabei der i -ten Spalte von $\underline{\chi}$. Die Variable $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ legt die Streuung der Sigmapunkte um $\hat{\underline{\mu}}_x$ fest und wird als Einstellparameter des Schätzalgorithmus verwendet.

Anschließend werden die Sigmapunkte durch den deterministischen Anteil der Systemdynamik \underline{f} in (3.63) propagiert, siehe (3.79). Der zugehörige geschätzte Mittelwert $\hat{\underline{\mu}}_x$ und die geschätzte Kovarianzmatrix $\hat{\mathbf{P}}_x$ werden mit (3.80) und (3.81) berechnet. Dafür werden die Gewichtsparameter

$$w_1^m = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} , \quad (3.90a)$$

$$w_1^c = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) , \quad (3.90b)$$

$$w_i^m = w_i^c = \frac{1}{2(n_x + \lambda)} , \quad \forall i \in [2, \dots, n_\chi] , \quad (3.90c)$$

definiert, mit $w_1^m, w_i^m, w_1^c, w_i^c \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda = n_x(\alpha^2 - 1) . \quad (3.91)$$

Neben dem zuvor eingeführten α wird in (3.90b) ein weiterer Skalierungsparameter $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eingeführt. Durch diese Variable kann a priori vorliegendes Wissen über die wirkliche Verteilungsfunktion von \underline{x} in die Zustandsschätzung einbezogen werden, siehe [Julier, 2002] und [Wan & van der Merwe, 2001]. Zur Berücksichtigung des Effekts des Systemrauschens \underline{w} , welches in (3.63b) als additiv und normalverteilt angenommen wurde, wird lediglich die zugehörige Kovarianzmatrix \mathbf{Q} auf die Kovarianzmatrix, welche sich aus den propagierten Sigmapunkten ergibt, addiert (siehe Gl. (3.81)).

Anschließend wird der beschriebene Ablauf für die Messgleichung (3.63c) durchgeführt: Basierend auf dem prädizierten Mittelwert und der Kovarianzmatrix von $\hat{\underline{x}}$ aus (3.80) und (3.81) werden neue Sigmapunkte generiert (3.82) und propagiert (3.83). Weiterhin werden sowohl der geschätzte Mittelwert $\hat{\underline{\mu}}_y$ und die Kovarianzmatrix $\hat{\mathbf{P}}_y$ des geschätzten Systemausgangs $\hat{\underline{y}}$ als auch die geschätzte Kreuzkovarianzmatrix $\hat{\mathbf{P}}_{xy}$ von $\hat{\underline{x}}$ und $\hat{\underline{y}}$ berechnet, siehe (3.84)–(3.86).

Mit (3.80), (3.81) und (3.84)–(3.86) liegt somit eine Schätzung der stochastischen Größen

¹⁰Die Matrixwurzel einer positiv definiten Matrix $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n_\Sigma \times n_\Sigma}$ ist definiert durch $\mathbf{\Gamma} = \sqrt{\mathbf{\Sigma}}$, mit $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma}$. Für die numerische Berechnung wird in dieser Arbeit die Cholesky-Zerlegung angewendet.

Algorithmus 3.2: Sigmapunkt-Kalman-Filter**Initialisierung:**

$$\hat{\underline{\mu}}_x(0), \hat{\mathbf{P}}_x(0) \quad (3.77)$$

Für $k \in \{1, \dots, \infty\}$ **time update:**

Propagationsschritte für Gl. (3.63b):

$$\underline{\chi}(k-1) = \hat{\underline{\mu}}_x(k-1) (\underline{\mathbf{1}}^{n_x})^T + \alpha \left[\underline{\mathbf{0}}^{n_x} \quad \sqrt{n_x \hat{\mathbf{P}}_x(k-1)} \quad - \sqrt{n_x \hat{\mathbf{P}}_x(k-1)} \right] \quad (3.78)$$

$$\underline{\chi}^*(k, -) = \begin{bmatrix} \underline{f}^T(\underline{\chi}_1(k-1), \underline{u}(k-1), k-1) \\ \vdots \\ \underline{f}^T(\underline{\chi}_{n_\chi}(k-1), \underline{u}(k-1), k-1) \end{bmatrix}^T \quad (3.79)$$

$$\hat{\underline{\mu}}_x(k, -) = \sum_{i=1}^{n_\chi} w_i^m \underline{\chi}_i^*(k, -) \quad (3.80)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_x(k, -) = \sum_{i=1}^{n_\chi} w_i^c (\underline{\chi}_i^*(k, -) - \hat{\underline{\mu}}_x(k, -)) (\underline{\chi}_i^*(k, -) - \hat{\underline{\mu}}_x(k, -))^T + \mathbf{Q}(k) \quad (3.81)$$

Propagationsschritte für Gl. (3.63c):

$$\underline{\Upsilon}(k, -) = \hat{\underline{\mu}}_x(k, -) (\underline{\mathbf{1}}^{n_x})^T + \alpha \left[\underline{\mathbf{0}}^{n_x} \quad \sqrt{n_x \hat{\mathbf{P}}_x(k, -)} \quad - \sqrt{n_x \hat{\mathbf{P}}_x(k, -)} \right] \quad (3.82)$$

$$\underline{\Upsilon}^*(k, -) = \left[\underline{h}(\underline{\Upsilon}_1(k, -), k) \quad \dots \quad \underline{h}(\underline{\Upsilon}_{n_\chi}(k, -), k) \right] \quad (3.83)$$

$$\hat{\underline{\mu}}_y(k, -) = \sum_{i=1}^{n_\chi} w_i^m \underline{\Upsilon}_i^*(k, -) \quad (3.84)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_y(k, -) = \sum_{i=1}^{n_\chi} w_i^c (\underline{\Upsilon}_i^*(k, -) - \hat{\underline{\mu}}_y(k, -)) (\underline{\Upsilon}_i^*(k, -) - \hat{\underline{\mu}}_y(k, -))^T + \mathbf{R}(k) \quad (3.85)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{xy}(k, -) = \sum_{i=1}^{n_\chi} w_i^c (\underline{\chi}_i^*(k, -) - \hat{\underline{\mu}}_x(k, -)) (\underline{\Upsilon}_i^*(k, -) - \hat{\underline{\mu}}_y(k, -))^T \quad (3.86)$$

measurement update:

$$\mathbf{K}(k) = \hat{\mathbf{P}}_{xy}(k, -) \hat{\mathbf{P}}_y^{-1}(k, -) \quad (3.87)$$

$$\hat{\underline{\mu}}_x(k) = \hat{\underline{\mu}}_x(k, -) + \mathbf{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \hat{\underline{\mu}}_y(k, -)) \quad (3.88)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_x(k) = \hat{\mathbf{P}}_x(k, -) - \mathbf{K}(k) \hat{\mathbf{P}}_{xy}^T(k, -) \quad (3.89)$$

Ende

der Systemzustände und des Systemausgangs für den Zeitpunkt k basierend auf Messdaten bis zum Zeitpunkt $k-1$ vor. Sind zum Zeitpunkt k neue Messwerte vom „realen Prozess“ verfügbar, lässt sich durch Anwendung der Fundamentalgleichungen zur linearen Zustandsschätzung, siehe [Bar-Shalom et al., 2002], das sogenannte *measurement update* durchführen, (3.87)–(3.89). Der Ablauf (3.78)–(3.89) wird für jeden weiteren Zeitschritt komplett wiederholt.

3.4 Modelldiskriminierung und Mehrfiltermethode

Die in Abschnitt 6.2 beschriebene Fehlererkennung basiert auf einer Mehrfiltermethode zur Generierung von Residuen, welche als Fehlerindikatoren dienen. Diese Residuen werden modellbasiert und auf Grundlage von Messdaten aus dem zu überwachenden Prozess berechnet und anschließend zur Modelldiskriminierung mittels eines bayesschen Wahrscheinlichkeitsansatzes verarbeitet. Schließlich kann damit eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit des Vorliegens verschiedener Fehler im zu überwachenden Prozess getroffen werden. Im Folgenden wird zunächst der verwendete Algorithmus zur Modelldiskriminierung vorgestellt, um anschließend die Mehrfiltermethode zu erläutern.

3.4.1 Modelldiskriminierung mittels bayesscher Wahrscheinlichkeit

Gegeben sei eine Anzahl von $J_M \in \mathbb{N}$ möglichen Modellhypothesen und M_j , $j \in \{1, \dots, J_M\}$ bezeichne eines der J_M zugehörigen Modelle. Da in dieser Arbeit die Modelldiskriminierung zur Fehlererkennung genutzt wird, beschreibt jede Modellhypothese jeweils eine bestimmte Fehlerkonfiguration. Der reale zu überwachende Prozess sei durch M_r gekennzeichnet und es wird zunächst angenommen, dass $M_r \in \{M_1, \dots, M_{J_M}\}$ sei. Aus dem realen Prozess stehen zu jedem Zeitpunkt Messdaten zur Verfügung, welche mit $\underline{y}_r(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ bezeichnet werden. Das dynamische Verhalten des j -ten Systems, welches der j -ten Modellhypothese zugeordnet ist, wird durch das lineare, stochastische Modell äquivalent zum nichtlinearen Fall aus (3.63) beschrieben

$$\underline{x}_j(0) \sim \mathcal{N}_{x_j}(\underline{\mu}_{x_j}(0), \mathbf{P}_{x_j}(0)) \quad , \quad (3.92)$$

$$\underline{x}_j(k+1) = \mathbf{A}_j \underline{x}_j(k) + \mathbf{B}_j \underline{u}(k) + \underline{w}_j(k) \quad , \quad (3.93)$$

$$\underline{y}_j(k) = \mathbf{C}_j \underline{x}_j(k) + \underline{v}_j(k) \quad . \quad (3.94)$$

Dabei gilt $\underline{x}_j \in \mathbb{R}^{n_{x_j}}$, $\mathbf{P}_{x_j} \in \mathbb{R}^{n_{x_j} \times n_{x_j}}$, $\underline{\mu}_{x_j} \in \mathbb{R}^{n_{x_j}}$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\underline{y}_j \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{n_{x_j} \times n_{x_j}}$, $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{n_{x_j} \times n_u}$ and $\mathbf{C}_j \in \mathbb{R}^{n_y \times n_{x_j}}$. Die Variablen $\underline{w}_j \in \mathbb{R}^{n_y}$ und $\underline{v}_j \in \mathbb{R}^{n_{x_j}}$ beschreiben unkorrelierte weiße Rauschprozesse $\underline{w}_j(k) \sim \mathcal{N}_{w_j}(\mathbf{0}^{n_{x_j}}, \mathbf{Q}_j(k))$ und $\underline{v}_j(k) \sim \mathcal{N}_{v_j}(\mathbf{0}^{n_y}, \mathbf{R}_j(k))$, mit den im Allgemeinen zeitvarianten Kovarianzmatrizen des System- und des Messrauschens $\mathbf{Q}_j(k) \in \mathbb{R}^{n_{x_j} \times n_{x_j}}$ bzw. $\mathbf{R}_j(k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$. Insbesondere ist somit die Dimension des Systemausgangs für alle Modelle identisch und alle Modelle werden durch den gleichen Stellgrößenverlauf $\underline{u}(k)$ angeregt.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit der j -ten Hypothese wird definiert als

$$P_j(k) = P(M_j | \underline{y}_r(k), \dots, \underline{y}_r(0)) \quad , \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{J_M} P_j(k) = 1 \quad (3.95)$$

und beschreibt somit die Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen der Modellhypothese M_j , unter der Voraussetzung, dass Messungen $\underline{y}_r(k)$ aus dem realen Prozess M_r bis zum Zeitpunkt k vorliegen. Die Wahrscheinlichkeiten $P_j(k)$ aller Modellhypothesen werden in dem Vektor $\underline{P}(k) = [P_1(k), \dots, P_{J_M}(k)]^T$, $\underline{P} \in \mathbb{R}^{J_M}$ gesammelt. $P_j(k)$ kann mittels des Satzes von Bayes in Form einer rekursiven Rechenvorschrift angeschrieben werden

$$P_j(k) = \frac{P(\underline{y}_r(k) | M_j, -) P_j(k-1)}{\sum_{\epsilon=1}^{J_M} P(\underline{y}_r(k) | M_\epsilon, -) P_\epsilon(k-1)} \quad . \quad (3.96)$$

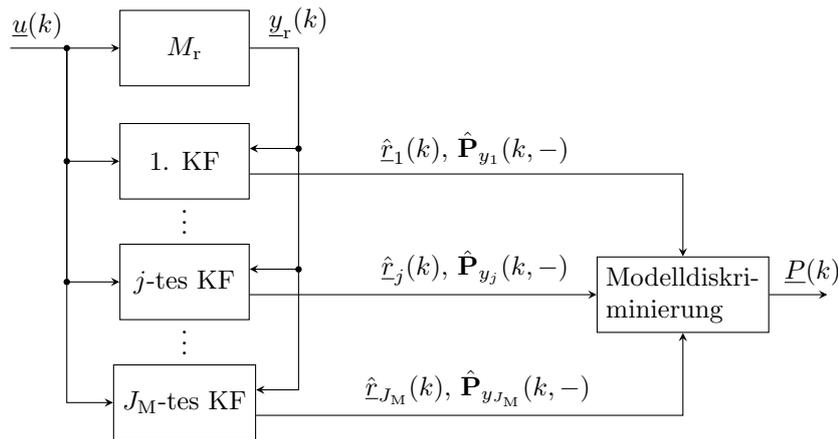


Abbildung 3.4: Mehrfilterschema bestehend aus dem realen Prozess M_r , den J_M Kalman-Filtern (KF) und dem Modelldiskriminierungsblock

Dabei bezeichnen $P_j(k-1)$ und $P_j(k)$ jeweils die a priori und die a posteriori Wahrscheinlichkeit der j -ten Modellhypothese. Das Symbol $(-)$ im Term $P(y_r(k)|M_j, -)$ kennzeichnet, dass zur Berechnung dieser Größe Messinformationen bis zum Zeitpunkt $k-1$ verwendet wurden. Dieser Term beschreibt somit die bedingte Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung der aktuellen Messung $y_r(k)$ unter der Voraussetzung, dass die j -te Modellannahme zutrifft und bereits Messinformationen bis zum Zeitpunkt $k-1$ verarbeitet wurden.

Die Berechnung dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten erfolgt durch die Verwendung von Kalman-Filtern innerhalb eines Mehrfilteralgorithmus und wird im folgenden Abschnitt im Detail erläutert. Zu Beginn des Diskriminierungsprozesses für $k=0$, liegen typischerweise keine Informationen vor, die auf eine höhere Wahrscheinlichkeit des Zutreffens einer bestimmten Modellhypothese gegenüber den restlichen Hypothesen schließen lassen. Aus diesem Grund werden die a priori Wahrscheinlichkeiten $P_j(k-1)$ mit dem Wert $1/J_M$ initialisiert. Eine wichtige Eigenschaft dieses Algorithmus besteht darin, dass auch unter der Bedingung $M_r \notin \{M_1, \dots, M_{J_M}\}$ der plausibelsten Modellhypothese bezüglich der vorliegenden Messwerte die höchste bedingte Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird, siehe [Maybeck, 1982]. Durch Selektion des Elements mit dem größten Wert in $\underline{P}(k)$ lässt sich somit die zum aktuellen Zeitpunkt wahrscheinlichste Modellhypothese bzw. Fehlerkonfiguration bestimmen.

3.4.2 Mehrfiltermethode

Der schematische Aufbau der Mehrfiltermethode ist in Abb. 3.4 dargestellt. Eine Anzahl von Kalman-Filtern (KF) läuft dabei parallel zum zu überwachenden Prozess M_r . Alle Filter werden zum jeweiligen Abtastzeitpunkt k durch die Messwerte $y_r(k)$ aus dem Prozess M_r aktualisiert. Jedes KF ist jeweils einem unterschiedlichen Fehlertypen, welcher auch im realen Prozess auftreten kann, zugeordnet. Die Filter sind so eingestellt, dass diese genau dann eine möglichst konsistente Schätzung liefern, wenn der zugehörige Fehlerfall im realen Prozess auftritt. Auf Basis der Konsistenz der Schätzung kann somit eine Modelldiskriminierung erfolgen, um den vorliegenden Fehlerfall zu ermitteln. Die dafür notwendigen Größen werden durch die KF bereitgestellt und die Modelldiskriminierung erfolgt entsprechend dem zuvor erläuterten bayesschen Wahrscheinlichkeitsansatz. Die Gleichungen des j -ten KF sind in Algorithmus 3.3, äquivalent zum Fall des EKF aus Algorithmus 3.1, gegeben, siehe [Gelb, 1986]. In (3.103) wird die sogenannte Innovation $\hat{r}_j(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ definiert, welche die Abweichung zwischen der Messgröße aus dem realen Prozess und dem geschätzten Mittelwert

Algorithmus 3.3: Kalman-Filter**Initialisierung:**

$$\hat{\underline{\mu}}_{x_j}(0), \hat{\mathbf{P}}_{x_j}(0) \quad (3.97)$$

Für $k \in \{1, \dots, \infty\}$ **time update:**

$$\hat{\underline{\mu}}_{x_j}(k, -) = \mathbf{A}_j \hat{\underline{\mu}}_{x_j}(k-1) + \mathbf{B}_j \underline{u}(k-1) \quad (3.98)$$

$$\hat{\underline{\mu}}_{y_j}(k, -) = \mathbf{C}_j \hat{\underline{\mu}}_{x_j}(k, -) \quad (3.99)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{x_j}(k, -) = \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{P}}_{x_j}(k-1) \mathbf{A}_j^T + \mathbf{Q}_j(k) \quad (3.100)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{y_j}(k, -) = \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{P}}_{x_j}(k, -) \mathbf{C}_j^T + \mathbf{R}_j(k) \quad (3.101)$$

measurement update:

$$\mathbf{K}_j(k) = \hat{\mathbf{P}}_{x_j}(k, -) \mathbf{C}_j^T \hat{\mathbf{P}}_{y_j}^{-1}(k, -) \quad (3.102)$$

$$\hat{\underline{\hat{r}}}_j(k) = \underline{y}_r(k) - \hat{\underline{\mu}}_{y_j}(k, -) \quad (3.103)$$

$$\hat{\underline{\mu}}_{x_j}(k) = \hat{\underline{\mu}}_{x_j}(k, -) + \mathbf{K}_j(k) \hat{\underline{\hat{r}}}_j(k) \quad (3.104)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{x_j}(k) = \hat{\mathbf{P}}_{x_j}(k, -) - \mathbf{K}_j(k) \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{P}}_{x_j}(k, -) \quad (3.105)$$

Ende

des Systemausgangs $\hat{\underline{\mu}}_{y_j}(k)$ des j -ten Modells beschreibt. Die zugehörige geschätzte Kovarianzmatrix $\hat{\mathbf{P}}_{y_j}(k, -) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ist durch (3.101) beschrieben. [Maybeck, 1982] zeigt, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\underline{y}_r(k)|M_j, -)$, welche in (3.96) verwendet wird, mittels der Größen $\hat{\underline{\hat{r}}}_j(k)$ und $\hat{\mathbf{P}}_{y_j}(k, -)$ berechnet werden kann

$$P(\underline{y}_r(k)|M_j, -) = \frac{1}{(2\pi)^{n_y/2} \sqrt{\det(\hat{\mathbf{P}}_{y_j}(k, -))}} \exp\left(-\frac{1}{2} \hat{\underline{\hat{r}}}_j^T(k) \hat{\mathbf{P}}_{y_j}^{-1}(k, -) \hat{\underline{\hat{r}}}_j(k)\right). \quad (3.106)$$

Dieser Zusammenhang kann wie folgt erläutert werden. Falls das j -te KF zum Zeitpunkt k keine konsistente Schätzung liefert, wird durch die Rechenvorschrift (3.106) ein kleiner Wert für bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\underline{y}_r(k)|M_j, -)$ berechnet. Dieser Fall könnte beispielsweise auftreten, wenn der aktuell vorliegende Fehlerfall nicht der im j -ten KF verwendeten Systembeschreibung entspricht. Falls hingegen das Verhalten des realen Systems gut durch das j -te KF beschrieben wird, berechnet (3.106) hohe bedingte Wahrscheinlichkeiten für $P(\underline{y}_r(k)|M_j, -)$.

3.5 Überwachtes Lernen und neuronale Netze

In diesem Abschnitt wird die Nomenklatur und Methodik des überwachten Lernens (*supervised learning*) zur Lösung von Klassifikationsaufgaben mittels künstlicher neuronaler Netze eingeführt. In Abschnitt 6.3 werden diese Methoden zur Fehlererkennung eingesetzt. Zunächst soll der grundsätzliche Aufbau neuronaler Netze erläutert werden. Dies ist notwendig, da anschließend die Methode des *supervised learning* zur Klassifikation anhand dieser Struktur diskutiert wird. Es werden Regularisierungsmethoden vorgestellt, welche ein wichtiges Werkzeug zur Erhöhung der Klassifikationsqualität darstellen. Abschließend wird auf einige ausgewählte erweiterte Topologien neuronaler Netze eingegangen, welche den grundsätzlichen Aufbau noch erweitern. Eine ausführliche Einführung in das Themengebiet neuronale

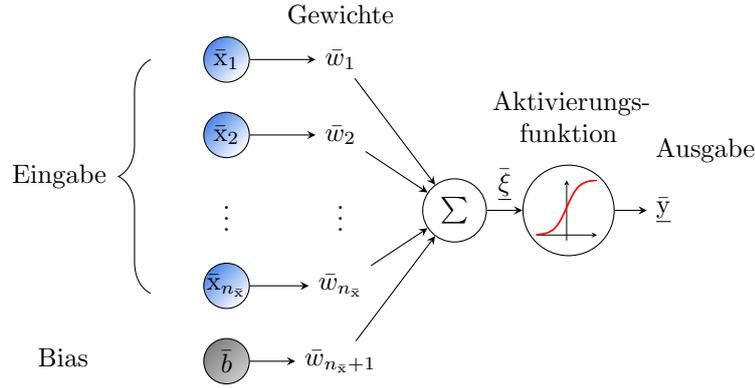


Abbildung 3.5: Modell eines einzelnen Neurons (auch Perzeptron genannt)

Netze findet sich z.B. in [Hagan et al., 2014]. Weitergehende Ausführungen zu erweiterten Topologien sowie Regularisierungsmethoden finden sich in [Goodfellow et al., 2016].

3.5.1 Grundsätzlicher Aufbau neuronaler Netze

Ein künstliches neuronales Netz (*artificial neural network*) ist ein Netzwerk, welches aus einer Vielzahl von verknüpften Neuronen besteht. Um die Funktion eines solchen Netzwerks zu verstehen, muss als erstes der Aufbau eines einzelnen Neurons erläutert werden. Abbildung 3.5 veranschaulicht das mathematische Modell eines Neurons. Ganz allgemein formuliert beschreibt ein Neuron eine Funktion die von $\mathbb{R}^{n_{\bar{x}}}$ auf \mathbb{R} abbildet, wobei $n_{\bar{x}}$ die Anzahl der Eingangsknoten beschreibt. Die Eingangssignale $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n_{\bar{x}}}]^T \in \mathbb{R}^{n_{\bar{x}}}$ sowie der sogenannte Bias $\bar{b} \in \mathbb{R}_{>0}$ werden individuell gewichtet und aufsummiert

$$\bar{\xi} = \underline{\bar{w}}^T \cdot [\bar{\mathbf{x}}^T, \bar{b}]^T, \quad (3.107)$$

wobei alle Gewichte durch den Vektor $\underline{\bar{w}} = [\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n_{\bar{x}}+1}]^T \in \mathbb{R}^{n_{\bar{x}}+1}$ repräsentiert werden und $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{n_{\bar{\xi}}}$, mit $n_{\bar{\xi}} = 1$.¹¹ Da der Bias \bar{b} vor der Summation durch $\bar{w}_{n_{\bar{x}}+1}$ skaliert wird, ist die Wahl von \bar{b} beliebig. Im Folgenden wird $\bar{b} = 1$ angenommen. Das Ergebnis der Summation wird an eine Aktivierungsfunktion $\underline{\bar{f}} : \mathbb{R}^{n_{\bar{\xi}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\bar{y}}}$ übergeben, welche den Ausgang des Neurons $\bar{y} \in \mathbb{R}^{n_{\bar{y}}}$, mit $n_{\bar{y}} = 1$ berechnet

$$\bar{y} = \underline{\bar{f}}(\bar{\xi}). \quad (3.108)$$

Der Schwellenwert zur Aktivierung des Neurons kann durch das Gewicht des Bias $\bar{w}_{n_{\bar{x}}+1}$ festgelegt werden. Häufig verwendete Aktivierungsfunktionen sind

$$\text{logistische Funktion:} \quad \underline{\bar{f}}(\bar{\xi}) = \left(1 + \exp(-\bar{\xi})\right)^{-1}, \quad (3.109a)$$

$$\text{Tangens Hyperbolicus:} \quad \underline{\bar{f}}(\bar{\xi}) = \tanh(\bar{\xi}), \quad (3.109b)$$

$$\text{ReLU:} \quad \underline{\bar{f}}(\bar{\xi}) = \max(0, \bar{\xi}). \quad (3.109c)$$

¹¹Obwohl $\bar{\xi}$ in (3.107) ein Skalar ist, wird diese Größe hier als eindimensionaler Vektor eingeführt, was eine Definition des weiter unten eingeführten *softmax layer* unter Verwendung einer einheitlichen Nomenklatur erlaubt. Gleiches gilt auch für $\underline{\bar{f}}$ bzw. \bar{y} in (3.108).

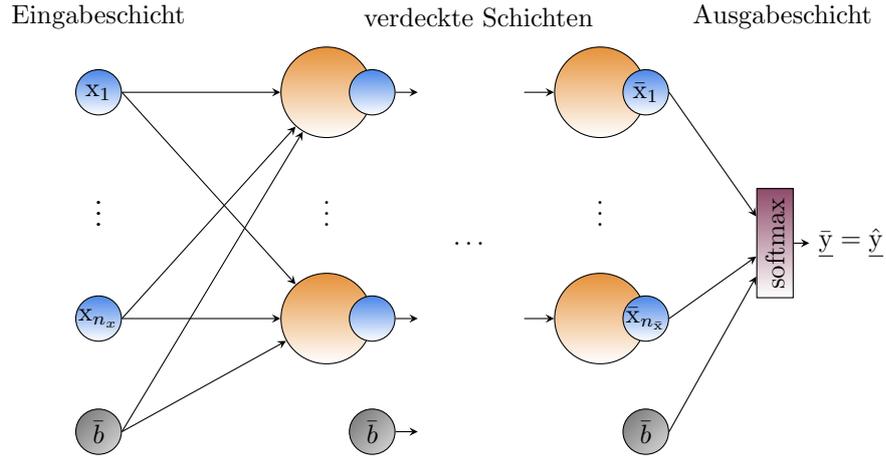


Abbildung 3.6: Beispielhafte Struktur eines künstlichen „feedforward“-Netzwerks mit einer Eingabeschicht mit n_x Eingängen, einer beliebigen Anzahl verdeckter Schichten und einer Ausgabeschicht mit einem *softmax layer* und vektoriellem Ausgang.

Ein einzelnes Neuron kann nur mit einfachen Aufgabenstellungen umgehen (z. B. als linearer Klassifikator). Es lassen sich jedoch auch komplexe Aufgaben lösen, wenn viele solcher Neuronen zu einem großen Netzwerk verknüpft werden (*multilayer perceptron*). Um dieses Netzwerk strukturiert aufzubauen, wird es in einzelne Schichten (*layer*) eingeteilt. Jede Schicht enthält eine Vielzahl von Neuronen, siehe Abb. 3.6. In dieser Arbeit werden ausschließlich sogenannte „feedforward“-Netzwerke verwendet, was bedeutet, dass der Informationsfluss ohne Rückkoppelung und somit ausschließlich in eine Richtung wirkt. Neuronen einer Schicht sind ausschließlich mit Neuronen der direkt benachbarten Schichten verknüpft. Die Schichten können in drei Kategorien eingeteilt werden:

- Eingabeschicht (*input layer*),
- verdeckte Schicht (*hidden layer*),
- Ausgabeschicht (*output layer*).

Die Eingabeschicht enthält die Eingangsgrößen in das Netzwerk, welche durch $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ beschrieben sind. Die Ausgabeschicht des beispielhaften Netzwerks in Abb. 3.6 besteht aus einem sogenannten *softmax layer* mit vektoriellem Eingang und Ausgang. Der Ausgangsvektor aus der Ausgabeschicht wird mit \hat{y} bezeichnet. Ein *softmax layer* enthält $n_{\bar{y}} \in \mathbb{N}$ Neuronen, welche sich durch eine spezielle Art der Aktivierungsfunktion $\bar{f} = [\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n_{\bar{y}}}]^T$, mit $\bar{f}_i : \mathbb{R}^{n_{\bar{y}}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i \in \{1, \dots, n_{\bar{y}}\}$ von den bisher verwendeten Neuronen unterscheiden. Das i -te Neuron des *softmax layer*, welches das i -te Element in \bar{y} berechnet, verwendet folgende Aktivierungsfunktion, siehe [Bishop, 2006]

$$\text{softmax: } \bar{f}_i(\bar{\xi}) = \frac{\exp(\bar{\xi}_i)}{\sum_{j=1}^{n_{\bar{y}}} \exp(\bar{\xi}_j)}, \quad (3.110a)$$

$$\bar{\xi}_i = \bar{w}_i \cdot [\bar{x}^T, \bar{b}]^T, \quad \forall i, \quad (3.110b)$$

mit $\bar{\xi} = [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{n_{\bar{y}}}] \in \mathbb{R}^{n_{\bar{y}}}$. Die Variable $\bar{w}_i \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ beschreibt die Gewichte des zugehörigen i -ten Neurons. Diese Aktivierungsfunktion normiert somit den Vektor \bar{f} bzw. \bar{y} so,

dass $\bar{y}_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n_y\}$ und $\|\bar{\mathbf{y}}\|_1 = 1$. Damit kann der Ausgang des *softmax layer* $\bar{\mathbf{y}}$ als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden. Durch die Verwendung der Exponentialfunktionen in (3.110a) wird erreicht, dass sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\bar{\mathbf{y}}$ auf Elemente mit der größten Wahrscheinlichkeit fokussiert.

Aufgrund dieser Eigenschaften wird das *softmax layer* häufig in der Ausgangsebene verwendet, wenn ein neuronales Netz, wie hier, zur Klassifikation eingesetzt werden soll. Im folgenden Absatz wird dieser Zusammenhang nochmals ausführlicher erläutert. Die Struktur des Netzes wird somit durch diese Hyperparameter festgelegt: die Dimension des Eingangsvektors in die Eingabeschicht, die Anzahl der verdeckten Schichten, die Anzahl der Neuronen je verdeckter Schicht, die Dimension des Ausgangsvektors aus der Ausgabeschicht und die Art der verwendeten Aktivierungsfunktionen in den jeweiligen Ebenen.

3.5.2 Überwachtes Lernen für Klassifikationsaufgaben

Mit dem Wissen über den grundsätzlichen Aufbau eines neuronalen Netzes, können nun wichtige Begriffe des überwachten Lernens und der Klassifikation näher erläutert werden. Zur Lösung von Klassifikationsaufgaben existieren viele unterschiedliche Methoden (z. B. neuronale Netze, *support vector machines*, *k-nearest neighbors algorithm*). Der genaue Ablauf des Lernens unterscheidet sich für diese Algorithmen im Detail teilweise deutlich. Da in dieser Arbeit neuronale Netze für die Klassifikation verwendet werden, wird das überwachte Lernen ausschließlich für diese Art der Klassifikatoren beschrieben.

In einer Klassifikationsaufgabe soll eine Stichprobe $\underline{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^{n_x}$, mit $i \in \mathbb{N}$, welche durch $n_x \in \mathbb{N}$ Merkmale (*features*) beschrieben wird, in eine oder mehrere von $n_y \in \mathbb{N}$ verschiedene Kategorien oder Klassen eingeordnet werden (*single-label* bzw. *multi-label classification*). Im Folgenden wird angenommen, dass eine Stichprobe immer nur einer einzigen von n_y Klassen angehören kann (*single-label classification*), da die in Abschnitt 6.3 beschriebene Implementierung dies auch voraussetzt. Merkmale einer Stichprobe können beispielsweise die Farbwerte von einzelnen Pixeln in digitalisierten Bildern oder die Werte von Messschrieben zu den Abtastzeitpunkten sein.

Die Codierung der Zugehörigkeit zu den jeweiligen Kategorien kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Ein häufig verwendeter Ansatz ist die Darstellung der Klassenzugehörigkeit durch eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. Der i -ten Stichprobe wird in diesem Fall durch das neuronale Netz ein Vektor $\hat{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_y}$ zugeordnet, wobei der j -te Eintrag dieses Vektors die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass die i -te Stichprobe der j -ten Klasse angehört, wobei $j \in \{1, 2, \dots, n_y\}$ gilt. Durch die Verwendung des in Gl. (3.110a) eingeführten *softmax layer* in der Ausgabeschicht wird garantiert, dass eine solche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung am Ausgang des Netzwerks generiert wird.

Nehmen wir zunächst an, es würde ein Algorithmus vorliegen, der diese Klassifikationsaufgabe bearbeiten kann. Um die Qualität dieses Algorithmus bewerten zu können, wird ein Datensatz benötigt, der unabhängig von diesem Algorithmus korrekt kategorisierte Daten enthält (*ground truth*). Ein solcher Datensatz beinhaltet eine möglichst große Anzahl an Stichproben $n_{gt} \in \mathbb{N}$ der unterschiedlichen Kategorien n_y . Eine Stichprobe besteht dabei jeweils aus dem Merkmalsvektor $\underline{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^{n_x}$ und der jeweils zugeordneten korrekten Klasse, welche durch $\underline{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}_{> 0}^{n_y}$ gegeben ist. Dabei beschreibt $n_x \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Merkmale einer Stichprobe und der Index $i \in \{1, 2, \dots, n_{gt}\}$ die i -te Stichprobe. Wie bereits erwähnt, setzen wir voraus, dass eine Stichprobe immer nur genau einer Klasse angehört. Da der Datensatz der *ground truth* vollständig korrekt kategorisiert ist, muss sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der i -ten Stichprobe somit ausschließlich auf ein Element in $\underline{\mathbf{y}}_i$ fokussieren (dieses Element nimmt den Wert eins an, die anderen den Wert null). Diese Art der Codierung der Klassenzugehörigkeit wird auch *one-hot encoding* genannt. Der komplette Datensatz der

ground truth wird definiert als

$$\mathbf{X}_{\text{gt}} = [\underline{\mathbf{x}}_1, \dots, \underline{\mathbf{x}}_{n_{\text{gt}}}]^T, \quad (3.111a)$$

$$\mathbf{Y}_{\text{gt}} = [\underline{\mathbf{y}}_1, \dots, \underline{\mathbf{y}}_{n_{\text{gt}}}]^T, \quad (3.111b)$$

$$\mathbf{D}_{\text{gt}} = \{\mathbf{X}_{\text{gt}}, \mathbf{Y}_{\text{gt}}\}. \quad (3.111c)$$

Diese Daten können durch den Algorithmus klassifiziert werden. Dies bedeutet, dass basierend auf den Merkmalen jeder Stichprobe $\underline{\mathbf{x}}_i$ je eine vermutete diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $\hat{\underline{\mathbf{y}}}_i$ generiert wird. Anschließend kann durch einen Vergleich von $\hat{\underline{\mathbf{y}}}_i$ mit $\underline{\mathbf{y}}_i$ ein Klassifikationsfehler abgeleitet werden. Dafür wird später ein Gütekriterium definiert, welches den Klassifikationsfehler für alle getesteten Stichproben in einem Skalar zusammenfasst, siehe unten in Gl. (3.113).

Beim überwachten Lernen (*supervised learning*) wird ein solcher Algorithmus anhand der Daten der *ground truth* nicht nur bewertet, sondern insbesondere auch trainiert oder angelernt, um so eine möglichst hohe Klassifikationsgüte zu erzielen. Vor dem Anlernen des Algorithmus müssen zunächst alle Hyperparameter, welche die konkrete Struktur bestimmen, festgelegt werden. Da wir für die Klassifikation ein neuronales Netz verwenden, sind diese Parameter z. B. die Anzahl der verdeckten Schichten, die Anzahl der Neuronen je verdeckter Schicht oder die Art der verwendeten Aktivierungsfunktionen. Die Gewichte jedes einzelnen Neurons (siehe Abb. 3.5) sind somit die einzigen Parameter, die beim Anlernen des Netzwerks optimiert werden.¹² Die Gewichte aller Neuronen in allen Schichten des Netzwerks werden in der Variable $\underline{\omega}$ zusammengefasst. Es wird nun der Satz an Gewichtsparametern $\underline{\omega}$ gesucht, welcher einen möglichst geringen Fehler bei der Klassifikation erzielt.

Das Anlernen erfolgt in zwei Schritten: der Trainings- und der Testphase. Für die beiden Phasen wird jeweils ein Datensatz benötigt. Diese beiden Datensätze sollten möglichst unabhängig voneinander sein (also insbesondere keine exakten Duplikate enthalten). Dafür werden die Daten aus der *ground truth* \mathbf{D}_{gt} in zwei Datensätze aufgeteilt: die Trainingsdaten $\mathbf{D}_{\text{tr}} = \{\mathbf{X}_{\text{tr}}, \mathbf{Y}_{\text{tr}}\}$ und die Testdaten $\mathbf{D}_{\text{te}} = \{\mathbf{X}_{\text{te}}, \mathbf{Y}_{\text{te}}\}$. Eine mögliche Aufteilung der Daten ergibt sich zu

$$\mathbf{X}_{\text{tr}} = [\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \dots, \underline{\mathbf{x}}_{n_{\text{tr}}}]^T, \quad (3.112a)$$

$$\mathbf{Y}_{\text{tr}} = [\underline{\mathbf{y}}_1, \underline{\mathbf{y}}_2, \dots, \underline{\mathbf{y}}_{n_{\text{tr}}}]^T, \quad (3.112b)$$

$$\mathbf{X}_{\text{te}} = [\underline{\mathbf{x}}_{n_{\text{tr}}+1}, \underline{\mathbf{x}}_{n_{\text{tr}}+2}, \dots, \underline{\mathbf{x}}_{n_{\text{gt}}}]^T, \quad (3.112c)$$

$$\mathbf{Y}_{\text{te}} = [\underline{\mathbf{y}}_{n_{\text{tr}}+1}, \underline{\mathbf{y}}_{n_{\text{tr}}+2}, \dots, \underline{\mathbf{y}}_{n_{\text{gt}}}]^T, \quad (3.112d)$$

mit $n_{\text{tr}} \in \mathbb{N}$, $n_{\text{tr}} < n_{\text{gt}}$. Um zu vermeiden, dass durch diese Aufteilungsvorschrift Stichproben bestimmter Klassen ungleichmäßig auf die beiden Datensätze verteilt werden, muss gegebenenfalls vor dem Aufteilen des Datensatzes der *ground truth*, dieser gemischt werden (zufälliges Vertauschen der Zeilen in \mathbf{D}_{gt}). Dies ist nur notwendig, falls die Stichproben vorher sortiert nach den jeweiligen Klassen vorlagen. Die Trainingsdaten werden dazu verwendet, die Gewichtsparameter in $\underline{\omega}$ zu optimieren. Wenn die Optimierung abgeschlossen ist, wird der Testdatensatz dazu verwendet, das trainierte Netzwerk zu validieren. Damit

¹²Die Optimierung ganzzahliger Parameter wie beispielsweise die Anzahl der Neuronen oder die Anzahl der verdeckten Schichten ist prinzipiell möglich, würde jedoch die Anwendung ganzzahliger Optimierungsmethoden erfordern. Da bereits das Optimieren der reellwertigen Gewichtsparameter sehr rechenaufwändig ist, wird zumeist auf den Einsatz überlagerter ganzzahliger Optimierungsmethoden verzichtet.

wird überprüft, ob das trainierte Netzwerk in der Lage ist zu generalisieren, d.h. Daten zu kategorisieren, die nicht trainiert wurden (da die Stichproben im Testdatensatz nicht in der Trainingsphase verwendet wurden).

Initialisierung der Gewichte

Vor dem eigentlichen Anlernen des neuronalen Netzes müssen alle Gewichte in $\underline{\omega}$ initialisiert werden. Die Initialisierung der Gewichte kann mittels unterschiedlicher Methoden erfolgen. Für die in Abschnitt 6.3 beschriebene Fehlererkennung wurde die sogenannte *Xavier initialization* angewendet (eine ausführliche Beschreibung findet sich in [Glorot & Bengio, 2010]). Vereinfacht lässt sich die Problematik der Initialisierung der Gewichte so ausdrücken:

- Wenn die Gewichte des Netzwerks zu klein gewählt werden, dann wird das Eingangssignal beim Propagieren durch die einzelnen Schichten immer weiter abgeschwächt, bis in der Ausgangsschicht keine sinnvolle Information mehr enthalten ist.
- Wenn die Gewichte des Netzwerks zu groß gewählt werden, stellt sich der Fall ein, in dem die Amplituden der Signale beim Propagieren durch die Schichten so groß werden, dass die relevante Information nicht extrahiert werden kann.

Durch die *Xavier initialization* wird garantiert, dass die Eingangssignale durch die Schichten des Netzwerks mit einer angemessenen Amplitude propagiert werden.

Trainieren des neuronalen Netzes

Nach der Initialisierung der Gewichte erfolgt das Training des Netzwerks, welches sich in zwei Abschnitte gliedert, die sich iterativ wiederholen. Im ersten Abschnitt werden zunächst die Merkmale einer gewissen Teilmenge der Stichproben des Trainingsdatensatzes \mathbf{X}_{tr} durch das Netzwerk propagiert. Diese Teilmenge wird auch *batch* genannt. Wie viele Stichproben eine *batch* enthält (*batch size*) und wie diese Stichproben aus dem Trainingsdatensatz ausgewählt werden, unterscheidet sich je nach gewählter Optimierungsmethode. Zunächst nehmen wir an, dass die *batch* alle Stichproben des Trainingsdatensatzes enthält. Somit wird jeder Stichprobe durch das neuronale Netz eine vermutete Wahrscheinlichkeitsverteilung über die möglichen Klassen zugeordnet, welche gesammelt in $\hat{\mathbf{Y}}_{\text{tr}}$ abgelegt werden. Anschließend wird die Qualität der Klassifikation bewertet. Die typischerweise dafür verwendete Fehlerfunktion ist

$$\text{categorical cross-entropy}^{13}: \quad J(\underline{\omega}) = -\text{Spur} \left(\mathbf{Y}_{\text{tr}}^T \log \left(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{tr}} \right) \right) . \quad (3.113)$$

Die Logarithmusfunktion wird auf eine Matrix angewendet, was bedeutet, dass jedes Element dieser Matrix einzeln logarithmiert wird.

Da mit $J(\underline{\omega})$ ein Maß für den Klassifikationsfehler zur Verfügung steht, kann im zweiten Abschnitt, durch eine Anpassung der Gewichtsparameter in $\underline{\omega}$, dieser Fehler minimiert werden. Üblicherweise wird dazu ein Gradientenverfahren eingesetzt, wobei die additive Änderung der Gewichtsparameter $\Delta \underline{\omega}$ in einem Gradientenschritt durch folgende Gleichung beschrieben ist

$$\Delta \underline{\omega} = -\eta \cdot \frac{dJ(\underline{\omega})}{d\underline{\omega}} . \quad (3.114)$$

¹³Die *categorical cross-entropy* entspricht hier der negativen „*log-likelihood*“-Funktion, [Bishop, 2006]. Eine Minimierung dieser Fehlerfunktion führt somit auf eine Maximum-Likelihood-Schätzung der Parameter.

Die Variable $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ wird entweder Lernrate oder auch Schrittweite genannt. Dieser Parameter kann zu Beginn der Optimierung festgelegt oder adaptiv über die Iterationen durch das Gradientenverfahren selbst angepasst werden.

Ein wichtiger Vorteil der hier beschriebenen neuronalen Netzwerke ergibt sich durch die Möglichkeit der Anwendung der sogenannten „*backpropagation*“-Methode. Dabei erfolgt ein Großteil der Arbeitsschritte zur Bestimmung des Gradienten $dJ(\underline{\omega})/d\underline{\omega}$ auf analytischem Wege. Das so erhaltene Ergebnis ist für alle Optimierungsiterationen wiederverwertbar und garantiert eine zeiteffiziente Berechnung des Gradienten. Eine ausführliche Erläuterung zur *backpropagation* findet sich in [Hagan et al., 2014]. Nach jedem Optimierungsschritt, in dem die Gewichtsparameter $\underline{\omega}$ des Netzwerks angepasst wurden, muss anschließend wieder mit dem ersten Abschnitt gestartet werden, bevor der nächste Optimierungsschritt ausgeführt wird. Auf diese Weise wird der Klassifikationsfehler für den Trainingsdatensatz iterativ minimiert.

Bei Vorliegen eines sehr großen Trainingsdatensatzes kann die *batch size* unter Umständen aufgrund des limitierten Arbeitsspeichers der zur Optimierung verwendeten Recheneinheit nicht so gewählt werden, dass alle Stichproben des Trainingsdatensatzes in einer *batch* zusammengefasst werden können. In diesem Fall wird der Trainingsdatensatz in mehrere gleich große *batches* aufgeteilt, wobei die *batch size*, unter Berücksichtigung des zur Verfügung stehenden Arbeitsspeichers, so groß wie möglich gewählt wird. Jede dieser *batches* wird im Rahmen der Optimierung zur Berechnung eines Gradientenschrittes verwendet. Wurden alle *batches* durch den Optimierungsalgorithmus verarbeitet, ist eine Trainingsepoche vergangen.

Wie die Stichproben auf die *batches* verteilt und anschließend in der Optimierung verarbeitet werden, unterscheidet sich je nach verwendetem Optimierungsverfahren. Ein häufig eingesetztes Verfahren zur Optimierung neuronaler Netze ist das sogenannte ADAM-Verfahren. Dieses ordnet sich in die Gruppe der „*stochastic gradient descent*“-Verfahren ein. Dabei werden alle Stichproben des Trainingsdatensatzes zu Beginn jeder Trainingsepoche in zufälliger Reihenfolge auf die *batches* aufgeteilt. Sequentiell wird dann für jede *batch* einzeln jeweils ein Gradientenschritt durchgeführt, bis alle *batches* genau einmal verarbeitet wurden und somit eine Trainingsepoche abgeschlossen ist. Dieser Vorgang wiederholt sich dann für die folgende Trainingsepoche beginnend mit einer neuen zufälligen Verteilung der Stichproben auf die *batches*. Jede Trainingsepoche beinhaltet somit mehrere Optimierungsschritte. Die dabei berechneten Gradienten stellen jeweils eine Approximation des korrekten Gradienten dar, welcher sich ergibt, wenn alle Stichproben der Trainingsdaten zur Berechnung eines Gradientenschrittes verwendet werden würden. Bei gleicher Lernrate ist somit zu erwarten, dass ein Optimierungsschritt in die approximierten Gradientenrichtung die Fehlerfunktion weniger stark minimiert, als ein Schritt in die wirkliche Gradientenrichtung. Diesem Nachteil steht gegenüber, dass der Rechenaufwand zur Bestimmung des approximierten Gradienten deutlich geringer ausfällt. Es können also in gleicher Rechenzeit mehrere Optimierungsiterationen durchlaufen werden. Weiterhin besteht die Möglichkeit, dass etwaige lokale Minima in $J(\underline{\omega})$ während der Optimierung übersprungen werden, was nicht zu erwarten wäre, wenn immer nur entlang der Richtung des wirklichen Gradienten optimiert wird. Das ADAM-Verfahren erweitert diesen Ansatz um parameterabhängige Lernraten, was die Konvergenzrate des Verfahrens nochmals deutlich erhöht. Eine ausführliche Erläuterung findet sich in [Kingma & Ba, 2014].

Regularisierungsmethoden

Ein unerwünschter Effekt, der sich beim *supervised learning* während der Optimierung häufig ergibt, ist das *overfitting*. Dieses beschreibt das zu genaue Anpassen des Algorithmus an die Trainingsdaten. In diesem Fall werden Daten, welche dem Lernalgorithmus zur Trainingszeit

präsentiert wurden, mit einer hohen Güte klassifiziert. Daten aus dem Testdatensatz, welche das Netz nicht während der Trainingszeit gelernt hat, werden hingegen mit einer hohen Wahrscheinlichkeit falsch klassifiziert. Das neuronale Netz ist somit nicht mehr in der Lage zu generalisieren. Die wesentlichen Ursachen für das Auftreten dieses Effekts sind:

- zu wenig Trainingsdaten,
- zu viele Optimierungsparameter/Freiheitsgrade (großes neuronales Netzwerk).

Im Folgenden werden die wichtigsten Strategien beschrieben, um *overfitting* zu vermeiden. Die Datensätze sollten so viele Stichproben wie möglich enthalten. Je mehr Stichproben vorhanden sind, desto genauer sind die einzelnen Klassen und somit auch die Unterschiede zwischen diesen beschrieben.

Die Anzahl der Neuronen im Netzwerk bestimmt die Freiheitsgrade in der Optimierung. Es wäre wünschenswert, das kleinstmögliche neuronale Netzwerk zu generieren, das die Klassifikationsaufgabe innerhalb der Genauigkeitsanforderungen erfüllt. Es ergibt sich allerdings das Problem, dass der zugehörige optimale Parametersatz $\underline{\omega}$ für ein solches Netzwerk häufig nicht durch die verfügbaren Optimierungsmethoden gefunden werden kann. Aus diesem Grund müssen neuronale Netze in der Regel deutlich mehr Neuronen enthalten als theoretisch notwendig, um mit den verfügbaren Optimierungsmethoden eine hohe Klassifikationsgüte zu erzielen. Um die Freiheitsgrade trotzdem einzuschränken, können unterschiedliche Regularisierungsmethoden eingesetzt werden. Die gängigsten Methoden, welche auch in dieser Arbeit verwendet werden, sind die L1-Regularisierung sowie das sogenannte *dropout*, siehe [Goodfellow et al., 2016], welche im Folgenden kurz erläutert werden.

- Zur Realisierung der L1-Regularisierung wird ein Summand zum Gütekriterium in (3.113) hinzugefügt [Zou & Hastie, 2005]

$$J(\underline{\omega}, \lambda_{L1}) = -\text{Spur} \left(\mathbf{Y}_{\text{tr}}^T \log \left(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{tr}} \right) \right) + \lambda_{L1} \cdot \|\underline{\omega}\|_1 . \quad (3.115)$$

Dabei beschreibt $\lambda_{L1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, wie stark die Regularisierungsmethode gewichtet wird. Eine starke Gewichtung der L1-Regularisierung erzwingt in der Optimierung einen dünnbesetzten Gewichtsvektor $\underline{\omega}$. Viele Elemente in $\underline{\omega}$ nehmen somit annähernd den Wert Null an. Der Optimierer wird dadurch gezwungen, das Gütekriterium unter Verwendung möglichst weniger Neuronen zu minimieren.

- Die „*dropout*“-Methode wurde erstmals von [Srivastava et al., 2014] vorgestellt und hat sich seitdem zum wichtigsten Werkzeug zur Vermeidung von *overfitting* in großen neuronalen Netzen entwickelt. Die Regularisierung mittels der „*dropout*“-Methode kann als effiziente Approximation des sogenannten *ensemble learning* aufgefasst werden. Beim *ensemble learning* werden mehrere unterschiedliche Netzwerke in der Trainingsphase gemeinsam am gleichen Datensatz trainiert. In der Testphase bzw. in der realen Anwendung des Netzes wird dann jeweils mit allen trainierten Netzwerken gleichzeitig prädiziert und über deren Ausgänge gemittelt, um eine Klassifikation zu erhalten. Durch die Mittelung über viele Modelle kann *overfitting* auch für große Netzwerke vermieden werden [Szegedy et al., 2014]. Der Nachteil des *ensemble learning* ist der hohe Rechenaufwand sowohl während der Trainings- als auch der Test- bzw. Anwendungsphase, da in jedem Fall mit allen Modellen gearbeitet werden muss.

Dieser erhöhte Rechenaufwand wird bei der „*dropout*“-Methode deutlich reduziert. Dabei werden in der Trainingsphase, vor jeder Optimierungsiteration, Neuronen und deren zugehörige ein- und ausgehenden Verbindungen, entsprechend einer vorgegebenen

Wahrscheinlichkeit, kurzzeitig aus dem neuronalen Netz entfernt (*dropout*). Für das vollständige neuronale Netz, mit $i \in \mathbb{N}$ Neuronen, ergeben sich 2^i mögliche Kombinationen von „ausgedünnten“ Netzen, welche durch *dropout* generiert werden können. Vor jeder Optimierungsiteration wird aus dieser Menge von Modellen somit zufällig eine Stichprobe gezogen und diese optimiert. Anschließend werden die entfernten Neuronen und Verbindungen wieder in das optimierte Netz eingefügt. Dieser Ablauf kann, über viele Optimierungsiterationen betrachtet, so interpretiert werden, dass 2^i unterschiedliche neuronale Netzwerke gemeinsam optimiert werden. Da alle „ausgedünnten“ Netzwerke eine Untermenge der Gewichtsparameter in $\underline{\omega}$ verwenden, steigt insgesamt die Anzahl der Freiheitsgrade nicht an. Um während der Testphase die bestmögliche Prädiktion zu erhalten, müsste theoretisch mit allen 2^i Konfigurationen prädiziert und anschließend über deren Ausgänge gemittelt werden. Diese Vorgehensweise ist jedoch aufgrund des dafür notwendigen Rechenaufwands nicht praktikabel. Vielmehr wird eine einfache Approximation, basierend auf dem vollständigen neuronalen Netzwerk, berechnet. Es muss somit lediglich mit einem Netzwerk prädiziert werden.

3.5.3 Erweiterte Topologien von neuronalen Netzwerken

Der in Abschnitt 3.5.1 beschriebene Aufbau eines mehrschichtigen Netzwerks, muss für bestimmte Aufgaben, wie z. B. die in Abschnitt 6.3 beschriebene Fehlererkennung, noch erweitert werden. In dem genannten Kapitel wird ausschließlich mit akustischen Signalen gearbeitet. In diesem Grundlagenkapitel werden die erweiterten Topologien hingegen anhand von digitalisierten Bildern motiviert. Dies erleichtert zum einen das Verständnis dieser Netzwerke und zum anderen wurden diese Topologien ursprünglich für Bilddaten entwickelt.

Nehmen wir an, ein digitales Bild soll kategorisiert werden (z. B. in die Kategorie Hund oder Katze). Die räumliche Ausdehnung des Bildes betrage $n_{X_x} \times n_{X_y}$ Pixel, mit $n_{X_x}, n_{X_y} \in \mathbb{N}$. Je nachdem, ob es sich um ein RGB-Bild oder ein Graustufenbild handelt, enthält jeder Pixel Informationen über die Kanäle Rot, Grün und Blau oder Grau. Diese Kanäle beschreiben somit die dritte Dimension des Bildes $n_{X_z} \in \mathbb{N}$. Jedem einzelnen Pixel können somit n_{X_z} Merkmale zugeordnet werden. Ein solches Bild lässt sich durch den dreidimensionalen Tensor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_{X_x} \times n_{X_y} \times n_{X_z}}$ darstellen, wobei die Indizes x, y , und z die drei Koordinaten des Tensors beschreiben.

Wenn das Netzwerk aus Abb. 3.6 für diese Klassifikationsaufgabe verwendet werden soll, muss zunächst der dreidimensionale Tensor \mathbf{X} in einen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n_{X_x} \cdot n_{X_y} \cdot n_{X_z}}$ transformiert werden. Dafür muss die räumliche Zuordnung der Merkmale in \mathbf{X} aufgelöst werden, was einen Informationsverlust bedeutet. Weiterhin ist in dem Netzwerk aus Abb. 3.6 jedes Neuron in der ersten verdeckten Schicht mit jedem Merkmal in \underline{x} verknüpft (verdeckte Schichten dieser Art werden *fully connected layer* oder *dense layer* genannt). Somit ergibt sich bereits bei Betrachtung der Eingabeschicht und der ersten verdeckten Schicht aufgrund der Menge an Merkmalen ($n_{X_x} \cdot n_{X_y} \cdot n_{X_z}$ Merkmale) eine große Anzahl von Optimierungsparametern. Aus diesem Grund würde ein solches Netzwerk, wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, sehr stark zu *overfitting* neigen.

Um diese Problematiken zu vermeiden, wurden sogenannte *convolutional neural networks* eingeführt, welche aus einem oder mehreren hintereinander geschalteten *convolutional layer* und *downsampling layer* sowie abschließend einem oder mehreren *dense layer* bestehen. Der wesentliche Unterschied zwischen einem *dense* und einem *convolutional layer* bzw. einem *downsampling layer* ist, dass bei den beiden letztgenannten die räumliche Zuordnung der Pixel in \mathbf{X} nicht aufgelöst wird. Weiterhin sind deren Neuronen jeweils nur mit Pixeln verknüpft, die eine gewisse räumliche Nähe zueinander aufweisen (benachbarte Pixel). Im Folgenden werden die grundsätzlichen Ideen eines *convolutional neural networks* inklusive

convolutional layer und *downsampling layer* zusammengefasst.

- Die Merkmale eines einzelnen Pixels in einem Bild (Rot, Grün, Blau) haben keine hohe Aussagekraft für eine Klassifikation. Erst die gleichzeitige Betrachtung der Merkmale mehrerer benachbarter Pixel ermöglicht die für eine Klassifikation relevanten Informationen aus dem Bild zu extrahieren (*feature extraction*).
- Diese Informationsextraktion soll durch Anwendung von $n_f \in \mathbb{N}$ unterschiedlichen Filtern geschehen. Ein solches Filter arbeitet immer auf allen Merkmalen von \mathbf{X} in z -Richtung aber nur auf einem definierten Bildausschnitt in x - und y -Richtung. Durch sequenzielles, translatorisches Verschieben dieses Ausschnittes in x - und y -Richtung, wird ein Filter auf das gesamte Bild angewendet. Für jeden betrachteten Bildausschnitt wird dabei basierend auf den Merkmalen dieses Ausschnitts jeweils ein neues Merkmal vom Filter berechnet. Dieser Vorgang wird Faltung oder auch *convolution* genannt. Alle Merkmale, die ein Filter durch das translatorische Verschieben berechnet, werden entsprechend der Positionen der jeweiligen betrachteten Bildausschnitte in einem zweidimensionalen Feld der Größe $n_{Y_x} \times n_{Y_y}$ angeordnet. Dabei definiert n_{Y_x} bzw. n_{Y_y} die Anzahl der translatorischen Verschiebungen in x - bzw. y -Richtung. Durch Anwendung aller n_f Filter entstehen somit n_f zweidimensionale Felder, welche in dem Tensor $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_{Y_x} \times n_{Y_y} \times n_{Y_z}}$ abgelegt werden, wobei $n_{Y_z} = n_f$ und $n_{Y_x}, n_{Y_y} \in \mathbb{N}$. Die Größe von \mathbf{Y} in x - und y -Richtung, welche durch n_{Y_x} und n_{Y_y} gegeben ist, entspricht zumeist etwa der Größe der entsprechenden Dimensionen des Eingangstensors \mathbf{X} (je nach gewählter Vorschrift für das sequenzielle translatorische Verschieben des Bildausschnitts).
- In der Regel wird der von einem Filter betrachtete Bildausschnitt, im Rahmen der translatorischen Verschiebung, nur um wenige Pixel verschoben (häufig nur um ein Element in x - oder y -Richtung). Dadurch enthalten die in z -Richtung abgelegten Merkmale, von benachbarten Pixeln in \mathbf{Y} , redundante Informationen. Diese Redundanz kann durch Anwendung eines *downsampling layer* weitestgehend beseitigt werden. Ein *downsampling layer* reduziert dabei die Größe von \mathbf{Y} in x - und y -Richtung, wohingegen die Größe in z -Richtung erhalten bleibt. Ein häufig verwendetes *downsampling layer* ist das sogenannte *max-pooling layer*, welches weiter unten noch genauer beschrieben wird.
- Durch die Kombination von *convolutional layer* und *downsampling layer* verkleinert sich der Ausgangstensor \mathbf{Y} im Vergleich zum Eingangstensor \mathbf{X} in den Pixeldimensionen x und y . Gleichzeitig vergrößert sich \mathbf{Y} in der Merkmalsdimension z , da in der Regel die Anzahl der verwendeten Filter n_f deutlich größer gewählt wird als die Anzahl der Merkmale eines Pixels n_{X_z} in \mathbf{X} .

Mehrmaliges sequenzielles Anwenden dieser beiden *layer* führt dazu, dass letztlich alle relevanten Informationen in die Merkmalsdimension z transformiert werden und dass \mathbf{Y} nur noch eine geringe Ausdehnung in den Pixeldimensionen x und y besitzt. Der räumliche Zusammenhang der Pixel in x - und y -Richtung spielt nach diesen Transformationen somit keine oder nur noch eine untergeordnete Rolle. Die räumliche Zuordnung kann an dieser Stelle ohne gravierenden Informationsverlust aufgelöst werden. Es wird also der dreidimensionale Tensor \mathbf{Y} in einen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n_{Y_x} \cdot n_{Y_y} \cdot n_{Y_z}}$ transformiert. Auf diesen Vektor wird dann ein gewöhnliches neuronales Netz angewendet, siehe z. B. Abb. 3.6, um die Klassifikationsaufgabe zu lösen. Da $n_{Y_x} \cdot n_{Y_y} \cdot n_{Y_z} \ll n_{X_x} \cdot n_{X_y} \cdot n_{X_z}$ wird das Problem des *overfitting* durch den beschriebenen Ablauf ebenfalls deutlich verringert.

- Während der Trainingsphase des Netzwerks werden die Parameter aller im Netzwerk enthaltener *convolutional* und *dense layer* gemeinsam optimiert. *Downsampling layer*

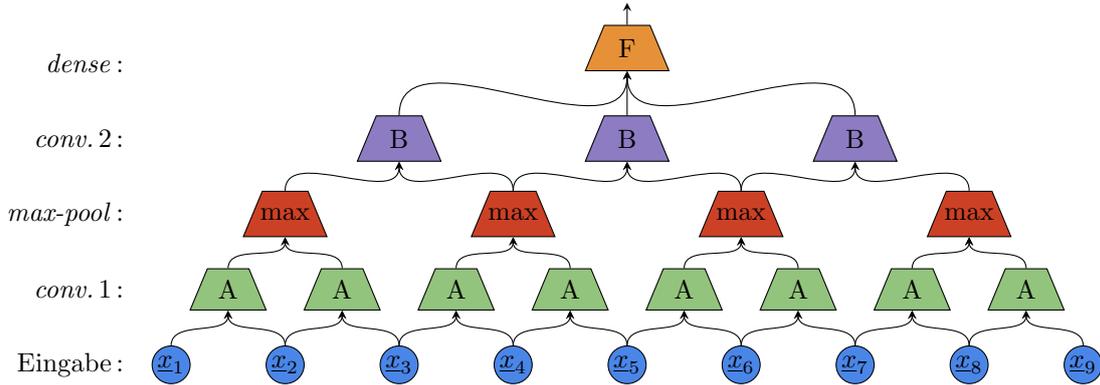


Abbildung 3.7: Beispielhafte Struktur eines *1-D convolutional neural network* mit einer Eingabeschicht: $\underline{x} \in \mathbb{R}^9$, zwei *convolutional layer*: *conv. 1* (A enthält 5 Filter) und *conv. 2* (B enthält 7 Filter), einem *max-pool layer* und einer Serienschaltung von *dense layer* die in dem Block F zusammengefasst sind.

enthalten keine zu optimierenden Parameter und müssen somit auch nicht trainiert werden. Die Optimierung eines *convolutional neural network* erfolgt entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.5.2.

Im Folgenden wird detailliert auf die Funktionsweise der einzelnen *layer* eingegangen, welche in *convolutional neural networks* zur Anwendung kommen können. Dafür werden sowohl *1-D convolutional layer* als auch *2-D convolutional layer* eingeführt und eine Variante eines *downsampling layer* vorgestellt.

Die Angaben *1-D* und *2-D* eines *convolutional layer* beziehen sich immer auf die räumlichen Dimensionen n_{x_x} , n_{x_y} der Eingangsmerkmale eines *layer*. Es werden folgende zwei Fälle unterschieden:

- $n_{x_y} = 1$: In diesem Fall besitzt das Bild eine eindimensionale räumliche Ausdehnung (z. B. ein Bild aus einer Zeilenkamera). Wird ein solches Bild als Eingang eines *convolutional layer* verwendet, spricht man von einem *1-D convolutional layer*.
- $n_{x_y} > 1$: In diesem Fall kann dem Bild eine zweidimensionale räumliche Ausdehnung zugeordnet werden. Wird ein solches Bild als Eingang eines *convolutional layer* verwendet, spricht man von einem *2-D convolutional layer*.

1-D convolutional layer und downsampling layer

Zunächst werden *1-D convolutional layer* anhand des beispielhaften *convolutional neural network* aus Abb. 3.7 erläutert, wobei vorerst nur die Eingabeschicht und das *1-D convolutional layer*: *conv. 1* betrachtet wird. Ein Neuron eines *convolutional layer* wird Filter genannt. Dieses entspricht dem in Abb. 3.5 dargestellten Neuron. Ein solches Filter arbeitet auf einem Ausschnitt von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_{x_x} \times n_{x_z}}$, welcher mit $\check{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n_{\check{x}_x} \times n_{x_z}}$ bezeichnet wird, wobei

$$\mathbf{X} = [\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n_{x_x}}] , \quad (3.116a)$$

$$\check{\mathbf{X}}(i_A) = [\underline{x}_{i_A}, \underline{x}_{i_A+1}, \dots, \underline{x}_{i_A+n_{\check{x}_x}-1}] . \quad (3.116b)$$

3 Grundlagen und Methoden

Die Variable i_A beschreibt den Startpunkt, ab dem Pixel aus \mathbf{X} in $\check{\mathbf{X}}$ enthalten sind und $n_{\check{\mathbf{X}}_x}$ legt die Anzahl der Pixel in $\check{\mathbf{X}}$ fest.¹⁴ Für den Fall, dass mit dieser Vorschrift Pixel indiziert werden, die nicht in \mathbf{X} enthalten sind (z. B. weil $i_A < 1$), werden diese als Nullvektoren in $\check{\mathbf{X}}$ eingefügt (*zero padding*).

In der Regel werden mehrere Filter definiert, die auf dem gleichen $\check{\mathbf{X}}$ arbeiten. Die Zusammenfassung dieser Filter wird im Folgenden als Filterbank A bezeichnet. Jedes Filter der Filterbank soll in der Trainingsphase lernen, jeweils ein Merkmal aus $\check{\mathbf{X}}$ zu berechnen, welches für die Klassifikation relevant ist. Ein erstes Filter könnte z. B. lernen, $\check{\mathbf{X}}$ auf einen bestimmten Frequenzinhalt zu überprüfen, ein zweites Filter lernt eine Kantendetektion durchzuführen, ein drittes Filter überprüft das Vorhandensein bestimmter Farbwerte, etc. Da Aussagen über solche Merkmale, für jeden beliebigen Ausschnitt $\check{\mathbf{X}}$, wichtige Informationen für eine Klassifikation liefern können, wird die gleiche Filterbank auf unterschiedliche $\check{\mathbf{X}}$ angewendet. Damit das funktioniert, wird die räumliche Dimension dieser Ausschnitte (Pixelanzahl) $n_{\check{\mathbf{X}}_x}$ für alle $\check{\mathbf{X}}$ gleich groß gewählt. Die Menge aller betrachteten $\check{\mathbf{X}}$ für ein festes $n_{\check{\mathbf{X}}_x}$ wird mit $\check{\mathbf{X}}_{n_{\check{\mathbf{X}}_x}}$ bezeichnet und ist definiert als

$$\check{\mathbf{X}}_{n_{\check{\mathbf{X}}_x}} = \left\{ \check{\mathbf{X}}(i_A) \mid i_A \in \Gamma_A \right\}, \text{ mit } n_{\check{\mathbf{X}}_x} \in \mathbb{N}, n_{\check{\mathbf{X}}_x} < n_{X_x}. \quad (3.117)$$

Um die noch näher zu spezifizierende Menge Γ_A zu definieren, müssen zunächst alle weiteren relevanten Parameter eines *convolutional layer* festgelegt werden:

- Die Anzahl der Pixel in $\check{\mathbf{X}}$, auf denen ein Filter arbeitet, welche durch $n_{\check{\mathbf{X}}_x} \in \mathbb{N}, n_{\check{\mathbf{X}}_x} < n_{X_x}$ gegeben ist. In dem betrachteten Fall in Abb. 3.7 gilt $n_{\check{\mathbf{X}}_x} = 2$.
- Die Anzahl der Filter in A, welche durch $n_f \in \mathbb{N}$ beschrieben wird. Die Filterbank A fasst alle Filter zusammen, die auf einem $\check{\mathbf{X}}$ arbeiten. Jedes Filter in A beschreibt ein Neuron, das von $\mathbb{R}^{n_{\check{\mathbf{X}}_x} \times n_{X_z}}$ nach \mathbb{R} abbildet. Die komplette Filterbank bildet somit von $\mathbb{R}^{n_{\check{\mathbf{X}}_x} \times n_{X_z}}$ nach \mathbb{R}^{n_f} ab.
- Die Wahl des sogenannten *stride* $s_x \in \mathbb{N}$. Der *stride* s_x gibt an, um wie viele Pixel die Filterbank A jeweils in x -Richtung verschoben wird, um den nächsten Ausschnitt $\check{\mathbf{X}}$ festzulegen. In dem betrachteten Fall gilt $s_x = 1$.
- Die Angabe der Parameter $i_s \in \mathbb{Z}$ und $i_e \in \mathbb{Z}$. Der Parameter i_s definiert den Startpunkt des ersten $\check{\mathbf{X}}(i_A = i_s)$ auf dem A arbeitet, wohingegen i_e den Startpunkt des letzten $\check{\mathbf{X}}(i_A = i_e)$ festlegt. In dem betrachteten Fall gilt $i_s = 1$ und $i_e = 8$.

Mit diesen Angaben lässt sich die noch zu definierende Menge Γ_A wie folgt festlegen

$$\Gamma_A = \left\{ \gamma_A \cdot s_x + i_s \mid \gamma_A \in \mathbb{N}_0, \gamma_A \leq \frac{i_e - i_s}{s_x} \right\} \quad (3.118)$$

was im betrachteten Fall $\Gamma_A = \{1, 2, \dots, 8\}$ bedeutet. Die Anzahl der Elemente in Γ_A berechnet sich mit

$$n_{\Gamma_A} = \left\lceil \frac{i_e - i_s + 1}{s_x} \right\rceil, \quad (3.119)$$

¹⁴In diesem Abschnitt enthält der Vektor \underline{x} die Daten eines vektoriellen Merkmals der Stichprobe \mathbf{X} , siehe z.B. (3.116a). Im vorherigen Abschnitt wurde \underline{x} hingegen verwendet, um eine vollständige Stichprobe zu bezeichnen, welche alle zugehörigen skalaren Merkmale vereint, vergl. z.B. (3.111a). Als Konsequenz beschreibt \mathbf{X} in diesem Abschnitt eine einzelne Stichprobe und im vorherigen Abschnitt einen vollständigen Datensatz bestehend aus einer Vielzahl von Stichproben.

wobei $\lceil \cdot \rceil$ die Aufrundungsfunktion beschreibt. Das gesamte *conv. 1 layer* kann somit als Funktion $\text{conv. 1}: \mathbb{R}^{n_{x_x} \times n_{x_z}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{r_A} \times n_f}$ aufgefasst werden. Nehmen wir an, dass das Eingangsbild drei Farbkanäle aufweist, also $n_{x_z} = 3$ und in der Filterbank A gerade $n_f = 5$ Filter enthalten sind, dann gilt $\text{conv. 1}: \mathbb{R}^{9 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{8 \times 5}$. Die räumliche Ausdehnung wurde somit durch die Anwendung des *convolutional layer* leicht verringert, wohingegen die Anzahl der Merkmale eines Pixels von drei auf fünf fast verdoppelt wurde.

Um die räumliche Ausdehnung des Bildes weiter zu verringern, wird ein *downsampling layer* eingesetzt. In dem beispielhaften Netzwerk aus Abb. 3.7 handelt es sich dabei um ein sogenanntes *max-pooling layer*. Dieses *layer* arbeitet grundsätzlich nach dem gleichen Prinzip wie ein *convolutional layer* mit den Unterschied, dass ein spezielles *max-pooling* Neuron eingesetzt wird. Dieses Neuron betrachtet jede Merkmalschicht separat und extrahiert aus jeder Schicht jeweils den maximalen Wert der in dem betrachteten Bildausschnitt vorhandenen Merkmale. Da diese Funktionalität keine Gewichtsparameter benötigt, muss ein *max-pooling layer* in der Trainingsphase nicht optimiert werden, was die Gefahr von *overfitting* reduziert. Weiterhin wird der *stride* s_x in diesem *layer* für gewöhnlich so gewählt, dass die betrachteten Bildausschnitte vor und nach der translatorischen Verschiebung nicht überlappen. Somit wird der Eingangstensor in x - und y -Richtung deutlich verkleinert (*downsampling*), wohingegen die Anzahl der Merkmale in z -Richtung nicht geändert wird. In dem *max-pooling layer* in Abb. 3.7 beträgt die Größe des betrachteten Bildausschnitts zwei Elemente und der *stride* wurde zu $s_x = 2$ gewählt. Damit wird die Dimension des Ausgangstensors aus dem *conv 1 layer* von 8×5 auf 4×5 reduziert.

In dem beispielhaften Netzwerk aus Abb. 3.7 wird anschließend an das *max-pooling layer* ein weiteres *convolutional layer* angewendet, was die Anzahl an Pixeln von 4 auf 3 verringert und die Dimension in die Merkmalsrichtung z noch weiter erhöht. Nehmen wir z.B. an, die Filterbank B verwendet 7 Filter, dann würde dieses *layer* die Dimension von $\mathbb{R}^{4 \times 5}$ am Eingang zu $\mathbb{R}^{3 \times 7}$ am Ausgang transformieren. Abschließend wird dann noch ein gewöhnliches neuronales Netzwerk angewendet, welches aus einer Anzahl von *dense layer* besteht, die in dem Block F zusammengefasst sind. Der Eingangsvektor in dieses Netzwerk würde somit aus 21 Elementen bestehen.¹⁵

2-D convolutional layer

Der zuvor beschriebene Formalismus eines *1-D convolutional layer* kann leicht auf Eingänge mit zwei räumlichen Dimensionen, also den Fall $n_{x_y} > 1$, erweitert werden. An dieser Stelle wird auf eine ausführliche formale Beschreibung verzichtet. Eine gute Beschreibung findet sich in [Goodfellow et al., 2016]. Das Prinzip soll an einem einfachen beispielhaften Netzwerk veranschaulicht werden. Abbildung 3.8a zeigt eine Filterbank A eines *2-D convolutional layer*, die auf einem Bildausschnitt mit 3×2 Pixeln arbeitet.

Dieser Bildausschnitt ist Teil des vollständigen *layer*, welches in Abb. 3.8b dargestellt ist. Der Aufbau eines *2-D convolutional layer* entspricht somit weitestgehend dem eines *1-D convolutional layer*. Der wesentliche Unterschied ist dadurch gegeben, dass der betrachtete Bildausschnitt sowohl in x - als auch in y -Richtung translatorisch verschoben wird. Die Anzahl dabei zu verschiebender Pixel ist durch s_x und s_y gegeben. Auch ein *2-D convolutional layer* wird in der Regel um ein nachgeschaltetes *downsampling layer* erweitert, um die Größe in x - und y -Richtung zu reduzieren. Es können beliebig viele dieser beiden *layer* sequenziell hintereinander geschaltet werden. Abschließend wird dann wieder ein gewöhnliches neuronales

¹⁵In einer realen Anwendung würde jedes der beschriebenen *layer* entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.5.1 über einen zusätzlichen additiven Bias-Term verfügen, auf welchen hier aus Übersichtsgründen verzichtet wurde.

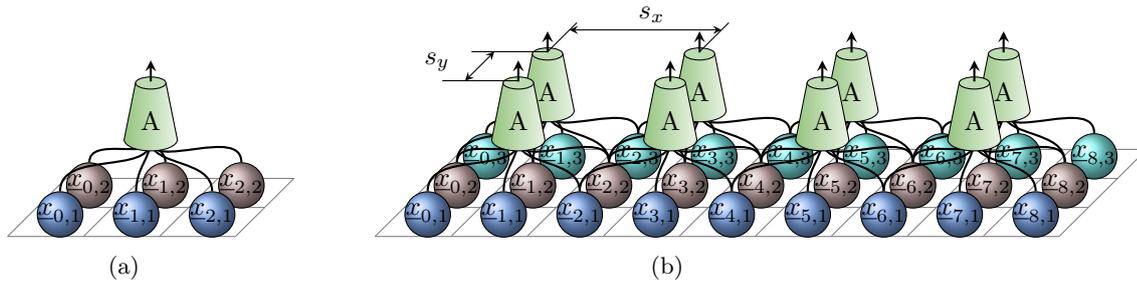


Abbildung 3.8: a) Einzelne Filterbank A, welche auf einen Ausschnitt (3×2 Pixel) der Daten aus Abb. 3.8b angewendet wird
 b) Beispielhafte Struktur eines 2-D convolutional layer mit $s_x = 2$ und $s_y = 1$

Netz (bestehend aus einer beliebigen Anzahl von *dense layer*) verwendet, um die eigentliche Klassifikationsaufgabe zu lösen.

3.6 Extremwertregelung

Die Extremwertregelung (EWR) ist ein Online-Optimierungsverfahren. Es wird eingesetzt, um Prozesse zu regeln, für welche ein Regelziel in Form eines zu maximierenden skalaren Gütefunktional $J_E(\underline{y}_E) : \mathbb{R}^{n_{yE}} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Basis von Messwerten $\underline{y}_E \in \mathbb{R}^{n_{yE}}$ aus dem zu regelnden Prozess angegeben werden kann. Die Online-Optimierung erfolgt gradientenbasiert, wobei der Gradient unter anderem anhand der zeitlichen Entwicklung von J_E geschätzt wird. Die klassische EWR benötigt dafür kein Modell der Strecke. Dieser Vorteil wird durch eine in der Regel geringe Konvergenzgeschwindigkeit des Online-Optimierungsalgorithmus erkauft. Aus diesem Grund wird eine EWR dann angewendet, wenn entweder eine Identifikation des Streckenmodells nicht möglich ist oder wenn damit zu rechnen ist, dass sich das Streckenmodell im laufenden Regelbetrieb signifikant ändert. Eine weitere Einschränkung ergibt sich daraus, dass die EWR ausschließlich bei asymptotisch stabiler Regelstrecke angewendet werden kann. In Abschnitt 5.1 wird die Extremwertregelung eingesetzt, um die Schwingungsamplitude einer akustischen Mode zu maximieren. Eine ausführliche Beschreibung zur klassischen Extremwertregelung inklusive eines Stabilitätsbeweises findet sich in [Ariyur & Krstić, 2003]. Im Folgenden wird kurz der grundsätzliche Aufbau einer EWR vorgestellt, um anschließend im Detail auf den in dieser Arbeit verwendeten Algorithmus zur Gradientenschätzung einzugehen.

3.6.1 Grundsätzlicher Aufbau einer Extremwertregelung

Abbildung 3.9 zeigt das Blockschaltbild einer EWR. Die Strecke wird zunächst als statisches Kennfeld ohne Dynamik aufgefasst. Durch den skalaren Perturbationsterm $\beta_E \sin(\omega_E t)$ oszilliert das Eingangssignal u_E ständig um den aktuellen Arbeitspunkt, welcher durch $u_E^* \in \mathbb{R}$ festgelegt ist. Über die Parameter $\beta_E \in \mathbb{R}$ und $\omega_E \in \mathbb{R}$ kann die Amplitude und Kreisfrequenz der Perturbation eingestellt werden. Die Reaktion des Gütefunktional auf die Perturbation der Strecke lässt sich anhand der Messwerte \underline{y}_E bestimmen, $J_E = J_E(\underline{y}_E)$. Aus der Reaktion des Gütefunktional wird anschließend der Gradient $g_E = dJ_E/du_E$ am aktuellen Arbeitspunkt geschätzt. Dafür wird neben der zeitlichen Entwicklung des Gütefunktional auch das Anregungssignal $u_E \in \mathbb{R}$ benötigt. Mit dem geschätzten Gradienten wird schließlich ein Schritt in Gradientenrichtung $g_E \in \mathbb{R}$ durchgeführt. Die Schrittweite lässt sich dabei durch den Parameter $\alpha_E \in \mathbb{R}$ einstellen.

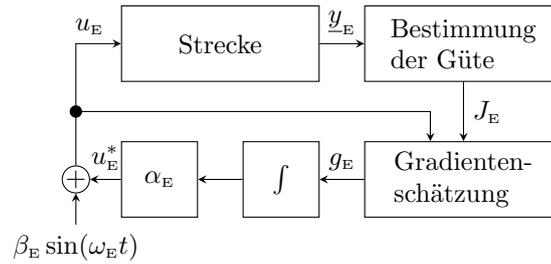


Abbildung 3.9: Blockschaltbild eines Extremwertreglers, wobei die Strecke eine Stellgröße und mehrere Messgrößen aufweist.

Falls das Gütefunktional J_E konkav ist, wird die EWR nach einigen Iterationen einen Wert für u_E^* einstellen, sodass das zugehörige J_E in der Nähe des globalen Maximums liegt.¹⁶ Durch die fortwährende Perturbation $\beta_E \sin(\omega_E t)$ wird der Prozess nicht dauerhaft an einer Stelle verharren, sondern um das Maximum herum oszillieren. Dies stellt einen in der Regel unerwünschten Effekt der Extremwertregelung dar. Die Amplitude dieser Oszillation lässt sich sowohl über die Amplitude der Perturbation β_E als auch über den Parameter zur Schrittweitenanpassung α_E einstellen. Wird β_E klein gewählt, ergibt sich eine geringere Oszillation von J_E . Allerdings wird dadurch auch die Gradientenschätzung weniger genau, da aufgrund von Messrauschen ein schlechteres Signal-zu-Rauschverhältnis entsteht. Die Oszillation kann auch durch einen kleinen Wert von α_E gering gehalten werden, was allerdings eine Verringerung der Konvergenzgeschwindigkeit der EWR zur Folge hat. Die Einstellung dieser Parameter stellt somit immer einen Kompromiss zwischen Robustheit der Gradientenschätzung, Konvergenzgeschwindigkeit und Oszillationsamplitude um das Optimum im konvergierten Zustand dar.

Bisher wurde die zu regelnde Strecke lediglich als statisches Kennfeld aufgefasst. In diesem rein theoretischen Fall kann die Perturbationsfrequenz ω_E beliebig schnell eingestellt werden. In der Realität wird dem statischen Kennfeld immer auch ein dynamischer Anteil der Strecke überlagert sein. In diesem Fall muss die Frequenz der Perturbation ω_E so gewählt werden, dass $1/\omega_E$ deutlich größer ist als die größte Zeitkonstante der Streckendynamik. In Kombination mit der oben erwähnten Annahme, der asymptotischen Stabilität der Strecke, wird der dynamische Anteil im Systemausgang abgeklungen sein, bevor sich der Streckeneingang signifikant ändert. Streckeneingang u_E und Streckenausgang y_E , bewegen sich also in Phase. Durch eine geeignete Wahl von ω_E kann das dynamische System somit im Vergleich zur Dynamik der Perturbation als quasi-statisches Kennfeld angenommen werden.

Falls eine EWR als Regelverfahren ausgewählt wird, liegt in der Regel kein genaues Modell der Strecke vor. Somit können die Parameter β_E , ω_E und α_E nicht modellbasiert ausgelegt werden. Vielmehr erfolgt das Einstellen dieser Größen im laufenden Betrieb direkt am Prüfstand.

3.6.2 Gradientenschätzung

Für die Gradientenschätzung wird in dieser Arbeit ein EKF, siehe Abschnitt 3.3.1, eingesetzt. Um den zugehörigen Algorithmus herzuleiten, wird zunächst der Differenzialquotient zur Berechnung des Gradienten $g_E = \frac{dJ_E}{du_E}$ durch den Differenzenquotienten

$$g_E(k) \approx \frac{\Delta J_E(k)}{\Delta u_E(k)}, \quad (3.120)$$

¹⁶Falls J_E nicht konkav ist, wird ein lokales Maximum von J_E angefahren.

3 Grundlagen und Methoden

approximiert, wobei $\Delta J_E(k) = J_E(k) - J_E(k-1)$ und $\Delta u_E(k) = u_E(k) - u_E(k-1)$. Anschließend wird ein stochastisches Modell angeschrieben, welches als Grundlage dient, um den Gradienten g_E mittels EKF zu schätzen. Der Zustand dieses Modells wird als $\underline{x} := g_E$ definiert, wobei hier der Sonderfall $n_x = 1$ auftritt.¹⁷ Das zugehörige stochastische Modell ist entsprechend (3.63) gegeben durch

$$\underline{x}(0) \sim \mathcal{N}_x(\underline{\mu}_x(0), \mathbf{P}_x(0)) \quad , \quad (3.121a)$$

$$\underline{x}(k) = \underline{x}(k-1) + \underline{w}(k-1) \quad , \quad (3.121b)$$

$$\underline{y}(k) = \Delta u_E(k) \underline{x}(k) + \underline{\nu}(k) \quad , \quad (3.121c)$$

mit $\underline{\mu}_x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}_x \in \mathbb{R}$, $\underline{u} \in \mathbb{R}$, $\underline{u}(k) = 0 \forall k$, $\underline{y} \in \mathbb{R}$ und somit $n_x = n_u = n_y = 1$. Weiterhin gilt $\underline{\nu}(k) \sim \mathcal{N}_\nu(Q^{n_y}, \mathbf{R}(k))$ und $\underline{w}(k) \sim \mathcal{N}_w(Q^{n_x}, \mathbf{Q}(k))$, wobei $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}$. Der deterministische Anteil von (3.121b) beschreibt einen über die Zeitschritte konstanten Gradienten. Jegliche Änderung des geschätzten Gradienten über die Zeitschritte muss somit durch das Systemrauschen $\underline{w}(k)$ abgebildet werden. Dieses Modell lässt sich entsprechend Algorithmus 3.1 in einem EKF verwenden, wobei dann gilt

$$\hat{\underline{x}}(k) := \hat{g}_E(k) \quad , \quad (3.122a)$$

$$\mathbf{F}(k) = 1, \quad \forall k \quad , \quad (3.122b)$$

$$\mathbf{H}(k) = \Delta u_E(k) \quad , \quad (3.122c)$$

$$\underline{y}(k) := \Delta J_E(k) \quad , \quad (3.122d)$$

wobei $\hat{g}_E \in \mathbb{R}$ den geschätzten Gradienten beschreibt.

3.7 Lineare und quadratische gemischt-ganzzahlige Optimierung

In dieser Arbeit werden unter anderem optimierungsbasierte Methoden angewendet. Dieser Abschnitt führt die in diesem Zusammenhang verwendete Nomenklatur ein und erläutert detailliert einen Spezialfall, welcher für eine Anwendung in den später vorgestellten Experimenten relevant ist.

Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem

$$\underline{\theta}^* = \underset{\underline{\theta}}{\operatorname{argmin}} \underline{\theta}^T \underline{\Omega} \underline{\theta} + \underline{\theta}^T \underline{g} \quad , \quad (3.123a)$$

unter Einhaltung der Nebenbedingung

$$\mathbf{D} \underline{\theta} \leq \underline{r} \quad , \quad (3.123b)$$

$$\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta} \quad , \quad (3.124)$$

wobei $\underline{\theta}$, $\underline{\Omega} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\underline{g} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_D \times n_\theta}$ und $\underline{r} \in \mathbb{R}^{n_D}$ jeweils den Vektor der Optimierungsvariablen, die Gewichtungsmatrix des quadratischen Anteils, den Gewichtungsvektor des linearen Anteils, die Koeffizientenmatrix der linken Seite der linearen Nebenbedingung und die rechte Seite der Nebenbedingung beschreiben. Das Symbol * kennzeichnet die Optimalität der zugehörigen Variable. Diese Optimierungsaufgabe wird auch quadratisches Pro-

¹⁷Um dieses Modell konform zu den Gleichungen in Abschnitt 3.3.1 anzuschreiben, werden die entsprechenden Schreibweisen für Matrizen und Vektoren beibehalten, auch wenn es sich hier jeweils um skalare Größen handelt.

ogramm (QP) genannt. In dieser Arbeit wird ausschließlich der Fall betrachtet, in dem $\mathbf{\Omega} \geq 0$, also $\mathbf{\Omega}$ eine positiv semidefinite Matrix ist. In diesem Fall liegt ein konvexes Optimierungsproblem vor. Für den Spezialfall, in dem die Matrix $\mathbf{\Omega}$ der Nullmatrix $\mathbf{0}^{n_\theta \times n_\theta}$ entspricht, entfällt der quadratische Term und man spricht in diesem Fall von einem linearen Programm (LP). Für beide Fälle QP und LP existieren Optimierungsstrategien, welche eine effiziente Lösung dieser Optimierungsaufgaben ermöglichen, siehe [Boyd & Vandenberg, 2004].¹⁸

Wird die Nebenbedingung in (3.124) ersetzt durch

$$\underline{\theta}_R \in \mathbb{R}^{n_{\theta_R}} \quad , \quad (3.125a)$$

$$\underline{\theta}_Z \in \{0, 1\}^{n_{\theta_Z}} \quad , \quad (3.125b)$$

wobei

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_R^T & \underline{\theta}_Z^T \end{bmatrix}^T \quad (3.125c)$$

und $n_\theta = n_{\theta_Z} + n_{\theta_R}$, ergibt sich ein sogenanntes gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem oder auch gemischt-ganzzahliges Programm¹⁹. Obwohl der Optimierungsraum durch die Nebenbedingung der Ganzzahligkeit (3.125b) eingeschränkt wird, ergeben sich dadurch im Allgemeinen sehr komplexe kombinatorische Optimierungsprobleme, welche einen hohen Rechenaufwand zur Lösung erfordern, siehe [Wolsey, 1998].²⁰

Viele kombinatorische Optimierungsaufgaben lassen sich in die Form (3.123), (3.125) überführen. Im Folgenden wird für einen Spezialfall gezeigt, wie ein Gütekriterium, welches einen quadratischen Anteil, eine ∞ -Norm sowie die max-Funktion enthält, als ganzzahliges QP bzw. LP angeschrieben werden kann. Der hier vorgestellte Spezialfall kommt in Abschnitt 5.2 für die Berechnung von Steuersignalen zur Anwendung.

3.7.1 Optimierung spezieller Gütekriterien

Gütekriterium mit ∞ -Norm und max-Funktion

Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\underline{\theta}_Z^* = \underset{\underline{\theta}_Z}{\operatorname{argmin}} \left(\underline{\theta}_Z^T \mathbf{\Omega}_2 \underline{\theta}_Z + \|\mathbf{\Omega}_\infty \underline{\theta}_Z\|_\infty + \max(\mathbf{\Omega}_{\max} \underline{\theta}_Z) \right) \quad , \quad (3.126a)$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\check{\mathbf{D}} \underline{\theta}_Z \leq \check{\mathbf{r}} \quad , \quad (3.126b)$$

$$\underline{\theta}_Z \in \{0, 1\}^{n_{\theta_Z}} \quad , \quad (3.126c)$$

mit dem Vektor der Optimierungsvariablen $\underline{\theta}_Z$, den Gewichtungsmatrizen $\mathbf{\Omega}_2 \in \mathbb{R}^{n_{\theta_Z} \times n_{\theta_Z}}$, $\mathbf{\Omega}_\infty \in \mathbb{R}^{n_{\Omega_\infty} \times n_{\theta_Z}}$, $\mathbf{\Omega}_{\max} \in \mathbb{R}^{n_{\Omega_{\max}} \times n_{\theta_Z}}$, $\check{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n_{\check{D}} \times n_{\theta_Z}}$ und den oberen Schranken der Ungleichungsnebenbedingung $\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^{n_{\check{D}}}$.²¹ Die Variablen $n_{\Omega_\infty} \in \mathbb{N}$ und $n_{\Omega_{\max}} \in \mathbb{N}$ legen die Anzahl von Zeilen der jeweils zugehörigen Gewichtungsmatrix fest und werden entsprechend der

¹⁸Konvexe LPs und QPs sind aus komplexitätstheoretischer Sicht in Polynomialzeit lösbar.

¹⁹Im Allgemeinen Fall gilt für eine ganzzahlige Optimierung $\underline{\theta}_Z \in \mathbb{Z}^{n_{\theta_Z}}$. Diese allgemeinere Formulierung schließt die in 3.125b definierte Nebenbedingung ein.

²⁰Das Optimierungsproblem gemischt-ganzzahliger LPs und QPs ist aus komplexitätstheoretischer Sicht im Allgemeinen NP-schwer.

²¹Eine Ungleichung für vektorielle Größen gilt elementweise.

3 Grundlagen und Methoden

gewünschten Gewichtung gewählt. Weiterhin bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die ∞ -Norm, die das betragsmäßig größte Element, und $\max(\cdot) : \mathbb{R}^{n_{\theta_Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, eine Funktion, die aus dem Eingangsvektor den größten Wert aller Elemente zurückgibt.

Dieses Optimierungsproblem lässt sich durch Einführen der zwei Hilfsvariablen $\theta_{R,\infty} \in \mathbb{R}$ und $\theta_{R,\max} \in \mathbb{R}$, welche in dem Vektor $\underline{\theta}_R = [\theta_{R,\infty} \ \theta_{R,\max}]^T$ zusammengefasst werden, in Form eines QP anschreiben

$$(\underline{\theta}_R^*, \underline{\theta}_Z^*) = \underset{(\underline{\theta}_R, \underline{\theta}_Z)}{\operatorname{argmin}} \left(\underline{\theta}_Z^T \underline{\Omega}_2 \underline{\theta}_Z + \theta_{R,\infty} + \theta_{R,\max} \right), \quad (3.127a)$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\underline{\Omega}_\infty \underline{\theta}_Z \leq \theta_{R,\infty} \underline{\mathbf{1}}^{n_{\Omega_\infty}}, \quad (3.127b)$$

$$\underline{\Omega}_\infty \underline{\theta}_Z \geq -\theta_{R,\infty} \underline{\mathbf{1}}^{n_{\Omega_\infty}}, \quad (3.127c)$$

$$\underline{\Omega}_{\max} \underline{\theta}_Z \leq \theta_{R,\max} \underline{\mathbf{1}}^{n_{\Omega_{\max}}}, \quad (3.127d)$$

$$\check{\mathbf{D}} \underline{\theta}_Z \leq \check{\underline{r}}, \quad (3.127e)$$

$$\underline{\theta}_R \in \mathbb{R}^2, \ \underline{\theta}_Z \in \{0, 1\}^{n_{\theta_Z}}. \quad (3.127f)$$

Durch die neu eingeführten Nebenbedingungen (3.127b) und (3.127c) wird garantiert, dass innerhalb des zulässigen Optimierungsgebietes $\theta_{R,\infty} \geq \|\underline{\Omega}_\infty \underline{\theta}_Z\|_\infty$ gilt. Die optimale Lösung von (3.127) erfüllt somit $\theta_{R,\infty}^* = \|\underline{\Omega}_\infty \underline{\theta}_Z^*\|_\infty$. Die gleiche Argumentation lässt sich auch auf die ebenfalls neu eingeführten Nebenbedingung (3.127d) anwenden, wobei hier nur eine untere Schranke an $\theta_{R,\max}$ formuliert wurde und somit die optimale Lösung von (3.127) $\theta_{R,\max}^* = \max(\underline{\Omega}_{\max} \underline{\theta}_Z^*)$ erfüllt. Das Optimierungsproblem (3.127) kann durch Definition der Größen

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_R^T & \underline{\theta}_Z^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.128a)$$

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{2 \times 2} & \mathbf{0}^{2 \times n_{\theta_Z}} \\ \mathbf{0}^{n_{\theta_Z} \times 2} & \underline{\Omega}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.128b)$$

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} (\underline{\mathbf{1}}^2)^T & (\underline{\mathbf{0}}^{n_{\theta_Z}})^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.128c)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{1}}^{n_{\Omega_\infty}} & \mathbf{0} & \underline{\Omega}_\infty \\ -\underline{\mathbf{1}}^{n_{\Omega_\infty}} & \mathbf{0} & -\underline{\Omega}_\infty \\ \mathbf{0} & -\underline{\mathbf{1}}^{n_{\Omega_{\max}}} & \underline{\Omega}_{\max} \\ \underline{\mathbf{0}}^{n_{\check{D}}} & \underline{\mathbf{0}}^{n_{\check{D}}} & \check{\mathbf{D}} \end{bmatrix}, \quad (3.128d)$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} (\underline{\mathbf{0}}^{n_{\Omega_\infty}})^T & (\underline{\mathbf{0}}^{n_{\Omega_\infty}})^T & (\underline{\mathbf{0}}^{n_{\Omega_{\max}}})^T & \check{\underline{r}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.128e)$$

in die Form von (3.123), (3.125) überführt werden.

4 Beschreibung des akustischen Prüfstands

In diesem Kapitel wird zunächst der konstruktive Aufbau des akustischen Prüfstands erläutert. Anschließend wird eine Nomenklatur eingeführt, um unterschiedliche Feuermuster, welche mit diesem Versuchsstand generiert werden können, geschickt zu beschreiben. Abschließend erfolgt eine Diskussion zur Übertragbarkeit der Annahme linearer Akustik auf eine reale Detonationsbrennkammer inklusive einer Abschätzung des dabei entstehenden Fehlers. Diese Abschätzung ist von Bedeutung, da der in dieser Arbeit verwendete akustische Prüfstand sehr gut durch lineare akustische Modelle beschreibbar ist und ein Großteil der weiter unten beschriebenen modellbasierten Zustandsschätz- und Regelungsmethoden auf der Modellannahme linearer Akustik beruhen.

4.1 Aufbau des akustischen Prüfstands

Zur Untersuchung der in Abschnitt 1.2 identifizierten Problemstellungen, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein akustischer Prüfstand aufgebaut. Im Wesentlichen soll dieser Prüfstand die akustische Situation innerhalb einer Detonationsbrennkammer, wenn diese als Bestandteil einer Gasturbine mit Verdichter und Turbine betrieben wird, abbilden. Die Verbrennungsrohre einer Detonationsbrennkammer werden dabei durch Lautsprecher ersetzt, welche an ein Ringspaltplenum angeschlossen werden. Jeder Lautsprecher erzeugt immer dann ein Detonationsgeräusch, wenn ein Detonationsvorgang des abzubildenden Rohres simuliert werden soll. Dies wird im Folgenden auch als „feuern“ eines Lautsprechers bezeichnet. Der Zeitverlauf der normierten¹ Klemmenspannung $\tilde{u}_{det} \in \mathbb{R}$ eines Lautsprechers, wenn dieser ein Detonationsereignis simulieren soll, ist in Abb. 4.1 dargestellt. Die daraus resultierende Bewegung der Lautsprechermembran entspricht gerade einer Anregung des akustischen Prüfstands in der akustischen Schnelle. Da die bei einem realen Detonationsvorgang generierten Amplituden in der Schnelle durch einen Lautsprecher nicht zu realisieren sind, wurde das hier gezeigte Signal künstlich generiert.² Eine direkte Übertragbarkeit der weiter unten präsentierten Ergebnisse auf eine reale Detonationsbrennkammer ist somit nicht möglich. Jedoch kann mit dem hier beschriebenen Versuchsaufbau die lineare akustische Interaktion von Aktuatoren in einem nachgeschalteten Plenum abgebildet werden. Ob es sich bei den akustischen Aktuatoren um reale Detonationsrohre oder Lautsprecher handelt, spielt dabei für die Entwicklung regelungstechnischer Methoden eine untergeordnete Rolle, solange die Annahme der linearen Akustik auch für eine Konfiguration mit realen Detonationsrohren hinreichend genau erfüllt ist. In Abschnitt 4.3 wird anhand einer Simulationsstudie gezeigt, dass davon auszugehen ist, dass diese Annahme in erster Näherung zutreffend ist. Das Signal aus Abb. 4.1 wird somit in allen folgenden Kapiteln als Ansteuerungssignal für die Lautsprecher verwendet. In dieser Arbeit wurde eine Anzahl von fünf Lautsprechern gewählt, die an das Ringplenum angeschlossen werden. Die Anzahl von Lautsprechern ist im Prinzip willkürlich, da lediglich eine grundsätzliche Anwendbarkeit der oben beschriebenen Methoden gezeigt werden soll und diese auf eine beliebige Anzahl von Verbrennungsrohren übertragbar sind.

¹Das Signal wurde auf seinen betragsmäßigen Maximalwert normiert.

²Dabei wurde darauf geachtet, dass der in [Rasheed et al., 2009] dargestellte, bei sequentiellen Feuermustern angeregte Frequenzbereich des Drucks im Plenum gut abgebildet wird.

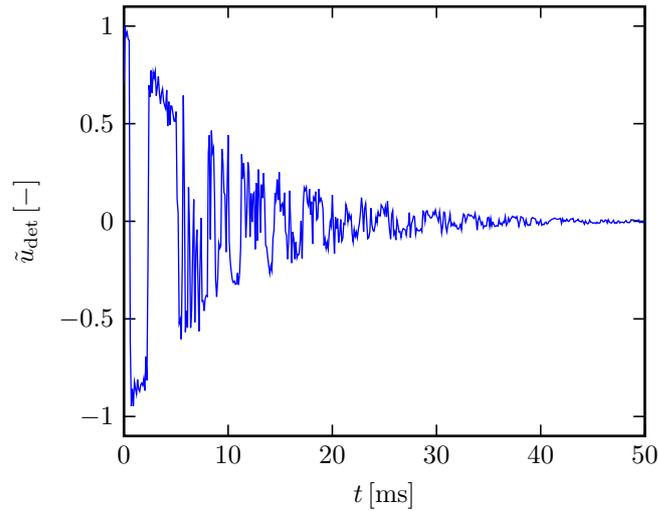


Abbildung 4.1: Zeitlicher Verlauf der normierten Klemmenspannung an einem Lautsprecher, wenn mit diesem ein Detonationsereignis simuliert werden soll.

Die Form des Plenums wurde als Ringspalt gewählt, da dies in einer Gesamtmaschine die Anbindung der Brennkammer an die restlichen Gasturbinenkomponenten, insbesondere der Hauptwelle der Gasturbine, ermöglicht. Abbildung 4.2a zeigt das Ringspaltplenum, welches an beiden Enden durch jeweils eine Aluminiumringplatte abgeschlossen ist. Dadurch werden die verdichter- und turbinenseitigen, akustischen Randbedingungen als schallharte Wände modelliert.³ Verdichterseitig bildet diese Randbedingung die Situation der in Kapitel 1 beschriebenen Gesamtmaschine gut ab. Dort ist die Brennkammer lediglich über die verhältnismäßig kleinen Querschnittsfläche der schaltbaren Ventile der Verbrennungsrohre mit dem Verdichter verbunden, welche nur zur Wiederbefüllung geöffnet werden. Turbinenseitig stellt eine schallharte Wand ebenfalls eine gute Beschreibung der Situation in einer Gesamtmaschine dar, da für gewöhnlich eine Gasturbine so ausgelegt wird, dass eine sonische Durchströmung der ersten Turbinenstufe vorliegt, siehe [Bräunling, 2001]. Zusätzlich werden zur Messung des akustischen Feldes im Plenum, am äußeren Aluminiumzylinder zehn Mikrofone, an den in Abb. 4.2a markierten Positionen, flächenbündig appliziert.

Zur Beschreibung der Positionierung des κ -ten Lautsprechers, wird der Ortsvektor zum Lautsprechermittelpunkt angegeben $\underline{x}_{o\kappa}^* = [r_{o\kappa}^*, \varphi_{o\kappa}^*, z_{o\kappa}^*]^T$. Die zugehörigen Komponenten berechnen sich zu $r_{o\kappa}^* = R(1+a)/2$, $\varphi_{o\kappa}^* = 2\pi/5(\kappa - 1)$ und $z_{o\kappa}^* = 0$, mit $\kappa \in \mathbb{N}_{\leq 5}$. Die Positionierung des j -ten Mikrofons ist gegeben durch $\underline{x}_{oj}^* = [r_{oj}^*, \varphi_{oj}^*, z_{oj}^*]^T$ mit $r_{oj}^* = R$, $\varphi_{oj}^* = \frac{2\pi}{10}(j - 1)$, $z_{oj}^* = l$ und $j \in \mathbb{N}_{\leq 10}$.

4.2 Definition und Nomenklatur von Feuermustern

In den folgenden Kapiteln werden verschiedene Arten von Feuermustern verwendet. Um diese zu beschreiben, wird an dieser Stelle eine geeignete Nomenklatur eingeführt. Abb. 4.2b zeigt eine Frontansicht auf den Versuchsstand. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird angenommen, dass jeder Lautsprecher mit der Frequenz f_f feuert. Somit wird alle $1/f_f$ Sekunden ein gegebenes Detonationssignal durch die Lautsprecher wiederholt abgespielt. Dabei müssen die Lautsprecher nicht notwendigerweise zeitgleich angesteuert werden. Vielmehr kann beispielsweise ein Phasenversatz zwischen den einzelnen Lautsprechern realisiert werden, wodurch je

³Die akustischen Randbedingungen für die schallharten Wände sind in (3.21) gegeben.

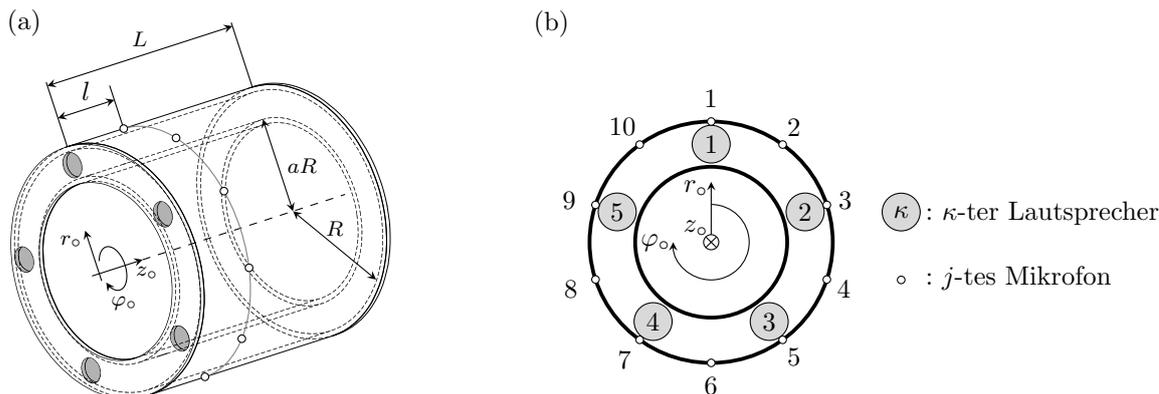


Abbildung 4.2: a) Ringspalt bestehend aus zwei konzentrischen Aluminiumrohren und jeweils einer abschließenden Ringplatte. Die grau markierten Flächen markieren die Anschlussflächen für die Lautsprecher. Die Abmaße des akustischen Resonanzraumes sind gegeben durch $L = 0.6$ m, $R = 0.4$ m, $a = 0.8$. Für die Messebene der Mikrofone wurde ein axialer Abstand von $l = 0.1$ m vom Ursprung gewählt.

b) 2-D Ansicht des Prüfstands mit numerischer Zuordnung der Lautsprecher und Mikrofone

nach gewähltem Phasenversatz die Lautsprecher in unterschiedlichen Reihenfolgen feuern. Eine gegebene Feuerreihenfolge wird als Feuermuster bezeichnet.

Ein Feuermuster beschreibt somit eine sich zyklisch wiederholende Abfolge von Detonationsereignissen. Innerhalb eines Zyklus simuliert jeder Lautsprecher genau ein Detonationsereignis. Die genauen Feuerzeitpunkte, zu denen am jeweiligen Lautsprecher ein Detonationsereignis simuliert wird, werden durch die Funktion $t_f(\kappa, i_f) : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, in Abhängigkeit der Variablen κ und i_f beschrieben. Dabei bezeichnet κ die Nummer des anzusteuernenden Lautsprechers und i_f die Zyklusnummer. Durch Definition dieser Funktion ist somit gleichzeitig auch das Feuermuster M_f festgelegt.

Beispielhaft sei hier, für ein im weiteren Verlauf der Arbeit häufig verwendetes Feuermuster, sowohl t_f als auch M_f angeben

$$t_f(\kappa, i_f) = \frac{1}{f_f} \left(\frac{\kappa - 6}{5} + i_f \right) , \quad (4.1a)$$

$$M_f = \{1, 2, 3, 4, 5\} . \quad (4.1b)$$

Für eine Feuerfrequenz von $f_f = 20$ Hz würden sich nach (4.1a) beispielsweise Feuerzeitpunkte von $t_f(1, 1) = 0$ ms, $t_f(2, 1) = 10$ ms, $t_f(3, 1) = 20$ ms, ... ergeben und somit das in (4.1b) angegebene Feuermuster entstehen.

4.3 Fehlerabschätzung zur Annahme linearer Akustik

Eine der wichtigsten Eigenschaften linearer akustischer Systeme ist die Gültigkeit des Superpositionsprinzips. Angewendet auf den akustischen Versuchsstand bedeutet dies, dass sich das akustische Feld im Ringspalt aus einer einfachen additiven Überlagerung der durch jeden einzelnen Lautsprecher angeregten Akustik ergibt. Alle modellbasierten Methoden, die weiter unten angewendet werden, setzen die Gültigkeit dieser Annahme voraus. Im Fall von Lautsprechern als Aktuatoren ist die Annahme linearer Akustik aufgrund der verhältnis-

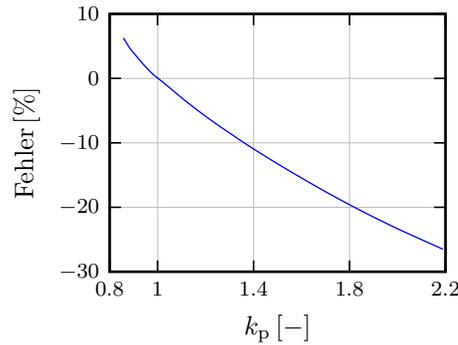


Abbildung 4.3: Prozentualer Fehler bei Anwendung des Superpositionsprinzips zur Vorhersage der Druckamplitude von überlagerten Druckwellen

mäßig geringen erzeugten Druckamplituden gerechtfertigt und wird durch das gute Auto- und Kreuzvalidierungsergebnis im Rahmen der Parameteridentifikation für das lineare akustische Modell in Abschnitt 6.1 bestätigt. Bei einer realen Detonationsbrennkammer werden die Druckschwankungen im Plenum höher ausfallen. Somit stellt sich die Frage, wie gut sich das akustische Feld in diesem Fall durch einen linearen Superpositionsansatz beschreiben lässt. Je geringer der dabei auftretende Fehler ist, desto besser werden sich die weiter unten beschriebenen modellbasierten Methoden auf eine reale Detonationsbrennkammer übertragen lassen. Zur Klärung dieser Frage wurde eine numerische Simulationsstudie durchgeführt, welche die Überlagerung zweier Druckwellen innerhalb des Plenums einer Detonationsbrennkammer abbilden soll. Dafür wird der in Kapitel 7 vorgestellte Simulator zum Lösen der 1-D Euler-Gleichungen verwendet. Zunächst werden die Größen $p_m \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p_p \in \mathbb{R}_{>0}$ eingeführt, welche den Mitteldruck im Plenum und das Druckniveau der beiden zu überlagernden Druckwellen vor der Überlagerung beschreiben. Die Differenz dieser beiden Größen wird als $p'_p = p_p - p_m$ definiert, mit $p'_p \in \mathbb{R}$. Zusätzlich gelte $p_p = p_m k_p$, womit $k_p \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Druckverhältnis beschreibt und als Parameter verwendet wird, um das gewünschte Druckniveau der Druckwellen in Abhängigkeit des Mitteldrucks einzustellen.

Im Rahmen eines linearen, akustischen Superpositionsmodells würde nun zur Bestimmung der superponierten Druckschwankung $p'_{\text{sup,lin}} \in \mathbb{R}$ folgende Gleichung angewendet werden

$$p'_{\text{sup,lin}} = 2p'_p \quad (4.2)$$

Durch Verwendung des numerischen Simulators lässt sich der prozentuale Fehler zwischen der nichtlinearen Lösung der Wellenüberlagerung und (4.2), bezogen auf die nichtlineare Lösung berechnen, siehe Abb. 4.3. Dieses Vorgehen wurde für Drücke p_m im Bereich zwischen 1 bar bis 50 bar und Gastemperaturen zwischen 1000 K und 2000 K für verschiedene Druckverhältnisse k_p durchgeführt. Dabei zeigte sich, dass die so berechneten Fehler keine merkbare Sensitivität bezüglich des gewählten Mitteldrucks bzw. der Gastemperatur aufweisen. Abbildung 4.3 beschreibt somit das Fehlerverhalten ausschließlich in Abhängigkeit von k_p . Dabei zeigt sich, dass bei einem Druckverhältnis $0 \leq k_p \leq 1.37$ der Fehler zur Vorhersage der Druckamplitude der überlagerten Druckwellen mittels linearer Superposition betragsmäßig geringer als 10 % ausfällt. Im Fall der Überlagerung von moderaten Saugwellen, d.h. $k_p < 1$, liegt der Fehler durch Anwendung linearer Superposition für den untersuchten Bereich deutlich unterhalb von 10 %.

Weiterhin wurde mit dem Simulator untersucht, wie eine Überlagerung einer Druckwelle und einer Saugwelle mit betragsmäßig gleicher Amplitude beschrieben werden kann. In diesem Fall ergab sich keine im Rahmen der numerischen Genauigkeit merkbare Abweichung

zum Ergebnis mittels linearer Superposition. Eine Verringerung von Druckschwankungen durch Überlagerung von Druckwellen mit gegensätzlichem Vorzeichen lässt sich somit sehr gut durch lineare Superposition beschreiben.

Der für diese Fehlerabschätzung verwendete numerische Simulator stellt eine stark vereinfachte Beschreibung der Verhältnisse im Plenum einer realen Detonationsbrennkammer dar. Die durch ein feuerndes Detonationsrohr generierten Amplituden der Druckschwankungen innerhalb eines nachgeschalteten Plenums einer realen Detonationsbrennkammer sind zum Entstehungszeitpunkt dieser Arbeit von keiner dem Autor bekannten Forschergruppe untersucht worden. Somit ist es nicht möglich, eine endgültige Aussage zur Anwendbarkeit des Superpositionsansatzes zu treffen. Trotzdem bietet Abb. 4.3 einen ersten Anhaltspunkt und zeigt die Grenzen der Anwendbarkeit der in dieser Arbeit präsentierten modellbasierten Methoden auf.

5 Regelung und Steuerung von akustischen Moden am Ringspaltplenum

Dieses Kapitel beschreibt die Anwendung von Regelungs- und Zustandsschätzmethoden am akustischen Prüfstand zur Einstellung von gewünschten Druckfeldern im Plenum. In Kapitel 1 wurde motiviert, dass unter Umständen eine umlaufende Saugwelle im Ringspaltplenum benötigt wird, um eine zuverlässige Wiederbefüllung der Detonationsrohre im laufenden Betrieb zu garantieren. Dazu werden zunächst Feuermuster bestimmt, mit denen eine solche umlaufende Saugwelle generiert werden kann. Anschließend wird mittels einer Extremwertregelung die Feuerfrequenz der Lautsprecher so angepasst, dass die Amplitude dieser Saugwelle maximiert wird.

Für den ebenfalls in Kapitel 1 beschriebenen Fall, dass eine solche umlaufende Saugwelle für den Betrieb einer realen Detonationsbrennkammer nicht notwendig sein sollte, ergeben sich andere Anforderungen an das Druckfeld im Plenum, wie beispielsweise die Minimierung von Druckschwankungen. Um diese Anforderungen einzuhalten, werden Methoden zur Berechnung von binären Optimalsteuerungen angewendet. Weiterhin werden diese Methoden verwendet, um gezielt vor einem einzelnen Verbrennungsrohr innerhalb eines gewünschten Zeitfensters eine Saugwelle zu generieren. Dies könnte in einer realen Detonationsbrennkammer die Wiederbefüllung eines durch Fehlzündung ausgefallenen Rohres mit Frischluft und Treibstoff ermöglichen.

5.1 Zustandsschätzung und Extremwertregelung einzelner Druckmoden

In diesem Abschnitt wird die in Abschnitt 3.6 vorgestellte EWR angewendet, um durch Anpassen von Feuerfrequenzen, die Schwingungsamplitude einer akustischen Eigenmode der Ringspaltgeometrie zu maximieren. Dafür werden zunächst sinnvolle Feuermuster, basierend auf theoretischen Überlegungen und unter Einbeziehung des physikalischen, akustischen Modells der Ringspaltgeometrie aus Abschnitt 3.1.3, festgelegt, welche es erlauben, diese Eigenmode im Plenum rotieren zu lassen. Anschließend werden Kennfelder berechnet, welche die erzielte Schwingungsamplitude der akustischen Eigenmode in Abhängigkeit von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Detonationsrohre, der Feuerfrequenz sowie der Feuermuster beschreiben. Schließlich werden die daraus gewonnenen Erkenntnisse genutzt, um eine EWR aufzubauen, welche es ermöglicht, das Maximum eines dieser Kennfelder anzufahren und diesen Betriebspunkt zu halten. Dafür wird unter anderem ein EKF aufgebaut, um aus den gemessenen Mikrofonsignalen die zu regelnde Schwingungsamplitude zu schätzen, welche dann in der EWR verarbeitet wird.

5.1.1 Bestimmung sinnvoller Feuermuster

Eine umlaufende Saugwelle kann durch eine geeignete Anregung der akustischen Moden des Ringspalts generiert werden. Das dynamische Verhalten dieser akustischen Moden wird durch das in 3.1.3 hergeleitete Modell beschrieben. Im Folgenden wird zur einfacheren Argumentation, wie eine umlaufende Druckwelle generiert werden kann, nur die Sinus- und Kosinusmode

der ersten azimuthalen und nullten axialen Ordnung herangezogen, $\{m = 1, l = 0\}$.¹ Diese Annahme ist gerechtfertigt, da durch die weiter unten beschriebene Wahl der Feuersequenz gerade diese Moden angeregt werden und die restlichen akustischen Moden, durch die natürliche akustische Dämpfung, schnell abgeklungen sein werden. Weiterhin wird angenommen, dass die Anregung des akustischen Plenums durch einen Lautsprecher, einer Impulsanregung in der Beschleunigung der Lautsprechermembran entspricht.²

Gleichung (3.51) verwendet als Systemeingang akustische Schnellen, welche mit den Geschwindigkeiten der jeweiligen Lautsprechermembranen übereinstimmen. Um damit die Systemantwort auf eine Impulsanregung in der Beschleunigung einer Lautsprechermembran zu berechnen, muss jeder Systemeingang in Gleichung (3.51) um einen Integrator erweitert werden. Somit kann die Systemantwort p'_δ der Mode $\{l = 0, m = 1\}$ des Ringspalts an einer Position \underline{x}_{o_j} auf einen Dirac-Impuls in der Beschleunigung der Lautsprechermembran zum Zeitpunkt t_f , welcher durch den κ -ten Lautsprecher an der Position $\underline{x}_{o_\kappa}^*$ generiert wird, berechnet werden

$$p'_\delta(t, \varphi_o, \kappa) = \begin{cases} \overbrace{\exp(-(t - t_f) \alpha_{d,01}/2)}^{\text{akustische Dämpfung}} \overbrace{a_c \cos\left(\varphi_o - \frac{2\pi}{5}\kappa\right)}^{\text{ortsabhängige Mode}} \dots \\ \underbrace{\dots \sin((t - t_f) \omega_{01,d})}_{\text{Schwungsanteil}}, t \geq t_f \\ 0, t < t_f \end{cases} \quad (5.1a)$$

$$\omega_{01,d} = \sqrt{\omega_{01}^2 - \alpha_{d,01}^2/4}, \quad (5.1b)$$

$$a_c = \frac{\rho_0 c^2 A_\kappa}{\Lambda_{01}} \sqrt{1 + \frac{\alpha_{d,01}^2}{4\omega_{01,d}^2}}, \quad (5.1c)$$

mit $\omega_{01,d} \in \mathbb{R}$ und $a_c \in \mathbb{R}$.³ Da die betrachtete Mode $\{l = 0, m = 1\}$ ein konstantes Drucklevel in z_o -Richtung aufweist, hängt die Systemantwort $p'_\delta(t, \varphi_o, \kappa)$ ausschließlich von der φ_o -Koordinate, der Zeit t , und dem gewählten Lautsprecher κ ab. Das durch einen Lautsprecher generierte Druckfeld ergibt sich somit aus drei multiplikativ überlagerten Termen. Der ortsabhängige Term wird durch eine zeitlich konstante Kosinusmode beschrieben, welche ihr Maximum a_c genau an der azimuthalen Position der Impulsanregung aufweist. Die Amplitude dieser Mode verringert sich durch die Skalierung mit dem Dämpfungsterm über die Zeit. Durch die Multiplikation mit dem Schwungsanteil oszilliert die abklingende Mode zusätzlich mit der Eigenfrequenz $\omega_{01,d}$.

Wird nun eine in positive φ_o -Richtung unlaufende Feuersequenz entsprechend (4.1a) angenommen, generiert jeder Lautsprecher zeitversetzt jeweils ein akustisches Feld, welches durch (5.1a) beschrieben ist. Diese Felder überlagern sich im Ringspalt und bilden das superponierte Druckfeld p' aus. Dieser Vorgang ist in Abb. 5.1a für den ersten Feuerzyklus $i_f = 1$ dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = t_f(1, 1)$ erfolgt die Impulsanregung am ersten Lautsprecher, wodurch das zuvor in Ruhe befindliche, akustische Feld angeregt wird. Bis zum Zeitpunkt

¹Im Prinzip lässt sich der hier präsentierte Ansatz auch auf Eigenmoden höherer Ordnung anwenden. Diese weisen jedoch deutlich höhere zugehörige Eigenfrequenzen auf. Da die notwendige Feuerfrequenz der Rohre von der Eigenfrequenz der anzuregenden Mode abhängt, würden sich sehr hohe und somit nicht oder nur schwer mit einem realen Detonationsrohr realisierbare Feuerfrequenzen ergeben.

²Diese Annahme wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit getroffen, da die Systemantwort auf eine beliebige andere Anregung aus der so berechneten Impulsantwort superponiert werden kann.

³Der Index $_{01}$, z. B. bei ω_{01} , verweist auf die Mode $\{l = 0, m = 1\}$.

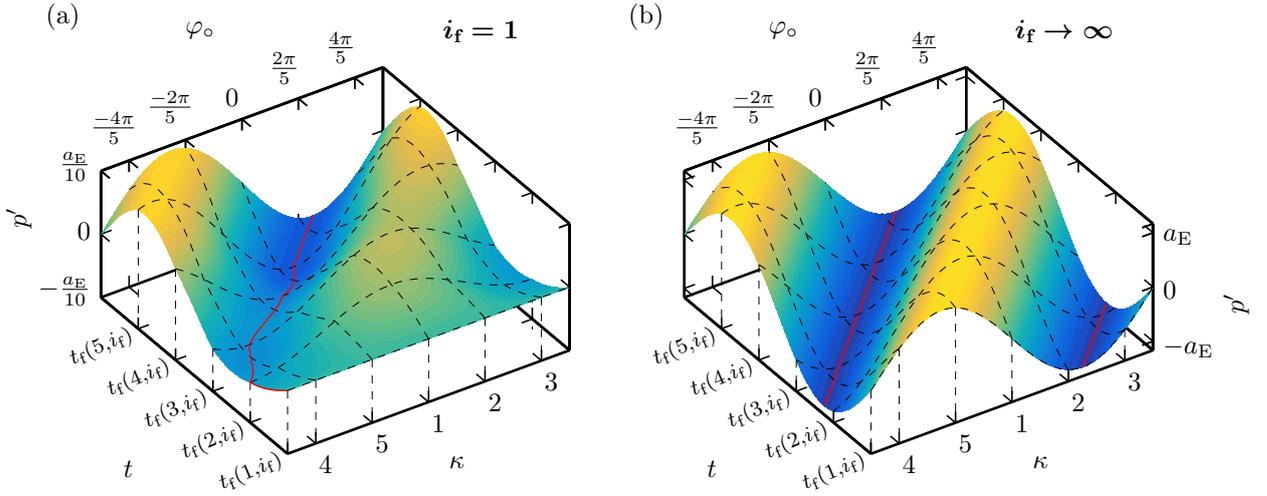


Abbildung 5.1: Druckfeld im Ringspalt über der Zeit und über der Azimutalkoordinate im a) ersten Feuerzyklus $i_f = 1$ bzw. b) nach vielen Feuerzyklen $i_f \rightarrow \infty$. Die rote Linie beschreibt jeweils den Zeitverlauf der Position des niedrigsten Drucks im Ringspalt. Das hier gezeigte Ergebnis wurde unter Verwendung von (5.1) für die in Abschnitt 6.1 identifizierten Parameter berechnet. Weiterhin wurde festgelegt, dass die Feuerfrequenz der Lautsprecher gerade der akustischen Eigenfrequenz der rotierenden akustischen Mode des Plenums entspricht, d.h. $f_f = 2\pi \omega_{01,d}$.

$t < t_f(2, 1)$ bildet sich dadurch vor dem ersten Lautsprecher bei $\varphi_0 = 0$ eine Druckspitze aus. Die Position der zugehörigen Saugspitze ist durch die rote Linie markiert. In dem Zeitfenster $t_f(2, 1) \leq t < t_f(3, 1)$ wird durch den zweiten Lautsprecher das akustische Feld im Plenum angeregt. Dadurch wird die Saugspitze im Plenum über die Zeit in Richtung dieses Lautsprechers verschoben. Dieser Vorgang wiederholt sich für die folgenden Lautsprecher in gleicher Weise, wodurch sich schließlich eine konstante Rotationsbewegung der Saugspitze einstellt. Abbildung 5.1b zeigt das vollständig ausgebildete Druckfeld für $i_f \rightarrow \infty$. Dieses ist durch einen periodischen Zeitverlauf gekennzeichnet, wobei die zugehörige Periodendauer genau der für einen vollständigen Feuerzyklus benötigten Zeitspanne entspricht. Die Rotationsgeschwindigkeit der Saugwelle garantiert somit, dass in einem Feuerzyklus jedes Rohr genau einmal passiert wird. Durch die Wahl der resonanten Feuerfrequenz $f_f = 2\pi \omega_{01,d}$ passt die Phasenlage jeder neu generierten Druckschwankung zum bereits bestehenden Druckfeld, sodass die Amplitude der rotierenden Saugwelle stark angefacht wird. Die Amplitude der vollständig ausgebildeten Saugwelle wird mit $a_E \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnet. Mit den oben beschriebenen Eigenschaften, ist eine solche rotierende Saugwelle gut geeignet, um in einer realen Detonationsbrennkammer den Befüllvorgang der Detonationsrohre zu unterstützen.

5.1.2 Kennfeldberechnung

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob weitere sinnvolle Feuerfrequenzen und Feuermuster existieren, welche eine signifikante Amplitude der rotierenden Saugwelle erzeugen. Aus den Erkenntnissen des vorherigen Abschnitts, lässt sich vermuten, dass alle umlaufenden Feuermuster auch eine umlaufende Saugwelle generieren werden. Für die Konfiguration des akustischen Prüfstands mit fünf Lautsprechern bietet sich somit, außer dem bereits erwähnten Feuermuster $M_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, auch die Verwendung des Feuermusters $M_f = \{1, 3, 5, 2, 4\}$

an. In diesem Fall wird beginnend beim ersten Lautsprecher, jeweils der in positiver φ_o -Richtung übernächste Lautsprecher als Nächstes feuern. Es wird somit immer genau ein Lautsprecher übersprungen. Um die Feuerzeitpunkte entsprechend (4.1a) für beide erwähnten Feuermuster anzugeben, wird die Variable $n_s \in \mathbb{N}_0$ eingeführt, welche die Anzahl an zu überspringenden Rohren der umlaufenden Feuermuster bezeichnet. Damit ergeben sich die Feuerzeitpunkte zu⁴

$$t_f(\check{\kappa}, i_f) = \frac{1}{f_f} \left(\frac{\check{\kappa} - 6}{5} + i_f \right) , \quad (5.2a)$$

$$\check{\kappa}(\kappa, n_s) = (\kappa - 1)(n_s^2 + n_s + 1) - \left\lfloor \frac{(\kappa - 1)(n_s^2 + n_s + 1)}{5} \right\rfloor 5 + 1 . \quad (5.2b)$$

Diese Berechnungsvorschrift gilt nur für $n_s \in \{0, 1, 2\}$, was hinreichend ist, da sich für die Konfiguration mit fünf Lautsprechern für $n_s > 1$ keine relevanten neuen Feuermuster ergeben. So würde sich im Plenum bis auf die Drehrichtung der Saugwelle, das gleiche akustische Verhalten für das Feuermuster $n_s = 2 \rightarrow M_f = \{1, 4, 2, 5, 3\}$, wie im Fall $n_s = 1 \rightarrow M_f = \{1, 3, 5, 2, 4\}$ einstellen, da das letztgenannte Muster lediglich rückwärts angewendet werden würde.

Unter Verwendung von (5.1) lässt sich für die beiden durch $n_s \in \{0, 1\}$ gewählten Feuermuster jeweils die Amplitude der umlaufenden Saugwelle des ausgebildeten Druckfelds für $i_f \rightarrow \infty$, in Abhängigkeit von der Feuerfrequenz f_f , berechnen. Zur Berechnung von (5.1b) und (5.1c) wurden die in Abschnitt 6.1 identifizierten Parameter verwendet. Abb. 5.2a zeigt den so ermittelten Verlauf der normierten Saugwellenamplitude

$$\tilde{a}_E = \frac{a_E}{\max_{\tilde{f}_f^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}} a_E|_{n_s=0}} , \quad (5.3a)$$

$$\tilde{f}_f^{-1} = \frac{2\pi \omega_{01,d}}{f_f} , \quad (5.3b)$$

wobei aus Übersichtsgründen auf der Abszisse die Inverse der auf die akustische Eigenfrequenz normierten Feuerfrequenz $\tilde{f}_f^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ dargestellt ist. Es zeigt sich, dass für $f_f = 2\pi \omega_{01,d}$ und $n_s = 0$ der größte Wert für die Amplitude der rotierenden Saugwelle \tilde{a}_E erzielt werden kann. Allerdings können auch für einige Feuerfrequenzen $f_f \neq 2\pi \omega_{01,d}$, signifikante Amplituden der umlaufenden Saugwelle erreicht werden. Dabei erweitert insbesondere das zusätzlich eingeführte Feuermuster für $n_s = 1$ die Anzahl von Feuerfrequenzen mit verhältnismäßig hohen Saugamplituden. Insgesamt lässt sich erkennen, dass mit sinkender Feuerfrequenz, also steigendem \tilde{f}_f^{-1} , die Amplituden der auftretenden Peaks geringer werden. Dies lässt sich durch den Einfluss der akustischen Dämpfung erklären. Mit geringer werdender Feuerfrequenz verringert sich auch die dem System im zeitlichen Mittel zugeführte Energie. Somit wirken sich dissipative Effekte, wie akustische Dämpfung, bei niedrigen Feuerfrequenzen signifikant auf das Verhalten des Systems aus und es können lediglich geringe Amplituden der rotierenden Saugwelle erzielt werden. Sinnvolle Betriebspunkte, mit einer zur Wiederbefüllung von Verbrennungsrohren geeigneten rotierenden Saugwelle, sollten aus diesem Grund in einem Bereich mit möglichst geringen Werten für \tilde{f}_f^{-1} liegen, z. B. $0 \leq \tilde{f}_f^{-1} < 2.5$.

Zusätzlich wurden vergleichbare Kennfelder für alternative Plenumskonfigurationen berechnet, siehe Abb. 5.2b-h. Die geometrischen Abmaße des Plenums wurden dabei immer identisch zur Konfiguration mit fünf Rohren gewählt und lediglich die Anzahl an verfügbaren Verbrennungsrohren wurde variiert. Für jede Konfiguration können unterschiedlich

⁴Das Symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ kennzeichnet die Abrundungsoperation.

5.1 Zustandsschätzung und Extremwertregelung einzelner Druckmoden

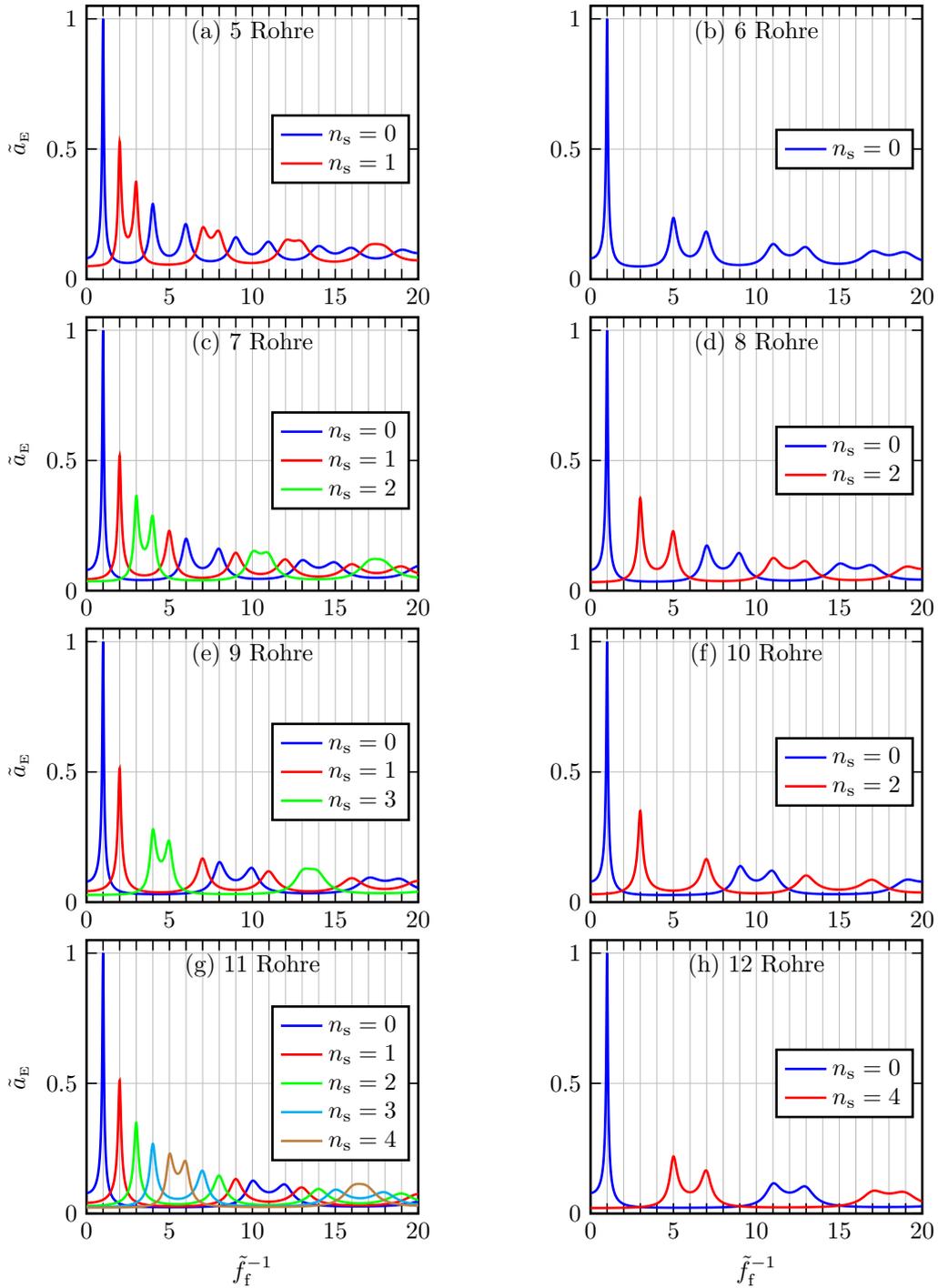


Abbildung 5.2: Kennfelder der normierten Amplitude der rotierenden Saugwelle über der inversen normierten Feuerfrequenz, für unterschiedliche Anzahlen von Detonationsrohren und verschiedene Feuermuster. Dabei wurde ausschließlich der Einfluss der akustischen Mode $\{l = 0, m = 1\}$ betrachtet.

viele Werte für n_s angegeben werden, welche sinnvolle Feuermuster ergeben. So existiert beispielsweise im Fall von sechs Lautsprechern lediglich für $n_s = 0 \rightarrow M_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ein geeignetes Feuermuster. Für alle anderen Werte von n_s würden entweder einige Lautsprecher niemals feuern oder die zugehörigen Feuermuster entsprächen dem Fall für $n_s = 0$.

Es zeigt sich, dass bei einer geraden Anzahl von Lautsprechern (6, 8, 10 oder 12) jeweils nur wenige Werte für n_s gewählt werden können und die Peaks der zugehörigen Amplitudenverläufe verhältnismäßig große Abstände aufweisen. Dies bedeutet, dass für kleine Werte von \tilde{f}_f^{-1} nur wenige Arbeitspunkte mit einer hohen Saugwellenamplitude verfügbar sind. Somit lässt sich der Konstruktionsvorschlag ableiten, für den Aufbau einer Detonationsbrennkammer eine ungerade Anzahl von Verbrennungsrohren, bestenfalls eine Primzahl, als Anzahl von Rohren zu verwenden, um möglichst viele potenzielle Arbeitspunkte mit einer hohen Amplitude der umlaufenden Saugwelle nutzen zu können.

Aus dem in diesem Abschnitt dargestellten Kennfeld ergeben sich für die Konfiguration mit fünf Lautsprechern zwei Peaks im unteren Frequenzbereich für $0 \leq \tilde{f}_f^{-1} < 2.5$. Da für den akustischen Prüfstand eine Parameteridentifikation durchgeführt wurde, siehe Abschnitt 6.1, ist die Eigenfrequenz $\omega_{01,d}$ der anzuregenden Mode relativ genau bekannt. Es könnte somit direkt eines der beiden Feuermuster und die jeweils zugehörige Feuerfrequenz am Prüfstand eingestellt werden, um einen der beiden Arbeitspunkte bei $\tilde{f}_f^{-1} = 1$ bzw. $\tilde{f}_f^{-1} = 2$ mit der zugehörigen hohen Amplituden der rotierenden Saugwelle anzufahren.

Für eine reale Detonationsbrennkammer wird es vermutlich schwieriger, $\omega_{01,d}$ genau zu bestimmen. Weiterhin könnte sich bei einem vorgegebenen Lastwechsel einer solchen Brennkammer und den damit verbundenen Temperaturschwankungen $\omega_{01,d}$ ändern. Da die zu den Arbeitspunkten zugehörigen Peaks sehr spitz zulaufen, muss jedoch die eingestellte Feuerfrequenz sehr genau zur Eigenfrequenz passen, um die gewünschte hohe Amplitude der Saugwelle zu erzielen. Um dieser Herausforderung zu begegnen, wird im nächsten Abschnitt zunächst ein Verfahren zur Schätzung der Amplitude der rotierenden Druckmode anhand von Druckmessungen im Plenum vorgestellt. Anschließend wird basierend auf dieser Schätzung eine EWR aufgebaut, welche in der Lage ist, die Feuerfrequenz f_f ohne vorherige Kenntnis von $\omega_{01,d}$ so einzustellen, dass jeweils einer der beiden Arbeitspunkte angefahren wird.

5.1.3 Schätzung der Modenamplitude

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass sich durch die Wahl geeigneter Feuermuster eine rotierende Druckmode im Plenum einstellt. Dieser rotierenden Mode sind weitere akustische Moden und nicht modellierte transiente Effekte überlagert, welche bisher vernachlässigt wurden. Aus diesem Grund kann aus den Mikrofonmessungen nicht direkt die vorliegende Modenamplitude a_E abgelesen werden. Da diese anschließend im Rahmen einer EWR maximiert werden soll, wird die Modenamplitude zunächst aus den Mikrofonmessungen mittels eines EKF geschätzt. Zusätzlich wird auch die Rotationsgeschwindigkeit $\phi_E \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die Phasenlage $\phi_E \in \mathbb{R}$ dieser Mode geschätzt. Das zugehörige zeitdiskrete, stochastische Modell

ist entsprechend (3.63) gegeben durch

$$\underline{x}(0) \sim \mathcal{N}_x \left(\underline{\mu}_x(0), \mathbf{P}_x(0) \right) , \quad \underline{x}(k) := \left[\dot{\phi}_E(k) \quad a_E(k) \quad \phi_E(k) \right]^T , \quad (5.4a)$$

$$\underline{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta t & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(k-1) + \underline{w}(k-1) , \quad (5.4b)$$

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} a_E(k) \cos \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(1-1)}{10} \right) \\ a_E(k) \cos \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(2-1)}{10} \right) \\ \vdots \\ a_E(k) \cos \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(10-1)}{10} \right) \end{bmatrix} + \underline{\nu}(k) . \quad (5.4c)$$

Im deterministischen Anteil von (5.4b) wird eine zeitlich konstante Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\phi}_E \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und Modenamplitude $a_E \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ angenommen. Alle zeitlichen Änderungen dieser beiden Größen werden ausschließlich durch das Systemrauschen $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ abgebildet. In der Messgleichung (5.4c) wird der Ausgang $\underline{y} \in \mathbb{R}^{n_m}$ berechnet, indem die geschätzte Mode an den Messpositionen im Plenum ausgewertet und zusätzlich ein Messrauschen $\underline{\nu} \in \mathbb{R}^{n_m}$ überlagert wird. Für die Verwendung dieses stochastischen Modells entsprechend Algorithmus 3.1 in einem EKF zur Schätzung der Zustandsgrößen, gilt dann

$$\hat{\underline{x}}(k) := \left[\hat{\phi}_E(k) \quad \hat{a}_E(k) \quad \hat{\phi}_E(k) \right]^T , \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta t & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \forall k , \quad (5.5b)$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(1-1)}{10} \right) & -a_E(k) \sin \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(1-1)}{10} \right) \\ 0 & \cos \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(2-1)}{10} \right) & -a_E(k) \sin \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(2-1)}{10} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cos \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(10-1)}{10} \right) & -a_E(k) \sin \left(\phi_E(k) + \frac{2\pi(10-1)}{10} \right) \end{bmatrix} . \quad (5.5c)$$

$$(5.5d)$$

5.1.4 Aufbau der Extremwertregelung und experimentelle Ergebnisse

Die durch das EKF aus den Druckmessungen p'_1, \dots, p'_{10} geschätzte Amplitude $\hat{a}_E \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}_{a_E}, \hat{\mathbf{P}}_{a_E})$ der rotierenden Druckmode wird in diesem Abschnitt als zu maximierender Parameter im Rahmen einer EWR betrachtet. Als Stellgröße verwendet die EWR die Feuerfrequenz f_f . Die Signale des EWR-Bockschaltbilds aus Abb. 3.9 übersetzen sich für den hier vorliegenden Fall somit zu

$$u_E := f_f , \quad (5.6a)$$

$$J_E := \hat{\mu}_{a_E} , \quad (5.6b)$$

$$\underline{y}_E := \left[p'_1 \quad \dots \quad p'_{10} \right] . \quad (5.6c)$$

Der Block „Bestimmung der Güte“ beinhaltet somit das im vorherigen Abschnitt beschriebene EKF zur Amplitudenschätzung.

Sowohl die Einstellparameter des EKF zur Amplitudenschätzung als auch die Einstellparameter der EWR inklusive der Parameter des zur Gradientenschätzung verwendeten EKF wurden direkt am Prüfstand manuell eingestellt, mit dem Ziel, eine möglichst hohe Konvergenzgeschwindigkeit der EWR zu erzielen.⁵

Experimentelle Ergebnisse

Mit dem akustischen Prüfstand wurde durch Einsatz der EWR jeweils eines der beiden lokalen Maxima aus Abb. 5.2a im Bereich $0 \leq \tilde{f}_f^{-1} < 2.5$ angefahren.⁶ Um dabei die Situation nicht exakt bekannter akustischer Eigenfrequenzen abzubilden, wurde der Startwert der durch die EWR einzustellenden Feuerfrequenz f_f so gewählt, dass diese zu Beginn $\pm 10\%$ von der optimalen Feuerfrequenz des jeweiligen lokalen Maximums entfernt liegt. Es wurden somit insgesamt vier Experimente durchgeführt, wobei das Anfahren jedes der beiden Maxima jeweils ausgehend von einer zu hohen und einer zu niedrigen Feuerfrequenz erfolgte. Zur übersichtlichen Darstellung der Ergebnisse wird der geschätzte Mittelwert der Amplitude der Saugwelle und der mit dem ersten Mikrofon gemessene Druck jeweils normiert dargestellt⁷

$$\tilde{\mu}_{a_E} = \frac{\hat{\mu}_{a_E}}{\max_{\tilde{f}_f^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}} a_E} , \quad (5.7a)$$

$$\tilde{p}'_1 = \frac{p'_1}{\max_{\tilde{f}_f^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}} a_E} . \quad (5.7b)$$

Abbildung 5.3 zeigt die experimentellen Ergebnisse für das Anfahren des lokalen Maximums bei $\tilde{f}_f^{-1} = 1$. In Abb. 5.3a ist zu erkennen, dass für beide untersuchten Startpunkte die Feuerfrequenz durch den EWR nach ca. 45 Sekunden auf $f_f \approx 153$ Hz eingestellt wird. Dies entspricht der in Abschnitt 6.1 identifizierten Eigenfrequenz der Mode $\{m = 1, l = 0\}$, siehe Tab. 6.3. Das lokale Maximum der Saugwellenamplitude wird somit zuverlässig angefahren. Weiterhin ist über den kompletten Zeitverlauf der beiden Kurven, die vom Extremwertregler zur Gradientenschätzung benötigte Perturbation durch den Term $\beta_E \sin(\omega_E t)$ zu erkennen, vergleiche Abb. 3.9. Diese Perturbation bleibt auch erhalten, nachdem das lokale Maximum erreicht wurde, da der Regler weiterhin aktiv ist. Würde sich die Eigenfrequenz während des Betriebs ändern, wäre der Regler somit in der Lage, dieser Änderung zu folgen und den Prozess erneut in das lokale Maximum zu fahren.

Das Diagramm in Abb. 5.3b zeigt den zugehörigen Zeitverlauf der geschätzten Amplitude der rotierenden Saugwelle. Es ist zu erkennen, dass sich zu Beginn des Regelprozesses die erzielte Saugwellenamplitude deutlich langsamer durch den Einfluss des Reglers ändert, als kurz vor Erreichen des lokalen Maximums. Das Kennfeld weist innerhalb des betrachteten Bereichs sehr unterschiedliche Gradienten auf. Weit entfernt von einem lokalen Maximum liegen deutlich geringere Gradienten vor, als in direkter Nähe zum lokalen Maximum, vergleiche Abb. 5.2. Da die Optimierungsschrittweite linear mit der Amplitude des durch die EWR geschätzten Gradienten skaliert, ergeben sich die beschriebenen Geschwindigkeitsunterschiede.

⁵Das EKF zur Amplitudenschätzung muss dabei eine deutlich höhere Konvergenzgeschwindigkeit aufweisen, als das zur Gradientenschätzung verwendete EKF.

⁶Die Möglichkeit des Anfahrens verschiedener Maxima wird in dieser Arbeit lediglich zu Demonstrationzwecken präsentiert. Für den Betrieb einer realen Anlage erscheint es sinnvoll, den physikalisch kleinstmöglichen Wert für \tilde{f}_f^{-1} als Startwert einzustellen. Somit würde stets das größtmögliche Maxima durch den EWR angefahren werden.

⁷Der Ausdruck $\max_{\tilde{f}_f^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}} a_E$ entspricht dabei dem in (5.3a) zur Normierung verwendeten Term.

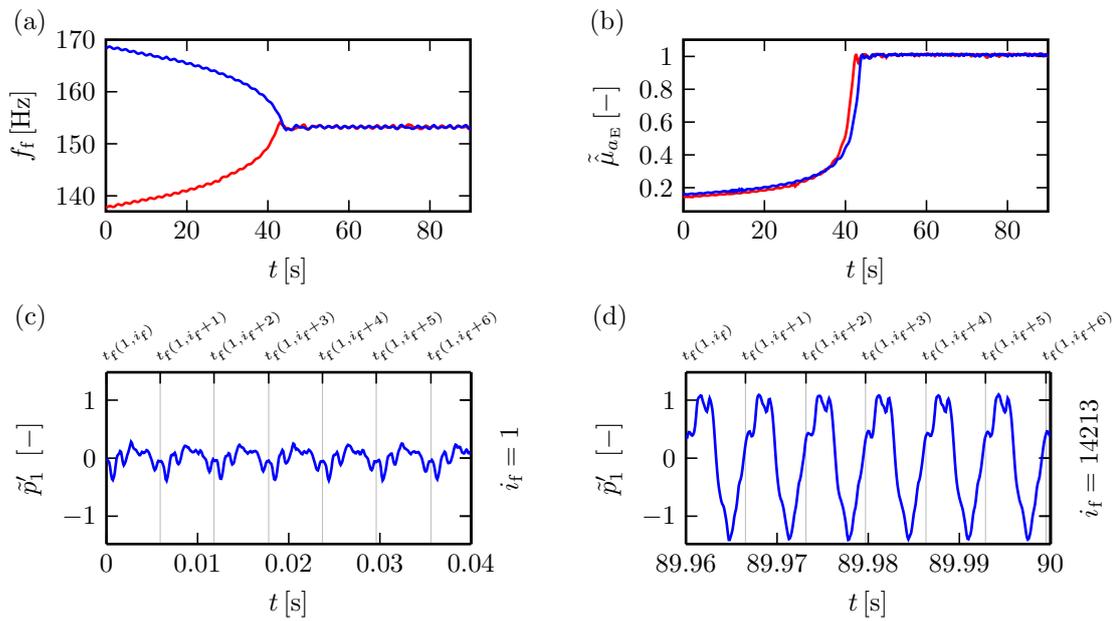


Abbildung 5.3: Anfahren des lokalen Maximums in Abb. 5.2a bei $\tilde{f}_f^{-1} = 1$ durch Anwendung einer EWR und des Feuermusters $n_s = 0 \rightarrow M_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Die blaue bzw. rote Kurve beschreibt in allen Diagrammen jeweils das Regelverhalten für das Anfahren des lokalen Maximums ausgehend von einer zu hohen bzw. zu niedrigen Feuerfrequenz. Dabei beschreibt a) die vom Extremwertregler eingestellte Feuerfrequenz, b) die geschätzte Amplitude der Saugwelle im Plenum, c) und d) den Druckverlauf am ersten Mikrofon.

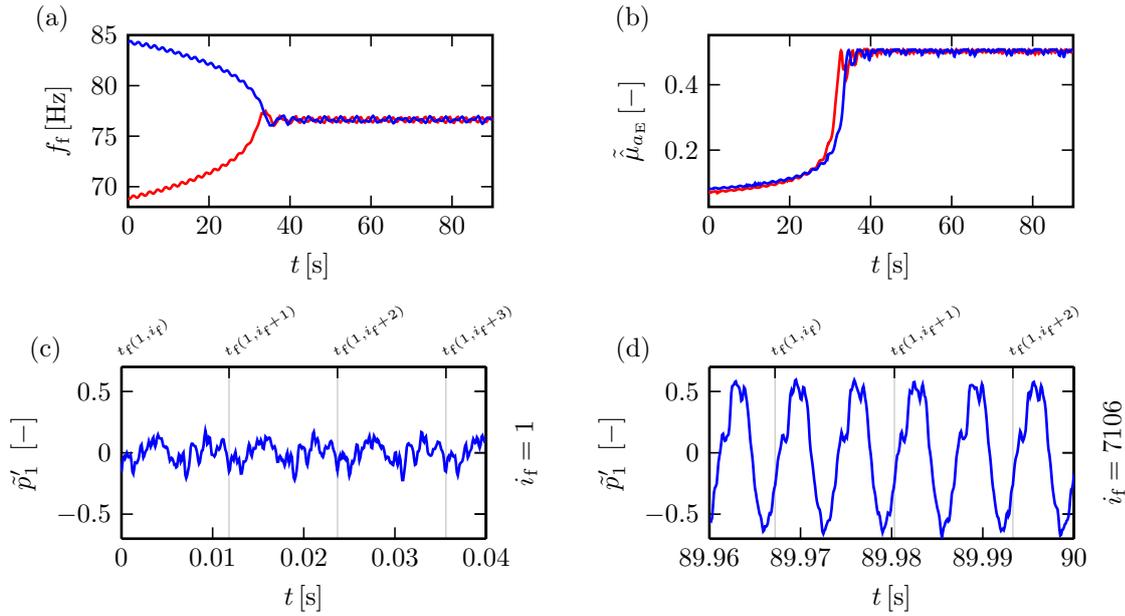


Abbildung 5.4: Anfahren des lokalen Maximums in Abb. 5.2a bei $\tilde{f}_f^{-1} = 2$ durch Anwendung einer EWR und des Feuermusters $n_s = 1 \rightarrow M_f = \{1, 3, 5, 2, 4\}$. Die blaue bzw. rote Kurve beschreibt in allen Diagrammen jeweils das Regelverhalten für das Anfahren des lokalen Maximums ausgehend von einer hohen bzw. niedrigen Feuerfrequenz. Dabei beschreibt a) die vom Extremwertregler eingestellte Feuerfrequenz, b) die geschätzte Amplitude der Saugwelle im Plenum, c) und d) den Druckverlauf am ersten Mikrofon.

Weiterhin sind in Abb. 5.3c,d die Zeitverläufe der normierten Drücke am ersten Mikrofon zu Beginn und gegen Ende des Experiments, ausgehend vom hochfrequenten Startwert der Feuerfrequenz (blau), dargestellt. Zusätzlich sind die Feuerzeitpunkte des ersten Lautsprechers markiert, welcher an derselben azimuthalen Position angeordnet ist wie das erste Mikrofon. Neben der bereits beschriebenen signifikanten Vergrößerung der Amplitude von Diagramm c) nach d) ist auch deutlich zu erkennen, dass im Diagramm c) viele unterschiedliche Frequenzen überlagert sind, während in d) die akustische Eigenfrequenz der angeregten Mode dominiert. Die Spitze der Saugamplitude passiert den Lautsprecher pro Feuerzyklus genau einmal.

Das lokale Maximum bei $\tilde{f}_f^{-1} = 2$ kann ebenso durch die EWR angefahren werden. Die dabei erzielten Ergebnisse sind in Abb. 5.4 äquivalent zu Abb. 5.3 verdeutlicht. In diesem Fall wird das lokale Maximum sowohl von einer hohen als auch einer niedrigen Feuerfrequenz in weniger als 40 s erreicht. Die dabei erzielte Amplitude der umlaufenden Saugwelle beträgt etwa die Hälfte der Amplitude im zuvor diskutierten, lokalen Maximum bei $\tilde{f}_f^{-1} = 1$. Abbildung 5.4d verdeutlicht, dass im lokalen Maximum die umlaufende Saugwelle jedes Rohr zweimal während eines Feuerzyklus passiert.

Diskussion zur Anwendbarkeit in einer realen Detonationsbrennkammer

Ob die zuvor besprochenen Methoden in einer realen Detonationsbrennkammer zur Unterstützung des Befüllvorgangs herangezogen werden können, hängt im Wesentlichen von den dafür notwendigen Amplituden der Saugwelle ab. Da mit dem Feuermuster für $n_s = 0$ eine

deutlich höhere Amplitude erzielt werden kann als für $n_s = 1$, scheint das erste Feuermuster zunächst vielversprechender, um die Druckdifferenz zwischen Verdichter und Detonationsbrennkammer zu überbrücken. Allerdings ergibt sich in dieser Konfiguration eine doppelt so hohe Feuerfrequenz der Rohre. Sollte somit die Saugwelle für $n_s = 1$ auch genügen, um die Druckdifferenz zu überbrücken, ergeben sich deutlich geringere Anforderungen an die Feuerfrequenzen der Detonationsrohre. Da die rotierende Saugwelle in diesem Fall jedes Rohr zweimal in einem Feuerzyklus passiert, könnte der Befüllvorgang zusätzlich über einen längeren Zeitraum unterstützt werden.

Ein Argument, welches für eine Anwendbarkeit dieser Methode in einer realen Detonationsbrennkammer spricht, ist, dass in dem zur Amplitudenschätzung im EKF verwendeten Modell lediglich angenommen wird, dass eine rotierende Druckmode in Form einer Kosinusmode vorliegt. Es wird also nicht die Gültigkeit eines vollständig linearen akustischen Modells, wie z.B. in (3.53), vorausgesetzt.

5.2 Binäre Optimalsteuerung

Im vorherigen Kapitel wurde eine EWR aufgebaut, um die Amplitude einer akustischen Eigenmode des Versuchsstands zu maximieren. In diesem Abschnitt wird ein Optimierungsansatz vorgestellt, der es ermöglicht, den Einfluss aller Eigenmoden des Systems an der Systemantwort zu berücksichtigen. Dafür wird ein Gütekriterium formuliert, durch welches Anforderungen an die Zeitverläufe des Drucks innerhalb des Plenums abgebildet werden. Für die Optimierung des Gütekriteriums werden Methoden der ganzzahligen Optimierung angewendet. Weiterhin wird für die Auswertung des Gütekriteriums ein Modell des Ringspalts benötigt. Dieses Modell unterscheidet sich von dem in Abschnitt 3.1.3 hergeleiteten Modell insofern, dass dieses ausschließlich basierend auf Messdaten generiert wird und keine vorhergehende physikalische Modellbildung notwendig ist. Im Folgenden wird zunächst die Erstellung des Modells anhand von Messdaten erläutert. Anschließend werden basierend auf diesem Modell unterschiedliche Gütekriterien und die zugehörigen Optimierungsaufgaben formuliert. Die Lösung dieser Optimierungsaufgaben liefert optimale Steuerfolgen, welche anschließend am Versuchsstand angewendet werden. Abschließend werden die so erhaltenen experimentellen Ergebnisse diskutiert.

5.2.1 Modell des Versuchsstands

Die Modellbeschreibung des akustischen Versuchsstands erfolgt entsprechend der in Abschnitt 3.2 eingeführten Darstellung. Es wird somit vorausgesetzt, dass eine periodische Steuerfolge $\underline{u}(k) = \underline{u}(k + i_p), \forall k$ und $\underline{u} \in \{0, 1\}^{n_u}$ vorliegt, wobei eine Periode $i_p \in \mathbb{N}$ Zeitschritte umfasst. Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird beschrieben, wie aus dem binären Steuersignal $\underline{u}(k)$ eine Ansteuerung für die Lautsprecher $\underline{u}_{LS}(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ berechnet wird. Ziel ist es, dass immer dann ein Detonationsereignis von einem Lautsprecher simuliert wird, wenn das zugehörige binäre Element in $\underline{u}(k)$ den Wert 1 aufweist. Innerhalb einer Periode soll jeder Lautsprecher genau ein Detonationsereignis wiedergeben. Aus diesem Grund wird hier gefordert, dass $\sum_{k=0}^{i_p-1} \underline{u}(k) = \underline{1}^{n_u}$.

Die Steuerfolge einer Periode lässt sich in dem Supervektor

$$\underline{U} = \left[\underline{u}^T(0) \quad \dots \quad \underline{u}^T(i_p - 1) \right]^T, \quad (5.8)$$

5 Regelung und Steuerung von akustischen Moden am Ringspaltplenum

zusammenfassen, wobei $\underline{U} \in \{0, 1\}^{n_u i_p}$. Da die einzelnen Elemente der Steuertrajektorie jeweils ausschließlich den Wert 0 oder 1 annehmen können, muss ein System definiert werden, welches eine solche Steuerfolge in ein Steuersignal für die Lautsprecher transformiert. Durch Anwendung des transformierten Signals werden somit die gewünschten Detonationsvorgänge simuliert. Für die Definition dieser Transformationsvorschrift wird das zeitdiskrete Detonationssignal $u_{\text{det}}(k) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq k < i_p$ entsprechend Abb. 4.1 verwendet. Der zugehörige Supervektor $\underline{U}_{\text{det}} \in \mathbb{R}^{i_p}$ wird definiert als

$$\underline{U}_{\text{det}} = \left[u_{\text{det}}(0) \quad \dots \quad u_{\text{det}}(i_p - 1) \right]^T . \quad (5.9)$$

Damit lässt sich die Signaltransformation angeben

$$\underline{U}_{\text{LS}} = \left(\underbrace{\left[\mathbf{S}^{i_p, 0} \underline{U}_{\text{det}} \quad \dots \quad \mathbf{S}^{i_p, i_p - 1} \underline{U}_{\text{det}} \right]}_{\in \mathbb{R}^{i_p \times i_p}} \otimes \mathbf{I}^{n_u} \right) \underline{U} . \quad (5.10)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{S} die in (3.61) definierte zyklische Permutationsmatrix und \otimes das Kronecker-Produkt. Dem Supervektor $\underline{U}_{\text{LS}} \in \mathbb{R}^{n_u i_p}$ kann der Zeitverlauf der periodischen Ansteuerung für die Lautsprecher $\underline{u}_{\text{LS}}(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ zugeordnet werden

$$\left[\underline{u}_{\text{LS}}^T(0) \quad \dots \quad \underline{u}_{\text{LS}}^T(i_p - 1) \right]^T = \underline{U}_{\text{LS}} , \quad (5.11a)$$

$$\underline{u}_{\text{LS}}(k) = \underline{u}_{\text{LS}}(k + i_p) , \quad \forall k . \quad (5.11b)$$

Der Zusammenhang zwischen (5.8), (5.10) und (5.11) kann somit wie folgt interpretiert werden: Immer wenn ein Element in $\underline{u}(k)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt k den Wert 1 annimmt, wird der zugehörige Lautsprecher mit dem Signal aus Abb. 4.1 angesteuert. Jedes Element in \underline{U} , welches den Wert 1 enthält, generiert somit am zugehörigen Lautsprecher und Zeitpunkt das in in Abb. 4.1 dargestellte Detonationssignal.

Entsprechend (3.62), (3.54b) und (3.55b) wird weiterhin folgender Zusammenhang zwischen dem Supervektor des Eingangssignals \underline{U} und des Ausgangssignals \underline{Y} angenommen

$$\underline{Y} = \underbrace{\left[\mathbf{S}^{n_y i_p, 0} \left[\underline{Y}_{\delta_{\text{dp}}, 1} \quad \dots \quad \underline{Y}_{\delta_{\text{dp}}, n_u} \right] \quad \dots \quad \mathbf{S}^{n_y i_p, n_y(i_p - 1)} \left[\underline{Y}_{\delta_{\text{dp}}, 1} \quad \dots \quad \underline{Y}_{\delta_{\text{dp}}, n_u} \right] \right]}_{=\Phi} \underline{U} . \quad (5.12)$$

mit

$$\left[\underline{y}^T(0) \quad \dots \quad \underline{y}^T(i_p - 1) \right]^T = \underline{Y} , \quad (5.13)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{y}(k + i_p) , \quad \forall k . \quad (5.14)$$

Um dieses Modell für die Berechnung einer Optimalsteuerung zu verwenden, müssen zunächst die einzelnen Spalten in $\Phi \in \mathbb{R}^{n_y i_p \times n_u i_p}$ experimentell ermittelt werden, welche jeweils die zugehörigen Impulsantworten des Systems beschreiben. Entsprechend (3.60a) gilt

$$\underline{Y}_{\delta_{\text{dp}}, j} = \Phi(\underline{U}_{\delta_{\text{dp}}, j}) , \quad (5.15)$$

wobei $\Phi : \{0, 1\}^{n_u i_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y i_p}$ das Übertragungsverhalten des Ringspalts inklusive der Signaltransformation beschreibt, vergleiche Abb. 5.5. Um nach dieser Vorschrift beispielsweise die Antwort auf eine Impulsanregung am ersten Lautsprecher $\underline{Y}_{\delta_{\text{dp}}, 1}$ zu bestimmen, wird

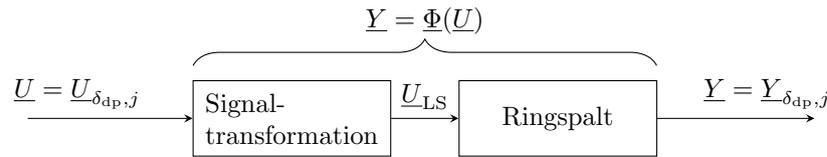


Abbildung 5.5: Das Blockschaltbild veranschaulicht die Vorgehensweise um die Impulsantworten $\underline{Y}_{\delta_{dp},j}$ des Ringspalts zu bestimmen.

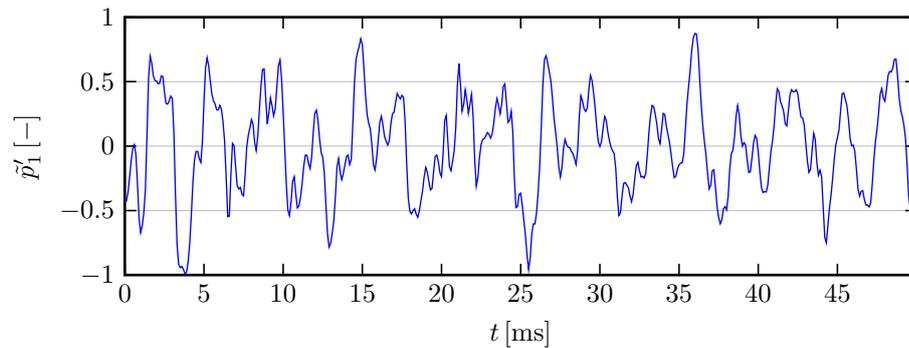


Abbildung 5.6: Periodische Systemantwort gemessen am ersten Mikrofon, wenn der erste Lautsprecher mit einer Frequenz von 20 Hz feuert

zunächst entsprechend (3.57)-(3.59) der Stellgrößenvektor

$$\underline{U} = \underline{U}_{\delta_{dp},1} = \left[\underbrace{1}_{k=0\text{-ter Zeitschritt}} \quad \underbrace{(\underline{0}^{n_u-1})^T}_{i_p-1 \text{ Zeitschritte}} \quad \underbrace{(\underline{1}^{i_p-1})^T \otimes (\underline{0}^{n_u})^T}_{i_p-1 \text{ Zeitschritte}} \right]^T, \quad (5.16)$$

generiert und anschließend am Versuchsstand angewendet. In diesem Fall würde somit der erste Lautsprecher alle i_p Zeitschritte das Detonationssignal u_{det} abspielen. Nach einigen Feuerperioden wird sich im Ringspalt ebenfalls eine periodische Systemantwort⁸ einstellen, welche genau wie das Steuersignal eine Periodendauer von i_p Zeitschritten aufweist. In diesem Betriebszustand entspricht der über eine Periode von den Mikrofonen gemessene Druckverlauf gerade dem zu ermittelnden Vektor $\underline{Y}_{\delta_{dp},1}$. Somit können die gesuchten Größen $\{\underline{Y}_{\delta_{dp},1}, \dots, \underline{Y}_{\delta_{dp},n_u}\}$ in n_u Experimenten bestimmt werden.

Mit einer Feuerfrequenz von $f_f = 20$ Hz und einer Abtastzeit von $\Delta t = 0.1$ ms, beinhaltet eine Periode $i_p = 500$ Zeitschritte. Abbildung 5.6 zeigt beispielhaft eine Periode des mit dem ersten Mikrofon gemessenen, normierten Druckverlaufs des periodischen Systemausgangs, wenn nur der erste Lautsprecher feuert. Die Normierung des akustischen Drucks erfolgt für den restlichen Teil dieser Arbeit mit⁹

$$\tilde{p}'_j = \frac{p'_j}{\max_{k \in \{0, \dots, 499\}} |p'_1(k\Delta t)|}, \quad \forall j \in \{1 \dots 10\}. \quad (5.17)$$

Alle im weiteren Verlauf dieser Arbeit dargestellten, normierten Drücke beziehen sich somit immer auf den maximalen Druck der periodischen Systemantwort aus Abb. 5.6.

⁸Damit ist gemeint, dass $\underline{y}(k) \approx \underline{y}(k + i_p)$, $\forall (k \geq i_p \epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{N}$, wobei ϵ die Anzahl der Perioden beschreibt, die notwendig sind, bis eine periodische Systemantwort vorliegt.

⁹Die in (5.7b) eingeführte Normierung des Drucks gilt nur in dem zugehörigen Abschnitt 5.1.4.

5.2.2 Optimierungsproblem als quadratisches Programm

Um sinnvolle Feuersequenzen der Lautsprecher zu bestimmen, müssen zunächst Anforderungen an die Zeitverläufe des Drucks im Ringspalt, welche durch die Variable \underline{Y} beschrieben sind, formuliert werden. Je nach gewünschtem Betriebsmodus der Anlage ergeben sich unterschiedliche Anforderungen.

- Im normalen Betriebsmodus sollen die Druckschwankungen im Plenum minimiert werden, um die Belastung für eine im realen Prozess nachgeschaltete Gasturbine gering zu halten.
- Im Wiederbefüllungsmodus wird angenommen, dass ein Detonationsrohr ausgefallen und ohne weitere Maßnahmen nicht mehr mit Frischluft befüllt werden kann. Es muss somit durch die verbleibenden funktionierenden Rohre eine Saugwelle vor dem ausgefallenen Detonationsrohr generiert werden, um somit eine Wiederbefüllung des ausgefallenen Rohres zu ermöglichen.

Um die vorhandenen Druckschwankungen zu quantifizieren, kann beispielsweise die Summe der Quadrate, der von allen Mikrofonen gemessenen Druckschwankungen über eine Periode (i_p Zeitschritte) herangezogen werden. Alternativ kann auch die ∞ -Norm betrachtet werden, wodurch dann ausschließlich die innerhalb einer Periode auftretende maximale Druckschwankung berücksichtigt wird. Um die Saugwelle zu bewerten, bietet sich die Verwendung der max-Funktion an. Wird diese auf einen Vektor angewendet, welcher den Druck vor dem ausgefallenen Rohr und innerhalb eines definierten Zeitfensters beschreibt, so quantifiziert das Ergebnis den größten Wert dieser Saugwelle. Da eine Saugwelle gleichbedeutend mit einem negativen Druck ist, sind somit alle Druckwerte innerhalb des betrachteten Zeitfensters gleich oder kleiner dem Ergebnis der max-Funktion. In allen beschriebenen Fällen ist es wünschenswert, möglichst kleine Werte der quantifizierten Größen zu erzielen. Es bietet sich somit an, eine geeignete Feuersequenz \underline{U} durch eine Optimierung zu berechnen, wobei über die zuvor genannten Merkmale minimiert wird

$$\underline{U}^* = \underset{\underline{U}}{\operatorname{argmin}} \left(\underline{Y}^T \mathbf{Q}_2 \underline{Y} + \|\mathbf{Q}_\infty \underline{Y}\|_\infty + \max(\mathbf{Q}_{\max} \underline{Y}) \right), \quad (5.18a)$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\left((\underline{\mathbf{1}}^{i_p})^T \otimes \mathbf{I}^{n_u} \right) \underline{U} = \underline{\mathbf{1}}^{n_u}, \quad (5.18b)$$

$$\underline{Y} = \Phi \underline{U}, \quad (5.18c)$$

$$\underline{U} \in \{0, 1\}^{n_u i_p}. \quad (5.18d)$$

Die Nebenbedingung (5.18c) verlangt die Einhaltung der Modellgleichung (5.12). Weiterhin wird durch die Nebenbedingung (5.18b) erzwungen, dass innerhalb der i_p Zeitschritte, über welche optimiert wird, von jedem Lautsprecher genau ein Detonationsereignis ausgelöst wird.¹⁰ Je nach Anforderung werden noch weitere Nebenbedingungen ergänzt, was im Folgenden an der jeweiligen Stelle erläutert wird. Durch die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{n_y i_p \times n_y i_p}$, $\mathbf{Q}_\infty \in \mathbb{R}^{n_{Q_\infty} \times n_y i_p}$ und $\mathbf{Q}_{\max} \in \mathbb{R}^{n_{Q_{\max}} \times n_y i_p}$, kann der Einfluss der einzelnen Merkmale auf das Optimierungsproblem eingestellt werden. Dabei wird über $n_{Q_\infty} \in \mathbb{N}$ und $n_{Q_{\max}} \in \mathbb{N}$ die Menge der betrachteten Elemente aus \underline{Y} eingestellt.¹¹

¹⁰Die Nebenbedingung (5.18b) lässt sich auch anschreiben als $\sum_{k=0}^{i_p-1} \underline{u}(k) = \underline{\mathbf{1}}^{n_u}$

¹¹Dies ist insbesondere im Fall der max-Funktion von Bedeutung. Häufig werden in Gütefunktionalen Normen zur Quantifizierung verwendet. Für jede Norm gilt, dass diese immer größer oder gleich null ist. Falls

Um dieses System in die Form aus (3.126) zu überführen, werden folgende Zusammenhänge definiert

$$\underline{\theta}_Z = \underline{U} , \quad (5.19a)$$

$$\underline{\Omega}_2 = \underline{\Phi}^T \underline{Q}_2 \underline{\Phi} , \quad (5.19b)$$

$$\underline{\Omega}_\infty = \underline{Q}_\infty \underline{\Phi} , \quad (5.19c)$$

$$\underline{\Omega}_{\max} = \underline{Q}_{\max} \underline{\Phi} , \quad (5.19d)$$

$$\check{\underline{D}} = \begin{bmatrix} (\underline{1}^{i_p})^T \otimes \underline{I}^{n_u} \\ -(\underline{1}^{i_p})^T \otimes \underline{I}^{n_u} \end{bmatrix} , \quad (5.19e)$$

$$\check{\underline{\gamma}} = \begin{bmatrix} (\underline{1}^{n_u})^T & -(\underline{1}^{n_u})^T \end{bmatrix}^T . \quad (5.19f)$$

5.2.3 Experimentelle Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden unterschiedliche Gütefunktionale formuliert, um unter Verwendung des in Abschnitt 5.2.1 ermittelten Modells optimale Steuerfolgen für die Ansteuerung der Lautsprecher zu ermitteln. Ziel ist es dabei, entweder die akustischen Druckschwankungen im Plenum zu minimieren und/oder eine Saugwelle zur Wiederbefüllung eines ausgefallenen Rohres zu generieren. Das dafür formulierte Optimierungsproblem (3.126) lässt sich entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.7 in ein *mixed-integer* QP überführen. Zur Lösung dieser Art von Optimierungsaufgabe wurden in der Vergangenheit eine Vielzahl von möglichen Lösungsverfahren entwickelt, siehe [Wolsey, 1998]. In dieser Arbeit wurde die Optimierungsumgebung Gurobi [Gurobi Optimization, LLC, 2018] verwendet, welche diese Lösungsmethoden und weitere Heuristiken in einer effizienten Implementierung umsetzt. Eine wichtige Eigenschaft dieser Lösungsmethoden ist, dass nach endlich vielen Optimierungsschritten das globale Optimum garantiert ermittelt werden kann. Im schlimmsten Fall ist dafür eine Überprüfung aller möglichen Kombinationen des kombinatorischen Problems erforderlich. In der Regel werden für das Auffinden der global optimalen Lösung durch Anwenden sinnvoller Lösungsmethoden deutlich weniger Optimierungsschritte benötigt. Weiterhin kann in jedem Optimierungsschritt durch Berechnung der optimalen Lösung des relaxierten¹² Optimierungsproblems eine obere Grenze für den Abstand des Gütefunktionals der im aktuellen Iterationsschritt besten ganzzahligen Lösung zum Gütefunktional des ganzzahligen globalen Optimum angegeben werden. Dies ermöglicht es zu ermitteln, ob die aktuelle Lösung bereits die global optimale Lösung darstellt und somit die Optimierungsaufgabe gelöst wurde, ohne dafür alle kombinatorischen Möglichkeiten berechnen zu müssen. Für alle in dieser Arbeit präsentierten Optimalsteuerungsergebnisse wurde jeweils die global optimale Lösung berechnet. Es existiert somit bezüglich des verwendeten Modells keine Steuerfolge, welche die jeweilige Optimierungsaufgabe besser lösen könnte.

Um eine Diskussion der so erzielten Druckminimierung zu ermöglichen, wird weiterhin der Fall eines im Uhrzeigersinn umlaufenden Feuermusters mit äquidistantem Zeitabstand zwischen zwei Detonationsereignissen benachbarter Lautsprecher untersucht. Dieser Fall wird im Folgenden mit dem Stichwort „äquidistant“ adressiert. Da die Feuerfrequenz der Rohre

ein bestimmter Einfluss einer Optimierungsvariable innerhalb der Optimierung nicht berücksichtigt werden soll, kann in diesem Fall der zugehörige Eintrag in der Gewichtungsmatrix als null angenommen werden. Die max-Funktion beschreibt jedoch keine Norm, da diese auch negative Werte annehmen kann. Aus diesem Grund müssen die nicht zu berücksichtigenden Einflüsse durch Streichen der betroffenen Zeile der Gewichtungsmatrix ausgeblendet werden.

¹²Das relaxierte Optimierungsproblem ergibt sich aus dem ganzzahligen Optimierungsproblem durch entfernen der Ganzzahligkeitsnebenbedingung. Es entsteht somit eine kontinuierliche quadratische Optimierungsaufgabe, welche sehr effizient gelöst werden kann.

auf $f_f = 20$ Hz festgelegt wurde, wird bereits das äquidistante Feuermuster sehr geringe Druckschwankungen im Plenum erzeugen, vergleiche Abb. 5.2a.¹³ Somit eignet sich dieser Fall gut als Bezugsgröße.

Minimierung der Druckschwankungen durch den quadratischen Anteil

In diesem Fall sollen alle fünf Lautsprecher des Versuchsstands (d.h. $n_u = 5$) verwendet werden, um Druckschwankungen im Plenum zu minimieren. Zunächst wird der quadratische Term im Gütefunktional verwendet, um eine Minimierung der Druckschwankungen zu erwirken. Dabei sollen die Drücke zu jedem Zeitpunkt innerhalb einer Periode identisch bewertet werden. Es wird somit folgendes Gewichtungsschema gewählt

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}^{i_p} \otimes \mathbf{I}^{n_y} , \quad (5.20a)$$

$$\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{I}^{i_p} \otimes \mathbf{0}^{n_y \times n_y} . \quad (5.20b)$$

Da, unabhängig vom gewählten Feuermuster \underline{U} , alle Systemein- und Systemausgänge periodisch sind, ist lediglich die Feuerreihenfolge und die zeitlichen Abstände der Detonationsergebnisse zwischen den einzelnen Rohren für eine solche Optimierungsaufgabe relevant. Die absolute Positionierung der Feuersequenz innerhalb einer Periode beeinflusst hingegen das zu minimierende Gütefunktional nicht. Somit existieren mindestens i_p unterschiedliche Feuermuster, welche die gleiche Güte im Optimierungsproblem erzielen. Um diese Redundanz zu vermeiden, wird der Feuerzeitpunkt des ersten Lautsprechers auf den $k = 0$ -ten Zeitschritt der Periode festgelegt, indem (5.18) um eine Nebenbedingung erweitert wird

$$\left[\underbrace{1}_{k=0\text{-ter Zeitschritt}} \quad \underbrace{(\underline{0}^{n_u-1})^T}_{i_p-1 \text{ Zeitschritte}} \quad \underbrace{(\underline{1}^{i_p-1} \otimes \underline{0}^{n_u})^T}_{i_p-1 \text{ Zeitschritte}} \right] \underline{U} = 1 . \quad (5.21)$$

Damit ergibt sich für $\check{\mathbf{D}}$ und $\check{\underline{x}}$

$$\check{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} 1 & (\underline{0}^{n_u-1})^T \\ -1 & (\underline{0}^{n_u-1})^T \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} (\underline{1}^{i_p-1} \otimes \underline{0}^{n_u})^T \\ (\underline{1}^{i_p-1} \otimes \underline{0}^{n_u})^T \end{array} \right] \\ (\underline{1}^{i_p})^T \otimes \mathbf{I}^{n_u} \\ -(\underline{1}^{i_p})^T \otimes \mathbf{I}^{n_u} \end{bmatrix} , \quad (5.22a)$$

$$\check{\underline{x}} = \left[1 \quad -1 \quad (\underline{1}^{n_u})^T \quad -(\underline{1}^{n_u})^T \right]^T . \quad (5.22b)$$

Wird mit dem Gewichtungsschema (5.20) und (5.22) das Optimierungsproblem (5.18) gelöst, ergibt sich die in Abb. 5.7, unter dem Stichwort „2-Norm“ abgebildete Feuersequenz der Lautsprecher. Ein Vergleich der gemessenen Druckschwankungen für diese Optimalsteuerung mit den Druckmessungen, welche im Fall eines äquidistanten Feuermusters erhalten werden, zeigt, dass die Druckschwankungen am ersten Mikrofon durch Anwendung der optimierten Feuersequenz deutlich reduziert werden können. Zusätzlich ist in rot der Zeitverlauf des, von allen Mikrofonen gemessenen, betragsmäßig maximalen Drucks zum jeweiligen Zeitpunkt dargestellt. Ein Vergleich dieser Zeitverläufe des äquidistanten Feuermusters und des bezüglich der 2-Norm optimalen Feuermusters zeigt, dass die Druckschwankungen an allen gemessenen Positionen durch Anwendung der berechneten Optimalsteuerung deutlich verringert werden können. Weiterhin ist in grau der mit dem in der Optimierung verwendeten Modell normierte prädizierte Zeitverlauf der Druckschwankung am ersten Mikrofon $\tilde{p}_1(t)$ ab-

¹³Bei einer Feuerfrequenz von $f_f = 20$ Hz und dem gewählten Feuermuster ergibt sich $\tilde{f}_f^{-1} \approx 7.6$, mit $n_s = 0$.

gebildet. Ein Vergleich zwischen $\tilde{p}_1(t)$ und $\hat{p}_1(t)$ zeigt eine hervorragende Übereinstimmung dieser beiden Größen, was den Schluss zulässt, dass die bezüglich des Modells globale optimale Lösung auch für das hier untersuchte, akustische System sehr dicht am bestmöglichen Ergebnis liegt.¹⁴

Minimierung der Druckschwankungen durch die ∞ -Norm

Alternativ zum quadratischen Term kann auch die ∞ -Norm zur Minimierung der Druckschwankungen herangezogen werden. Diese Vorgehensweise bietet sich an, falls hauptsächlich der betragsmäßig größte Wert der Druckschwankung für die Belastung der Turbine von Bedeutung ist. Auch in diesem Fall werden die Drücke zu jedem Zeitpunkt innerhalb einer Periode identisch bewertet

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{I}^{i_p} \otimes \mathbf{0}^{n_y \times n_y}, \quad (5.23a)$$

$$\mathbf{Q}_{\infty} = \mathbf{I}^{i_p} \otimes \mathbf{I}^{n_y} \quad (5.23b)$$

und die Nebenbedingungen aus (5.22) verwendet. Wird das so erhaltene Optimierungsproblem gelöst, ergibt sich die in Abb. 5.7 unter dem Stichwort „ ∞ -Norm“ dargestellte Feuersequenz. Auch für diese Optimalsteuerung können die Druckschwankungen im Vergleich zum äquidistanten Feuermuster deutlich reduziert werden. Eine Gegenüberstellung der erzielten Druckreduktion für den Fall der 2-Norm und der ∞ -Norm Optimalsteuerung zeigt, dass erwartungsgemäß die maximal auftretenden Druckspitzen für den Fall der ∞ -Norm Optimalsteuerung weiter reduziert werden können. Bemerkenswerterweise unterscheiden sich die berechneten Feuerzeitpunkte der beiden Optimalsteuerungen dabei nur marginal.

Generierung einer Saugwelle vor einem Lautsprecher

Um vor einem Lautsprecher eine Saugwelle zu generieren, muss sowohl die gewünschte Dauer als auch der Startzeitpunkt dieses Ereignisses festgelegt werden. Weiterhin können außerhalb des Zeitfensters, in welchem eine Saugwelle entstehen soll, weitere Anforderungen, wie beispielsweise geringe Druckschwankungen, formuliert werden. Abbildung 5.8 zeigt die hier gewählte Aufteilung des Optimierungszeitfensters in fünf Bereiche :

- Im rot markierten Bereich soll für eine Dauer von $a_3 \in \mathbb{N}$ Zeitschritten eine Saugwelle am j -ten Mikrofon generiert werden, wobei $j \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Mit dieser Mengendefinition gilt, dass das j -te Mikrofon direkt über dem $\frac{1+j}{2}$ -ten Lautsprecher positioniert ist. Somit wird auch gefordert, dass vor diesem Lautsprecher eine Saugwelle entsteht. Um diese Anforderung in (5.18) abzubilden, wird

$$\mathbf{Q}_{\max} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \underline{1}^{a_1} \otimes \underline{0}^{n_y} \\ \underline{1}^{a_2} \otimes \underline{0}^{n_y} \\ \underline{1}^{a_3} \otimes \left[(\underline{0}^{j-1})^T \quad 1 \quad (\underline{0}^{n_y-j})^T \right]^T \\ \underline{1}^{a_4} \otimes \underline{0}^{n_y} \\ \underline{1}^{a_5} \otimes \underline{0}^{n_y} \end{bmatrix} \right) \quad (5.24)$$

gewählt.

¹⁴Auf die Darstellung von $\tilde{p}_1(t)$ wird in den Abb. 5.9 und 5.10 aus Übersichtsgründen verzichtet, es ergibt sich aber auch für die dort beschriebenen Fällen eine zu Abb. 5.7 vergleichbare Übereinstimmung zwischen $\tilde{p}_1(t)$ und $\hat{p}_1(t)$.

5 Regelung und Steuerung von akustischen Moden am Ringspaltplenum

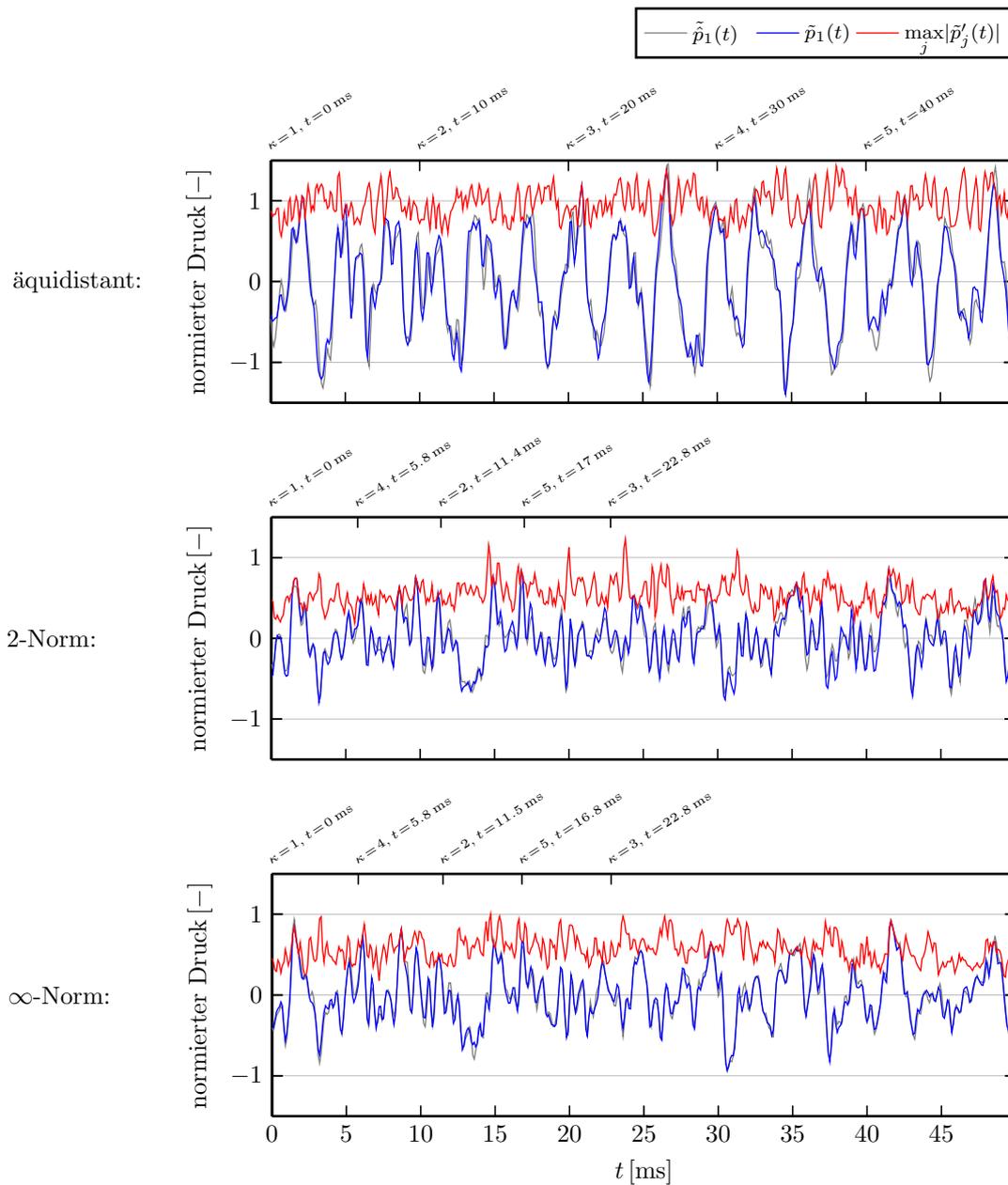


Abbildung 5.7: Eine vollständige Periode des Zeitverlaufs der normierten prädizierten und gemessenen Druckschwankungen am ersten Mikrofon (grau und blau) bei Anwendung unterschiedlicher Feuermuster. Die Zeitpunkte, zu denen Detonationereignisse ausgelöst werden, sind auf den oberen Abszissen angegeben. Die Zuordnung der angegebenen Feuerzeitpunkte zum jeweiligen Lautsprecher ist durch die Angabe der Lautsprecher Nummer κ gegeben. Zusätzlich ist für jeden Zeitpunkt der betragsmäßig maximale gemessene Druck aller Mikrofone angegeben (rot).

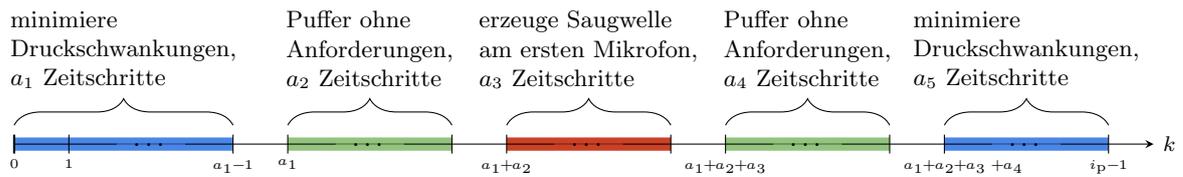


Abbildung 5.8: Das Optimierungszeitfenster enthält i_p Zeitschritte (eine Periode) und wird in drei Kategorien (blau, grün, rot) eingeteilt, in denen jeweils unterschiedliche Anforderungen an die Zeitverläufe des Drucks im Ringspalt gestellt werden.

- In den beiden blau markierten Bereichen sollen die Druckschwankungen im Ringspalt an allen Mikrofonen über $a_1 + a_5$ Zeitschritte minimiert werden, wobei $a_1, a_5 \in \mathbb{N}_0$. Wie bereits in Abb. 5.7 gezeigt, eignet sich zur Minimierung der Druckschwankungen sowohl eine Gewichtung des quadratischen Anteils in (5.18) als auch eine Gewichtung der ∞ -Norm. An dieser Stelle wurde die ∞ -Norm ausgewählt, um die maximale Druckschwankung der Amplitude möglichst stark zu verringern. Somit bietet sich folgende Wahl der zugehörigen Gewichtungsmatrizen an

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}^{i_p} \otimes \mathbf{0}^{n_y \times n_y}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{Q}_\infty = q_\infty \text{diag} \left(\begin{array}{c} \underline{1}^{a_1} \otimes \underline{1}^{n_y} \\ \underline{1}^{a_2} \otimes \underline{0}^{n_y} \\ \underline{1}^{a_3} \otimes \underline{0}^{n_y} \\ \underline{1}^{a_4} \otimes \underline{0}^{n_y} \\ \underline{1}^{a_5} \otimes \underline{1}^{n_y} \end{array} \right). \quad (5.26)$$

Dabei wird $q_\infty \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ verwendet, um die Anforderung nach einer Druckminimierung innerhalb der blau markierten Bereiche gegenüber der Anforderung der Generierung einer Saugwelle im rot markierten Bereich zu gewichten.

- Die grün markierten Bereiche enthalten a_2+a_4 Zeitschritte, mit $a_2, a_4 \in \mathbb{N}_0$ und werden als Puffer zwischen den beiden Anforderungen „Druckschwankungen minimieren“ und „Saugwelle generieren“ verwendet. Dadurch wird es möglich, einen abrupten Wechsel dieser beiden gegensätzlichen Forderungen zu vermeiden. In diesem Bereich werden keine Anforderungen an die Zeitverläufe des Drucks formuliert.

In den beiden vorherigen Optimierungsaufgaben wurde eine reine Minimierung der Druckschwankung gefordert. Um die zugehörigen Optimierungsaufgaben eindeutig zu gestalten, wurde der Zeitpunkt des Detonationsereignisses am ersten Lautsprecher durch die zusätzliche Nebenbedingung (5.21) auf den ersten Zeitschritt fixiert. Dies ist im Falle der Generierung einer Saugwelle weder erforderlich noch sinnvoll, da bereits durch die definierte zeitliche Abfolge der farblich markierten Bereiche in Abb. 5.8 redundante Lösungen vermieden werden. Als Nebenbedingung wird somit (5.19e) und (5.19f) angenommen.

An dieser Stelle werden zwei Fälle untersucht bei denen vor dem ersten Lautsprecher eine Saugwelle generiert werden soll.

- Im ersten Fall stehen dazu alle fünf Lautsprecher zur Verfügung, d.h. $n_u = 5$. Diese Konfiguration könnte beispielsweise notwendig sein, falls in einer wirklichen Maschine ein Lastwechsel gewünscht ist. Eine denkbare Lösung dafür wäre die Verstärkung der Saugwelle vor dem betroffenen Detonationsrohr, um somit eine größere Menge des

5 Regelung und Steuerung von akustischen Moden am Ringspaltplenum

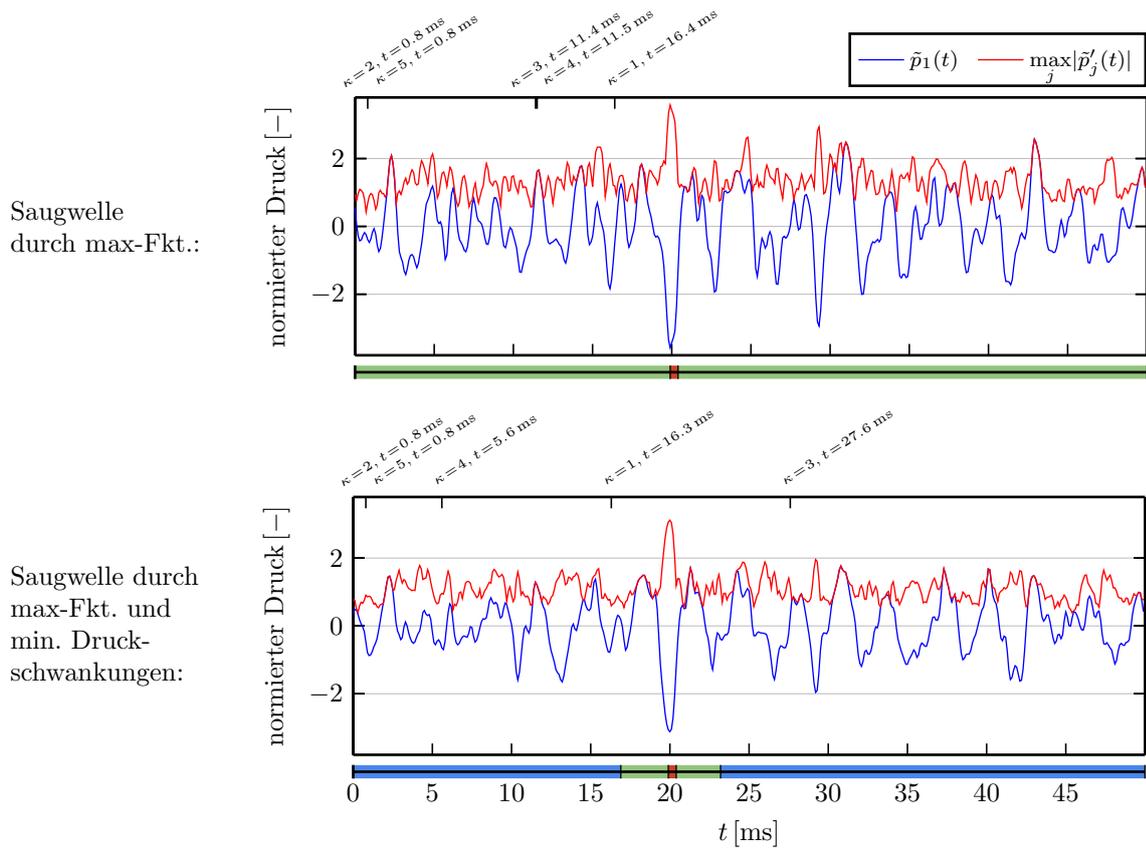


Abbildung 5.9: Generierung einer Saugwelle im rot markierten Zeitbereich. Alle fünf Rohre funktionieren.

Rohrs mit Treibstoff befüllen zu können. Zunächst soll ein Referenzfall generiert werden, in welchem das Augenmerk ausschließlich auf der Generierung einer möglichst großen Saugwelle liegen soll. Die zusätzliche Minimierung der Druckschwankungen soll somit zunächst nicht im Gütefunktional bestraft werden. Dafür wird der folgende Parametersatz gewählt

$$q_{\infty} = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 199, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 226, \quad a_5 = 0. \quad (5.27)$$

Es soll somit in einem Zeitfenster von fünf Zeitschritten eine möglichst starke Saugwelle vor dem ersten Lautsprecher generiert werden.¹⁵ Mit diesem Parametersatz ist das zugehörige Optimierungsproblem vollständig definiert und kann gelöst werden. Abbildung 5.9 zeigt im oberen Teil der Abb. die erhaltene optimale Feuersequenz. Am Zeitverlauf des gemessenen Drucks am ersten Mikrofon ist erkenntlich, dass in dem rot markierten Zeitfenster eine signifikante Saugamplitude generiert wird. Da außerhalb dieses Zeitfensters keine Anforderungen gestellt wurden (grün markierte Bereiche), ergeben sich auch dort starke Schwankungen im Druck.

Um diese Druckschwankungen zu vermeiden, wird eine weitere Optimalsteuerung für

¹⁵Diese Wahl der Parameter ist relativ willkürlich und müsste für einen Einsatz in einer realen Maschine auf die dortigen Anforderungen angepasst werden. Insbesondere könnte die Positionierung der Saugwelle in Abhängigkeit des Feuerzeitpunktes des ersten Rohres von Interesse sein. Dies kann einfach erreicht werden, indem der Feuerzeitpunkt des ersten Rohres festgelegt wird und das Zeitfenster für die Saugwelle entsprechend angepasst wird.

den Parametersatz

$$q_\infty = 0.4, \quad a_1 = 169, \quad a_2 = 30, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 30, \quad a_5 = 266, \quad (5.28)$$

berechnet. Das Ergebnis der am Versuchsstand angewendeten Optimalsteuerung ist im unteren Teil der Abb. 5.9 dargestellt. Auch hier wird eine signifikante Saugwelle im geforderten Zeitfenster generiert, obgleich die maximale Saugamplitude im Vergleich zum vorherigen Fall etwas geringer ausfällt. Allerdings können dafür in den blau markierten Zeitbereichen die Druckschwankungen deutlich reduziert werden.

- Im zweiten Fall wird angenommen, dass das erste simulierte Detonationsrohr ausgefallen ist. Um eine Wiederbefüllung eines solchen Rohres zu ermöglichen, sollen hier die verbleibenden vier Lautsprecher zur Generierung der Saugwelle vor dem ausgefallenen Lautsprecher verwendet werden, d.h. $n_u = 4$.

Zunächst soll eine möglichst starke Saugwelle in einem definierten Zeitfenster vor dem ausgefallenen Lautsprecher generiert werden, ohne dabei die sich ergebenden Druckschwankungen außerhalb dieses Zeitfensters zu beachten. Zu diesem Zweck wird der bereits bekannte Parametersatz (5.27) angesetzt und das erhaltene Optimierungsproblem gelöst. Eine Anwendung der so erhaltenen Optimalsteuerung am Versuchsstand liefert die im oberen Teil von Abb. 5.10 dargestellten Ergebnisse. Die Amplitude der so erzielten Saugwelle im Vergleich zur Saugwelle des oberen Falls aus Abb. 5.9 fällt etwa um den Faktor $4/5$ geringer aus. Dies lässt sich durch den ausgefallenen ersten Lautsprecher begründen, wodurch nur noch vier der zuvor fünf Aktuatoren aktiv sind. Ansonsten unterscheidet sich in diesem Fall die optimale Feuersequenz für vier aktive Lautsprecher kaum von der optimalen Feuersequenz für fünf aktive Lautsprecher. Lediglich der Feuerzeitpunkt des dritten Lautsprechers wurde gegenüber dem vorherigen Fall um zwei Zeitschritte nach rechts verschoben. Wie im Fall mit fünf aktiven Lautsprechern, treten neben der erwünschten Saugwelle auch starke Fluktuationen des Drucks außerhalb des für die Saugwelle definierten Zeitfensters auf.

Um diese Druckschwankungen zu vermeiden, wird erneut der Parametersatz (5.28) herangezogen und damit eine Optimalsteuerung berechnet. Die zugehörigen experimentellen Ergebnisse sind im unteren Teil der Abb. 5.10 dargestellt. Bei etwa gleichbleibender Amplitude der Saugwelle gelingt es, durch Verschieben der Feuerzeitpunkte des dritten und vierten Lautsprechers, die Druckschwankungen im blau markierten Bereich signifikant zu verringern.

5.2.4 Diskussion zur Anwendbarkeit in einer realen Detonationsbrennkammer

Mit den in diesem Abschnitt besprochenen Methoden lässt sich das sehr komplexe kombinatorische Problem der Feuersynchronisation für den akustischen Prüfstand in einem optimalen Sinne lösen. Das dazu verwendete Modell ließe sich an einem realen Detonationsprüfstand auf die gleiche Weise wie hier beschrieben ermitteln. Inwiefern die Modellannahme der Superponierbarkeit der Systemantworten an einem realen Detonationsprüfstand zutrifft, ist schwer vorherzusagen. Die in Abschnitt 4.3 durchgeführte Analyse lässt allerdings eine Anwendbarkeit der präsentierten Methodik vermuten.

Bedingt durch das verwendete Modell wird bei der Berechnung einer Optimalsteuerung eine exakte Reproduzierbarkeit jedes einzelnen Detonationsereignisses bezüglich der dadurch generierten Druckschwankungen angenommen. Da ein realer Detonationsvorgang eine gewisse Stochastizität aufweisen wird, muss in weitergehenden Studien überprüft werden, wie

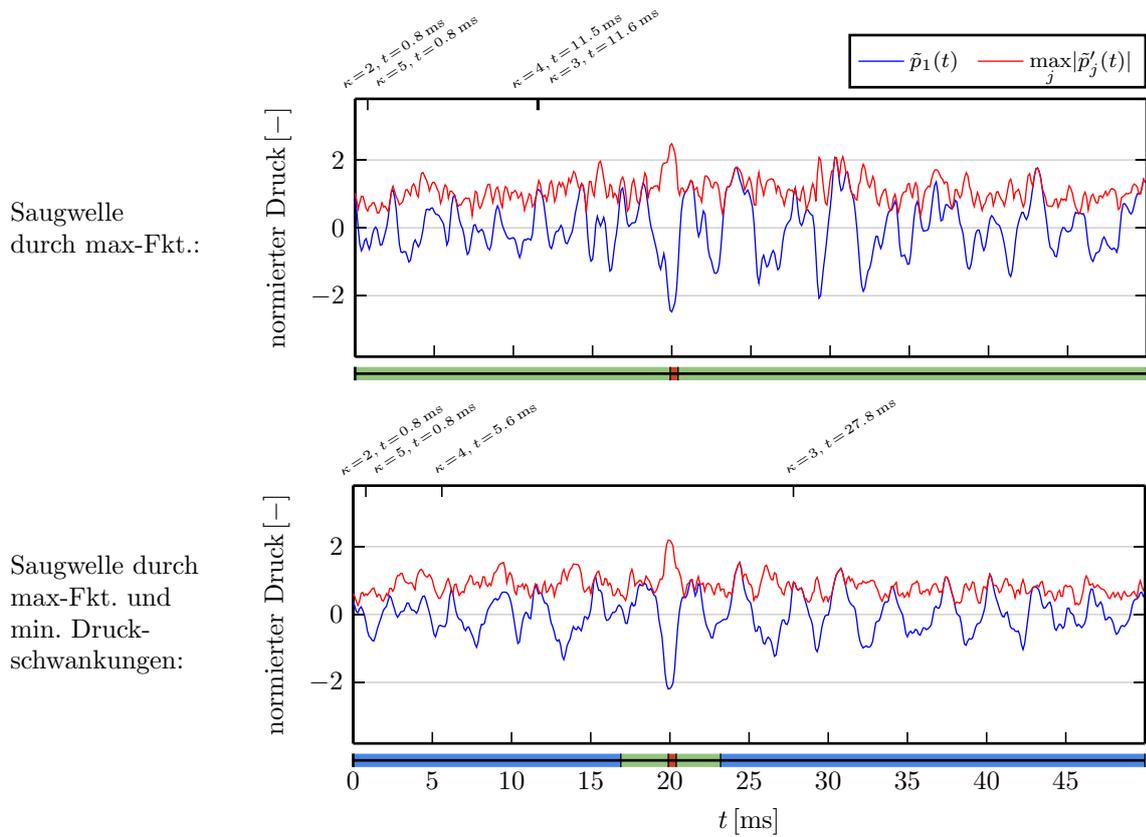


Abbildung 5.10: Generierung einer Saugwelle im rot markierten Zeitbereich. Erstes Rohr ist ausgefallen.

stark diese Stochastizität ausgeprägt ist und ob dies ein Problem für die Anwendung des präsentierten Ansatzes in einer realen Detonationsbrennkammer darstellt. Gegebenenfalls müsste der präsentierte Ansatz angepasst werden, beispielsweise durch die Berechnung einer robusten Optimalsteuerung, welche die Stochastizität des Prozesses berücksichtigt.

6 Erkennen von ausgefallenen Lautsprechern am Ringspaltplenum

Im vorherigen Kapitel wurde unter anderem eine Optimalsteuerung berechnet, um den Wiederbefüllungsprozess eines ausgefallenen Rohres durch Generierung einer Saugwelle zu ermöglichen. Bevor eine solche Optimalsteuerung angewendet werden kann, muss zunächst die Information vorliegen, welches Rohr ausgefallen ist. In diesem Kapitel werden zwei verschiedene Fehlererkennungsmethoden vorgestellt, um ausgefallene Rohre zu detektieren. Die erste Methode verwendet dabei einen modellbasierten Ansatz. Aus diesem Grund wird zunächst eine Systemidentifikation des akustischen Ringspalts durchgeführt. Dabei wird das in Abschnitt 3.1.3 vorgestellte akustische Zustandsraummodell verwendet, welches hier zusätzlich um einen Anteil zur Beschreibung der mechatronischen Lautsprecherdynamik erweitert wird. Dieses unterscheidet sich von dem im vorherigen Kapitel verwendeten Supervektormodell insofern, als dass es zusätzlich zum Ein-Ausgangsverhalten auch die Dynamik der inneren Zustände des mechatronisch-akustischen Systems beschreibt. Dies ermöglicht den Einsatz von Zustandsschätzmethoden, welche bei der anschließend präsentierten modellbasierten Fehlererkennung zur Anwendung kommen. Als alternative Methode wird abschließend ein Ansatz vorgestellt, welcher ein neuronales Netz zur Klassifikation von ausgefallenen Rohren verwendet. Dieser Ansatz kommt vollständig ohne physikalisches Modell aus und wird rein datenbasiert angelernt.

6.1 Systemidentifikation

Um eine modellbasierte Fehlererkennung zu realisieren, muss zunächst ein Modell des Ringspalts vorliegen. Ausgangspunkt ist dabei das in Abschnitt 3.1.3 eingeführte akustische Zustandsraummodell (3.53). Dieses wurde ausgehend von der akustischen Wellengleichung hergeleitet und beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Schnelle als akustische Quelle und dem akustischen Druck im Ringspalt. Da in dieser Arbeit Lautsprecher als Aktuatoren verwendet werden, muss das akustische Zustandsraummodell (3.53) erweitert werden, um auch die Systemdynamik der mechatronischen Lautsprecherelemente abzubilden.

Diese Erweiterung erfolgt zunächst für eine beliebige Anzahl von Lautsprechern $n_{u_{LS}} \in \mathbb{N}$. Der κ -te Lautsprecher, mit $\kappa \in \{1, \dots, n_{u_{LS}}\}$, wird über eine Spannung $u_{LS,\kappa}(t) \in \mathbb{R}$ angesteuert, wodurch eine Bewegung der Lautsprechermembran generiert wird. Der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit der zugehörigen Lautsprechermembran $v_{LS,\kappa}(t) \in \mathbb{R}$ entspricht einer Anregung in der akustischen Schnelle. Diese Größe beschreibt somit den Systemeingang des akustischen Zustandsraummodells. Um eine vollständige mathematische Systembeschreibung zu erhalten, wird im Folgenden ein Zustandsraummodell für den κ -ten Lautsprecher hergeleitet, welches das Übertragungsverhalten von der elektrischen Spannung $u_{LS,\kappa}(t)$, zur Geschwindigkeit der Lautsprechermembran $v_{LS,\kappa}(t)$ beschreibt. Diese Herleitung orientiert sich im Wesentlichen an den Ausführungen in [Bright, 2002]. Nachdem die mathematische Systembeschreibung eines Lautsprechers vorliegt, kann diese mit dem Zustandsraummodell (3.53) verknüpft werden, um die oben erwähnte, vollständige Systembeschreibung zu erhalten, welche den Zusammenhang zwischen den Steuerspannungen aller $n_{u_{LS}}$ Lautsprecher und dem resultierenden Druckfeld im Ringspalt abbildet.

6 Erkennen von ausgefallenen Lautsprechern am Ringspaltplenum

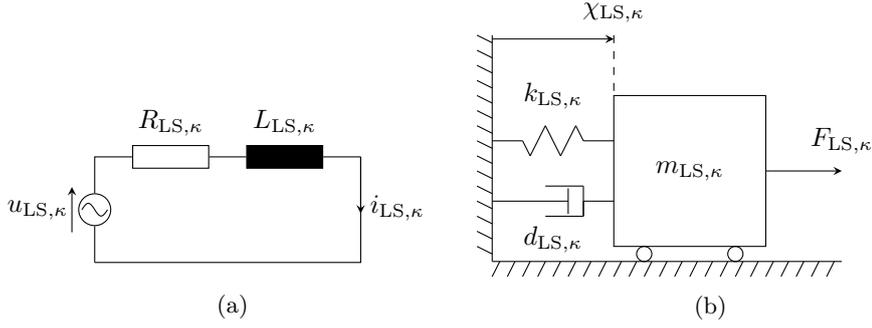


Abbildung 6.1: Vereinfachtes elektrisches (a) und mechanisches Modell (b) eines Lautsprechers

Das hier verwendete Modell eines Lautsprechers, wird in Abb. 6.1 verdeutlicht. Der Lautsprecher wird in zwei Teilsysteme, ein elektrisches und ein mechanisches, aufgegliedert. Der elektrische Gleichstromwiderstand und die Induktivität der Lautsprecherspule werden mit $R_{LS,\kappa} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $L_{LS,\kappa} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnet. Durch die elektrische Spannung $u_{LS,\kappa}(t)$ wird der Lautsprecher angesteuert, wodurch ein Strom $i_{LS,\kappa}(t) \in \mathbb{R}$ in der Lautsprecherspule generiert wird, welche fest mit der Lautsprechermembran verbunden ist. Da diese Spule im Zentrum des ringförmigen Permanentmagneten des Lautsprechers positioniert ist, wirkt somit eine Kraft $F_{LS,\kappa}(t) \in \mathbb{R}$ auf die Spule, wodurch schließlich die Lautsprechermembran bewegt wird. Diese Kraft berechnet sich entsprechend dem Induktionsgesetz zu

$$F_{LS,\kappa}(t) = B_{LS,\kappa} l_{LS,\kappa} i_{LS,\kappa}(t) , \quad (6.1)$$

wobei $l_{LS,\kappa} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Länge des stromdurchflossenen Leiters innerhalb des Magnetfelds des Permanentmagneten mit der magnetischen Flussdichte $B_{LS,\kappa} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, beschreibt. Das Produkt $B_{LS,\kappa} l_{LS,\kappa}$ wird auch als Antriebsfaktor bezeichnet. Beide Größen $l_{LS,\kappa}$ und $B_{LS,\kappa}$ werden hier als konstant angenommen, was eine gängige Annahme ist und eine einfache, lineare Modellbeschreibung des Lautsprechers ermöglicht. Das mechanische Teilsystem des Lautsprechers wird als gedämpfter Oszillator beschrieben. Dabei bezeichnet $d_{LS,\kappa} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung, $c_{LS,\kappa} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Steifigkeit der Membranaufhängung, $m_{LS,\kappa} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Masse der Lautsprechermembran inklusive der elektrischen Spule und $\chi_{LS,\kappa} \in \mathbb{R}$ die aktuelle Auslenkung der Membran. Durch Anwendung der Kirchhoffschen Regeln und des Impulserhaltungssatzes sowie (6.1) lässt sich ein Zustandsraummodell zur Beschreibung der Dynamik des κ -ten Lautsprechers angeben

$$\dot{\underline{x}}_{LS,\kappa} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_{LS,\kappa}}{L_{LS,\kappa}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{B_{LS,\kappa} l_{LS,\kappa}}{m_{LS,\kappa}} & \frac{-c_{LS,\kappa}}{m_{LS,\kappa}} & \frac{-d_{LS,\kappa}}{m_{LS,\kappa}} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_{LS,\kappa}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{LS,\kappa} \\ \chi_{LS,\kappa} \\ v_{LS,\kappa} \end{bmatrix}}_{=\underline{x}_{LS,\kappa}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_{LS,\kappa}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{b}_{LS,\kappa}} u_{LS,\kappa} , \quad (6.2a)$$

$$v_{LS,\kappa} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\underline{c}_{LS,\kappa}^T} \underline{x}_{LS,\kappa} . \quad (6.2b)$$

Dieses Modell lässt sich leicht erweitern, sodass ein Zustandsraummodell entsteht, welches

die Dynamik aller $n_{u_{LS}}$ Lautsprecher beschreibt

$$\dot{\underline{x}}_{LS} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{LS,1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_{LS,n_{u_{LS}}} \end{bmatrix}}^{=\mathbf{A}_{LS}} \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_{LS,1} \\ \vdots \\ \underline{x}_{LS,n_{u_{LS}}} \end{bmatrix}}^{=\underline{x}_{LS}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{b}_{LS,1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{b}_{LS,n_{u_{LS}}} \end{bmatrix}}^{=\mathbf{B}_{LS}} \overbrace{\begin{bmatrix} u_{LS,1} \\ \vdots \\ u_{LS,n_{u_{LS}}} \end{bmatrix}}^{=\underline{u}_{LS}}, \quad (6.3a)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_{LS,1} \\ \vdots \\ v_{LS,n_{y_{LS}}} \end{bmatrix}}_{=\underline{y}_{LS}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_{LS,1}^T \\ \vdots \\ \underline{c}_{LS,n_{y_{LS}}}^T \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}_{LS}} \underline{x}_{LS}, \quad (6.3b)$$

wobei $\underline{x}_{LS} \in \mathbb{R}^{n_{x_{LS}}}$, $n_{x_{LS}} = 3n_{u_{LS}}$ und $\mathbf{A}_{LS} \in \mathbb{R}^{n_{x_{LS}} \times n_{x_{LS}}}$, $\mathbf{B}_{LS} \in \mathbb{R}^{n_{x_{LS}} \times n_{u_{LS}}}$, $\mathbf{C}_{LS} \in \mathbb{R}^{n_{y_{LS}} \times n_{x_{LS}}}$, $\underline{y}_{LS} \in \mathbb{R}^{n_{y_{LS}}}$, $\underline{u}_{LS} \in \mathbb{R}^{n_{u_{LS}}}$ und $n_{y_{LS}} = n_{u_{LS}}$.

Durch eine Reihenschaltung von (6.3) und (3.53) lässt sich das vollständige dynamische System des Ringspalts angeben als

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_{LS} \\ \dot{\underline{x}}_{AK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{LS} & \mathbf{0}^{n_{x_{LS}} \times n_{x_{AK}}} \\ \mathbf{B}_{AK} \mathbf{C}_{LS} & \mathbf{A}_{AK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{LS} \\ \underline{x}_{AK} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{LS} \\ \mathbf{0}^{n_{x_{AK}} \times n_{u_{LS}}} \end{bmatrix} \underline{u}_{LS}, \quad (6.4a)$$

$$\underline{y}_{AK} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{n_{y_{AK}} \times n_{x_{LS}}} & \mathbf{C}_{AK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{LS} \\ \underline{x}_{AK} \end{bmatrix}. \quad (6.4b)$$

Die Zustandsraummatrizen von (6.4) enthalten viele Parameter die im Rahmen einer Systemidentifikation identifiziert werden sollen. Im Folgenden sind alle Systemparameter aufgelistet:

- Parameter des akustischen Systems: Eigenfrequenz ω_ψ , Dämpfungsterm $\alpha_{d,\psi}$, Eigenformen $\Phi_{s,\psi}(\underline{x}_{o\kappa}^*)$, $\Phi_{c,\psi}(\underline{x}_{o\kappa}^*)$, $\Phi_{s,\psi}(\underline{x}_{oj}^*)$, $\Phi_{c,\psi}(\underline{x}_{oj}^*)$,¹ Faktor des modalen Koeffizienten Λ_ψ ,
- akustische Größen: mittlere Dichte der Luft ρ_0 , Schallgeschwindigkeit c ,
- Parameter des Lautsprechers: Länge des stromdurchflossenen Leiters $l_{LS,\kappa}$, magnetische Flussdichte $B_{LS,\kappa}$, elektr. Widerstand der Spule $R_{LS,\kappa}$, Induktivität der Spule $L_{LS,\kappa}$, geschwindigkeitsproportionale Dämpfung $d_{LS,\kappa}$, Steifigkeit der Membranaufhängung $c_{LS,\kappa}$, bewegte Masse $m_{LS,\kappa}$ Wirkfläche der akustischen Quelle A_κ (effektive Fläche der Membran eines Lautsprechers).

Die Anzahl der Parameter mit den Indizes κ , j bzw. ψ , skalieren mit der Anzahl der verwendeten Lautsprecher $n_{u_{LS}} = 5$, der Anzahl der verwendeten Mikrofone $n_{y_{AK}} = 10$ bzw. der Anzahl der berücksichtigten akustischen Eigenformen Ψ . Da die Anzahl der zu berücksichtigten Eigenformen Ψ noch nicht festgelegt wurde, muss diese Festlegung zunächst erfolgen, bevor eine Systemidentifikation durchgeführt werden kann.

Dies geschieht durch Bestimmung des Frequenzbereichs, in dem das Detonationssignal u_{det} entsprechend Abb. 4.1 eine signifikante Anregung des akustischen Systems erzeugt. Dafür

¹Dabei werden nicht die Ortsvektoren $\underline{x}_{o\kappa}^*$ und \underline{x}_{oj}^* als Parameter betrachtet, sondern die Funktionswerte der angegebenen Eigenformen.

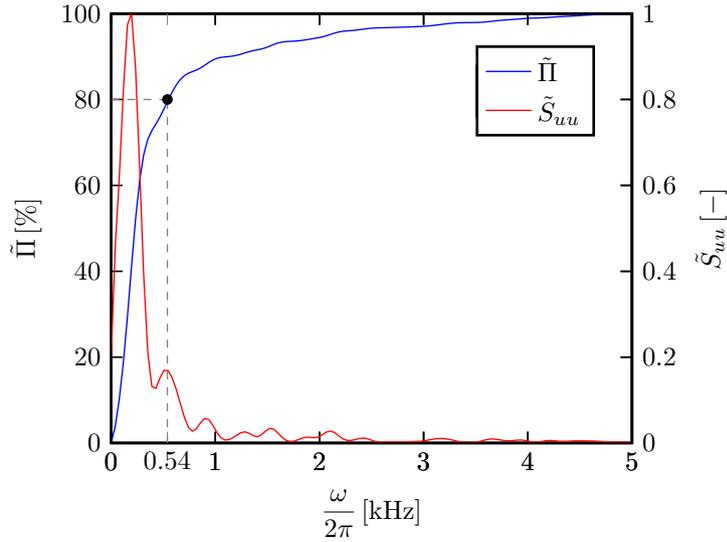


Abbildung 6.2: Frequenzgang der in u_{det} im Frequenzbereich zwischen 0 kHz und 5 kHz enthaltenen normierten, kummulierten Leistung $\tilde{\Pi}$ (blau) und zugehörige normierte spektrale Leistungsdichte \tilde{S}_{uu} (rot). In einem Frequenzbereich zwischen 0 und 540 Hz sind 80 % der Gesamtintensität des Signals enthalten.

wird die im Frequenzbereich zwischen 0 s^{-1} und ω enthaltene Leistung des Detonationssignals berechnet und normiert

$$\tilde{\Pi}(\omega) = \frac{\int_0^\omega S_{uu}(\check{\omega}) d\check{\omega}}{\int_0^{2\pi f_s/2} S_{uu}(\check{\omega}) d\check{\omega}}, \quad \omega \leq 2\pi f_s/2 = 5 \text{ kHz}, \quad (6.5)$$

wobei $\tilde{\Pi}(\omega) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.² Die Funktion $S_{uu}(\omega) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschreibt dabei die spektrale Leistungsdichte und die Variable $f_s = 1/\Delta t$, mit $f_s \in \mathbb{R}_{>0}$, die Abtastfrequenz des Detonationssignals.³ Abbildung 6.2 zeigt sowohl den rein reellen Frequenzgang der normierten kumulativen Leistungsdichte $\tilde{\Pi}(\omega)$ von u_{det} , als auch der zugehörigen normierten spektralen Leistungsdichte

$$\tilde{S}_{uu}(\omega) = \frac{S_{uu}(\omega)}{\max_{\omega} S_{uu}(\omega)}. \quad (6.6)$$

Der Frequenzbereich zwischen 0 und 540 Hz enthält somit bereits 80 % der gesamten in u_{det} enthaltenen Leistung.

Um mit dieser Information die Anzahl der im Modell zu berücksichtigenden akustischen Eigenmoden zu bestimmen, werden mit (3.27) die Eigenfrequenzen des akustischen Ringspalts abgeschätzt. Tabelle 6.1 zeigt einen Ausschnitt der so bestimmten Eigenfrequenzen.⁴ Alle in grau geschriebenen Eigenfrequenzen liegen außerhalb der zuvor bestimmten Schranke von 540 Hz. Es werden somit lediglich die schwarz markierten Eigenmoden im zu identifizierenden Modell berücksichtigt. Damit ergibt sich die Anzahl von berücksichtigten Eigenformen

²Das Symbol $\check{\omega}$ wird hier verwendet, um die Integrationsvariable von der oberen Integrationsgrenze zu unterscheiden.

³Mit dem Ausdruck $2\pi f_s/2$ wird die Nyquist-Frequenz als Kreisfrequenz angegeben.

⁴Mit steigender Modenordnung erhöhen sich auch die zugehörigen Eigenfrequenzen. Moden höherer Ordnung ($m > 5$ bzw. $l > 4$) sind in Tabelle 6.1 nicht dargestellt, da diese aufgrund der zugehörigen hohen Eigenfrequenz in einem Frequenzbereich liegen, der durch das Anregungssignal u_{det} nicht signifikant angeregt wird und somit im zu identifizierenden Modell nicht abgebildet werden.

		<i>m</i> -te Mode					
		0	1	2	3	4	5
<i>l</i> -te Mode	0	0.00	151.64	303.28	454.92	606.56	758.20
	1	285.83	323.57	416.75	537.26	670.53	810.29
	2	571.67	591.44	647.13	730.58	833.50	949.56
	3	857.50	870.80	909.55	970.70	1050.34	1144.63
	4	1143.33	1153.35	1182.87	1230.51	1294.27	1371.89

Tabelle 6.1: Eigenfrequenzen [Hz] des Ringspaltplenums für unterschiedliche Kombinationen von l und m , berechnet mit (3.27). Alle Eigenmoden, deren zugehörige Eigenfrequenzen grau markiert sind, werden in dem reduzierten Modell nicht berücksichtigt.

Antriebsfaktor	$B_{LS,\kappa} l_{LS,\kappa}$	4.8 Tm
Gleichstromwiderstand	$R_{LS,\kappa}$	6 Ω
Spuleninduktivität	$L_{LS,\kappa}$	$0.7 \cdot 10^{-3}$ H
bewegte Masse	$m_{LS,\kappa}$	$4 \cdot 10^{-3}$ kg
effektive Membranfläche	A_κ	$54 \cdot 10^{-4}$ m ²

Tabelle 6.2: Elektrische und mechanische Kenngrößen des verwendeten Visaton TI 100 8 Ohm Lautsprechers, entnommen aus dem Datenblatt des Herstellers [Visaton, 2015].

zu $\Psi = 8$.

Für das betrachtete System aus (6.4) ergibt sich somit eine Anzahl von 346 Modellparametern. Mit Ausnahme der modalen Dämpfungen $\alpha_{d,\psi}$ lassen sich alle Parameter des akustischen Systems (in (6.4) gekennzeichnet durch den Index $_{AK}$) entweder aus den geometrischen Abmaßen des Ringspalts bestimmen oder wie im Fall von ρ_0 und c im Tabellenwerk [VDI e.V., 2013] nachschlagen. Alle Lautsprecherparameter bis auf $d_{LS,\kappa}$ und $c_{LS,\kappa}$ finden sich im zugehörigen Datenblatt und sind in Tabelle 6.2 angegeben.

Durch eine Parameteridentifikation sollen sowohl die unbekannt Parameter identifiziert werden, als auch bereits bekannte Parameter angepasst werden, um so eine möglichst genaue Systembeschreibung zu erhalten. Viele der 346 Parameter sind nicht unabhängig voneinander identifizierbar, wie beispielsweise A_κ , $1/L_{LS,\kappa}$, $B_{LS,\kappa}$, $l_{LS,\kappa}$ und ρ_0 , welche alle gleichermaßen und ausschließlich den Verstärkungsfaktor zwischen der elektrischen Spannung am Eingang eines Lautsprecher und dem von einem Mikrofon gemessenem Druck beeinflussen. Es kann somit nur eine Untermenge dieser Parameter bestimmt werden. Für die Identifikation wurde folgender Parametersatz ausgewählt

$$\underline{\theta} = \left[\omega_0 \quad \omega_1 \quad \dots \quad \omega_7 \quad \alpha_{d,0} \quad \dots \quad \alpha_{d,7} \quad \Lambda_0 \quad \dots \quad \Lambda_7 \quad A_1 \quad \dots \quad A_5 \quad \frac{R_{LS}}{L_{LS}} \quad \frac{c_{LS}}{m_{LS}} \quad \frac{d_{LS}}{m_{LS}} \right]^T. \quad (6.7)$$

Mit dieser Auswahl lassen sich alle Eigenwerte des Zustandsraummodells (6.4) unabhängig voneinander festlegen, die Verstärkungen der betrachteten Eigenmoden einstellen sowie die Verstärkungsfaktoren der verwendeten Lautsprecher vorgeben. Um die Anzahl der Optimierungsparameter dabei möglichst gering zu halten, wurde angenommen, dass die Parameter,

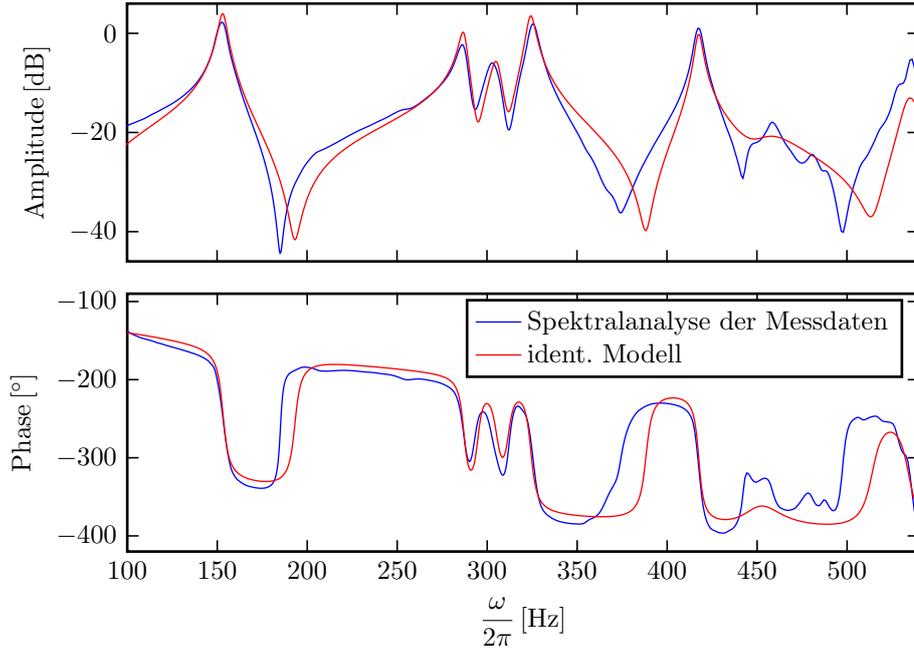


Abbildung 6.3: Ergebnis der Autovalidierung: Exemplarisch ist der Amplituden- und Phasengang des Übertragungsverhaltens von der normierten Klemmspannung des ersten Lautsprechers zum gemessenen normierten akustischen Druck am ersten Mikrofon (blau) dargestellt. Die roten Kurven beschreiben den Frequenzgang des identifizierten Systems für den gleichen Übertragungszweig.

welche die Eigenwerte von (6.2) bestimmen, für alle $n_{u_{LS}}$ Lautsprecher identisch sind

$$\frac{R_{LS}}{L_{LS}} = \frac{R_{LS,\kappa}}{L_{LS,\kappa}}, \quad \frac{c_{LS}}{m_{LS}} = \frac{c_{LS,\kappa}}{m_{LS,\kappa}}, \quad \frac{d_{LS}}{m_{LS}} = \frac{d_{LS,\kappa}}{m_{LS,\kappa}}, \quad \forall \kappa. \quad (6.8)$$

Alle relevanten Systemeigenschaften können somit durch die Identifikation der Parameter in (6.7) angepasst werden.

Um Messdaten für die Parameteridentifikation zu erhalten, wurden zwei verschiedene Experimente durchgeführt. Im ersten Experiment wurden die Lautsprecher nacheinander jeweils durch ein Gleitsinussignal im Frequenzbereich zwischen 100 Hz und 540 Hz angeregt. Anschließend wurden die Parameter aus (6.7) im Rahmen einer numerischen Optimierung so angepasst, dass der quadratische Fehler zwischen den gemessenen Mikrofonensignalen und dem simulierten Modellausgang minimiert wird. Im Rahmen der Autovalidierung kann die Qualität des optimierten Modells im Frequenzbereich überprüft werden. Mittels einer Spektralanalyse wird dazu aus den gemessenen Mikrofonensignalen und der Klemmspannung der Lautsprecher das zugehörige Übertragungsverhalten im Frequenzbereich berechnet. Abbildung 6.3 zeigt exemplarisch für den Übertragungszweig vom ersten Lautsprecher zum ersten Mikrofon sowohl den Amplituden- und Phasengang aus der Spektralanalyse der Messdaten als auch den Amplituden- und Phasengang des optimierten Modells. Es ist zu erkennen, dass sowohl im Phasen- als auch Amplitudengang eine gute Übereinstimmung zwischen den Messdaten und dem optimierten Modell erzielt werden konnte. Tabelle 6.3 zeigt die aus der Optimierung identifizierten Eigenfrequenzen. Ein Vergleich zwischen den aus dem physikalischen Modell berechneten Eigenfrequenzen (Tab. 6.1) und den mittels der Optimierung identifizierten Eigenfrequenzen zeigt, dass diese nur wenig geändert werden mussten, um eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Modell zu erzielen. Diese Erkenntnis kann so

		m -te Mode			
		0	1	2	3
l -te Mode	0	1.55	153.74	303.25	456.18
	1	286.49	324.42	413.75	537.44

Tabelle 6.3: Identifizierte Eigenfrequenzen [Hz] des Modells des Ringspaltplenums für unterschiedliche Kombinationen von l und m .

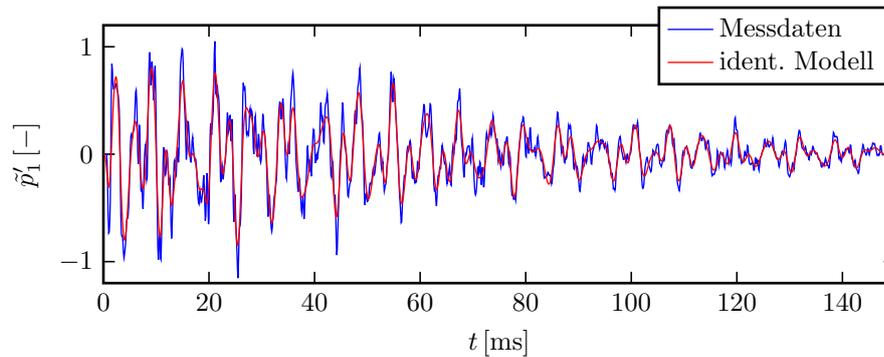


Abbildung 6.4: Ergebnis der Kreuzvalidierung: Exemplarisch ist der mit dem ersten Mikrofon gemessene (blau) und der mit dem identifizierten Modell simulierte (rot) normierte Druck über die Zeit dargestellt. In diesem Experiment wurde durch den ersten Lautsprecher ein Detonationsereignis zum Zeitpunkt 0 ms generiert.⁵

interpretiert werden, dass die in Abschnitt 3.1 beschriebene physikalische Modellierung von der Modellierungstiefe genügt, um das wirkliche Systemverhalten gut zu beschreiben.

In einem zweiten Experiment wurden die Lautsprecher mit dem Detonationssignal aus Abb. 4.1 angesteuert. Dieses Experiment wird zur Kreuzvalidierung verwendet. Abbildung 6.4 zeigt exemplarisch einen Zeitausschnitt des normierten akustischen Druckverlaufs am ersten Mikrofon sowie der mit dem optimierten Modell berechneten Systemantwort. Genau wie zuvor zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Modell. Der wesentliche Unterschied zwischen der roten und der blauen Kurve ergibt sich durch hochfrequente akustische Dynamiken, welche durch die ausgewählte Menge der im identifizierten Modell betrachteten Eigenfrequenzen nicht korrekt abgebildet werden können. Es liegt somit ein Modell vor, welches das Systemverhalten hinsichtlich der angesetzten Modellierungstiefe gut beschreibt.

6.2 Fehlererkennung mittels Mehrfiltermethode

Basierend auf dem im vorherigen Abschnitt identifizierten Modell soll eine Fehlererkennung aufgebaut werden, welche die in Abschnitt 3.4 vorgestellte Mehrfiltermethode verwendet. Damit soll erkannt werden, ob ein oder mehrere Detonationsrohre ausgefallen sind und welche Rohre davon betroffen sind. Die hier beschriebene Implementierung der Mehrfiltermethode stellt eine Erweiterung der in [Wolff & King, 2014] präsentierten Methodik dar.

Durch die $n_{u_{LS}} = 5$ Lautsprecher des Versuchsstands werden fünf Detonationsrohre abgebildet. Für jedes Detonationsrohr soll jeweils einer der beiden möglichen Zustände: ausgefal-

⁵Ab dem Zeitpunkt 0 ms wird der Lautsprecher mit dem Signal aus Abb. 4.1 angesteuert.

len / nicht ausgefallen detektiert werden können. Zu jedem Fehlerfall gehört somit eine bestimmte Menge ausgefallener Detonationsrohre. Es ergeben sich insgesamt $J_M = 2^{n_{uLS}} = 32$ Fehlerfälle, welche durch die Fehlerkennung unterschieden werden müssen.

Um die Klassifikationsgüte des Fehlererkennungsalgorithmus weiter unten im Detail zu diskutieren, müssen bestimmte Fehlerfälle adressiert werden können. Dazu wird zunächst die Menge Ξ sowie die Variable $F_F \in \Xi$ eingeführt. Die Menge Ξ beinhaltet alle möglichen Kombinationen von ausgefallenen Rohren, $\Xi = \{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}, \dots\}$. Die Variable F_F wird verwendet, um einen speziellen Fehlerfall auszuwählen. Soll beispielsweise der Fehlerfall diskutiert werden, in dem das zweite und dritte Rohr ausgefallen ist, würde dies durch $F_F = \{2, 3\}$ ausgedrückt werden.

Die einzelnen Modellhypothesen des Mehrfilteralgorithmus M_j wurden in Abschnitt 3.4 durch den Index j adressiert. Eine Darstellung der Verknüpfung zwischen diesem ganzzahligen Index und dem jeweiligen, in der Modellhypothese angenommenen Fehlerfall wird schnell unübersichtlich. Um eine bessere Lesbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen, werden in diesen Fällen anstelle dessen die Variablen F_M und P_{F_M} verwendet. Um beispielsweise die Wahrscheinlichkeit der Modellhypothese, dass das zweite und vierte Rohr ausgefallen ist, zu diskutieren, würde $F_M = \{2, 4\}$ gewählt und somit die zugehörige Hypothesenwahrscheinlichkeit $P_{\{2,4\}}$ ausgewählt werden.

6.2.1 Aufbau der Mehrfiltermethode

Um alle Fehlerfälle in der Mehrfiltermethode abzubilden, werden 32 verschiedene Modellhypothesen verwendet. Sowohl innerhalb des Fehlererkennungsmodells als auch im realen Experiment wird ein nicht ausgefallenes Detonationsrohr durch einen Lautsprecher simuliert, der zu gegebenen Zeitpunkten Detonationssignale abspielt. Soll hingegen ein ausgefallenes Detonationsrohr abgebildet werden, wird der zugehörige Lautsprecher stumm geschaltet, wodurch dieser das akustische Feld im Ringspalt nicht mehr beeinflusst. Die Modellhypothesen in der Mehrfiltermethode unterscheiden sich somit lediglich durch eine unterschiedliche Menge von aktiven Eingangssignalen, nicht jedoch in der Modellstruktur oder den Modellparametern. Aus diesem Grund wurden auch die Designparameter der zugehörigen Kalman-Filter, $\hat{\mathbf{P}}_{x_j}(0)$, $\mathbf{Q}_j(k)$ und $\mathbf{R}_j(k)$ für alle Modellhypothesen identisch gewählt

$$\hat{\mathbf{P}}_{x_j}(0) = \mathbf{0}^{(n_{xLS} + n_{xAK}) \times (n_{xLS} + n_{xAK})}, \quad \forall j, \quad (6.9a)$$

$$\hat{\underline{\mu}}_{x_j}(0) = \underline{\mathbf{0}}^{n_{xLS} + n_{xAK}}, \quad \forall j, \quad (6.9b)$$

$$\mathbf{Q}_j(k) = 10^{-17} \mathbf{I}^{n_{xLS} + n_{xAK}}, \quad \forall k, j, \quad (6.9c)$$

$$\mathbf{R}_j(k) = \mathbf{I}^{n_{yAK}}, \quad \forall k, j. \quad (6.9d)$$

Die in (6.9) angegebenen Werte wurden durch manuelles Anpassen ermittelt, mit dem Ziel, eine möglichst robuste Fehlererkennung zu erhalten. Um dies zu quantifizieren, wurden die im folgenden Abschnitt beschriebenen Experimente durchgeführt.

6.2.2 Beschreibung der Experimente

Zu Beginn jedes Experiments wird angenommen, dass alle Modellhypothesen des Mehrfilteralgorithmus gleich wahrscheinlich sind und somit $P_j(0) = 1/J_M, \forall j$, wobei $J_M = 32$.

Alle Experimente zur Bewertung des Fehlererkennungsalgorithmus wurden mit folgender Feuersequenz durchgeführt:

- das gewählte Feuermuster lautet $M_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

- die Feuerfrequenz jedes Lautsprechers wird auf $f_f = 20$ Hz festgelegt,
- Die Feuerzeitpunkte berechnen sich zu

$$t_f(\kappa, i_f) = \frac{\kappa - 1}{f_f n_{u_{LS}}} + \frac{i_f - 1}{f_f} + t_{\text{off}}(\kappa) . \quad (6.10)$$

Über $t_{\text{off}}(\kappa) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ kann jedes Detonationsrohr mit einer individuellen Totzeit versehen werden, was im Folgenden genutzt wird, um die Robustheit des Fehlererkennungsalgorithmus zu untersuchen.

Die im Fehlererkennungsmodell angenommene Feuersequenz entspricht der Feuersequenz im Experiment, mit dem Unterschied, dass die Totzeiten t_{off} als nicht bekannt und somit zu null angenommen werden. Ebenso wird die im Folgenden beschriebene stochastische Signalmodifikation als unbekannt angenommen und somit im Fehlererkennungsmodell nicht angewendet.

Um eine Aussage über die Qualität und Robustheit des Fehlererkennungsalgorithmus treffen zu können, wurden drei verschiedene Konfigurationen untersucht.

- **Nominelle Konfiguration:** In dieser Konfiguration wird $t_{\text{off}}(\kappa) = 0$ ms, $\forall \kappa$, gewählt. Die Steuersignale im Fehlererkennungsmodell und im Experiment bzw. Versuchsstand sind somit identisch.
- **Konfiguration mit modifizierten Detonationssignalen:** Wie zuvor wird $t_{\text{off}}(\kappa) = 0$ ms, $\forall \kappa$, gewählt. Im Unterschied zur nominellen Konfiguration werden die Lautsprecher nicht bei jedem Schuss mit dem gleichen Signal u_{det} angesteuert, vielmehr wird das Signal u_{det} für jeden einzelnen Schuss erneut modifiziert. Dadurch sollen stochastische Komponenten eines realen Detonationsvorgangs abgebildet werden. Auf eine ausführliche Beschreibung des Signalmodifikationsalgorithmus wird an dieser Stelle aus Übersichtsgründen verzichtet. Anstelle dessen wird in Abb.6.5 der Zeitverlauf der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Graustufen) grafisch dargestellt. Diese Funktion verdeutlicht die Eintrittswahrscheinlichkeit einzelner Realisierungen (z.B. Rot, Grün) von modifizierten Signalen, welche durch Modifikation des originalen Detonationssignals (Blau) entstehen.⁶ Im Fehlererkennungsmodell werden alle Systemgänge weiterhin mit diesem originalen Signal u_{det} angesteuert.

Eine Analyse der experimentellen Daten aus dieser Konfiguration erlaubt somit Rückschlüsse auf die Robustheitseigenschaften des Fehlererkennungsalgorithmus bezüglich stochastischer Signalmodifikationen.

- **Konfiguration mit Totzeit:** In dieser Konfiguration soll ausschließlich der Effekt von nicht modellierten Totzeiten untersucht werden. Dafür werden die Lautsprecher mit dem jeweils um die zugehörige Totzeit $t_{\text{off}}(\kappa)$ verzögerten Detonationssignal u_{det} angesteuert.

Wie bereits erwähnt, werden im Fehlererkennungsalgorithmus 32 mögliche Fehlerfälle unterschieden. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Versuchsstands und der gewählten Feuersequenz unterscheiden sich beispielsweise die beiden Fehlerfälle $F_F = \{2, 3\}$ und $F_F = \{1, 5\}$ qualitativ nicht, da jeweils zwei benachbarte Rohre ausgefallen sind.⁷ Um eine Aussage

⁶Das Ausmaß der Signalmodifikation wurde so gewählt, dass damit relevante Robustheits- und Performanceeigenschaften des Fehlererkennungsalgorithmus dargestellt werden können.

⁷Der einzige Unterschied zwischen diesen Fällen ist eine additive Verschiebung der azimutalen Koordinate φ_0 , welche durch eine einfache Koordinatentransformation aufgehoben werden kann.

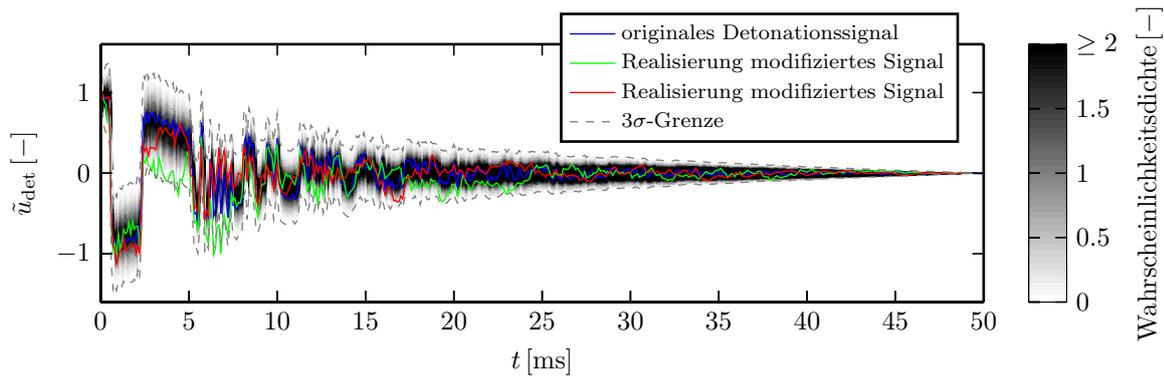


Abbildung 6.5: Das im Modell angenommene Steuersignal, um mit einem Lautsprecher ein Detonationsereignis zu generieren, ist in Blau dargestellt (vergleiche Abb. 4.1). Die rote und grüne Kurve beschreiben jeweils eine Stichprobe eines modifizierten Steuersignals, womit ein Lautsprecher im Experiment angesteuert wird. Zusätzlich sind in Graustufen der Zeitverlauf der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die zugehörige drei Sigma-Grenze dargestellt, um die Abweichung der modifizierten Signale von der Modellannahme zu quantifizieren.

über die Qualität des Fehlererkennungsalgorithmus zu treffen, genügt es somit, die Fehlererkennung für jeweils einen Vertreter einer Fehlerart zu analysieren. Insgesamt existieren acht strukturell verschiedene Fehlerarten. Folgende Fehlerfälle wurden repräsentativ ausgewählt, um diese Fehlerarten abzubilden:

- kein Detonationsrohr ist ausgefallen: $F_F = \{\}$,
- ein Detonationsrohr ist ausgefallen: $F_F = \{2\}$,
- zwei benachbarte Detonationsrohre sind ausgefallen: $F_F = \{2, 3\}$,
- zwei Detonationsrohre sind ausgefallen, wobei diese nicht benachbart sind: $F_F = \{2, 4\}$,
- drei benachbarte Detonationsrohre sind ausgefallen: $F_F = \{2, 3, 4\}$,
- drei Detonationsrohre sind ausgefallen, wobei eines davon nicht mit den übrigen beiden benachbart ist: $F_F = \{2, 3, 5\}$,
- vier Detonationsrohre sind ausgefallen: $F_F = \{2, 3, 4, 5\}$,
- alle Detonationsrohre sind ausgefallen: $F_F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6.2.3 Experimentelle Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die experimentellen Ergebnisse der Fehlererkennung mittels der Mehrfiltermethode für die drei im vorherigen Abschnitt vorgestellten Konfigurationen präsentiert. Dabei werden die acht zuvor erwähnten Fehlerfälle betrachtet. Weiterhin werden ausgehend von den Zeitverläufen der Wahrscheinlichkeiten der unterschiedlichen Modellhypothesen $\underline{P}(t/\Delta t)$ weitere charakteristische Größen definiert, anhand derer die Qualität des Fehlererkennungsalgorithmus bewertet wird. Der Fehlererkennungsalgorithmus wird auf einen Zeithorizont von zwei Feuerzyklen angewendet. Damit wird garantiert, dass auch der Einfluss des Rohres, welches im ersten Zyklus als Letztes gefeuert hat, über einen angemessenen Zeitraum abgebildet wird.

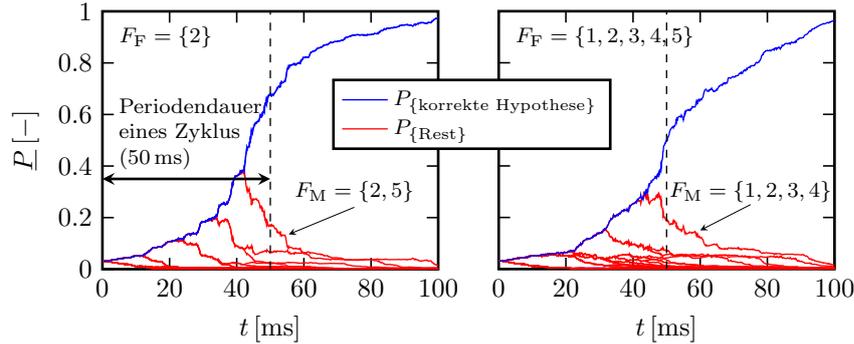


Abbildung 6.6: Zeitverläufe der Wahrscheinlichkeiten für alle 32 Modellhypothesen der Mehrfiltermethode für zwei verschiedene Fehlerfälle: Die blauen Graphen beschreiben jeweils den Zeitverlauf der Wahrscheinlichkeit derjenigen Modellhypothese, welche mit dem wirklich vorliegenden Fehlerfall übereinstimmt. Zusätzlich ist in jedem Diagramm die Variable F_M für die Modellhypothese mit der zweithöchsten Wahrscheinlichkeit angegeben.

Nominelle Konfiguration

Im Rahmen der Experimente der nominellen Konfiguration wird für jeden betrachteten Fehlerfall F_F durch den Mehrfilteralgorithmus der Zeitverlauf des Vektors \underline{P} berechnet, welcher für jeden Zeitpunkt die Wahrscheinlichkeiten aller 32 Modellhypothesen beschreibt. Abbildung 6.6 zeigt die Zeitverläufe dieser Größe exemplarisch für zwei ausgewählte Fehlerfälle.

Vergleicht man für alle acht untersuchten Fehlerfälle die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Modellhypothese $F_M = F_F$ zum Ende des betrachteten Zeitraums, so zeigt sich, dass diese für den dargestellten Fehlerfall $F_F = \{2\}$ am höchsten ist, mit $P_{\{2\}}(100 \text{ ms}/\Delta t) = 0.974$. Für den rechts abgebildete Fehlerfall $F_F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wird die geringste Wahrscheinlichkeit aller acht Fehlerfälle erzielt: $P_{\{1,2,3,4,5\}}(100 \text{ ms}/\Delta t) = 0.962$. Zunächst wird der dargestellte Fehlerfall $F_F = \{2\}$ genauer diskutiert.

- Zu Beginn der Fehlererkennung wird allen Modellhypothesen die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet und das akustische Feld im Ringspalt befindet sich in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ ms}$ wird das erste Detonationsereignis am ersten Rohr ausgelöst. Die Hälfte der Modellhypothesen vermutet dort ein ausgefallenes Rohr. Da dieses Rohr im Experiment nicht ausgefallen ist, werden diese Modellhypothesen durch den Mehrfilteralgorithmus sehr schnell als unwahrscheinlich eingestuft. Dies führt zu einer Aufspaltung von \underline{P} in zwei Äste. Jeder dieser Äste beinhaltet zu diesem Zeitpunkt jeweils 16 Modellhypothesen.
- Zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ ms}$ wird am zweiten Rohr ein Detonationsereignis ausgelöst. Wiederum wird von der Hälfte der nunmehr 16 Modellhypothesen des Astes, welcher auch die blau eingefärbte Modellhypothese beinhaltet, ein ausgefallenes Rohr prädiziert. Da diese Vermutung korrekt ist, werden die restlichen 8 Modellhypothesen, welche ein nicht ausgefallenes Rohr vorhersagen, als unwahrscheinlich eingestuft. Es kommt somit erneut zu einer Verzweigung der Modellhypothesen.
- Dieser Verzweigungsprozess setzt sich für die nächsten Feuerzeitpunkte, bei $t = 20 \text{ ms}$ und $t = 30 \text{ ms}$ für das 3. und 4. Rohr fort. Anschließend verbleiben nur noch zwei Hypothesen mit hoher Wahrscheinlichkeit: $F_M = \{2\}$ und $F_M = \{2, 5\}$. Da am fünften Rohr

bisher noch kein Detonationsereignis ausgelöst wurde, sind bis zu diesem Zeitpunkt beide Thesen nicht unterscheidbar und besitzen somit die gleiche Wahrscheinlichkeit.

- Zum Zeitpunkt $t = 40$ ms wird am fünften Rohr erfolgreich ein Detonationsereignis ausgelöst. Dadurch stehen dem Fehlererkennungsalgorithmus die notwendigen Informationen zur Verfügung, um auch die letzte falsche Modellhypothese $F_M = \{2, 5\}$ zu diskriminieren.

Die beiden in Abb. 6.6 dargestellten Fehlerfälle unterscheiden sich qualitativ kaum. Dies verhält sich ebenso für die sechs nicht abgebildeten Fehlerfälle. Der gerade beschriebene Diskriminierungsprozess läuft somit bei allen Fehlerfällen äquivalent ab. In allen Fehlerfällen wird zum Ende des ersten Zyklus der Modellhypothese P_{F_F} die höchste Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Und somit die zum wirklich vorliegende Fehlerfall gehörende Modellhypothese als wahrscheinlichste eingestuft.

Um auch für die restlichen Konfigurationen eine, basierend auf den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Modellhypothesen, zuverlässige Klassifikation zu ermöglichen, wird eine weitere Größe eingeführt, welche als Klassifikationssicherheit bezeichnet wird. Als Maß für die Klassifikationssicherheit wird der Zeitverlauf des Abstands zwischen der wahrscheinlichsten Modellhypothese und der zweitwahrscheinlichsten Modellhypothese, welcher mit $\bar{l}_P(k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnet wird, definiert

$$F_{M_m}(t/\Delta t) = \operatorname{argmax}_{F_M \in \Xi} (P_{F_M}(t/\Delta t)) , \quad (6.11a)$$

$$\bar{l}_P(t/\Delta t) = \underbrace{\max_{F_M \in \Xi} (P_{F_M}(t/\Delta t))}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit der} \\ \text{wahrscheinlichsten} \\ \text{Modellhypothese}}} - \underbrace{\max_{F_M \in \Xi \setminus F_{M_m}(t/\Delta t)} (P_{F_M}(t/\Delta t))}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit der} \\ \text{zweitwahrscheinlichsten} \\ \text{Modellhypothese}}} . \quad (6.11b)$$

Die Variable $F_{M_m} \in \Xi$ bezeichnet die zum jeweiligen Zeitpunkt wahrscheinlichste Modellhypothese. Mit größer werdendem $\bar{l}_P(t/\Delta t)$ ergibt sich somit eine gute Unterscheidbarkeit zwischen der wahrscheinlichsten Modellhypothese gegenüber den restlichen Modellhypothesen. Falls $\bar{l}_P = 0$ ist, wurden mindestens zwei der wahrscheinlichsten Modellhypothesen die gleichen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. In diesem Fall ist eine eindeutige Klassifikation eines Fehlers somit nicht möglich.

Die Größe \bar{l}_P eignet sich gut als Entscheidungsvariable, um einen Fehler zu klassifizieren. Allerdings lässt sich anhand von \bar{l}_P nicht erkennen, ob eine Modellhypothese fälschlicherweise als wahrscheinlichste eingestuft wurde und somit die Fehlererkennung versagt. Da in den hier beschriebenen Experimenten der wirklich vorliegende Fehlerfall bekannt ist, wird zusätzlich die Größe $l_P \in \mathbb{R}$ definiert

$$l_P(t/\Delta t) = P_{F_F}(t/\Delta t) - \max_{F_M \in \Xi \setminus F_F} P_{F_M}(t/\Delta t) , \quad (6.12)$$

welche für den Fall $l_P \geq 0$ das gleiche Abstandsmaß liefert wie \bar{l}_P , was wiederum bedeutet, dass eine korrekte Klassifikation vorliegt. Falls hingegen $l_P(t/\Delta t) < 0$ ist, bedeutet dies, dass der Modellhypothese des wirklich vorliegenden Fehlerfalls nicht die größte Wahrscheinlichkeit zugeordnet wurde. In diesem Fall beschreibt $|l_P|$ den Abstand zwischen der Modellhypothese mit der höchsten Wahrscheinlichkeit und der eigentlich korrekten Modellhypothese. Die Größe l_P eignet sich somit hervorragend zur Beurteilung der Ergebnisse des Fehlererkennungsalgorithmus und wird insbesondere im Rahmen der folgenden Robustheitsuntersuchungen verwendet.

Fehlerfall F_M	$P_{FF}(50 \text{ ms}/\Delta t)$	$l_P(50 \text{ ms}/\Delta t)$	$P_{FF}(100 \text{ ms}/\Delta t)$	$l_P(100 \text{ ms}/\Delta t)$
{}	0.672	0.504	0.973	0.958
{2}	0.677	0.508	0.974	0.958
{2, 3}	0.633	0.475	0.967	0.953
{2, 4}	0.636	0.478	0.974	0.958
{2, 3, 4}	0.587	0.441	0.969	0.953
{2, 3, 5}	0.615	0.462	0.964	0.949
{2, 3, 4, 5}	0.560	0.420	0.964	0.949
{1, 2, 3, 4, 5}	0.497	0.306	0.962	0.946

Tabelle 6.4: P_{FF} und l_P , für alle untersuchten Fehlerfälle, zu den Zeitpunkten $t = 50 \text{ ms}$ und $t = 100 \text{ ms}$

Wird der Zeitverlauf dieser Größe für alle Experimente des nominellen Falls berechnet, ergibt sich für den Zeitraum $t < 40 \text{ ms}$ bei allen Fehlerfällen $l_P = 0$. Es weisen somit immer mindestens zwei der wahrscheinlichsten Modellhypothesen die gleiche Wahrscheinlichkeit auf, wobei die korrekte Modellhypothese in diesen immer enthalten ist. Eine eindeutige Klassifikation eines Fehlers in diesem Zeitbereich ist somit nicht möglich. Erst für den Zeitbereich $t \geq 40 \text{ ms}$ gilt für alle Fehlerfälle $l_P > 0$. Es wird somit stets derjenigen Modellhypothese die größte Wahrscheinlichkeit zugeordnet, welche dem vorliegenden Fehlerfall entspricht.

Zusammenfassend sind in Tab. 6.4 die beiden Größen P_{FF} und l_P jeweils nach Beendigung des ersten und zweiten Zyklus angegeben. In allen Fehlerfällen wird durch Betrachtung des zweiten Feuerzyklus ($50 \text{ ms} \leq t < 100 \text{ ms}$) die Klassifikationssicherheit deutlich erhöht.

Für eine vollständige Fehlerklassifikation wird ein Schwellenwert $B_{\bar{l}_P} \in \mathbb{R}_{>0}$ eingeführt, wobei gilt:

- falls $\bar{l}_P > B_{\bar{l}_P}$, dann wird die wahrscheinlichste Modellhypothese als vorliegender Fehlerfall klassifiziert,
- falls $\bar{l}_P \leq B_{\bar{l}_P}$, dann wird kein Fehlerfall klassifiziert.

Für die hier betrachtete nominelle Konfiguration führt jede Schranke zwischen $0 < B_{\bar{l}_P} < 0.946$ zur korrekten Fehlerklassifikation aller Experimente, für alle Fehlerfälle innerhalb des Zeitfensters der betrachteten zwei Feuerzyklen. Je kleiner $B_{\bar{l}_P}$ dabei gewählt wird, desto schneller wird der Fehler klassifiziert. Anhand der aus dieser Konfiguration erhaltenen Ergebnisse, lässt sich festhalten, dass die Mehrfiltermethode im nominellen Fall sehr gut in der Lage ist, den vorliegenden Fehler zu detektieren.

Konfiguration mit modifizierten Detonationssignalen

In diesem Abschnitt wird die Robustheit des Mehrfilteralgorithmus gegen nicht modellierte Abweichungen des Detonationssignals untersucht. In diesem Rahmen wurden für alle hier untersuchten Fehlerfälle jeweils 1000 Experimente durchgeführt. Für jeden einzelnen Schuss jedes Experiments wurde die zuvor beschriebene stochastische Signalmodifikation vorgenommen. Die konkrete akustische Anregung jedes einzelnen Detonationsereignisses ist somit einmalig und unterscheidet sich von der Anregung aller weiteren Detonationsereignisse in dem in Abb. 6.5 verdeutlichten Rahmen.

Um die Qualität des Mehrfilteralgorithmus für die jeweils 1000 Experimente eines Fehlerfalls zu diskutieren, werden die beiden zuvor eingeführten Größen \bar{l}_P und l_P herangezogen.

Abbildung 6.7 zeigt den zeitlichen Verlauf der Wahrscheinlichkeitsverteilung von l_P (Graustufen) über das Zeitfenster von zwei Feuerzyklen für sieben der acht untersuchten Fehlerfälle. Sowohl die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen als auch die angegebenen Erwartungswerte sind statistische Schätzungen basierend auf den jeweils 1000 Experimenten.

Der Fehlerfall $F_F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist nicht dargestellt, da in diesem Fall kein Rohr aktiv ist und somit keine stochastische Komponente im Anregungssignal vorhanden ist. Das in Abb. 6.6 dargestellte Diagramm dieses Fehlerfalls gilt somit auch für die hier besprochene Konfiguration.

An der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von l_P ist zu erkennen, dass für alle übrigen in Abb. 6.7 dargestellten Fehlerfälle grau eingefärbte Flächen im Bereich $l_P < 0$ existieren. Mit geringer werdender Anzahl von ausgefallenen Rohren gewinnen diese Flächen an Ausdehnung. In den betroffenen Zeitbereichen wird, entsprechend der in den Graustufen dargestellten Wahrscheinlichkeitsdichte, der jeweils korrekten Modellhypothese nicht die höchste Hypothesenwahrscheinlichkeit zugeordnet. Somit kann für die betroffenen Experimente keine Schranke $B_{\bar{l}_P}$ angegeben werden, die eine korrekte Klassifikation des vorliegenden Fehlerfalls innerhalb des zugehörigen Zeitfensters ermöglicht. Die prozentuale Anzahl der davon betroffenen Experimente wird durch den Zeitverlauf der cyan eingefärbten Linie dargestellt. Auch hier ist eindeutig der Trend zu erkennen, dass mit sinkender Anzahl ausgefallener Rohre, mehr Experimente nicht korrekt klassifiziert werden können. Im Folgenden wird untersucht, wie eine Schranke $B_{\bar{l}_P}$ angegeben werden kann, sodass möglichst viele dieser Experimente in die Kategorie „nicht zu klassifizieren“ eingeordnet werden, anstatt eine Fehlklassifikation zu erzeugen.

Dafür wird zunächst der Zeitverlauf des Erwartungswerts von \bar{l}_P betrachtet. Im Gegensatz zur nominellen Konfiguration werden hier die beiden Fälle unterschieden, in denen das zugehörige $l_P \geq 0$ bzw. $l_P < 0$.⁸ Die rote Linie beschreibt den zum jeweiligen Zeitpunkt berechneten Erwartungswert von \bar{l}_P , wobei zu jedem Zeitpunkt für die Berechnung nur die Experimente herangezogen wurden, bei denen der korrekten Modellhypothese die höchste Hypothesenwahrscheinlichkeit zugeordnet wurde ($l_P \geq 0$). Zur Berechnung der grünen Linie hingegen wurden nur Situationen einbezogen, in denen der korrekten Modellhypothese nicht die höchste Hypothesenwahrscheinlichkeit zugeordnet wurde ($l_P < 0$). Falls zu einem Zeitpunkt kein Experiment für einen der dargestellten Fälle vorliegt, wurde der zugehörige Erwartungswert zu null gesetzt. Dies ist gut am Fehlerfall $F_M = \{2, 3, 4, 5\}$ zu erkennen, bei dem zu vielen Zeitpunkten für keines der untersuchten 1000 Experimente die Situation $l_P < 0$ auftritt und somit die grüne Linie den Wert Null anzeigt.

Die gestrichelte blaue Linie beschreibt den Zeitverlauf des Erwartungswertes von $|l_P|$ für den Fall ($l_P < 0$). Dies entspricht dem betragsmäßigen Abstand der korrekten Modellhypothese zur wahrscheinlichsten, falschen Modellhypothese, unter der Voraussetzung, dass der korrekten Modellhypothese nicht die höchste Wahrscheinlichkeit zugeordnet wurde. Der Abstand zwischen der gestrichelten blauen Linie und der grünen Linie beschreibt somit, wie viel weniger wahrscheinlich die korrekte Modellhypothese im Vergleich zur zweitwahrscheinlichsten Modellhypothese im statistischen Mittel ist. Falls diese Linien aufeinanderliegen, wurde die korrekte Modellhypothese in allen betroffenen Experimenten als zweitwahrscheinlichste These ermittelt. Erneut zeigt sich, dass mit sinkender Anzahl von ausgefallenen Rohren dieses Abstandsmaß größer wird. Die maximale Abweichung im Zeitfenster $50 \text{ ms} \leq t < 100 \text{ ms}$ für den in dieser Hinsicht kritischsten Fehlerfall $F_M = \{\}$ beträgt zu keinem Zeitpunkt mehr als 1.5%. Die korrekte Modellhypothese wird somit in den betroffenen Experimenten und Zeitpunkten zwar nicht als wahrscheinlichste Hypothese klassifiziert, aber trotzdem im Vergleich

⁸Dieses Vorgehen war für die nominelle Konfiguration nicht notwendig, da der Fall $l_P < 0$ nicht aufgetreten ist.

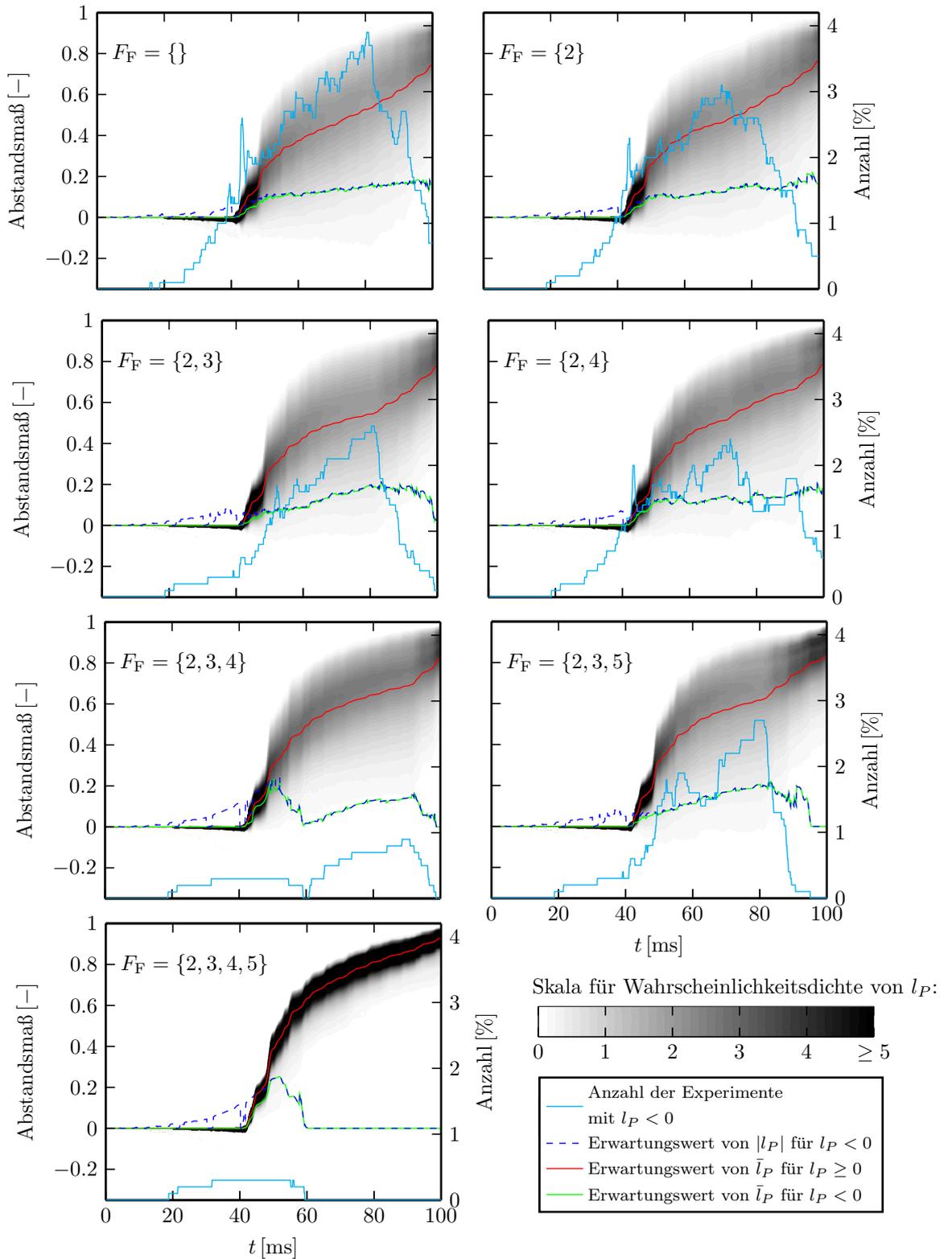


Abbildung 6.7: Der Zeitverlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte von l_P ist in Graustufen dargestellt. Die roten und grünen Linien zeigen die Zeitverläufe der statistisch geschätzten Erwartungswerte von \bar{l}_P jeweils für den Fall, dass zum aktuellen Zeitpunkt das Modell mit der höchsten Wahrscheinlichkeit dem vorliegenden Fehlerfall entspricht ($l_P \geq 0$) bzw. dass dies nicht zutrifft ($l_P < 0$). In Cyan ist die prozentuale Anzahl aller Experimente eines Fehlerfalls mit $l_P < 0$ dargestellt. Weiterhin ist in blau gestrichelt der Erwartungswert von $|l_P|$ für den Fall $l_P < 0$ abgebildet.

6 Erkennen von ausgefallenen Lautsprechern am Ringspaltplenum

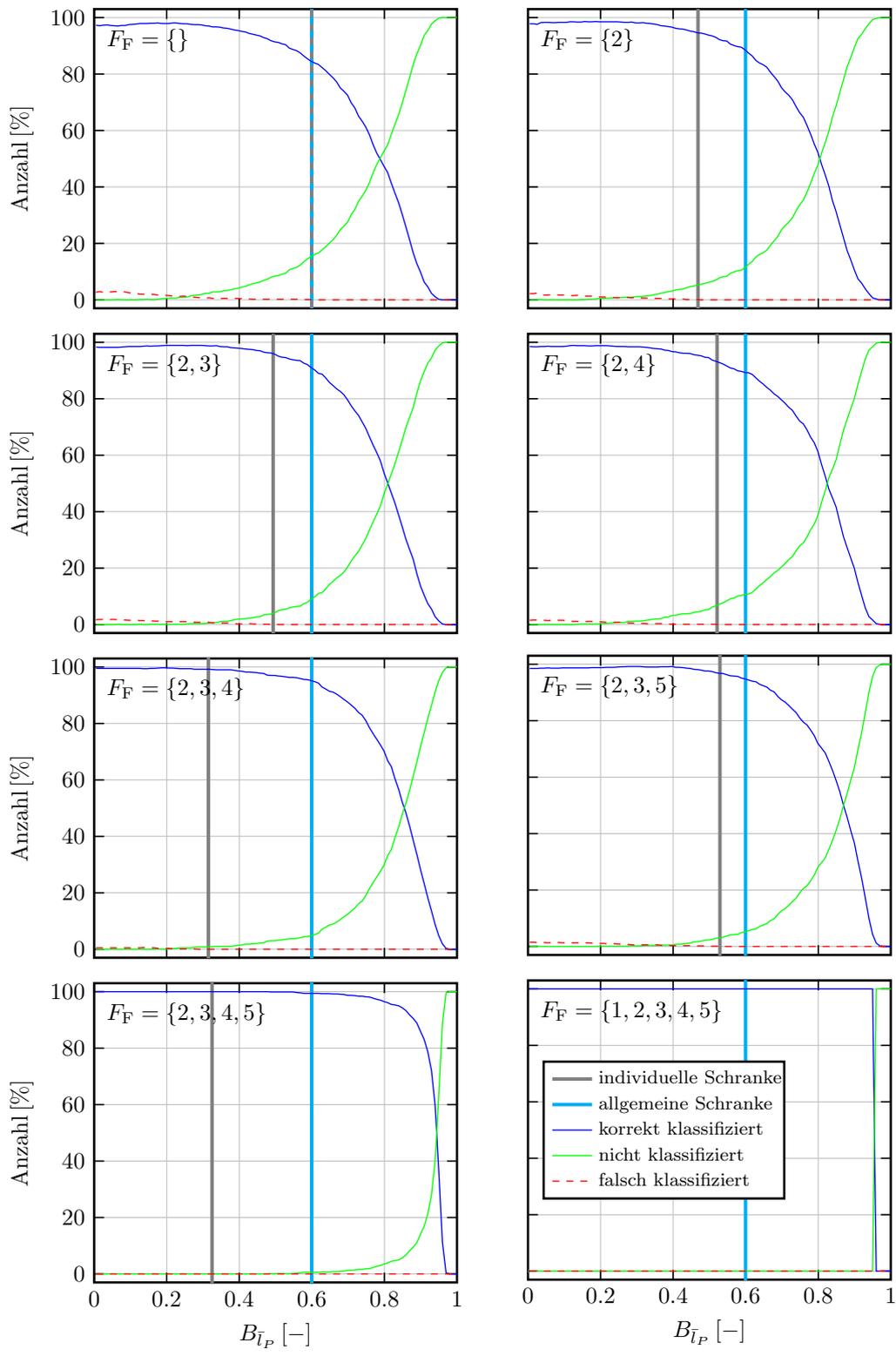


Abbildung 6.8: Klassifikationsgüte in Abhängigkeit vom Schwellenwert B_{IP} für alle untersuchten Fehlerfälle

$B_{\bar{I}_P}$	Fehlerfall							
	{}	{2}	{2,3}	{2,4}	{2,3,4}	{2,3,5}	{2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}
allgemein	84.5	88.4	90.9	89.3	95.1	94.7	99.4	100
individuell	84.5	94.6	96.0	93.0	99.2	96.8	100	100

Tabelle 6.5: Prozentuale Anzahl der korrekt klassifizierten Experimente für alle Fehlerfälle, $B_{\bar{I}_P}$ wurde entsprechend der in Abb. 6.8 dargestellten Schranken gewählt.

zu den restlichen Hypothesen als relativ wahrscheinlich eingestuft.

Für alle Fehlerfälle liegt die rote Linie für $t > 50$ ms deutlich oberhalb der grünen Linie. Im Mittel weisen somit Experimente, bei denen der korrekten Modellhypothese die höchste Hypothesenwahrscheinlichkeit zugeordnet wurde, eine höhere Klassifikationssicherheit auf, als Experimente, bei denen eine falsche Modellhypothese die höchste Wahrscheinlichkeit aufweist. Dieser Umstand erlaubt es, durch geeignete Wahl einer Schranke $B_{\bar{I}_P}$, Fehlklassifikationen zu vermeiden. Abbildung 6.8 zeigt die Klassifikationsergebnisse in Abhängigkeit des Schwellenwertes $B_{\bar{I}_P}$. Die grau gekennzeichnete Schranke wird für jeden Fehlerfall individuell so festgelegt, dass

- möglichst viele Experimente korrekt klassifiziert werden
- und gleichzeitig keines der zugehörigen Experimente falsch klassifiziert wird,
- also alle nicht korrekt klassifizierten Experimente der Kategorie nicht klassifiziert zugeordnet werden.

Da für den Fehlerfall $F_M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ im Bereich zwischen $0 < B_{\bar{I}_P} < 0.95$ alle Experimente korrekt klassifiziert werden, wurde hier auf das Markieren einer einzelnen individuellen Schranke verzichtet. Die cyan eingefärbte Schranke wurde auf den Wert der grau eingefärbten Schranke des Fehlerfalls $F_M = \{\}$ gelegt, $B_{\bar{I}_P} = 0.6$, welche den höchsten Schwellenwert aller Fehlerfälle aufweist. Diese Schranke erfüllt somit für alle Fehlerfälle die Bedingung, dass kein Experiment falsch klassifiziert wird. Tabelle 6.5 zeigt die Anzahl der korrekt klassifizierten Experimente in Abhängigkeit des Fehlerfalls für beide Schranken (grau und cyan). Da sowohl für die cyan als auch die grau eingefärbte Schranke im jeweiligen Fehlerfall kein Experiment falsch klassifiziert wurde, werden alle Experimente, welche nicht korrekt klassifiziert werden können, in die Kategorie „nicht klassifiziert“ eingeordnet. Für die cyan eingefärbte Schranke lässt sich erneut eindeutig der Trend erkennen, dass mit größer werdender Anzahl ausgefallener Rohre, die Menge an korrekt klassifizierten Experimenten steigt. Dieser Trend zeichnet sich, wenn auch nicht ganz so eindeutig, für die grau eingefärbte Schranke ebenfalls ab. Es lässt sich weiterhin erkennen, dass bei Anwendung einer gemeinsamen Schranke für alle acht Fehlerfälle die Anzahl der korrekt klassifizierten Experimente nur geringfügig geringer ausfällt, als bei Anwendung der individuellen Schranken.

Da im Fehlerfall $F_M = \{\}$ kein Detonationsrohr ausfällt, ist es nicht von Relevanz, ob korrekt oder nicht klassifiziert wird, so lange der vorliegende Fehlerfall nicht falsch klassifiziert wird. Erst wenn mindestens ein Rohr ausgefallen ist, muss der Fehlerfall korrekt klassifiziert werden, um anschließend Maßnahmen ergreifen zu können, die betroffenen Rohre wieder in den Verbrennungsprozess aufzunehmen. Sollte in einem solchen Fall ein Experiment in die Kategorie: „nicht klassifiziert“ eingestuft werden, kann die Fehlererkennung für weitere Feuerzyklen fortgesetzt werden, bis schließlich eine Klassifikation erfolgt.

Aus den gezeigten Ergebnissen, der beiden untersuchten Konfigurationen, lassen sich folgende Eigenschaften des Mehrfilteransatzes zur Fehlererkennung zusammenfassen:

- Falls das anregende Detonationssignal als deterministischer Prozess betrachtet wird, können alle Fehlerfälle mit einer beliebigen Schranke $0 < B_{\bar{l}_P} < 0.946$ korrekt klassifiziert werden (vergleiche Tab. 6.4).
- Falls die stochastische Signalmodifikation entsprechend Abb. 6.5 das Anregungssignal beeinflusst, wird dadurch die Klassifikationsaufgabe erschwert. Trotz der großen Modellsicherheit durch das stochastische Anregungssignal, gelingt es mit dem vorgestellten Fehlererkennungsalgorithmus mit einer hohen Wahrscheinlichkeit den jeweils vorliegenden Fehlerfall innerhalb von zwei Feuerzyklen zu detektieren, wobei im konkreten Fall $B_{\bar{l}_P} = 0.6$ gilt.

Konfiguration mit Totzeit

In dieser Konfiguration soll untersucht werden, wie der Fehlererkennungsalgorithmus mit unbekanntem Totzeiten umgehen kann. Dafür wird der kritischste Fehlerfall $F_M = \{\}$ untersucht und das fünfte Rohr mit einer zusätzlichen Totzeit $t_{\text{off}}(\kappa = 5) > 0$ ms versehen. Ansonsten entspricht diese Konfiguration der bereits untersuchten nominellen Konfiguration. Abbildung 6.9a zeigt den zeitlichen Verlauf von l_P für unterschiedliche Werte von $t_{\text{off}}(5)$ im Bereich zwischen 0.1 ms und 0.9 ms. Bis zu einer Totzeit von $t_{\text{off}}(5) \leq 0.5$ ms gilt im

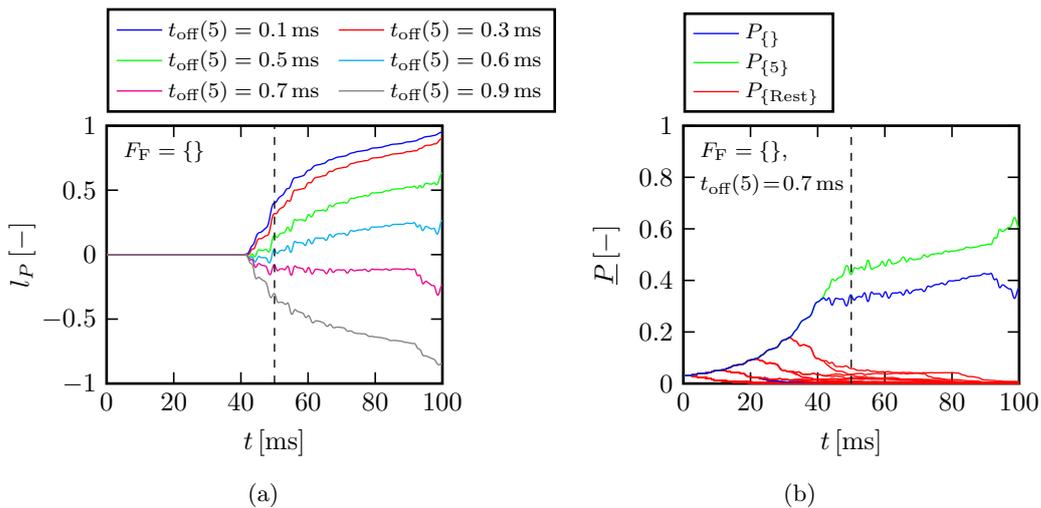


Abbildung 6.9: a) Zeitverlauf von l_P über zwei Feuerzyklen, für unterschiedliche Totzeiten im Steuersignal des 5. Lautsprechers
 b) Zeitverlauf von P über zwei Feuerzyklen, für eine Totzeit von $t_{\text{off}}(5) = 0.7$ ms im Steuersignal des 5. Lautsprechers

dargestellten Zeitfenster $l_P \geq 0$, allerdings fällt l_P mit steigender Totzeit immer weiter ab. Für diese Fälle kann durch geeignete Wahl einer Schranke $B_{\bar{l}_P}$ stets der korrekte Fehlerfall klassifiziert werden. Bei einer Totzeit von 0.6 ms ändert sich die Situation, da in einigen Zeitbereichen $l_P < 0$ gilt. Da der Betrag des minimalen negativen Wertes von l_P kleiner als der maximale positive Wert von l_P ist, kann weiterhin eine Schranke $B_{\bar{l}_P}$ angegeben werden, welche eine korrekte Klassifikation des vorliegenden Fehlerfalls erlaubt. Für eine Totzeit $t_{\text{off}}(5) \geq 0.6$ ms gilt im gesamten dargestellten Zeitbereich $l_P \leq 0$, wodurch eine korrekte Klassifikation des vorliegenden Fehlerfalls nicht mehr möglich ist. Für noch größere Totzeiten verschlechtert sich die Situation weiter, vergleiche den Fall $t_{\text{off}}(5) = 0.7$ ms bzw. $t_{\text{off}}(5) = 0.9$ ms.

In Abb. 6.9b lässt sich gut erkennen, wie sich eine Totzeit von 0.7 ms am fünften Rohr auf den Zeitverlauf der Hypothesenwahrscheinlichkeiten \underline{P} auswirkt. Zum Zeitpunkt $t = 40$ ms und $t = 90$ ms feuert jeweils der totzeitbehaftete fünfte Lautsprecher. Bis $t = 40$ ms wurden alle Modellhypothesen außer $F_M = \{\}$ und $F_M = \{5\}$ diskriminiert. Somit weisen lediglich die zugehörigen Hypothesenwahrscheinlichkeiten $P_{\{\}}$ und $P_{\{5\}}$ signifikante Wahrscheinlichkeitswerte auf. Für die Dauer der Totzeit ($40 \text{ ms} \leq t \leq 40.7 \text{ ms}$) entspricht das reale Steuersignal für den fünften Lautsprecher exakt der Annahme, dass das fünfte Rohr ausgefallen ist. Für $t > 40.7$ wird der Lautsprecher mit dem Detonationssignal u_{det} angesteuert. Somit entspricht dieses Signal ab diesem Zeitpunkt nicht mehr der Anregung der Fehlerhypothese $F_M = \{5\}$. Aufgrund der Totzeit unterscheidet es sich aber auch signifikant von der Anregung der eigentlich korrekten Fehlerhypothese $F_M = \{\}$. Diese beiden Effekte führen dazu, dass der Fehlerhypothese $F_M = \{5\}$ eine höhere Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird als der eigentlich korrekten Hypothese $F_M = \{\}$. Ab $t > 90$ wiederholt sich der gerade beschriebene Ablauf, da der fünfte Lautsprecher erneut zeitverzögert feuert. Die Wahrscheinlichkeit der Fehlerhypothese $F_M = \{5\}$ wird somit noch weiter angehoben.

Diskussion zur Anwendbarkeit in einer realen Detonationsbrennkammer

Die präsentierte Methodik zur Fehlererkennung verwendet sowohl zur Modellierung des akustischen Verhaltens als auch des dynamischen Verhaltens der Lautsprecher ein lineares physikalisches Modell. Im Gegensatz zur Modellierung des Lautsprecherhaltens erscheint eine lineare Modellierung der stark nichtlinearen Verbrennungsvorgänge innerhalb eines realen Detonationsrohrs ausgeschlossen. Somit müsste für eine Anwendbarkeit des linearen akustischen Modells, in Kombination mit einem realen Detonationsrohr, die Anregung der akustischen Schnelle am Ausgang des Detonationsrohrs direkt vermessen werden. Diese Anregung könnte dann als Systemeingang des akustischen Modells dienen, wodurch eine Modellierung der Verbrennungsvorgänge innerhalb eines Detonationsrohres entfallen würde.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob durch die in Abb. 6.5 dargestellte Stochastizität des Anregungssignals der stochastische Charakter eines realen Detonationsvorgangs in ausreichendem Maße abgebildet wird. Da zum Entstehungszeitpunkt dieser Arbeit diesbezüglich keine Daten verfügbar sind, kann diese Frage nicht abschließend beantwortet werden und müsste gegebenenfalls in weiterführenden Arbeiten untersucht werden.

Da das präsentierte Verfahren recht anfällig für unbekannte Totzeiten ist, müsste weiterhin an einer realen Detonationsbrennkammer überprüft werden, wie stark der stochastische Charakter der Totzeit eines realen Detonationsvorgangs ausgeprägt ist und in wie fern dies mit dem präsentierten Algorithmus verträglich ist.

6.3 Fehlererkennung mittels neuronaler Netze

In diesem Teil der Arbeit wird eine alternative Fehlererkennungsmethodik vorgestellt. Diese wird jedoch nicht, wie im vorherigen Abschnitt, auf Grundlage eines physikalischen Modells aufgebaut, sondern verwendet ein datenbasiertes künstliches neuronales Netz. Mit dieser Methodik werden im Wesentlichen zwei Herausforderungen adressiert, die sich bei der Anwendung der zuvor beschriebenen Mehrfiltermethode zur Fehlererkennung ergeben:

- Mit der im vorherigen Abschnitt präsentierten Fehlererkennungsmethodik konnten gute Ergebnisse erzielt werden, solange keine zu große, nicht modellierte Totzeit t_{off} bei der Ansteuerung der Lautsprecher angenommen wurde. Der Grund dafür liegt darin, dass eine stochastische Totzeit nicht direkt in den linearen Modellen der Mehrfiltermethode

berücksichtigt werden kann. Im Fall von neuronalen Netzwerken ist dies jedoch möglich, solange der zufällige Charakter der Totzeit in den Trainingsdaten abgebildet wird.

- Die im vorherigen Abschnitt präsentierte Methode verwendet ein lineares Modell zur Fehlererkennung. Im Fall des in dieser Arbeit untersuchten akustischen Prüfstands ließ sich die zugehörige Modellstruktur gut aus der akustischen Wellengleichung ableiten. Unbekannte Parameter dieses Modells konnten anschließend experimentell identifiziert werden. Wie gut diese Vorgehensweise bei den Verhältnissen in einer realen Detonationskammer angewendet werden kann, lässt sich nicht mit Gewissheit beurteilen. Die in 4.3 beschriebene Analyse lässt zwar eine Anwendbarkeit vermuten, allerdings stellt diese Analyse die reale Situation nur sehr vereinfacht dar. Für die Anwendung eines neuronalen Netzes zur Fehlererkennung ist die Annahme der Gültigkeit eines linearen Modells nicht notwendig.

Im Folgenden wird zunächst die Zielstellung der Fehlererkennung definiert sowie der gewählte Aufbau des zur Fehlererkennung gewählten neuronalen Netzes beschrieben. Zusätzlich wird erläutert, wie die Eingangsmerkmale des neuronalen Netzes aus den Sensordaten generiert werden. Anschließend werden die Experimente erläutert, welche durchgeführt wurden, um die zum Training des neuronalen Netzes notwendigen Daten zu generieren. Abschließend wird die Trainingsphase und die, bei Anwendung des trainierten Netzes im Rahmen der Fehlererkennung, erzielten Ergebnisse diskutiert.

6.3.1 Zielstellung

Die Ansteuerungssignale für die Lautsprecher weisen wie in Abschnitt 6.2 den in Abb. 6.5 verdeutlichten zufälligen Charakter auf. Die Lautsprecher am Prüfstand spielen diese Signale entsprechend dem Muster $M_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ab, wobei die zugehörigen Feuerzeitpunkte durch (6.10) gegeben sind. An dieser Stelle wird jedoch im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt die Totzeit t_{off} als stochastische Größe eingeführt, welche als gleichverteilt im Bereich zwischen 0 ms und 5 ms angenommen wird. Für jedes durch einen Lautsprecher simulierte Detonationsereignis ergibt sich somit eine individuelle, zufällige Verzögerung des Detonationssignals innerhalb des definierten Bereichs.

Die nominelle Feuerfrequenz beträgt weiterhin 20 Hz. Dadurch werden in einem vollständigen Feuerzyklus bei einer Abtastfrequenz von $f_s = 10$ kHz von jedem Mikrofon 500 Messpunkte aufgezeichnet. Um eine Vergleichbarkeit zum vorherigen Abschnitt zu ermöglichen, werden dem neuronalen Netz Informationen aus zwei aufeinanderfolgenden Feuerzyklen, also von 1000 Messzeitpunkten, zur Verfügung gestellt. Im vorherigen Abschnitt wurden 10 Mikrofone verwendet, um eine zuverlässige Fehlererkennung zu garantieren. Im Fall der in diesem Abschnitt präsentierten Methode lässt sich auch bei Verwendung von lediglich zwei benachbarten Mikrofonen ein sehr zuverlässiger Fehlererkennungsalgorithmus aufbauen, siehe unten. Weiterhin wird die Fehlererkennungsaufgabe erweitert, um zu zeigen, dass der hier präsentierte Ansatz auch mit unterschiedlichen Feuerfrequenzen umgehen kann $f_f \in \{18 \text{ Hz}, 20 \text{ Hz}, 22 \text{ Hz}\}$.⁹ Da das präsentierte neuronale Netz eine feste Dimension des Eingangstensors voraussetzt und das gleiche Netz zur Klassifikation bei allen drei Frequenzen verwendet werden soll, werden für alle drei betrachteten Feuerfrequenzen Messdaten von 1000 aufeinander folgenden Messzeitpunkten verwendet.

Zusammenfassend soll das neuronale Netz in der Lage sein, anhand der Messdaten von zwei Mikrofonen eine beliebige Anzahl von ausgefallenen Lautsprechern zu erkennen, wobei

⁹Dies wurde für die Mehrfiltermethode nicht untersucht, es ist jedoch davon auszugehen, dass diese Methode mit unterschiedlichen Feuerfrequenzen gut umgehen kann, da dort die Feuerfrequenz direkt im physikalischen Modell berücksichtigt wird.

das Steuersignal der Lautsprecher einen zufälligen Charakter sowohl im Signalverlauf als auch der Totzeit aufweist und die Feuerfrequenz der Rohre variabel ist.

6.3.2 Auswahl der Eingangsmerkmale und Aufbau des neuronalen Netzes

Auswahl der Eingangsmerkmale

Die Struktur des im Folgenden vorgestellten neuronalen Netzes erlaubt prinzipiell auch die Einbindung von Messdaten einer größeren Anzahl von Mikrofonen. Aus diesem Grund wird der Aufbau der Eingangsmerkmale zunächst für eine beliebige Anzahl von Mikrofonen beschrieben und anschließend auf den hier untersuchten Fall mit zwei Mikrofonen reduziert. Sollte sich bei der Anwendung dieser Methodik zur Fehlererkennung an einer realen Detonationsbrennkammer herausstellen, dass bei Verwendung zweier Mikrofone keine zufriedenstellenden Ergebnisse bei der Fehlererkennung erzielt werden können, kann das Netzwerk somit leicht angepasst werden, um auch Information von weiteren Sensoren zu berücksichtigen.

Die in Abschnitt 3.5.3 eingeführten *2-D convolutional layer* erlauben es, den Zusammenhang von Eingangsmerkmalen in zwei Dimensionen zu berücksichtigen. Dafür müssen die Eingangsmerkmale der i -ten Stichprobe in dem Tensor $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{n_{x_x} \times n_{x_y} \times n_{x_z}}$ zusammengefasst werden. Als zeitliche Dimension wird die x -Koordinate gewählt, so dass $n_{x_x} = 1000$ folgt. Der örtliche Zusammenhang der Messsignale wird in der y -Dimension abgebildet. Dabei entspricht n_{x_y} gerade der Anzahl der zu berücksichtigenden Mikrofone $n_{x_y} = n_y$. Die aufgezeichneten Zeitschriebe der Mikrofone werden also spaltenweise nebeneinander angeordnet, wobei benachbarte Spalten gerade Zeitschriebe von benachbarten Mikrofonen enthalten. Da jedes Mikrofon zu jedem Abtastzeitpunkt ein skalarwertiges Messsignal liefert, ergibt sich $n_{x_z} = 1$.

Aufbau des neuronalen Netzes

Das neuronale Netz muss so aufgebaut werden, dass basierend auf den Eingangsmerkmalen in \mathbf{X}_i zwischen allen 32 möglichen Fehlerfällen, welche bereits in Abschnitt 6.2 vorgestellt wurden, unterschieden werden kann. Dafür muss das neuronale Netz am Ausgang einen Klassifikationsvektor $\bar{y}_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{32}$ generieren, für welchen gilt $\|\bar{y}_i\|_1 = 1$. Dieser kann somit als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden. Wird nun jedem Element des Vektors genau einer der 32 Fehlerfälle zugeordnet, beschreibt jedes dieser Elemente die Wahrscheinlichkeit des Vorliegens eines bestimmten Fehlerfalls.

Der vollständige Aufbau des hier gewählten neuronalen Netzes bei Verwendung von zwei Mikrofonen ist in Abb. 6.10 dargestellt und verwendet die in Abschnitt 3.5.3 vorgestellten *layer*-Arten. Um den örtlichen und zeitlichen Zusammenhang der Messdaten in \mathbf{X} zu berücksichtigen, werden zunächst zwei *2-D convolutional layer* eingesetzt, welche jeweils mit einem *max-pooling layer* zum *downsampling* kombiniert werden.¹¹ Das in Abschnitt 3.5.3 eingeführte *2-D convolutional layer* beinhaltet keine Nichtlinearitäten und beschreibt somit lediglich eine lineare Abbildung. Um Nichtlinearitäten bereits im Faltungsprozess einzubringen, wird zusätzlich auf jedes Element, der durch das *convolutional layer* gefalteten Daten, die ReLu-Nichtlinearität (3.109c) angewendet. Obwohl diese Nichtlinearität somit dem jewei-

¹⁰Die Anzahl der Optimierungsparameter in einem Layer entspricht gerade der Anzahl der zu trainierenden Gewichte und ergibt sich im Fall eines *2D conv. layer* zu: (Anzahl Filter \cdot (Gr. Filter + 1)) und im Fall eines *dense layer* zu: (Anzahl Neuronen \cdot (Gr. Eingangsmerkmale + 1)). Durch die Addition der Eins werden die jeweiligen Bias-Gewichte berücksichtigt.

¹¹Die Faltung durch das erste *2D conv. layer* reduziert die Größe des Eingangstensors in y -Richtung von 2 auf 1. Somit erfolgt im zweiten *2D conv. layer* nur noch eine eindimensionale Faltung.

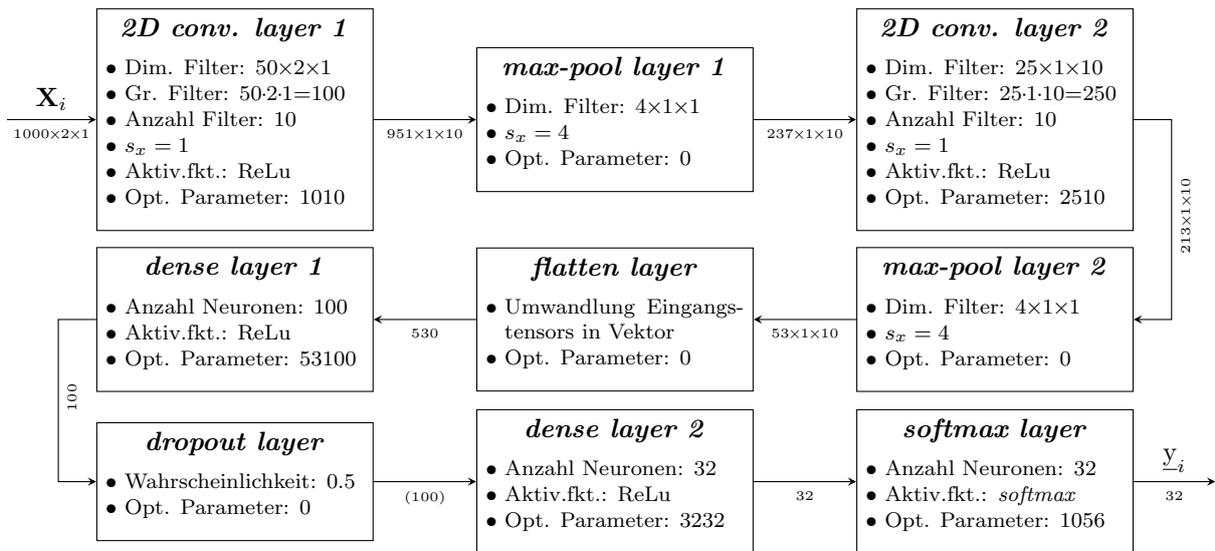


Abbildung 6.10: Aufbau des neuronalen Netzes zur Fehlererkennung. Die Größe der Eingangsmerkmale in ein *layer* ist unter dem jeweiligen Pfeil angegeben. Diese Größe sowie die Größe der Filter ist immer in folgender Form angegeben: Ausdehnung in $x \times$ Ausdehnung in $y \times$ Ausdehnung in z . Die Anzahl der Ausgangsmerkmale des *dropout layer* ist in Klammern angegeben, da diese während der Trainingsphase durch die „*dropout*“-Methode und die gewählte Wahrscheinlichkeit etwa 50 % geringer ausfällt. Im Fall der *conv. layer* definiert die Anzahl der verwendeten Filter die Dimension in z -Richtung nach der Faltung. Die Größe des Filters in den *max-pool layer* bezieht sich auf die x - y -Ebene. Das gleiche Filter wird auf jede Ebene entlang der z -Richtung angewendet. Die Variable s_x bezeichnet den Parameter für die translatorische Verschiebung der Filter in x -Richtung. Weiterhin ist für jedes *layer* die damit verbundene Anzahl an Optimierungsparametern angegeben.¹⁰

ligen *convolutional layer* nachgeschaltet ist, wird diese aus Übersichtsgründen in Abb. 6.10 mit in das *convolutional layer* aufgenommen.

Durch zweimaliges Falten und *downsampling* werden die Eingangsmerkmale in zeitlicher und örtlicher Dimension von 1000×2 auf 53×1 reduziert und die dabei gewonnenen Informationen werden in der Merkmalsdimension z gespeichert, welche sich von 1 auf 10 erhöht. Nach diesen Transformationen wird der örtliche und zeitliche Zusammenhang aufgelöst und alle Merkmale werden in einem Vektor abgelegt, welcher 530 Elemente umfasst. Diese Transformation erfolgt im sogenannten *flatten layer*. Der Vektor wird anschließend durch ein *dense layer* propagiert, wobei die Dimension des Vektors auf 100 Elemente reduziert wird. Um ein *overfitting* des gesamten neuronalen Netzes zu vermeiden, wird vor das nächste *dense layer* ein *dropout layer* geschaltet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neuron vom *dropout* in der Trainingsphase betroffen ist, wurde entsprechend dem Vorschlag in [Srivastava et al., 2014] zu 0.5 gewählt. Das nachfolgende *dense layer* reduziert die Größe des Merkmalsvektors weiter auf 32 Elemente, womit bereits die gewünschte Dimension des Ausgangsvektors \underline{y} erreicht ist. Abschließend erfolgt durch das *softmax layer* die Normierung des Ausgangsvektors, sodass dieser als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden kann. Das beschriebene Netzwerk weist insgesamt 60908 Optimierungsparameter auf, $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^{60908}$. Da die beschriebene Netzwerkstruktur gute Klassifikationsergebnisse liefert, siehe unten, und das Training

eines solchen Netzwerks sehr rechenaufwändig ist, wurden im Rahmen dieser Arbeit keine Untersuchungen zur Optimierung der Hyperparameter, wie die Größe der Filter oder Anzahl der Layer, vorgenommen.

6.3.3 Generierung der Trainings- und Testdaten

Die Gewichte des zuvor beschriebenen neuronalen Netzes müssen anhand von Messdaten trainiert werden, um die gewünschte Fehlererkennungsaufgabe zu lösen. Da das Netz alle Trainingsinformationen aus diesen Trainingsdaten zieht, sollte der verwendete Datensatz für jeden zu klassifizierenden Fehlerfall eine größere Menge repräsentativer Stichproben enthalten. Für das gewählte Feuermuster $M_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wurde zu diesem Zweck für jeden der 32 möglichen Fehlerfälle und jede der drei untersuchten Feuerfrequenzen (18 Hz, 20 Hz, 22 Hz) jeweils für die Dauer von 219.8s die Messdaten des ersten und zweiten Mikrofons in Abb. 4.2 mit einer Abtastrate von 10 kHz aufgezeichnet.¹² Ein Experiment umfasst somit Messdaten von $2.198 \cdot 10^6$ Zeitpunkten. Um die so erhaltenen Messdaten mit dem in Abb. 6.10 gezeigten Netz zu verarbeiten, wird jedes dieser Experimente in 2198 Zeitabschnitte à 1000 Messzeitpunkte unterteilt. Ein Abschnitt beschreibt eine Stichprobe und die i -te Stichprobe wird mit $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{1000 \times 2}$ bezeichnet. Jeder Stichprobe wird ein Vektor $\underline{y}_i \in \mathbb{R}^{32}$ zugeordnet. Je nach vorliegendem Fehlerfall wird einem Element in \underline{y}_i der Wert eins zugewiesen, wohingegen alle weiteren Elemente zu null gesetzt werden (*one-hot encoding*). Die konkrete Zuordnung zwischen einem Fehlerfall und einem Element in \underline{y}_i muss lediglich eindeutig sein und hat ansonsten keinerlei Einfluss auf die erreichbare Fehlererkennungsgüte. Es ergeben sich für alle durchgeführten Experimente $n_{\text{gt}} = 32 \cdot 3 \cdot 2198 = 211008$ Stichproben, die mit der Struktur des zu trainierenden Netzwerks kompatibel sind. Alle Stichproben werden in den Matrizen $\mathbf{X}_{\text{gt}} = [\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{n_{\text{gt}}}]$ bzw. $\mathbf{Y}_{\text{gt}} = [\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{n_{\text{gt}}}]$ zusammengefasst, welche gemeinsam den Datensatz der *ground truth* $\mathbf{D}_{\text{gt}} = \{\mathbf{X}_{\text{gt}}, \mathbf{Y}_{\text{gt}}\}$ bilden. Aus diesem Datensatz wird äquivalent zu den Ausführungen in Abschnitt 3.5.2 der Trainingsdatensatz $\mathbf{D}_{\text{tr}} = \{\mathbf{X}_{\text{tr}}, \mathbf{Y}_{\text{tr}}\}$ und der Testdatensatz $\mathbf{D}_{\text{te}} = \{\mathbf{X}_{\text{te}}, \mathbf{Y}_{\text{te}}\}$ in dem Verhältnis 70 % zu 30 % gebildet. Der Trainingsdatensatz beinhaltet somit 147705 Stichproben und der Testdatensatz 63303 Stichproben. Der Trainingsdatensatz wird im Folgenden verwendet, um das neuronale Netz anzulernen und anhand des Testdatensatzes wird das Klassifikationsergebnis des trainierten Netzes verifiziert.

6.3.4 Training des neuronalen Netzes und Qualität der Fehlererkennung

Für das Training und die Validierung des neuronalen Netzes werden die zu minimierenden Gütefunktionen

$$J_{\text{tr}}(\underline{\omega}, \lambda_{\text{L1}}) = -\text{Spur} \left(\mathbf{Y}_{\text{tr}}^T \log \left(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{tr}} \right) \right) + \lambda_{\text{L1}} \cdot \|\underline{\omega}\|_1 \quad , \quad (6.13a)$$

$$J_{\text{te}}(\underline{\omega}, \lambda_{\text{L1}}) = -\text{Spur} \left(\mathbf{Y}_{\text{te}}^T \log \left(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{te}} \right) \right) + \lambda_{\text{L1}} \cdot \|\underline{\omega}\|_1 \quad , \quad (6.13b)$$

entsprechend (3.115) definiert, wobei der Faktor λ_{L1} für die L1-Regularisierung zu 0.01 gewählt wurde. Für die Optimierung der Parameter des neuronalen Netzes wurde das *stochastic gradient descent* Verfahren ADAM verwendet, vergleiche Abschnitt 3.5.2. Zur Aufteilung des Trainingsdatensatzes in mehrere *batches*, wurde eine *batch size* von 32000 gewählt, wodurch der Speicher der verwendeten Recheneinheit voll ausgenutzt wird. Mit den so aufgeteilten Datensätzen wurde das in Abb. 6.10 dargestellte Netzwerk trainiert.

¹²Diese Zeitspanne ergibt sich durch die Größe des verfügbaren Arbeitsspeichers des verwendeten Datenerfassungssystems.

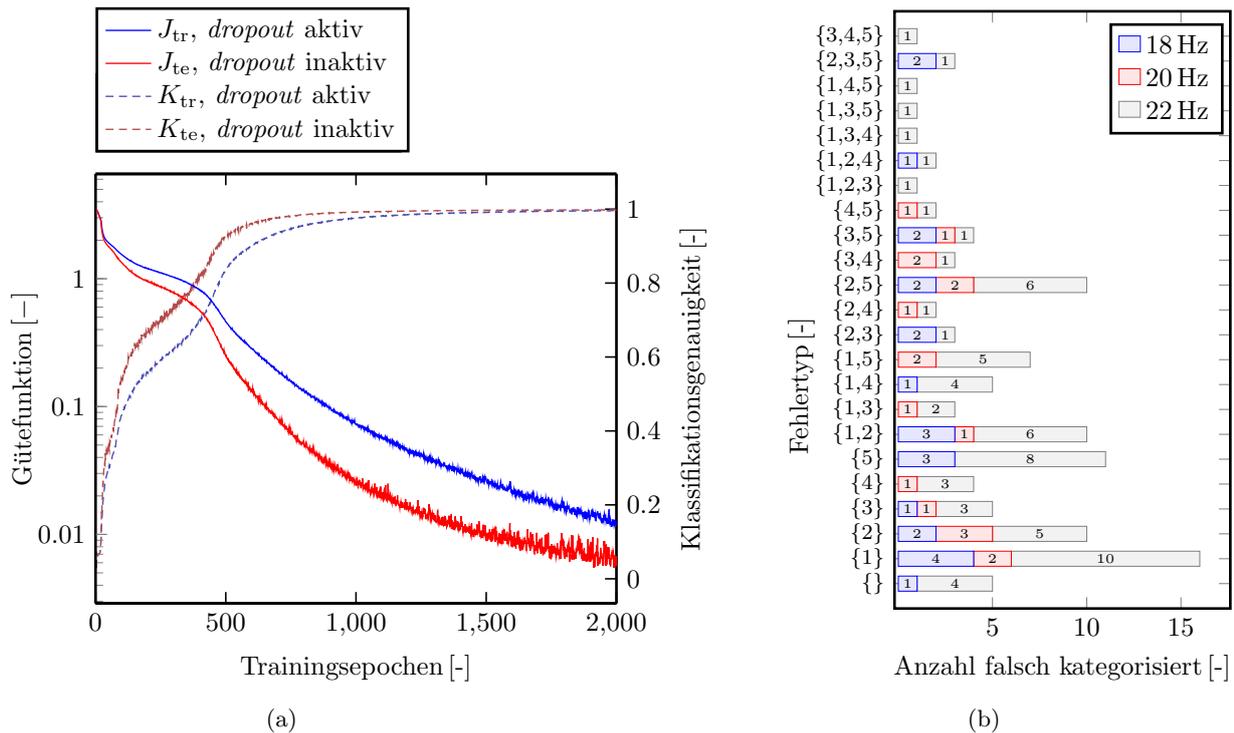


Abbildung 6.11: a) Verlauf der Gütefunktion und Klassifikationsgenauigkeit des Trainings- und Testdatensatzes über 2000 Trainingsepochen
 b) Falschkategorisierungen aufgeschlüsselt nach Fehlertyp und Feuerfrequenz

Abbildung 6.11a zeigt den Verlauf der Gütefunktionen der Trainings- und Testdaten über 2000 Trainingsepochen. Der Verlauf der Gütefunktion der Testdaten wurde lediglich für die hier gezeigte Auswertung bestimmt und wurde nicht für die Gradientenberechnung im Rahmen der Optimierung verwendet. Dabei ist zu beachten, dass die Auswertung der Gütefunktion im Fall der Testdaten mit deaktiviertem *dropout layer* erfolgt, wobei die Trainingsdaten im Rahmen der Optimierung stets mit aktiviertem *dropout layer* prädiziert werden müssen. Da die Optimierung des Netzes sehr zeitaufwändig ist, wurde auf zusätzliche und für die Optimierung nicht notwendige Prädiktionsschritte des Testdatensatzes mit aktiviertem *dropout layer* verzichtet. Eine direkte quantitative Vergleichbarkeit zwischen der Gütefunktion der Trainings- und Testdaten ist aus diesem Grund nicht gegeben.¹³ Somit erklärt sich auch, weshalb die Werte von J_{te} stets unterhalb von J_{tr} liegen, obwohl das Netz anhand der Trainingsdaten trainiert wird.¹⁴ Am Verlauf der beiden Gütefunktionen ist zu erkennen, dass innerhalb der 2000 Trainingsepochen eine deutliche Reduktion der zugehörigen Funktionswerte um fast drei Größenordnungen erzielt werden konnte. Der qualitative Verlauf der beiden Gütefunktionen ähnelt sich dabei stark, woraus abgeleitet werden kann, dass die Trainingsdaten den grundsätzlichen Charakter der zu untersuchenden Problemstellung gut abbilden können. Dies lässt einen geringen Klassifikationsfehler des trainierten Netzwerks sowohl im Trainings- als auch im Testdatensatz vermuten.

¹³Es ist allerdings auch nicht zu erwarten, dass ein solcher quantitativer Vergleich einen relevanten Informationsgewinn liefern würde.

¹⁴Bei einer Prädiktion des Trainingsdatensatzes mit deaktiviertem *dropout layer* würde sich eine andere Situation ergeben. In diesem Fall würden die Werte für J_{tr} tendenziell unterhalb derer für J_{te} liegen.

Um dies zu überprüfen, wird ein Maß für die Klassifikationsgenauigkeit $K_{\text{tr}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $K_{\text{te}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eingeführt, welches für alle Stichproben des jeweiligen Datensatzes berechnet, wie häufig im Mittel der Fehlerfall mit der höchsten prädizierten Wahrscheinlichkeit gerade dem wirklich vorliegenden Fehlerfall entspricht. Ein Wert von null für dieses Maß bedeutet, dass jede Stichprobe falsch klassifiziert wurde, wohingegen bei einem Wert von eins allen Stichproben der korrekte Fehlerfall zugeordnet wurde. Der Verlauf dieser beiden Größen ist ebenfalls in Abb. 6.11a dargestellt. Die Ergebnisse für den Trainingsdatensatz wurden wie zuvor mit aktivem *dropout layer* berechnet, wohingegen für die Prädiktion des Testdatensatzes das *dropout layer* deaktiviert wird. Wie zu erwarten, verbessert sich die Klassifikationsgenauigkeit über die 2000 Trainingsepochen sowohl für die Trainingsdaten als auch die Testdaten signifikant. Eine Auswertung der Klassifikationsgenauigkeit des vollständig trainierten Netzwerks mit deaktiviertem *dropout layer* zeigt, dass alle Stichproben des Trainingsdatensatzes korrekt klassifiziert werden können. Für den Testdatensatz konnten 99.82 % aller Stichproben dem wirklich vorliegenden Fehlerfall korrekt zugeordnet werden. Über beide Datensätze ergibt sich somit eine Klassifikationsgenauigkeit von über 99.94 %. Abbildung 6.11b verdeutlicht, wie sich die falsch klassifizierten Stichproben, aufgeschlüsselt nach den drei Feuerfrequenzen, über die Fehlerfälle verteilen. Wie bereits bei der Fehlererkennung mittels Mehrfiltermethode, zeigt sich folgende Tendenz: Je weniger Lautsprecher ausgefallen sind, desto schwieriger wird es, eine fehlerfreie Klassifikation durchzuführen. So konnten beispielsweise für alle Fälle mit mehr als drei ausgefallenen Lautsprechern alle Stichproben korrekt klassifiziert werden. Weiterhin zeichnet sich ab, dass insbesondere bei einer Feuerfrequenz von 22 Hz häufiger Klassifikationsfehler auftreten. Die meisten Fehlklassifikationen ergeben sich für den Fehlerfall, in dem das erste Rohr ausfällt. Der vollständige Datensatz von Test und Trainingsdaten enthält 6594 Stichproben von jedem Fehlerfall. Damit ergibt sich für diesen speziellen Fehlerfall eine Klassifikationsgenauigkeit von 99.75 %. Werden nur die Testdaten betrachtet, ergibt sich eine Genauigkeit von 99.2 %.

Die hier genannten Klassifikationsgenauigkeiten lassen sich in der realen Anwendung leicht erhöhen, indem ein Fehlerfall erst als vorliegend angenommen wird, wenn das neuronale Netz für mehrere Stichproben jeweils den gleichen Fehlerfall prädiziert. Beispielhaft sei hier angenommen, dass am Prüfstand der kritischste Fehlerfall, bei dem das erste Rohr ausfällt, auftritt. Zur Feststellung des vorliegenden Fehlerfalls werden aus den Messdaten des fehlerhaften Prozesses $i \in \mathbb{N}$ Stichproben generiert, wobei jede Stichprobe die vom neuronalen Netz geforderten 1000 Messzeitpunkte enthält. Dafür muss also eine $100 \text{ ms} \cdot i$ andauernde Messung durchgeführt werden. Werden diese i Stichproben zur Klassifikation herangezogen kann die Klassifikationsgenauigkeit von 99.75 % auf $1 - (1 - 0.9975)^i$ erhöht werden. Bereits bei Verwendung von drei Stichproben würde sich so eine Klassifikationsgenauigkeit von $1 - 1.56 \cdot 10^{-8}$ ergeben, was bedeutet, dass für diesen Fehlerfall im statistischen Mittel erst nach etwa 222 Tagen dauerhaften Betriebs des Prüfstands, in dem dieser Fehler vorliegt, eine Fehlklassifikation auftreten würde. Im Gegensatz dazu würde der Fehler im statistischen Mittel bereits nach 302 ms korrekt erkannt werden.¹⁵

Diskussion zur Anwendbarkeit in einer realen Detonationsbrennkammer

Im Gegensatz zur vorher präsentierten Mehrfiltermethode wurde bei dem hier beschriebenen Algorithmus nicht vorausgesetzt, dass das System durch eine lineare Systemdynamik beschreibbar ist. Da das vorgestellte Verfahren rein datengetrieben funktioniert, ist somit prinzipiell eine Anwendbarkeit auf eine reale Detonationsbrennkammer gegeben. Weiterhin

¹⁵Es werden im Mittel etwas mehr als die 300 ms der drei Stichproben benötigt, da auch der unwahrscheinliche Fall auftreten kann, bei denen nicht allen drei Stichproben die gleiche Fehlerklasse zugeordnet wird und somit erneut Messdaten aus dem Prozess aufgezeichnet werden müssen.

wurde gezeigt, dass selbst bei stark stochastischem Charakter der akustischen Anregung und Auftreten von Totzeiten bei verschiedenen Feuerfrequenzen eine zuverlässige Fehlerdetektion möglich ist. Somit stellt dieses Verfahren eine sehr vielversprechende Möglichkeit dar, um eine Fehlererkennung für eine reale Detonationsbrennkammer zu implementieren. Ein Nachteil dieser Methode im Vergleich zum Mehrfilteransatz, ist die für das Training des neuronalen Netzes benötigte große Datenbasis und die damit verbundene Anzahl an durchzuführenden Experimenten.

Ein hybrider Ansatz zwischen dem in diesem Abschnitt vorgestellten, rein datengetriebenen Modellansatz und der im vorherigen Abschnitt präsentierten, auf dem physikalischen Modell beruhenden, Mehrfiltermethode wurde in [Wolff et al., 2016] vorgestellt. Für einen vergleichbaren¹⁶ Versuchsaufbau wurde dort ebenfalls ein neuronales Netz zur Klassifikation verwendet, um zu entscheiden, welche Lautsprecher ausgefallen sind. Die Eingangsmerkmale dieses neuronalen Netzes wurden auf Grundlage eines einfachen, akustischen Modells und unter Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften des Prüfstands ermittelt. Durch diese modellbasierte Vorverarbeitung der Eingangsmerkmale genügte eine kleine Struktur des Netzes¹⁷, um eine verhältnismäßig hohe Klassifikationsgüte zu erreichen (86% im kritischsten Fehlerfall). Auf Grund der geringen Anzahl von zu trainierenden Gewichten konnte weiterhin ein kleiner Trainingsdatensatz mit ca. 3000 Stichproben verwendet werden.¹⁸ Dieser hybride Ansatz bietet somit den Vorteil einer kleinen, notwendigen Datenbasis und dem damit verbundenen verhältnismäßig geringen Aufwand für das Training des neuronalen Netzes. Die erzielte Klassifikationsgüte fällt jedoch deutlich geringer aus, als in dem rein datengetriebenen Ansatz. Weiterhin ist es unklar, wie gut das in der Vorverarbeitung der Eingangsmerkmale angenommene, akustische Modell und die angesetzten Symmetrieeigenschaften die Verhältnisse in einer realen Detonationsbrennkammer beschreiben. Da der hier präsentierte Ansatz rein datengetrieben arbeitet, weist dieser eine deutlich höhere Flexibilität auf, um sich an davon abweichende Verhältnisse anzupassen.

¹⁶Der dort untersuchte Prüfstand entspricht dem in dieser Arbeit verwendeten Aufbau, mit dem Unterschied, dass dort 12 Lautsprecher und 12 Mikrofone verwendet wurden.

¹⁷zwei *hidden layer* mit jeweils zwölf Neuronen

¹⁸In dem hier präsentierten Ansatz umfasst der Trainingsdatensatz ca. 150 000 Stichproben.

7 Zustandsschätzung für die 1-D Euler-Gleichungen

In den vorherigen Kapiteln wurden Methoden zur Feuersynchronisation und Fehlererkennung für eine pulsierende Detonationsbrennkammer entwickelt und an einem kalten Versuchsstand angewendet. Dabei wurde insbesondere das akustische Verhalten des den Verbrennungsrohren nachgeschalteten Plenums analysiert. In einer realen Detonationsbrennkammer wird darüber hinaus auch das strömungsmechanische Verhalten innerhalb der einzelnen Verbrennungsrohre zu berücksichtigen sein, um einen zuverlässigen Betrieb der Gesamtmaschine zu gewährleisten. Beispielsweise wird, für eine geeignete zeitliche Dosierung des einzuspritzenden Treibstoffs, eine möglichst genaue Kenntniss über den zeitlichen Verlauf der Amplitude der Saugwelle innerhalb der Rohre erforderlich sein. Eine solche Information kann nicht allein basierend auf den Druckmessungen im Plenum geschätzt werden. Würden allerdings darüber hinaus auch Druckmessungen innerhalb der Verbrennungsrohre zur Verfügung stehen, könnten damit die zusätzlich notwendigen Systeminformationen zum Aufbau einer geeigneten Zustandsschätzung bereitgestellt werden. Der in den vorherigen Kapiteln verwendete, kalte Versuchsstand ist nicht geeignet, um das strömungsmechanische Verhalten innerhalb der Verbrennungsrohre abzubilden. Daher wird in diesem Kapitel anstelle dessen eine rein numerische Studie durchgeführt. Auf Grund des damit verbundenen hohen Rechenaufwands, wird die Zustandsschätzung des Strömungsverhaltens innerhalb eines einzelnen Detonationsrohrs isoliert betrachtet, also ohne Simulation eines nachgeschalteten Plenums. Die zur Zustandsschätzung verwendeten Informationen werden dabei so gewählt, dass die zugehörigen physikalischen Größen auch an einem realen Detonationsrohr messbar wären. Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an den Ausführungen in [Wolff & King, 2015].

Zunächst wird der grundsätzliche Aufbau eines Detonationsrohrs und der darin ablaufende zyklische Prozess einer pulsierenden, detonativen Verbrennung rekapituliert. Anschließend wird der hier verwendete numerische Simulator vorgestellt, mit welchem das Strömungsverhalten in einem Detonationsrohr durch die 1-D Euler-Gleichungen abgebildet wird. In einem numerischen Simulator können die Zeitverläufe aller örtlich verteilten Zustände berechnet werden. An einem realen Prüfstand zur Untersuchung einer PDC liegen hingegen hauptsächlich Informationen über den statischen Druck an einigen Positionen im Rohr vor, vergleiche [Gray et al., 2017]. Hochdynamische zeitliche Verläufe der Geschwindigkeitsfelder bzw. Temperaturen sind hingegen in der Regel nicht messbar.¹ Informationen über diese Größen können zum besseren Verständnis der auftretenden physikalischen Phänomene beitragen und könnten auch die Anwendung von Regelungsmethoden, beispielsweise im Rahmen einer Gemischregelung, erleichtern. Aus diesem Grund wird hier eine Zustandsschätzmethodik vorgeschlagen, die es erlaubt, anhand von einigen lokalen Informationen über den statischen Druck der simulierten Strömung eine Schätzung des Zeitverlaufs des vollständigen simulierten Strömungsfelds anzugeben. Für die Zustandsschätzung wird das in Abschnitt 3.3.2 beschriebene SPKF angewendet.

¹Eine *Particle Image Velocimetry* kann zwar örtlich hochaufgelöste Informationen über die Strömungsgeschwindigkeiten eines Fluids liefern, eine solche Messung ist jedoch auf Grund des komplexen Messaufbaus und der Notwendigkeit eines optischen Zugangs zur Messstrecke in einem realen PDC-Aufbau nicht denkbar.

7.1 Detonationszyklus und Abstraktion zur Beschreibung des Zyklus mit 1-D Euler-Gleichungen

Wie bereits in Kapitel 1 angesprochen, wird in einem Detonationsrohr in jedem Verbrennungszyklus eine Saugwelle entstehen. Die könnte genutzt werden, um in einer vollständigen Maschine mit einem der Brennkammer vorgeschalteten Verdichter und nachgeschalteter Turbine den Druckunterschied zwischen einem Detonationsrohr und dem Verdichter zu überbrücken. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der Zyklus einer pulsierenden, detonativen Verbrennung in fünf Phasen gliedern.

1. *Zünden*: Ein Teil des Rohrs ist mit einem zündfähigen Treibstoffgemisch gefüllt, welches durch einen Funken am geschlossenen Rohrende gezündet wird.
2. *Deflagrative Verbrennung*: Durch den Zündfunken beginnt das Gemisch zunächst lokal deflagrativ zu verbrennen. Es entsteht eine Flammenfront, welche sich in Richtung offenes Rohrende bewegt.
3. *Übergang zur Detonation*: Aus der deflagrativ verbrennenden Flammenfront entsteht nach kurzer Lauflänge, begünstigt durch die Geometrie des Rohres, eine Detonationsverbrennung. Da sich die Flammenfront einer detonativen Verbrennung mit Überschallgeschwindigkeit ausbreitet und der Verbrennungsvorgang somit schneller abläuft als das Gas expandieren kann, lässt sich dieser Vorgang als isochore Zustandsänderung betrachten. Somit erzeugt die detonative Verbrennung eine Druckerhöhung im betroffenen Abschnitt des Detonationsrohres.
4. *Ausstoßen des verbrannten Gases und Entstehung einer Saugwelle*: Bedingt durch diesen Überdruck entlädt sich das verbrannte Gas in das nachgeschaltete Plenum. Durch diesen Ausstoßprozess entsteht eine Saugwelle, welche stromauf in Richtung verdichterseitiges Rohrende läuft.
5. *Wiederbefüllung mit Frischluft und Treibstoff*: Wenn diese Saugwelle das verdichterseitige Rohrende erreicht, wird die dabei entstehende Druckabsenkung genutzt, um neue Frischluft und Treibstoff vom Verdichter in das Rohr zu befördern.

Der weiter unten erläuterte numerische Simulator löst die 1-D Euler-Gleichungen. Daraus ergeben sich einige Einschränkungen bezüglich der damit beschreibbaren Strömungsphänomene. Es können keine Prozesse beschrieben werden, die hauptsächlich durch ein turbulentes Strömungsfeld gekennzeichnet sind bzw. bei denen Diffusionsprozesse berücksichtigt werden müssen. Aus diesem Grund kann weder der Gemischbildungsprozess (5.) noch der DDT-Übergang (1. - 3.) abgebildet werden. Da somit eine Simulation des vollständigen Verbrennungsprozesses ausgeschlossen ist, wird auf die Beschreibung des Detonationsvorgangs verzichtet. Vielmehr wird der komplette Verbrennungsvorgang vereinfachend als druckerhöhender Prozess abgebildet. Im Wesentlichen konzentriert sich die numerische Simulation somit auf den Ausstoßvorgang des verbrannten Gases und die Entstehung der Saugwelle, bis zu dem Zeitpunkt, zu welchem diese das verdichterseitige Rohrende erreicht. Weitere Annahmen, welche für eine Simulation des Strömungsverhaltens im Verbrennungsrohr mittels der 1-D Euler-Gleichungen notwendig sind, werden im Folgenden beschrieben:

- Der Durchmesser des simulierten Rohres im Vergleich zu dessen Länge wird als klein angenommen.
- Die Viskosität des Fluids wird vernachlässigt.

Die letztgenannte Annahme ist gängig für numerische Simulationen von Gasen mit hohen Reynoldszahlen, siehe [Anderson, 1995], die im hier untersuchten Fall vorliegen.

7.2 Euler-Gleichungen und numerischer Löser

7.2.1 1-D Euler-Gleichungen

Die in (3.1) eingeführte Euler-Gleichung lässt sich für den eindimensionalen Fall kompakt anschreiben als

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x_{\perp}} = \underline{0} \quad , \quad (7.1a)$$

mit

$$\underline{q} = \left[\rho \quad \rho v_{x_{\perp}} \quad E \right]^T \quad (7.1b)$$

und

$$\underline{F} = \left[\rho v_{x_{\perp}} \quad \rho v_{x_{\perp}}^2 + p \quad v_{x_{\perp}} (E + p) \right]^T \quad , \quad (7.1c)$$

wobei $\underline{q} \in \mathbb{R}^3$ und $\underline{F} \in \mathbb{R}^3$, siehe [Anderson, 1995]. Die Energiedichte E wird eingeführt als

$$E = \rho \left(e + \frac{1}{2} v_{x_{\perp}}^2 \right) \quad , \quad (7.2)$$

wobei e die spezifische innere Energie beschreibt. Für den Druck gilt unter der Annahme eines thermisch und kalorisch perfekten Gases

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho v_{x_{\perp}}^2 \right) \quad . \quad (7.3)$$

Dabei bezeichnet γ den Isentropenexponenten. Die zugehörige Temperatur des Gases berechnet sich zu

$$T = \frac{e}{c_v} \quad . \quad (7.4)$$

Die Größe c_v bezeichnet die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen.

Um ein numerisch besser zu handhabendes Gleichungssystem zu erhalten, wird (7.1) normiert. Dafür werden vier Normierungsfaktoren eingeführt: die Referenzlänge bzw. Rohrlänge \bar{l} , die Referenzgeschwindigkeit $\bar{v}_{x_{\perp}}$, die Referenzdichte $\bar{\rho}$, und die Referenztemperatur \bar{T} . Wie diese Normierungsfaktoren gewählt wurden, ist in Tab. 7.1 angegeben. Mit diesen Größen werden folgende Normierungsterme definiert

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{\bar{l}}{\bar{v}_{x_{\perp}}} \quad , & \tilde{t} &= \frac{t}{\bar{t}} \quad , & \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\bar{\rho}} \quad , & \tilde{v}_{x_{\perp}} &= \frac{v_{x_{\perp}}}{\bar{v}_{x_{\perp}}} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_{\perp}} &= \bar{l} \frac{\partial}{\partial x_{\perp}} \quad , & \tilde{E} &= \frac{E}{\bar{\rho} \bar{v}_{x_{\perp}}^2} \quad , & \tilde{p} &= \frac{p}{\bar{\rho} \bar{v}_{x_{\perp}}^2} \quad , & \tilde{x}_{\perp} &= \frac{x_{\perp}}{\bar{l}} \quad , \\ \tilde{T} &= \frac{T}{\bar{T}} \quad . \end{aligned}$$

Mit diesen Größen lässt sich (7.1) in normierter Form angeben

$$\frac{\partial \underline{\tilde{q}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \underline{\tilde{F}}}{\partial \tilde{x}_\perp} = \underline{0} \quad , \quad (7.5a)$$

mit

$$\underline{\tilde{q}} = \left[\tilde{\rho} \quad \tilde{\rho} \tilde{v}_{x_\perp} \quad \tilde{E} \right]^T \quad (7.5b)$$

$$(7.5c)$$

und

$$\underline{\tilde{F}} = \left[\tilde{\rho} \tilde{v}_{x_\perp} \quad \tilde{\rho} \tilde{v}_{x_\perp}^2 + \tilde{p} \quad \tilde{v}_{x_\perp} (\tilde{E} + \tilde{p}) \right]^T \quad , \quad (7.5d)$$

mit $\underline{\tilde{q}} \in \mathbb{R}^3$ und $\underline{\tilde{F}} \in \mathbb{R}^3$.

Randbedingungen und numerischer Löser

Die normierten 1-D Euler-Gleichungen (7.5) werden im Folgenden verwendet, um das fluid-dynamische Verhalten in einem eindimensionalen Detonationsrohr abzubilden. Viele Veröffentlichungen zu experimentellen Untersuchungen der Verbrennung innerhalb eines Detonationsrohrs beschreiben Versuchsstände, welche unter atmosphärischen Bedingungen betrieben werden, vergleiche Kapitel 2. Das Ausstoßen des verbrannten Gases aus dem Detonationsrohr an einem solchen Versuchsstand erfolgt somit in ein atmosphärisches Druckniveau. Da dieser Teil der vorliegenden Arbeit einen Beitrag zum besseren Verständnis eines solchen Aufbaus liefern soll, werden die Randbedingungen in der hier beschriebenen Untersuchung ebenfalls auf diesen Fall angepasst. Die weiter unten angewendete Zustandsschätzmethodik lässt sich allerdings ebenso auf andere Randbedingungen übertragen.

Die Randbedingung bei $\tilde{x}_\perp = 0$ wird als feste Wand modelliert. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da der Wiederbefüllungsvorgang im Simulator nicht abgebildet wird und in einer realen Maschine eine Rückströmung aus den Verbrennungsrohren in jedem Fall zu vermeiden ist. Ob dies z.B. durch Verwendung eines mechanischen Ventils oder einer fluidischen Diode realisiert wird, spielt bei dem hier vorliegenden Abstraktionslevel keine entscheidende Rolle. Am Rohrende bei $\tilde{x}_\perp = 1$ wird ein Ausströmen in die Umgebung, bei einem atmosphärischem Druck von $p_U = 10^5$ Pa, durch eine isentrope Entspannung des Fluids auf dieses Druckniveau abgebildet. Die daraus resultierende kinetische Energie wird dissipiert. Der Druck p_U definiert gleichzeitig auch das Druckniveau, welches bei $\tilde{x}_\perp = 0$ unterschritten werden muss, um eine Wiederbefüllung des Rohrs mit Frischluft aus der Umgebung zu ermöglichen. Wenn in einem Bereich des Rohres dieses Druckniveau unterschritten wird, liegt dort eine Saugwelle vor. Der normierte Umgebungsdruck wird äquivalent zu \tilde{p} als $\tilde{p}_U = \frac{p_U}{\tilde{\rho} \tilde{v}_{x_\perp}^2}$ eingeführt.

Weitere Details zur numerischen Implementierung der beschriebenen Randbedingungen finden sich in [Berndt, 2016]. Zur numerischen Lösung von (7.5) wurde eine Finite-Volumen-Methode verwendet, welche als HLLC-Löser bekannt ist, siehe [Einfeldt, 1988]. Die Anzahl der Zellen zur örtlichen Diskretisierung wird mit $n_E \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Um die Implementierung der weiter unten beschriebenen Zustandsschätzmethodik zu erleichtern, verwendet der numerische Löser eine feste Zeitschrittweite $\Delta \tilde{t} = \Delta t / \tilde{t}$. Die für diese beiden Parameter gewählten Werte sind Tabelle 7.1 zu entnehmen.

²Die Normierungsvariable \tilde{v}_{x_\perp} bezeichnet die größtmögliche Geschwindigkeit mit der sich Informationen im Medium ausbreiten können (max. Strömungsgeschwindigkeit + max. Schallgeschwindigkeit).

\bar{l}	2.82 m
$\bar{\rho}$	$\max_{x_{\perp}} \rho(t=0, x_{\perp}) $
$\bar{v}_{x_{\perp}}$	$\max_{x_{\perp}} (v_{x_{\perp}}(t=0, x_{\perp}) + c(t=0, x_{\perp}))$
c	$\sqrt{\gamma p(x_{\perp})/\rho(x_{\perp})}$
\bar{T}	$\max_{x_{\perp}} T(t=0, x_{\perp})$
γ	1.4
c_v	657 J/kg·K
n_E	100
Δt	$1 \cdot 10^{-5}$ s

Tabelle 7.1: Normierungen und Parameter für die Simulation ²

7.3 Definition des Modells

Die in Abschnitt 3.3 besprochenen Zustandsschätzmethoden setzen eine zeitdiskrete Formulierung des zugrunde liegenden Modells, in diesem Fall der Euler-Gleichungen, voraus. Eine zeitdiskrete Formulierung von (7.5) ergibt sich zu

$$\tilde{q}(k, \tilde{x}_{\perp}) = - \int_{(k-1)\Delta\tilde{t}}^{k\Delta\tilde{t}} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}_{\perp}} d\tilde{t} . \quad (7.6)$$

Dabei beschreibt $\tilde{q}(k, \tilde{x}_{\perp})$ weiterhin eine kontinuierliche Funktion in der Ortskoordinate \tilde{x}_{\perp} . Das zur Zustandsschätzung verwendete Modell (3.63) verlangt eine endliche Anzahl von Zuständen im Zustandsvektor \underline{x} . Somit ist eine zusätzliche Diskretisierung in der Ortskoordinate erforderlich. Wie zuvor wird dafür die im vorherigen Abschnitt erwähnte Finite-Volumen-Methode angewendet. Dadurch ergibt sich auch hier eine Aufteilung der örtlichen Dimension in n_E Elemente, wobei jedes eine örtliche Ausdehnung von $1/n_E$ aufweist. Die Position des j -ten Elements ist gegeben durch $\tilde{x}_{\perp j}^x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit $j \in \{1, \dots, n_E\}$. Damit kann der Zustandsvektor

$$\underline{x}(k) = \left[\tilde{q}^T(k, \tilde{x}_{\perp 1}^x) \quad \dots \quad \tilde{q}^T(k, \tilde{x}_{\perp n_E}^x) \right]^T , \quad (7.7)$$

definiert werden, wobei $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ und $n_x = 3n_E$. Da die fluiddynamischen Zustände innerhalb eines finiten Volumens örtlich konstant sind, ist der fluiddynamische Zustand innerhalb des j -ten Volumens zum Zeitpunkt k vollständig durch den Ausdruck $\tilde{q}(k, \tilde{x}_{\perp j}^x)$ beschrieben.

Weiterhin wird eine Anzahl von n_y örtlich verteilter Sensoren angenommen, welche den Druck des jeweils zugehörigen Volumenelements auslesen. Die Position des j -ten Drucksensors ist gegeben durch $\tilde{x}_{\perp j}^y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit $j \in \{1, \dots, n_y\}$. Damit ergibt sich der Vektor der Messgrößen in (3.63) zu

$$\underline{y}(k) = \left[\tilde{p}(k, \tilde{x}_{\perp 1}^y) \quad \dots \quad \tilde{p}(k, \tilde{x}_{\perp n_y}^y) \right]^T . \quad (7.8)$$

Die Größe $\tilde{p}(k, \tilde{x}_{\perp j}^y)$ beschreibt den normierten Druck im j -ten Volumenelement an der Stelle $\tilde{x}_{\perp j}^y$ im k -ten Zeitschritt und es gilt $y \in \mathbb{R}^{n_y}$. Zusätzlich wird ein Vektor definiert, welcher alle normierten Sensorpositionen enthält

$$\underline{\tilde{X}}_{\perp}^y = \left[\tilde{x}_{\perp 1}^y \quad \dots \quad \tilde{x}_{\perp n_y}^y \right] . \quad (7.9)$$

Mit diesen Definitionen könnte prinzipiell sowohl das EKF als auch das SPKF zur Zustandsschätzung für das gegebene System angewendet werden. Um ein EKF einzusetzen, wird eine linearisierte Beschreibung des ortsdiskretisierten Systems benötigt. Da jedoch die Finite-Volumen-Methode zur Ortsdiskretisierung keine analytische Linearisierung zulässt, ist die Anwendung des EKF ausgeschlossen. Somit erfolgt die Zustandsschätzung im Folgenden mittels des SPKF, welches in Abschnitt 3.3.2 vorgestellt wurde.

7.4 Numerische Ergebnisse der Zustandsschätzung

Das dynamische Verhalten eines homogenen, örtlich verteilten Systems, wie im Fall eines durch die homogenen Euler-Gleichungen (7.5) beschriebenen Fluids, wird ausschließlich durch die Anfangs- und Randbedingungen diktiert. Hier wird eine eindimensionale Strömung in einem Rohr beschrieben. Die zugehörigen Randbedingungen wurden bereits weiter oben erläutert. Für die Anfangsbedingungen werden in diesem Abschnitt zwei unterschiedliche Fallstudien durchgeführt, um zu demonstrieren, wie die vorgeschlagene Zustandsschätzmethodik mit verschiedenen Situationen umgeht. Die erste Fallstudie beschreibt ein sehr generisches Szenario, wobei insbesondere das Konvergenzverhalten des Schätzalgorithmus bezüglich der Temperaturschätzung untersucht wird. Die Anfangsbedingungen in der zweiten Studie wurden so gewählt, dass strömungsmechanische Effekte wie der Ausstoßvorgang des verbrannten Gases und die Entstehung einer Saugwelle in einem Detonationsrohr abgebildet werden. In diesem Abschnitt werden zunächst die für das SPKF gewählten Parameter und Sensorpositionen vorgestellt. Anschließend wird detailliert auf die beiden Fallstudien eingegangen und die mit der Zustandsschätzmethode erzielten Ergebnisse präsentiert.

7.4.1 Parameter des SPKF und gewählte Sensorpositionen

Für beide Fallstudien wurden die Parameter des SPKF entsprechend Algorithmus 3.2 wie folgt gewählt:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-3} & & \\ & 10^{-4} & \\ & & 10^{-4} \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} 10^{-3} & & \\ & 10^{-4} & \\ & & 10^{-4} \end{bmatrix} \end{bmatrix} , \quad (7.10a)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}^{n_y \times n_y} , \quad \hat{\mathbf{P}}_x(0) = \mathbf{0}^{n_x \times n_x} , \quad \alpha = 10^{-2} , \quad \beta = 2 , \quad (7.10b)$$

wobei $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$. Die Werte der in (7.10) gegebenen Parameter wurden manuell so angepasst, dass in beiden Fallstudien möglichst hohe Schätzgüten erzielt wurden.³

³Da hier eine rein numerische Studie durchgeführt wurde, liegt kein Messrauschen vor. Somit ergibt sich $\mathbf{R} = \mathbf{0}^{n_y \times n_y}$.

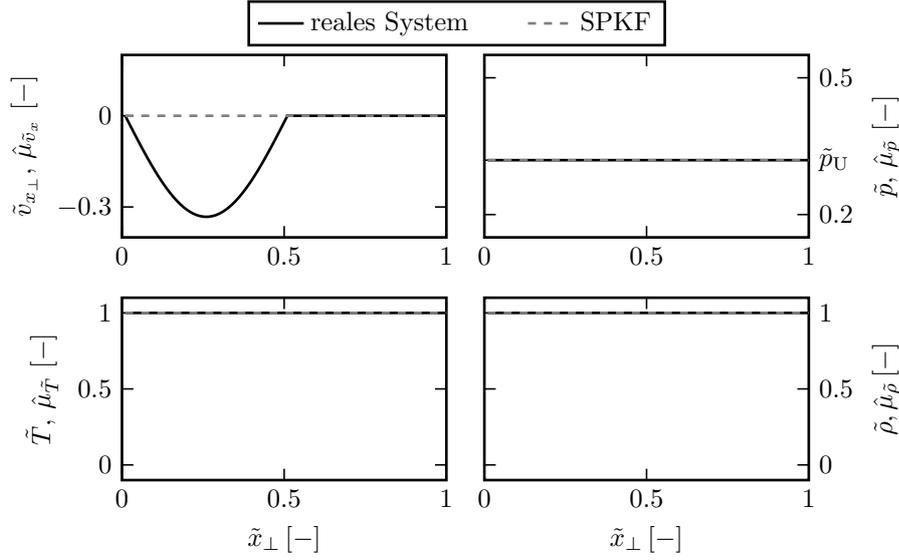


Abbildung 7.1: Erstes Szenario zum Zeitschritt $k = 0$. Das SPKF wurde mit einer fehlerhaften Schätzung von \tilde{v}_{x_\perp} in der ersten Hälfte des Rohres initialisiert. Die schwarzen Kurven repräsentieren das „reale System“, während die grauen, gestrichelten Kurven die jeweils zugehörigen Schätzungen durch das SPKF angeben. Die zur Normierung genutzten Referenzwerte ergeben sich zu $\bar{\rho} = 0.39 \text{ kg/m}^3$, $\bar{v}_{x_\perp} = 903 \text{ m/s}$ and $\bar{T} = 1000 \text{ K}$.

In beiden Fallstudien wurden jeweils fünf Konfigurationen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Drucksensoren betrachtet:

1. Drucksensoren in jedem Volumenelement $\tilde{\underline{X}}_\perp^y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $n_y = n_E = 100$,
2. fünf Drucksensoren ($n_y = 4$) $\rightarrow \tilde{\underline{X}}_\perp^y = [0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8]^T$,
3. drei Drucksensoren ($n_y = 3$) $\rightarrow \tilde{\underline{X}}_\perp^y = [0.25 \ 0.5 \ 0.75]^T$,
4. zwei Drucksensoren ($n_y = 2$) $\rightarrow \tilde{\underline{X}}_\perp^y = [0.3 \ 0.6]^T$,
5. ein Drucksensor ($n_y = 1$) $\rightarrow \tilde{\underline{X}}_\perp^y = [0.5]$.

Das zu schätzende, simulierte System wird im Folgenden als „reales System“ bezeichnet, um es von der Simulation im SPKF abzugrenzen. Aus dem Zustandsvektor des realen Systems \underline{x} , lassen sich mittels (7.2)–(7.4) die für eine Strömung interessanten Größen berechnen: Druck \tilde{p} , Geschwindigkeit \tilde{v}_{x_\perp} , Dichte $\tilde{\rho}$ und Temperatur \tilde{T} . Gleiches gilt auch für die in $\hat{\underline{x}}$ geschätzten Zustände, wobei die daraus berechneten Größen mit $\hat{\mu}_{\tilde{p}}$, $\hat{\mu}_{\tilde{v}_x}$, $\hat{\mu}_{\tilde{\rho}}$ und $\hat{\mu}_{\tilde{T}}$ bezeichnet werden. Die im Folgenden präsentierten Ergebnisse beziehen sich hauptsächlich auf diese Größen, da somit ein intuitives Verständnis der Strömungssituation ermöglicht wird.

Erste Fallstudie:

Um zu überprüfen, wie das SPKF mit einer fehlerhaften Schätzung der Anfangsbedingung des Geschwindigkeitsprofils umgehen kann, wird die Situation in Abb. 7.1 angenommen. Die Zustände des SPKF werden so gewählt, dass sich das gesamte Fluid im Rohr in Ruhe befindet ($\hat{\mu}_{\tilde{v}_x}(k = 0, \tilde{x}_\perp) = 0, \forall \tilde{x}_\perp$) und auch die örtlichen Profile der restlichen Zustände

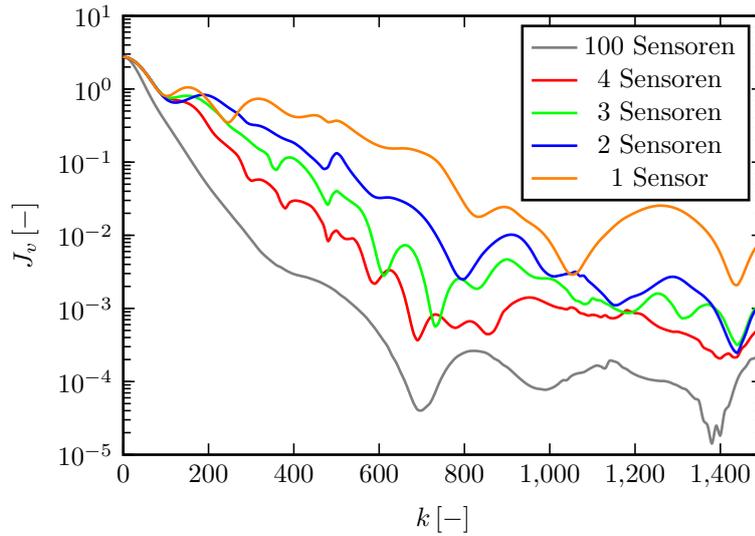


Abbildung 7.2: Summe der Fehlerquadrate zwischen dem „realen“, normierten Geschwindigkeitsfeld und dem geschätzten, normierten Geschwindigkeitsfeld für die verschiedenen Sensorkonfigurationen der ersten Fallstudie.

werden als örtlich konstant initialisiert. Würde eine solche Konfiguration zur reinen Prädiktion, also ohne Rückführung der Messgrößen aus dem „realen System“, verwendet werden, würde sich sowohl örtlich als auch zeitlich keine Änderung der Zustandsgrößen ergeben. Das gewählte Geschwindigkeitsfeld des realen Systems zum Zeitpunkt $k = 0$ wird hingegen eine starke Änderung des Temperatur-, Dichte- und Druckfeldes während der ersten Zeitschritte hervorrufen. Die gewählten Anfangsbedingungen provozieren somit bereits nach wenigen Zeitschritten signifikante Unterschiede zwischen realem Modell und der SPKF-Prädiktion in allen Zustandsgrößen. Diese müssen im weiteren zeitlichen Verlauf durch das SPKF wieder korrigiert werden, um eine sinnvolle Schätzung der Zustandsgrößen zu erhalten.

Im ersten Szenario soll vor allem die erzielte Schätzgüte des Geschwindigkeitsfeldes $\hat{\mu}_{\tilde{v}_x}$ diskutiert werden. Um diese Güte zu quantifizieren, werden zunächst die beiden Vektoren $\tilde{v}_{x_\perp}(k) = [\tilde{v}_{x_\perp}(k, \tilde{x}_{\perp 1}^x) \ \dots \ \tilde{v}_{x_\perp}(k, \tilde{x}_{\perp n_E}^x)]^T$ und $\hat{\mu}_{\tilde{v}_x}(k) = [\hat{\mu}_{\tilde{v}_x}(k, \tilde{x}_{\perp 1}^x) \ \dots \ \hat{\mu}_{\tilde{v}_x}(k, \tilde{x}_{\perp n_E}^x)]^T$ definiert, welche jeweils die „realen“ bzw. geschätzten Geschwindigkeiten in allen Zellen zum Zeitpunkt k beinhalten. Die Summe der Fehlerquadrate zwischen diesen beiden Größen $J_v(k) \in \mathbb{R}$, berechnet sich zu

$$J_v(k) = \left(\tilde{v}_{x_\perp}(k) - \hat{\mu}_{\tilde{v}_x}(k) \right)^T \left(\tilde{v}_{x_\perp}(k) - \hat{\mu}_{\tilde{v}_x}(k) \right) . \quad (7.11)$$

Abbildung 7.2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Gütefunktion $J_v(k)$ für die verschiedenen Sensorkonfigurationen.⁴ Durch den Einsatz des SPKFs ist im zeitlichen Verlauf eine signifikante Verbesserung der Schätzgüte für alle fünf Sensorkonfigurationen zu erkennen. Wie zu erwarten, wird das beste Ergebnis erzielt, wenn Druckinformationen aus allen 100 Zellen verwendet werden. Allerdings gelingt es, auch wenn lediglich Informationen von vier bzw. drei Drucksensoren verarbeitet werden, den Schätzfehler deutlich zu verringern. Sogar im Fall von zwei bzw. einem verfügbaren Drucksensor ergeben sich bereits nach wenigen Zeitschritten deutliche Verbesserungen in der Schätzgüte des Geschwindigkeitsprofils.

⁴Auf Grund des sehr generischen Charakters dieser ersten Fallstudie, kann kein Zusammenhang zwischen den dargestellten Zeitschritten und dem Detonationszyklus hergestellt werden. Dieser Zusammenhang wird anschließend in der zweiten Fallstudie untersucht.

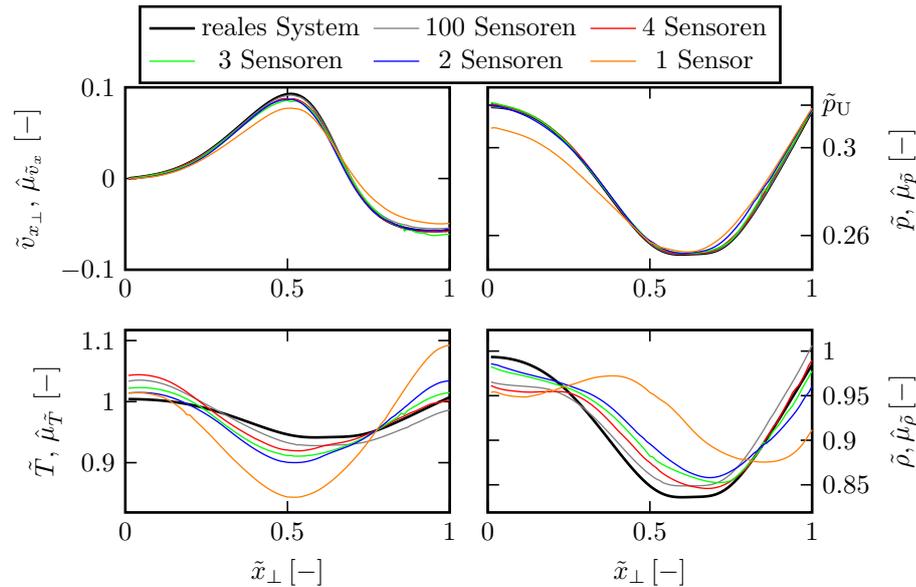


Abbildung 7.3: Erste Fallstudie zum Zeitpunkt $k = 1500$. Es sind sowohl die für alle untersuchten Sensorkonfigurationen durch das SPKF geschätzten Zustände, als auch die Profile der Zustandsgrößen des „realen Systems“ dargestellt.

Abbildung 7.3 vergleicht die geschätzten Zustände des Strömungsfeldes mit den Zuständen des „realen Systems“ zum Zeitpunkt $k = 1500$ für die untersuchten Sensorkonfigurationen. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Inhomogenität im Geschwindigkeitsprofil des „realen Systems“ zum Zeitpunkt $k = 0$ starke Änderungen in den Profilen aller Zustandsgrößen hervorgerufen hat. Dabei ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Zuständen Strömungsgeschwindigkeit und Druck des „realen Systems“ mit den zugehörigen im SPKF geschätzten Zuständen. Der qualitative örtliche Verlauf des Temperatur- und Dichteprofiles wird ebenfalls gut durch das SPKF geschätzt. Es verbleibt in diesen Zustandsgrößen jedoch ein signifikanter quantitativer Schätzfehler für den betrachteten Zeitpunkt $k = 1500$.

Die Schätzung des Temperatur- bzw. Dichteprofiles anhand von Druckmessungen stellt scheinbar eine größere Herausforderung dar als die Schätzung des Geschwindigkeits- bzw. Druckprofils. Eine mögliche Ursache dafür wird im Folgenden diskutiert. Angenommen im „realen System“ lägen die in Abb. 7.1 für das SPKF angenommenen Strömungsverhältnisse vor: ein in Ruhe befindliches Fluid mit einem örtlich vollständig homogenen Strömungsfeld. Aufgrund dieser Homogenität würde sich ein solches Strömungsfeld zeitlich nicht ändern. Weiterhin seien für das System im SPKF identische Strömungsbedingungen angenommen worden, jedoch mit einem jeweils um ein Offset verschobenen, homogenen Dichte- und Temperaturprofil. Eine Prädiktion mit diesem System würde ebenfalls zeitlich konstante Zustandsgrößen berechnen. Da in dem beschriebenen Fall kein Unterschied zwischen den Druckmessungen des „realen Systems“ und den durch das SPKF prädizierten Druckmessungen auftreten würde, könnte das SPKF die Abweichungen im Dichte und Temperaturprofil niemals korrigieren. Es lässt sich somit vermuten, dass diese beiden Zustandsgrößen generell nur beobachtbar sind, solange Inhomogenitäten im Geschwindigkeits- und Druckprofil vorliegen. Durch numerische Dämpfungseffekte wird eine Strömung, die durch eine Simulation der homogenen Euler-Gleichungen beschrieben wird, nach endlich vielen Zeitschritten immer ein vollständig homogenes Strömungsfeld hervorrufen. Die Qualität der Beobachtbarkeit für die Dichte- und Temperaturprofile wird entsprechend der obigen Argumentation über einen größeren Zeithorizont betrachtet immer weiter abnehmen, bis schließlich eine Verbesserung

in der Schätzung dieser Profile nicht mehr möglich ist. Diese Beschränkung stellt jedoch für die Zustandsschätzung an einem Detonationsrohr voraussichtlich kein Problem dar, da hier durch den zyklischen Verbrennungsvorgang immer wieder Druckschwankungen im Rohr generiert werden, sodass der Fall einer vollständig beruhigten Strömung nicht von Relevanz ist. Weiterhin werden beispielsweise für das passende Timing des Einspritzvorgangs des Treibstoffs vor allem Informationen über die Geschwindigkeit und das Druckniveau der Saugwelle von Relevanz sein. Wie gut diese Zustandsgrößen der Saugwelle geschätzt werden können, wird in der zweiten Fallstudie untersucht.

Zweite Fallstudie:

Diese Fallstudie soll sehr vereinfacht die Situation in einem Detonationsrohr direkt nach der detonativen Verbrennung des Brennstoffs abbilden. Es wurde angenommen, dass die vordere Hälfte des Rohres direkt vor der Zündung mit einem detonationsfähigen Gemisch befüllt war. Wie bereits weiter oben erläutert, wird hier der in einem realen Detonationsrohr stattfindende Verbrennungsvorgang vereinfachend als homogene Druck- und Temperaturerhöhung im kompletten mit Brennstoff befüllten Bereich approximiert, vergleiche Abb. 7.4. Das im „realen System“ vorliegende Geschwindigkeitsprofil wird auch als Anfangsbedingung im SPKF übernommen, da bereits im ersten Fallbeispiel gezeigt wurde, dass der Schätzalgorithmus mit Schätzfehlern in dieser Größe gut umgehen kann. Das Druckfeld wird ebenfalls als bekannt angenommen, da diese Zustandsgröße durch die verwendeten Sensoren direkt gemessen wird und somit Schätzfehler im Druck sehr schnell korrigiert werden können. Der Fokus in dieser Fallstudie liegt somit auf den Auswirkungen von Schätzfehlern in den Anfangsbedingungen der schwieriger zu schätzenden Größen wie Temperatur und Dichte. Zu diesem Zweck wurden entsprechende Schätzfehler in den Anfangsbedingungen dieser Größen vorgesehen. Die Schätzung des Temperatur- und Dichteprofiles zum Zeitpunkt $k = 0$ in der zweiten Hälfte des Rohres weist signifikante Abweichungen zu den Profilen des „realen Systems“ auf. Eine wichtige Konsequenz aus den angenommenen Schätzfehlern ergibt sich darin, dass die Schallgeschwindigkeit in der zweiten Hälfte des Rohres im Modell des SPKF zunächst deutlich zu hoch angenommen wird. Akustische Druckschwankungen würden diesen Abschnitt des Rohres im Modell des SPKF somit deutlich schneller durchlaufen, als im „realen System“. Im Folgenden wird untersucht, inwiefern das SPKF in der Lage ist, solche fehlerhaften Prädiktionen zu korrigieren, um eine sinnhafte Schätzung des Strömungsfeldes im Rohr zu erhalten. Da auf Grund der Erkenntnisse aus der ersten Fallstudie gute Schätzergebnisse für \tilde{v}_{x_\perp} and \tilde{p} zu erwarten sind, wird in diesem Fall ein Kriterium zur Bewertung der Schätzgüte des Temperaturprofils formuliert. Dazu werden äquivalent zur ersten Fallstudie zunächst die beiden Vektoren $\tilde{T}(k) = [\tilde{T}(k, \tilde{x}_{\perp 1}^x) \quad \dots \quad \tilde{T}(k, \tilde{x}_{\perp n_E}^x)]^T$ und $\hat{\mu}_{\tilde{T}}(k) = [\hat{\mu}_{\tilde{T}}(k, \tilde{x}_{\perp 1}^x) \quad \dots \quad \hat{\mu}_{\tilde{T}}(k, \tilde{x}_{\perp n_E}^x)]^T$ eingeführt. Damit berechnet sich die zugehörige Summe der Fehlerquadrate zu

$$J_T(k) = \left(\tilde{T}(k) - \hat{\mu}_{\tilde{T}}(k) \right)^T \left(\tilde{T}(k) - \hat{\mu}_{\tilde{T}}(k) \right) . \quad (7.12)$$

Der Zeitverlauf dieser Größe ist in Abb. 7.5 gegeben. Für alle untersuchten Sensorkonfigurationen verbessert sich die Schätzung des Temperaturprofils über die Zeit signifikant. Auch hier ergibt sich das beste Ergebnis der Temperaturschätzung für die Konfiguration, in der die Drücke aus allen 100 Volumenelementen im SPKF verarbeitet werden. Zu Beginn der Schätzung kann der Schätzfehler für diese Sensorkonfiguration deutlich schneller abgebaut werden als bei den restlichen vier Konfigurationen. Dieser Unterschied gleicht sich aber im weiteren Verlauf weitestgehend wieder aus, sodass gegen Ende des betrachteten Zeithorizonts

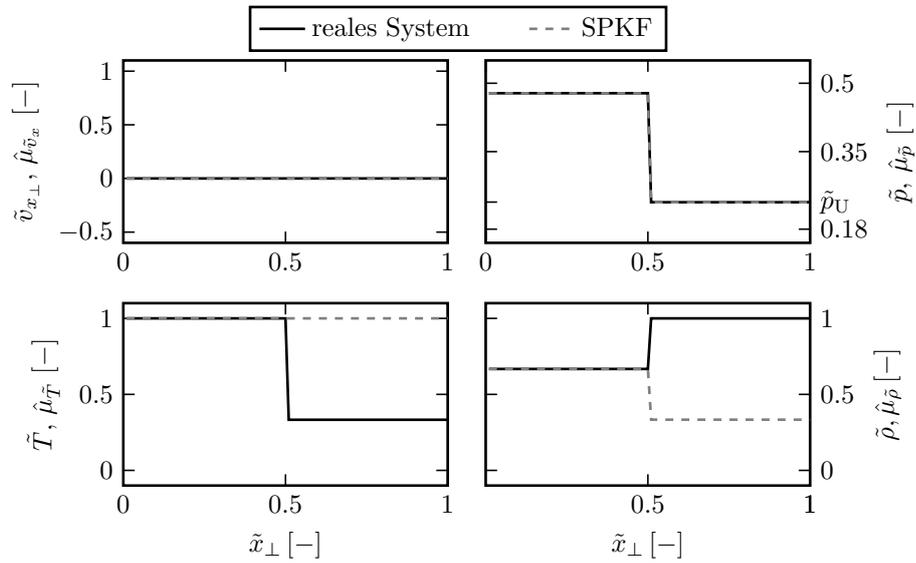


Abbildung 7.4: Anfangsbedingungen des zweiten Szenarios. Die zur Normierung genutzten Referenzwerte sind $\bar{\rho} = 0.39 \text{ kg/m}^3$, $\bar{v}_{x_\perp} = 1043 \text{ m/s}$ und $\bar{T} = 3000 \text{ K}$.

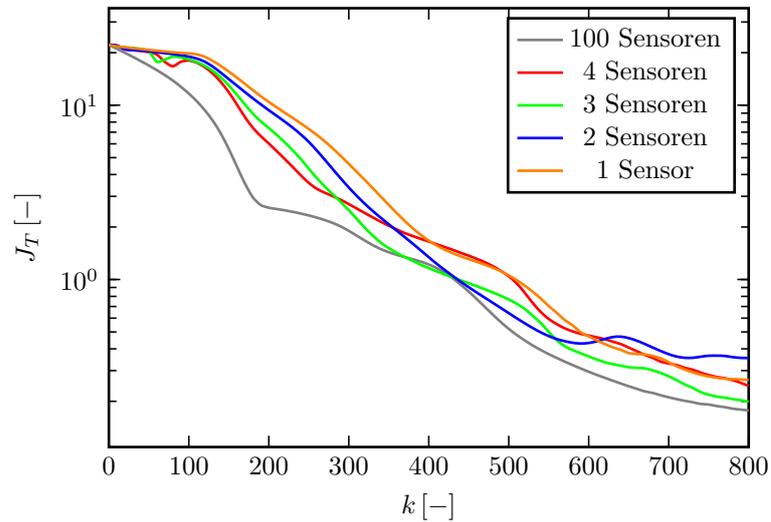


Abbildung 7.5: Zeitverlauf der Summe der Fehlerquadrate zwischen dem normierten Temperaturprofil des „realen Systems“ und des geschätzten Systems für alle untersuchten Sensorkonfigurationen.

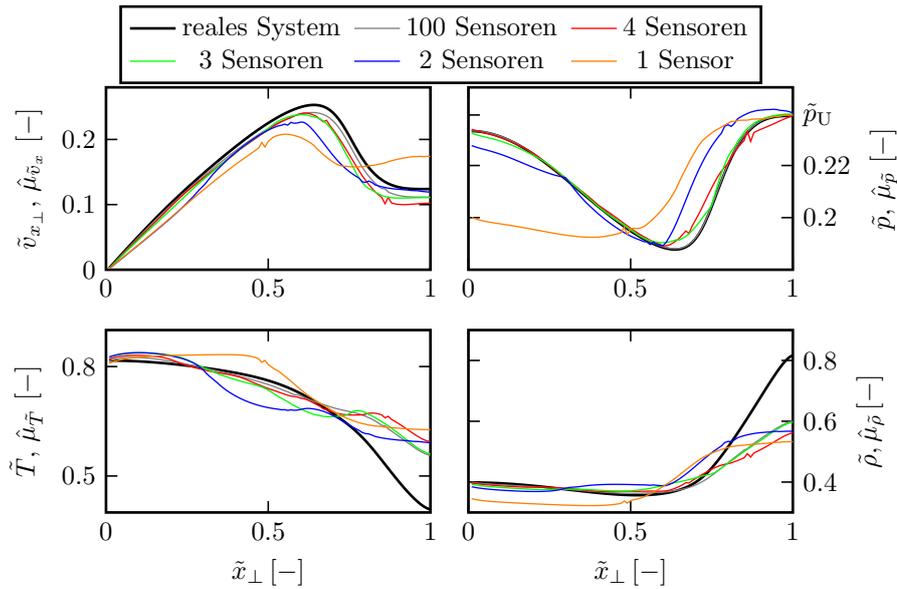


Abbildung 7.6: Zweite Fallstudie zum Zeitpunkt $k = 580$. Abgebildet sind sowohl die Zustände des „realen Systems“ als auch die durch das SPKF geschätzten Zustände für alle untersuchten Sensorkonfigurationen.

nur noch vergleichsweise geringe Unterschiede zwischen den Konfigurationen erkennbar sind. Interessanterweise gilt dabei für die untersuchten Konfigurationen mit vier oder weniger Sensoren nicht immer, dass mehr Sensoren zu einem besseren Schätzergebnis führen. So liefert beispielsweise die Konfiguration mit drei Sensoren für den größten Teil des untersuchten Zeitbereichs etwas geringere Schätzfehler in der Temperatur als die Konfiguration mit vier Sensoren. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass die Positionierung der Sensoren am Rohr durchaus von Relevanz ist. Um einen besseren Eindruck des geschätzten Strömungsfelds zu vermitteln, sind in Abb. 7.6 alle relevanten Zustandsgrößen des SPKF und des „realen Systems“ für den Zeitpunkt $k = 580$ dargestellt. Zu diesem Zeitpunkt fällt das Drucklevel an der festen Wand des Rohres bei $\tilde{x}_\perp = 0$ erstmals unter \tilde{p}_U , woran erkenntlich ist, dass der erste Ausläufer der Saugwelle das linke Rohrende erreicht hat. Zu diesem Zeitpunkt würde in einem realen Detonationsrohr die Phase der Wiederbefüllung mit Frischluft und Treibstoff beginnen, welche in der hier durchgeführten Simulationsstudie nicht abgebildet wird. Im Wesentlichen ergibt sich eine ähnliche Situation wie in der ersten Fallstudie. Wenn drei oder mehr Sensoren verwendet werden, ergibt sich insbesondere für die Profile von $\hat{\mu}_{\tilde{v}_x}$ and $\hat{\mu}_{\tilde{\rho}}$ ein sehr gute Übereinstimmung mit den zugehörigen Profilen des „realen Systems“. Der Schätzfehler im Temperaturprofil konnte fast um zwei Größenordnungen bis zum Zeitpunkt $k = 580$ reduziert werden, vergleiche Abb. 7.5.

Diskussion zur Anwendbarkeit an einem realen Detonationsrohr

In diesem Abschnitt wurde das SPKF angewendet, um das Strömungsfeld einer nichtreaktiven, eindimensionalen Rohrströmung zu schätzen. Es wurde gezeigt, dass der präsentierte Algorithmus mit sehr unterschiedlichen Strömungssituationen umgehen kann. Es ist somit möglich, basierend auf Druckmessungen, eine gute Schätzung des Zeitverlaufs des vollständigen Strömungsfeldes innerhalb des simulierten Rohrs anzugeben. Dabei konnte selbst bei einer geringen Anzahl von verwendeten Drucksensoren eine hohe Qualität der Schätzung erreicht werden. Die hier präsentierte Zustandsschätzmethode bietet somit einen vielverspre-

chenden Ansatz, um in weiterführenden Arbeiten eine Zustandsschätzung des Strömungsverhaltens an einem realen Detonationsrohr zu ermöglichen und somit einen tieferen Einblick in die dort auftretenden Strömungsphänomene zu erhalten.

Aufgrund des hohen Rechenaufwands zur Lösung der im Modell des SPKF verwendeten Euler-Gleichungen ist eine Echtzeitanwendung des hier präsentierten Algorithmus nahezu ausgeschlossen. Eine Erweiterung des hier präsentierten Schätzalgorithmus wurde in [Schäpel et al., 2017] vorgestellt. Dabei wird ein reduziertes Modell innerhalb des SPKF verwendet, wodurch der Rechenaufwand reduziert werden konnte. Allerdings ist auch diese Implementierung noch deutlich entfernt von einer Anwendbarkeit in Echtzeit. Es sind somit noch weitere Anstrengungen in Richtung Modellreduktion notwendig, um eine Anwendbarkeit im Rahmen einer Regelung, beispielsweise zur Unterstützung einer Gemischregelung, zu ermöglichen.

8 Fazit

Durch die Integration einer pulsierenden, druckerhöhenden Verbrennung in eine Gasturbine kann in der Theorie ein hoher thermodynamischer Wirkungsgrad der Gesamtmaschine erzielt werden. Bei der technischen Realisierung ist jedoch mit einigen Herausforderungen zu rechnen, welche zum einen aus der Erhöhung des Mitteldrucks in der Brennkammer und zum anderen aus dem pulsierenden Charakter der Verbrennung resultieren. Die damit verbundenen Problemstellungen der Wiederbefüllungsproblematik, der Vermeidung ungleichmäßiger Anströmbedingungen der Turbine sowie die Notwendigkeit einer Detektion ausgefallener Brennrohre wurden im Rahmen dieser Arbeit in Kapitel 1 zunächst identifiziert und erläutert. Anschließend wurden Methoden zur Lösung dieser Problemstellungen entwickelt. Um diese Methoden experimentell zu validieren, wurde ein akustischer Prüfstand konstruiert, der es erlaubt, den wesentlichen Charakter der Brennkammer innerhalb der Gesamtmaschine und somit die zu lösenden Problemstellungen in einem experimentellen Umfeld abzubilden, vergleiche Kapitel 4. In dem beschriebenen Aufbau wurden die Verbrennungsrohre einer Detonationsbrennkammer durch Lautsprecher ersetzt, welche rein akustische Detonationsereignisse simulieren, d.h. der Umgang mit komplexen Verbrennungsprozessen und alle damit verbundenen experimentellen Schwierigkeiten wurden vermieden. Dies ermöglichte die Entwicklung und experimentelle Validierung von Methoden, mit denen die genannten Problemstellungen angegangen werden können. Im Folgenden werden die angewendeten Methoden und erzielten Ergebnisse, gegliedert nach den jeweiligen Problemstellungen, zusammengefasst.

- *Wiederbefüllungsproblematik* – Diese Problematik lässt sich in zwei Unterprobleme aufteilen: Generierung einer umlaufenden Saugwelle, welche die Wiederbefüllung aller Verbrennungsrohre im laufenden Betrieb unterstützt, und die Wiederbefüllung eines einzelnen, ausgefallenen Rohres, welches wieder in den laufenden Betrieb aufgenommen werden soll.

- *Umlaufende Saugwelle* – Zur Generierung einer umlaufenden Saugwelle wurde in Abschnitt 5.1.2 zunächst ein geeignetes Feuermuster bestimmt. Dabei zeigte sich, dass die erreichbare Amplitude der Saugwelle sowohl von den akustischen Eigenfrequenzen des Prüfstands als auch von der Feuerfrequenz der Rohre abhängig ist. Der genaue Zusammenhang wurde in diesem Abschnitt für verschiedene Konfigurationen von simulierten Verbrennungsrohren berechnet und dargestellt.

In Abschnitt 5.1.3 und 5.1.4 wurde die Implementierung der Extremwertregelung am Prüfstand inklusive eines Algorithmus zur Schätzung der Amplitude der umlaufenden Saugwelle aus Mikrofonomessungen vorgestellt. Ziel der Extremwertregelung war es, die Amplitude der umlaufenden Saugwelle durch Einstellung einer geeigneten Feuerfrequenz zu maximieren. Die mit diesem Ansatz erzielten experimentellen Ergebnisse wurden präsentiert und diskutiert. Es zeigte sich, dass die gewählte Regelungsstrategie die oben beschriebene Aufgabenstellung sehr gut bewältigen konnte.

- *Wiederbefüllung eines einzelnen, ausgefallenen Rohres* – Um ein einzelnes Rohr wieder in den laufenden Betrieb aufzunehmen, muss gezielt vor diesem Rohr eine Saugwelle mit möglichst hoher Amplitude generiert werden. Zu diesem Zweck

wurden in dieser Arbeit Optimalsteuerungen berechnet, welche die Rohre so synchronisieren, dass diese Anforderung in einem optimalen Sinne erfüllt wird. Dazu wurde in Abschnitt 5.2.1 zunächst ein spezielles mathematisches Modell des Prüfstands ermittelt, welches strukturell einem Impulsantwortmodell entspricht. Anschließend wurden in Abschnitt 5.2.2 verschiedene mögliche Formulierungen des Optimierungsproblems vorgestellt und durch *mixed-integer programming* gelöst. Die so berechneten Optimalsteuerungen wurden am akustischen Prüfstand angewendet und die damit erzielten Ergebnisse präsentiert, vergleiche Abschnitt 5.2.3. Mit allen berechneten Optimalsteuerungen konnte innerhalb des gewünschten Zeitfensters an der vorgegebenen Position eine signifikante Saugwelle generiert werden und, je nach formulierter Anforderung, auch gleichzeitig eine Minimierung der Druckschwankungen an allen anderen gemessenen Positionen erzielt werden.

- *Vermeidung ungleichmäßiger Anströmbedingungen* – Um die Turbine vor mechanischer Überlastung zu schützen und möglichst gleichmäßige Anströmbedingungen zu erzeugen, sollten die Druckpulsationen im Plenum, welche durch die einzelnen Detonationsrohre hervorgerufen werden, möglichst homogenisiert werden.¹ Die in Abschnitt 5.2 vorgestellte, optimierungsbasierte Methode kann neben der Generierung einer Saugwelle ebenso zur Lösung dieser Aufgabe genutzt werden. Dafür musste lediglich das Gütekriterium des Optimierungsproblems angepasst werden. Die damit erzielten Ergebnisse wurden ebenfalls in Abschnitt 5.2.3 beschrieben. Durch die so berechneten Optimalsteuerungen konnten die Druckschwankungen im Plenum deutlich reduziert werden.
- *Detektion ausgefallener Brennröhre* – Um Maßnahmen zur Wiederbefüllung eines ausgefallenen Rohres zu initialisieren, muss zunächst klar sein, ob ein Rohr ausgefallen ist und um welches Rohr es sich dabei handelt. In dieser Arbeit wurden zwei verschiedene Methoden vorgestellt, welche zur Bearbeitung dieser Fehlererkennungsaufgabe Mikrofonmessungen aus dem Plenum des Prüfstands verarbeiten. Die in Abschnitt 6.2 vorgestellte Mehrfiltermethode verwendet dafür eine Vielzahl von parallelgeschalteten Kalman-Filtern. Diese berechnen unter Nutzung eines Modells und von Messdaten weitere stochastische Parameter, anhand derer die eigentliche Fehlererkennung durchgeführt wird. Das in den Kalman-Filtern verwendete akustische Modell des Prüfstands entstammt einer physikalischen Modellbildung und einer anschließenden Parameteridentifikation.

Als alternativer, datenbasierter Ansatz wurde in Abschnitt 6.3 ein neuronales Netz präsentiert, welches ohne physikalisches Modell auskommt. Mit beiden präsentierten Methoden konnten ausgefallene Rohre schnell und zuverlässig erkannt werden. Das neuronale Netz konnte dabei selbst in Situationen mit stochastischer Totzeit im Steuerungssignal der Lautsprecher eine zuverlässige Detektion gewährleisten, bei denen die Mehrfiltermethode keine zufriedenstellenden Ergebnisse lieferte.

Abschließend wurde in Kapitel 7 eine Zustandsschätzmethode vorgestellt, welche basierend auf einem Sigma-Punkt-Kalman-Filter die örtlich verteilten Zustände eines Strömungsfelds schätzt, welches durch die 1-D Euler-Gleichungen beschrieben ist. Es konnte gezeigt werden, dass mit diesem Ansatz Schätzfehler in den Anfangsbedingungen effizient abgebaut werden können und somit bereits nach kurzer Zeit eine gute Schätzung des zugrundeliegenden Strömungsfelds vorliegt. Die präsentierte Methodik könnte potentiell zur Zustandsschätzung

¹Falls nicht weitere Anforderungen, wie beispielsweise die Generierung einer umlaufenden Saugwelle dies verbieten.

innerhalb von Detonationsrohren herangezogen werden.

Zusammenfassend bietet die vorliegende Arbeit somit eine Vielzahl unterschiedlicher Methoden, um die genannten Probleme, mit deren Auftreten beim Betrieb einer Gasturbine mit druckerhöhender, pulsierender Brennkammer zu rechnen ist, zu lösen. Alle präsentierten Verfahren, mit Ausnahme der Zustandsschätzung für die 1-D Euler-Gleichungen, wurden experimentell an einem akustischen Prüfstand validiert. In zukünftigen Arbeiten sollten diese Methoden an einen Prüfstand mit realen Detonationsrohren angewendet werden, um zu überprüfen, in wie fern diese Methoden noch angepasst werden müssen, um den gewünschten, zuverlässigen Betrieb zu realisieren.

Literaturverzeichnis

- [Allgood et al., 2006] Allgood, D., Gutmark, E., Hoke, J., Bradley, R., & Schauer, F. (2006). Performance measurements of multicycle pulse-detonation-engine exhaust nozzles. *Journal of Propulsion and Power*, 22(1), 70–77.
- [Anand et al., 2018a] Anand, V., George, A. S., de Luzan, C. F., & Gutmark, E. (2018a). Rotating detonation wave mechanics through ethylene-air mixtures in hollow combustors, and implications to high frequency combustion instabilities. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 92, 314–325.
- [Anand & Gutmark, 2018] Anand, V. & Gutmark, E. (2018). Rotating detonation combustor research at the University of Cincinnati. *Flow, Turbulence and Combustion*.
- [Anand et al., 2018b] Anand, V., Jodele, J., Knight, E., Prisell, E., Lyrsell, O., & Gutmark, E. (2018b). Dependence of pressure, combustion and frequency characteristics on valved pulsejet combustor geometries. *Flow, Turbulence and Combustion*, 100(3), 829–848.
- [Anderson, 1995] Anderson, J. D. (1995). *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill.
- [Ariyur & Krstić, 2003] Ariyur, K. B. & Krstić, M. (2003). *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Bar-Shalom et al., 2002] Bar-Shalom, Y., Li, X.-R., & Kirubarajan, T. (2002). *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Berndt, 2016] Berndt, P. (2016). *Mathematical modeling of the shockless explosion combustion*. PhD thesis, Freie Universität Berlin.
- [Bhargava & Rose, 2015] Bhargava, M. & Rose, R. (2015). Architectures for deep neural network based acoustic models defined over windowed speech waveforms. In *Proceedings of the INTERSPEECH 2015* (pp. 6–10).
- [Bishop, 2006] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.
- [Bobusch et al., 2014] Bobusch, B. C., Berndt, P., Paschereit, C. O., & Klein, R. (2014). Shockless explosion combustion: An innovative way of efficient constant volume combustion in gas turbines. *Combustion Science and Technology*, 186(10-11), 1680–1689.
- [Boyd & Vandenberg, 2004] Boyd, S. & Vandenberg, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- [Bratkovich et al., 1997] Bratkovich, T., Aarnio, M., Williams, J., & Bussing, T. (1997). An introduction to pulse detonation rocket engines (PDREs). In *Proceedings of the AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference 1997*.
- [Bräunling, 2001] Bräunling, W. J. G. (2001). *Flugzeugtriebwerke: Grundlagen, Aero-Thermodynamik, Kreisprozesse, Thermische Turbomaschinen, Komponenten- und Auslegungsberechnungen*. Springer.

- [Bright, 2002] Bright, A. (2002). *Active control of loudspeakers: An investigation of practical applications*. PhD thesis, Ørsted DTU Technical University of Denmark.
- [Bussing & Pappas, 1994] Bussing, T. & Pappas, G. (1994). An introduction to pulse detonation engines. In *Proceedings of the Aerospace Sciences Meeting 1994*.
- [Bykovskii & Vedernikov, 2003] Bykovskii, F. A. & Vedernikov, E. F. (2003). Continuous detonation of a subsonic flow of a propellant. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 39(3), 323–334.
- [Einfeldt, 1988] Einfeldt, B. (1988). On Godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(2), 294–318.
- [Ganguli, 2003] Ganguli, R. (2003). Application of fuzzy logic for fault isolation of jet engines. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125(3), 617–623.
- [Gelb, 1986] Gelb, A. (1986). *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press.
- [Gelbert, 2013] Gelbert, G. (2013). *Adaptive und modellbasierte Regelung von thermoakustischen Instabilitäten*. PhD thesis, Technischen Universität Berlin.
- [Glaser et al., 2006] Glaser, A. J., Caldwell, N., & Gutmark, E. (2006). Performance measurements of a pulse detonation combustor array integrated with an axial flow turbine. In *Proceedings of the AIAA Aerospace Sciences Meeting*, number AIAA 2006–1232.
- [Glorot & Bengio, 2010] Glorot, X. & Bengio, Y. (2010). Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks. In *Proceedings of the AISTATS 2010*, volume 9 (pp. 249–256).
- [Goodfellow et al., 2016] Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. M.I.T. Press.
- [Gray et al., 2017] Gray, J., Lemke, M., Reiss, J., Paschereit, C. O., Sesterhenn, J., & Moeck, J. P. (2017). A compact shock-focusing geometry for detonation initiation: Experiments and adjoint-based variational data assimilation. *Combustion and Flame*, 183, 144–156.
- [Gray et al., 2016] Gray, J., Vinkeloe, J., Moeck, J., Paschereit, C., Stathopoulos, P., Berndt, P., & Klein, R. (2016). Thermodynamic evaluation of pulse detonation combustion for gas turbine power cycles. In *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2016*, volume 4B.
- [Gray et al., 2014] Gray, J. A. T., Paschereit, C. O., & Moeck, J. P. (2014). An experimental study of different obstacle types for flame acceleration and DDT. In R. King (Ed.), *Active Flow and Combustion Control 2014. NNFEM*, volume 127 (pp. 265–279).: Springer.
- [Gülen, 2015] Gülen, S. (2015). Étude on gas turbine combined cycle power plant - next 20 years. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138(5).
- [Gurobi Optimization, LLC, 2018] Gurobi Optimization, LLC (2018). Gurobi optimizer reference manual.
- [Hagan et al., 2014] Hagan, M. T., Demuth, H. B., Beale, M. H., & de Jesús, O. (2014). *Neural Network Design*. Martin Hagan, 2 edition.
- [Hoshen et al., 2015] Hoshen, Y., Weiss, R., & Wilson, K. W. (2015). Speech acoustic modeling from raw multichannel waveforms. In *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing 2015* (pp. 4624–4628).

- [Houtekamer & Zhang, 2016] Houtekamer, P. L. & Zhang, F. (2016). Review of the ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation. *Monthly Weather Review*, 144(12), 4489–4532.
- [Julier, 2002] Julier, S. (2002). The scaled unscented transformation. In *Proceedings of the American Control Conference 2002*, volume 6 (pp. 4555–4559).
- [Kingma & Ba, 2014] Kingma, D. P. & Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv:1412.6980 [cs.LG]*.
- [Kobayashi & Simon, 2005] Kobayashi, T. & Simon, D. L. (2005). Evaluation of an enhanced bank of Kalman filters for in-flight aircraft engine sensor fault diagnostics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127(3), 497–504.
- [Kobayashi & Simon, 2006] Kobayashi, T. & Simon, D. L. (2006). Hybrid Kalman filter approach for aircraft engine in-flight diagnostics: Sensor fault detection case. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 129(3), 746–754.
- [Lemke & Sesterhenn, 2016] Lemke, M. & Sesterhenn, J. (2016). Adjoint-based pressure determination from PIV-data in compressible flows – Validation and assessment based on synthetic data. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 58, 29–38.
- [Li et al., 2018] Li, J.-M., Teo, C. J., Khoo, B. C., Wang, J.-P., & Wang, C. (2018). *Detonation Control for Propulsion: Pulse Detonation and Rotating Detonation Engines*. Springer.
- [Matsuoka et al., 2015] Matsuoka, K., Mukai, T., & Endo, T. (2015). Development of a liquid-purge method for high-frequency operation of pulse detonation combustor. *Combustion Science and Technology*, 187(5), 747–764.
- [Matsuoka et al., 2017] Matsuoka, K., Muto, K., Kasahara, J., Watanabe, H., Matsuo, A., & Endo, T. (2017). Investigation of fluid motion in valveless pulse detonation combustor with high-frequency operation. *Proceedings of the Combustion Institute*, 36(2), 2641–2647.
- [Maybeck, 1982] Maybeck, P. S. (1982). *Stochastic Models, Estimation and Control Vol. 2*. Academic Press.
- [McClearn et al., 2016] McClearn, M. J., Polanka, M. D., Lapp, K., Mataczynski, M. R., Schauer, F. R., & Paxson, D. E. (2016). The testing of a small-scale wave rotor for use as a modified brayton-cycle engine. In *Proceedings of the AIAA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference 2016*, number AIAA 2016-5112.
- [Meitner et al., 2006] Meitner, P. L., Boruta, M., & Jerovsek, J. (2006). *The nutating engine – Prototype engine progress report and test results*. Technical Report 2006-214342, NASA.
- [Moeck, 2010] Moeck, J. P. (2010). *Analysis, Modeling, and Control of Thermoacoustic Instabilities*. PhD thesis, Technische Universität Berlin.
- [Naderi et al., 2011] Naderi, E., Meskin, N., & Khorasani, K. (2011). Nonlinear fault diagnosis of jet engines by using a multiple model-based approach. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 134(1).
- [Nicholls et al., 1962] Nicholls, J. A., Cullen, R. E., Cosens, G. L., Sichel, M., Kurath, E., Cheslak, F., Olsson, G., Fu, J., David, T., Brown, J., & Ragland, K. (1962). *The feasibility of a rotating detonation wave rocket motor*. Technical report, University of Michigan, ORA Report 05179-1-P.

- [Nicholls et al., 1957] Nicholls, J. A., Wilkinson, H. R., & Morrison, R. B. (1957). Intermittent detonation as a thrust-producing mechanism. *Journal of Jet Propulsion*, 27(5), 534–541.
- [Palaz et al., 2013] Palaz, D., Collobert, R., & Magimai-Doss, M. (2013). Estimating phoneme class conditional probabilities from raw speech signal using convolutional neural networks. *arXiv:1304.1018 [cs.LG]*.
- [Pandey & Debnath, 2016] Pandey, K. M. & Debnath, P. (2016). Review on recent advances in pulse detonation engines. *Journal of Combustion*.
- [Paxson & Dougherty, 2008] Paxson, D. & Dougherty, K. (2008). Operability of an ejector enhanced pulse combustor in a gas turbine environment. In *Proceedings of the AIAA Aerospace Sciences Meeting 2008*, number AIAA 2008–119.
- [Pochet & Wolsey, 2006] Pochet, Y. & Wolsey, L. A. (2006). *Production Planning by Mixed Integer Programming*. Springer.
- [Putnam et al., 1986] Putnam, A. A., Belles, F. E., & Kentfield, J. A. C. (1986). Pulse combustion. *Progress in Energy and Combustion Science*, 12(1), 43–79.
- [Rabiner & Juang, 1993] Rabiner, L. & Juang, B.-H. (1993). *Fundamentals of Speech Recognition*. Prentice-Hall, Inc.
- [Rahme & Meskin, 2015] Rahme, S. & Meskin, N. (2015). Adaptive sliding mode observer for sensor fault diagnosis of an industrial gas turbine. *Control Engineering Practice*, 38, 57–74.
- [Rasheed et al., 2009] Rasheed, A., Furman, A. H., & Dean, A. J. (2009). Pressure measurements and attenuation in a hybrid multitube pulse detonation turbine system. *Journal of Propulsion and Power*, 25(1), 148–161.
- [Rasheed et al., 2011] Rasheed, A., Furman, A. H., & Dean, A. J. (2011). Experimental investigations of the performance of a multitube pulse detonation turbine system. *Journal of Propulsion and Power*, 27(3), 586–596.
- [Rienstra & Hirschberg, 2013] Rienstra, S. & Hirschberg, A. (2013). *An Introduction to Acoustics*. Technical report, Eindhoven University of Technology.
- [Sampath & Singh, 2004] Sampath, S. & Singh, R. (2004). An integrated fault diagnostics model using genetic algorithm and neural networks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 128(1), 49–56.
- [Schäpel et al., 2015] Schäpel, J.-S., King, R., Bobusch, B., Moeck, J., & Paschereit, C. O. (2015). Adaptive control of mixture profiles for a combustion tube. In *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2015*, volume 4A.
- [Schäpel et al., 2018] Schäpel, J.-S., King, R., Yücel, F., Völzke, F., Paschereit, C. O., & Klein, R. (2018). Fuel injection control for a valve array in a shockless explosion combustor. In *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2018*, volume 6.
- [Schäpel et al., 2016] Schäpel, J.-S., Reichel, T., Klein, R., Paschereit, C. O., & King, R. (2016). Online optimization applied to a shockless explosion combustor. *Processes*, 4(4).

- [Schäpel et al., 2017] Schäpel, J.-S., Wolff, S., Schulze, P., Berndt, P., Klein, R., Mehrmann, V., & King, R. (2017). State estimation for reactive Euler equation by Kalman filtering. *CEAS Aeronautical Journal*, 8(2), 261–270.
- [Schneider & Georgakis, 2013] Schneider, R. & Georgakis, C. (2013). How to not make the extended Kalman filter fail. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 52(9), 3354–3362.
- [Schuermans, 2003] Schuermans, B. (2003). *Modeling and Control of Thermoacoustic Instabilities*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [Shang & Liu, 2011] Shang, L. & Liu, G. (2011). Sensor and actuator fault detection and isolation for a high performance aircraft engine bleed air temperature control system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19(5), 1260–1268.
- [Simani et al., 2000] Simani, S., Fantuzzi, C., & Beghelli, S. (2000). Diagnosis techniques for sensor faults of industrial processes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(5), 848–855.
- [Srivastava et al., 2014] Srivastava, N., Hinton, G., Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Salakhutdinov, R. (2014). Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting. *Journal of Machine Learning Research*, 15(1), 1929–1958.
- [Szegedy et al., 2014] Szegedy, C., Liu, W., Jia, Y., Sermanet, P., Reed, S. E., Anguelov, D., Erhan, D., Vanhoucke, V., & Rabinovich, A. (2014). Going deeper with convolutions. *arXiv:1409.4842 [cs.CV]*.
- [Tan et al., 2018] Tan, Q., Divekar, P., Tan, Y., Chen, X., & Zheng, M. (2018). Model-guided extremum seeking for diesel engine fuel injection optimization. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(2), 936–946.
- [Tüske et al., 2014] Tüske, Z., Golik, P., Schlüter, R., & Ney, H. (2014). Acoustic modeling with deep neural networks using raw time signal for LVCSR. In *Proceedings of the INTERSPEECH 2014* (pp. 890–894).
- [van den Oord et al., 2016] van den Oord, A., Dieleman, S., Zen, H., Simonyan, K., Vinyals, O., Graves, A., Kalchbrenner, N., Senior, A. W., & Kavukcuoglu, K. (2016). WaveNet: A generative model for raw audio. *arXiv:1609.03499 [cs.SD]*.
- [VDI e.V., 2013] VDI e.V. (2013). *VDI-Wärmeatlas*. Springer, 11 edition.
- [Visaton, 2015] Visaton (2015). Datenblatt zum Visaton TI 100 - 8 Ohm Tiefmitteltöner.
- [Voitsekhovskii, 1960] Voitsekhovskii, B. V. (1960). Stationary spin detonation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 3, 157–164.
- [Volponi et al., 2003] Volponi, A. J., DePold, H., Ganguli, R., & Daguang, C. (2003). The use of Kalman filter and neural network methodologies in gas turbine performance diagnostics: A comparative study. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125(4), 917–924.
- [Wan & van der Merwe, 2001] Wan, E. A. & van der Merwe, R. (2001). The unscented Kalman filter. In S. Haykin (Ed.), *Kalman Filtering and Neural Networks*: John Wiley & Sons, Inc.

- [Wolański, 2013] Wolański, P. (2013). Detonative propulsion. *Proceedings of the Combustion Institute*, 34(1), 125–158.
- [Wolański, 2018] Wolański, P. (2018). Development of gasturbine with detonation chamber. In J.-M. Li, C. J. Teo, B. C. Khoo, J.-P. Wang, & C. Wang (Eds.), *Detonation Control for Propulsion, Pulse Detonation and Rotating Detonation Engines*, volume 127: Springer.
- [Wolff & King, 2014] Wolff, S. & King, R. (2014). Model-based detection of misfirings in an annular burner mockup. In R. King (Ed.), *Active Flow and Combustion Control 2014. NNFM*, volume 127 (pp. 229–244).: Springer.
- [Wolff & King, 2015] Wolff, S. & King, R. (2015). An annular pulsed detonation combustor mockup: system identification and misfiring detection. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138(4).
- [Wolff et al., 2015] Wolff, S., Schäpel, J.-S., Berndt, P., & King, R. (2015). State estimation for the homogeneous 1-D Euler equation by unscented Kalman filtering. In *Proceedings of the ASME DSCC 2015*.
- [Wolff et al., 2016] Wolff, S., Schäpel, J.-S., & King, R. (2016). Application of artificial neural networks for misfiring detection in an annular pulsed detonation combustor mockup. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 139(4).
- [Wolsey, 1998] Wolsey, L. A. (1998). *Integer Programming*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Wu, 2008] Wu, Y. (2008). A mixed-integer programming model for global logistics transportation problems. *International Journal of Systems Science*, 39(3), 217–228.
- [Yücel et al., 2018] Yücel, F. C., Völzke, F., & Paschereit, C. O. (2018). Effect of the switching times on the operating behavior of a shockless explosion combustor. In R. King (Ed.), *Active Flow and Combustion Control 2018. NNFM*, volume 127 (pp. 121–134).: Springer.
- [Zel’dovich, 1940] Zel’dovich, Y. B. (1940). On the use of detonative combustion in power engineering. *Journal of Technical Physics*, 10, 1453–1461.
- [Zhang et al., 2013] Zhang, X., Tang, L., & Decastro, J. (2013). Robust fault diagnosis of aircraft engines: A nonlinear adaptive estimation-based approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3), 861–868.
- [Zou & Hastie, 2005] Zou, H. & Hastie, T. (2005). Regularization and variable selection via the elastic net. *Journal of the Royal Statistical Society , Series B*, 67(2), 301–320.