Niederdimensionale Wirbelmodelle zur Regelung von Scher- und Nachlaufströmungen

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur
Mark Pastoor

Von der Fakultät III – Prozesswissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss

Vorsitzender:	Prof. Dr. Matthias Kraume
Berichter:	Prof. Dr. Rudibert King
	Prof. Dr. Bernd R. Noack
	Prof. Dr. Gilead Tadmor

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 20.05.2008

Berlin 2008
D 83

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik des Institutes für Prozess- und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Berlin im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Sonderforschungsbereiches 557 „Beeinflussung komplexer turbulenter Scherströmungen“. Ich möchte an dieser Stelle all denen meinen Dank aussprechen, die mich bei meiner Arbeit mit Rat und Tat unterstützt haben.

Prof. Rudibert King hat durch unermüdliche Arbeit als Sprecher des Sonderforschungsbereiches ein Umfeld mit besten Arbeitsbedingungen für seine Mitarbeiter geschaffen. Aus seinen Vorlesungen über Regelungstechnik konnte ich einen anschaulichen Zugang zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewinnen. Dr. Bernd Noack stand mir stets mit geduldiger Hilfe bei allen theoretischen, numerischen und mitunter sogar experimentellen Problemen der Strömungsmechanik zur Seite. Seine *best practices* und die vielen gemeinsamen Stunden vor dem Rechner oder im Café haben das mühevolle Erlernen von wissenschaftlichem Arbeiten und Schreiben mit reichlich Spaß entlohnt. Von Prof. Gilead Tadmor konnte ich durch Aufenthalte an der Northeastern University in Boston in den Jahren 2003 und 2004 und seine Gegenbesuche in Berlin viel über regelungstechnische Fragen der Strömungsbeeinflussung und zum Thema Funktionentheorie lernen. Das Pessach-Fest 2004 im Kreise seiner Familie und Bekannten ist mir lebhaft in Erinnerung.

Im Rückblick erscheint es, als wäre ich schon im Studium in die „richtige“ Richtung, nämlich zur Strömungsregelung, getrieben worden: Prof. Heinz Schade, Prof. Andreas Dillmann, Dr. Klaus Neemann und Dr. Klaus Ehrenfried haben mir im Studium den Spaß an der Strömungsmechanik und den Zauber der Potentialtheorie vermittelt. Prof. Hans-Hermann Fernholz, Dr. Martin Schober und Rainer Sonnenberger haben mir viele Jahre spannende Arbeiten zur experimentellen Strömungsbeeinflussung als studentische Hilfskraft am Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik ermöglicht.

Ein großes Dankeschön gebührt außerdem meinen Kollegen im Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik, die mich mit ihrer Forschung und vielen fruchtbaren Diskussionen begeistert haben: Dr. Ralf Becker und Dr. Maiko Garwon haben meine Arbeit mit ihren experimentellen bzw. numerischen Untersuchungen zur Beeinflussung der Stufenströmung unterstützt. Lars Henning hat mit den experimentellen Untersuchungen am stumpfen Körpern eine hervorragende Grundlage für gemeinsame Veröffentlichungen und Vorträge gelegt. Die Mitarbeiter aus der Biotechnik-Gruppe, Dr. Thomas Heine und Michael Kawohl, haben mit ihren Anregungen zur numerischen Identifikation von Parametern und zu den Sigma-Punkt-Kalman-Filtern einen großen Beitrag geleistet. Ich danke meinem Kollegen Joachim Kraatz für rasche Hilfe bei Problemen mit Rechnern und Messtechnik und Frank Kunze für die Implementierung von CGNS, sowie den Sekretärinnen Barbara Falcke und Steffi Stehr für die reibungslose Bewältigung der administrativen „Herausforderungen“.

Die ausgezeichneten Forschungsbedingungen und die weitgefächterten Kooperationspartner boten stets die Möglichkeit, auftretende Probleme mit den jeweiligen Spezialisten zu besprechen: Die Mitarbeitern vom Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik Dr. Michael Schlegel, Mark Luchtenburg, Oliver Lehmann, Bert Günther, Angelo Carnarius und Thilo Knacke haben mich mit der Diskussion strömungsmechanischer Probleme und konkreter Hilfe bei der Lösung numerischer Aufgaben, wie etwa der Lösung der Druck-Poisson-Gleichung, vorangebracht. Prof. Wolfgang Nitsche, Ralf Petz, Dr. André Brunn und die Mitarbeiter der Werkstatt und des Hitzdrahtlabors des Instituts für Luft- und Raumfahrt haben mir die experimentellen Erprobung der wirbelbasierten Regler ermöglicht. Von Prof. Hans-Christian Hege, Tino Weinkauf und Jan Sahner vom Zuse-Institut Berlin stammen die fantastischen Werkzeuge zur Visualisierung und Grobstrukturextraktion aus numerischen Daten. Das Vertrauen, mit Wirbelverfahren reale Strömungsprobleme lösen zu können, ist mir durch einen Gastvortrag von Prof. Eckhardt Meiburg vermittelt worden.

Einen herzlichen Dank auch an meine studentischen Mitarbeiter, Studien- und Diplomarbeiter, für deren Beiträge zu meiner Arbeit: Gregor Gelbert, Stephan Pirskawetz und Christian Weckmüller haben mir mit der Auswertung numerischer Daten und der experimentellen Erprobung von Reglern bei den Arbeiten zur Stufenströmung eine große Hilfe erwiesen. Bei der Entwicklung von dreidimensionalen Wirbelverfahren möchte ich die Zuarbeiten von Mandy Goltzsch, Notger Heinz und besonders Weichen Liu hervorheben. Die Entwicklung der wirbelbasierten Bobachter wurde von Denny Schieske und Moritz Lange maßgeblich unterstützt. Jon Scouten hat mich mit Literaturrecherchen, numerischen Simulationen zur Strömung um stumpfe Körper und interessanten Diskussionen über Wirbelverfahren bereichert.

Meinen Freunden danke ich für einen erfrischenden Gegenpol zur wissenschaftlichen Arbeit. Großen Rückhalt und Entspannung habe ich stets bei netten Gesprächen und beim Silat-Training gefunden. Ein herzliches Dankeschön gebührt Octav D. Setiadji, dessen Silat-Training in den Stressphasen der Arbeit meinen Geist und meinen Körper zu versöhnen vermochte.

Ich danke meinen Eltern, Evi und Siegmund Pastoor, die mir meinen Weg bis hier ermöglicht haben. Ihre tatkräftige Unterstützung bei der Betreuung meiner Kinder Johan und Philine hat mir in den kritischen Phasen meiner Arbeit einen großen Rückhalt gegeben. Meine liebste Tine gab mir Ruhe, Mut und Entschlossenheit in den schwierigen Momenten, die das Forschen und Schreiben von Anträgen und Artikeln mit sich bringt, und den richtigen Abstand zur Bedeutung der eigenen Arbeit.

Berlin, den 22. Mai 2008 Mark Pastoor

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation mit dem Titel

„*Niederdimensionale Wirbelmodelle zur Regelung von Scher- und Nachlaufströmungen*“

selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Die Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftlern habe ich kenntlich gemacht.

Teile dieser Arbeit sind bereits veröffentlicht oder zur Veröffentlichung eingereicht und zwar in:

- Pastoor, M., King, R., Noack, B. R., Dillmann, A. & Tadmor, G. 2003 Model-based coherent-structure control of turbulent shear flows using low-dimensional vortex models. In *33rd AIAA Fluids Conference and Exhibit*. Orlando, Florida, USA, June 23–26, 2003, Paper **2003-4261**.
- Pastoor, M., King, R., Noack, B. R. & Tadmor, G. 2005 Observers and feedback control for shear layer vortices (Invited). In *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005*. Seville, Spain, December 12–15, 2005, 506–511.
- Pastoor, M., King, R., Noack, B. R. & Tadmor, G. 2006 Spatiotemporal waveform observers and feedback in shear layer control. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, USA, January 9–12, 2006, Paper **2006-1402**.
- Pastoor, M., Henning, L., Noack, B. R., King, R. & Tadmor, G. 2008 Feedback shear layer control for bluff body drag reduction. Akzeptiert zur Veröffentlichung im *J. Fluid Mech.*
- Pastoor, M., Henning, L., Noack, B. R., King, R. & Tadmor, G. 2008 Real-time vortex-based dynamical observer for tandem wake flow experiments. In Vorbereitung zur Veröffentlichung im *J. Fluid Mech.*

Desweiteren erkläre ich, dass mir die geltende Promotionsordnung der Technischen Universität Berlin zur Erlangung des akademischen Grades *Doktor der Ingenieurwissenschaften* (Dr.-Ing.) in der Fassung vom 31. März 1996 bekannt ist. Eine Anmeldung der Promotionsabsicht habe ich an keiner anderen Fakultät oder Hochschule beantragt.

Berlin, den 22. Mai 2008 Mark Pastoor

Kurzfassung

Die Strömungsbeeinflussung mit dem Ziel der Verbesserung der Effizienz von Verbrennungsmaschinen und der aerodynamischen Wirkungsgrade von Fahrzeugen ist vor dem Hintergrund knapper Ressourcen, hoher Energiepreise und dem sich abzeichnenden Klimawandel von sowohl ökonomischem als auch ökologischem Interesse. In dieser Arbeit werden wirbelbasierte Verfahren zur niederdimensionalen Modellierung und zur modellbasierten Strömungsregelung von Scher- und Nachlaufströmungen vorgestellt.

Die Modellordnung eines Wirbelverfahrens, welches die Grobstrukturdynamik und die Aktuationseffekte in guter Näherung beschreibt, ist zu hoch für eine praktikable Anwendung regelungstechnischer Verfahren. Daher wird das aus der Analyse der Wirbelverfahren gewonnene Verständnis der Strömungsvorgänge für einen physikalisch motivierten Reglerentwurf verwendet. Für die Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe und die Strömung um einen stumpfen Körper werden eine Regelungsstrategien entwickelt und im Experiment getestet. Mit den hier beschriebenen Phasenreglern lassen sich die Strömungsvorgänge effizienter beeinflussen als durch gesteuerte Strömungsbeeinflussung oder als mit bereits bekannten Strömungsreglern auf der Basis von Gradienten- oder Black-Box-Verfahren.

So können durch Rückführung der Phasenlage der abschwimmenden Wirbel die Mischungsvorgänge der Stufenströmung bei einer Reynolds-Zahl von 4 000 so angefacht werden, dass die mittlere Länge der Ablöseblase gegenüber der gesteuerten Beeinflussung bei gleicher Stellenergie um 10% verringert wird. Hiermit könnte in der technischen Anwendung der Wirkungsgrad einer Verbrennungsmaschine gesteigert werden.

Bei der Strömung um einen stumpfen Körper mit einer Reynolds-Zahl von 70 000 lässt sich durch Synchronisation der ablösenden Wirbel eine Reduktion des druckinduzierten Windwiderstandes um 15% erzielen. Dies entspricht den Ergebnissen die sich mit anderen Beeinflussungstrategien erzielen lassen. Die notwendige Stellenergie lässt sich jedoch mit dem gewählten Regler gegenüber anderen Verfahren nahezu halbieren. Zudem ist der vorgestellte Regler robust gegenüber Änderungen der Betriebsbedingungen. Ein solcher Regler könnte in der Praxis den Widerstandsbeiwert eines Fahrzeuges absenken und zu einer Reduktion des Treibstoffbedarfs führen.

Anhand der Wirbelverfahren werden Streckenmodelle für die Strömung eines Körpers im Nachlauf eines stromauf liegenden Körpers erarbeitet. Diese Modelle ermöglichen über modellgestützte Messverfahren (erweitere und Sigma-Punkt-Kalman-Filter) die Rekonstruktion des Strömungsfeldes (Geschwindigkeit, Wirbelstärke, Druck). Hiermit kann erstmals ein Wirbelverfahren parallel zu einem Experiment gerechnet und zur echtzeitfähigen Vorhersage von Wirbelpositionen und Druckmessungen verwendet werden.

Abstract

Reduced-order vortex models for the control of shear and wake flows

High energy costs, dwindling resources and the threat of global warming favour the development of energy efficient engines and transport vehicles. As aerodynamic design is technically mature in many cases flow control has the potential to dramatically increase the performance of combustion engines or to decrease the pressure-induced drag of trucks and passenger cars. In this work, vortex-based low-order models are proposed to explain, develop and improve flow control strategies for shear and wake flows.

Due to the complexity of vortex-based models, which resolve the coherent structure dynamics and actuations effects, common control theory is practically not applicable for the design of flow controllers. Instead the physical insight obtained by the analysis of the vortex models is utilised to develop physically motivated controllers. For the flows over a backward facing step and past a bluff body a flow control strategy is deduced and tested in experiments. The proposed feedback phase controllers manipulate the coherent structure dynamics more efficiently as open-loop controllers or closed-loop controllers based on black-box models.

Feedback of the phasing of shedded vortices increases mixing in the recirculation zone behind the backward facing step at Reynolds number 4 000. The average length of the separation bubble is reduced by 10% compared to open-loop forcing operating at the same power level. This strategy can be envisioned to enhance mixing in a real combustion engine.

By synchronizing the phasing of vortex shedding in the wake of the bluff body pressure-induced drag decreases by 15% at Reynolds number 70 000. This rate was achieved by other control stragegies as well, but the required actuation power can be reduced by almost 50%. Furthermore, the strategy is robust under changing operating conditions. The proposed controller could be implemented at the stern of a ground vehicle in order to reduce the fuel consumption.

Reduced-order models of the flow around a bluff body in the wake of a bluff body ahead are derived from vortex methods. These plants are utilised to design dynamical observers (extended and Sigma-Point-Kalman filter) for the reconstruction of the flow field (velocity, vorticity, pressure). This enables a real-time prediction of vortex positions and sensor readings based on a vortex model running in parallel to an experiment.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis **XIII**

Tabellenverzeichnis **XV**

Symbolverzeichnis **XVII**

1 Einleitung **1**

1.1 Problemstellung und Motivation 1

1.2 Stand der Erforschung von Wirbelverfahren 5

1.3 Ziele und Gliederung der Arbeit 8

2 Methoden **11**

2.1 Strömungsmechanische Grundlagen 11

2.2 Wirbelverfahren 13

2.2.1 Potentialtheorie 13

2.2.1.1 Lösungen der Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen . . 15

2.2.1.2 Randbedingungen für Potentialströmungen 17

2.2.2 Konforme Abbildung 19

2.2.2.1 Invertierung der Transformation 20

2.2.2.2 Transformation des Geschwindigkeitsfeldes 21

2.2.2.3 Routh-Korrektur für transformierte Wirbeltrajektorien 21

2.2.3 Druckberechnung 22

2.2.3.1 Instationäre Bernoulli-Gleichung für Potentialströmungen 23

2.2.3.2 Euler-Gleichung für Potentialströmungen 24

2.2.3.3 Druck-Poisson-Gleichung 25

2.2.4 Aktuatoren 26

2.2.5 Modellierung nicht-inhärenter physikalischer Phänomene 27

2.2.5.1 Wirbelmodelle 28

2.2.5.2 Wirbelproduktion 30

2.2.5.3 Wirbelzerfall 32

2.2.5.4 Wirbelverschmelzung 33

2.2.5.5 Wirbelkernwachstum 33

2.3 Numerische Integrationsverfahren 33

2.3.1 Newton–Cotes-Formeln zur numerischen Integration 33

2.3.2 Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . 34
2.4 Schätzverfahren . . . 34
2.4.1 Erweitertes Kalman-Filter . . . 34
2.4.2 Sigma-Punkt-Kalman-Filter . . . 37

3 Regelung des Eckenwirbels 43
3.1 Modellierung des Prozesses . . . 43
3.2 Zustandsschätzung mit dem erweiterten Kalman-Filter . . . 45
3.3 Zustandsregelung zur Stabilisierung des Fixpunktes . . . 49
3.4 Beurteilung der Ergebnisse . . . 51
3.5 Folgerungen für die weitere Arbeit . . . 52

4 Strömung um eine rückwärts gewandte Stufe 53
4.1 Experiment und numerische Simulation . . . 56
4.1.1 Windkanal . . . 56
4.1.2 Large-eddy simulation . . . 59
4.2 Modellierung mit dem Wirbelverfahren . . . 60
4.2.1 Konforme Abbildung und Grundströmung . . . 61
4.2.2 Aktuation . . . 64
4.2.3 Kinematik und dynamisches Modell . . . 65
4.2.4 Sensorik . . . 66
4.2.5 Wirbelproduktion . . . 66
4.2.6 Wirbelkernwachstum . . . 67
4.2.7 Dissipationsmodelle . . . 68
4.2.8 Wirbelverschmelzung . . . 71
4.3 Analyse des Wirbelverfahrens . . . 71
4.3.1 Vergleich der Grobstrukturen . . . 71
4.3.2 Dynamische Bandbreite . . . 74
4.3.3 Beurteilung der Modellierung . . . 75
4.4 Phasenregelung im Experiment . . . 76
4.4.1 Definition der Strömungsphase . . . 76
4.4.2 Schätzung der Strömungsphase . . . 78
4.4.3 Strömungsregelung durch Phasenrückkopplung . . . 79
4.5 Modellreduktion . . . 81

5 Strömung um einen stumpfen Körper 85
5.1 Experimenteller Aufbau und Voruntersuchung . . . 87
5.1.1 Natürliche Strömung . . . 89
5.1.2 Beeinflusste Strömung . . . 91
5.2 Modellierung mit dem Wirbelverfahren . . . 93
5.3 Analyse der Grobstrukturen . . . 96

5.3.1 Natürliche und beeinflusste Strömung 96
5.3.2 Analyse der Transiente 98
5.3.3 Physikalische Auswertung des Aktuationsmechanismus 100
5.4 Phasenregelung im Experiment 104
5.4.1 Idee der Phasenregelung 104
5.4.2 Strömungsregelung durch Phasenrückkopplung 105
5.4.3 Bewertung der Phasenregelung 108
5.5 Modellreduktion 108

6 Strömung um eine Tandem-Konfiguration 113
6.1 Experimenteller Aufbau 115
6.2 Modellierung A 115
6.3 Modellierung B 117
6.3.1 Zustandsschätzung mit dem Sigma-Punkt-Kalman-Filter 119
6.3.2 Schätzung der Einströmbedingung 124
6.3.3 Schätzung der Einströmbedingung und Zustandskorrektur 124
6.4 Beurteilung des Verfahrens 124

7 Zusammenfassung und Ausblick 127

A Ergänzungen zur Stufe 133

B Ergänzungen zum stumpfen Körper 141

C Dreidimensionale Wirbelverfahren 143

Literaturverzeichnis 147

Abbildungsverzeichnis

1.1 Strömungsmodellierung und -regelung 3
1.2 Ebene Scherschichtströmungen 6
1.3 Ebene Nachlaufströmung 7
1.4 Übersicht der untersuchten Konfigurationen 9

2.1 Komplexe Potentiale 16
2.2 Reibungsfreie Randbedingungen einfacher Geometrien 18
2.3 Joukowski-Abbildung 19
2.4 Schwarz–Christoffel-Transformation 20
2.5 Routh-Korrektur für die Ellipsenströmung 23
2.6 Skizze zur Lösung der Druckgleichung 25
2.7 Aktuator 28
2.8 Vergleich von Punkt-, Rankine- und Oseen-Wirbel 30
2.9 Wirbelproduktion 31
2.10 Schätzung der Statistik mit dem SPKF 40

3.1 Potentialfelder der Eckenströmung 44
3.2 Zustandsschätzung der Eckenströmung (ungestört) 47
3.3 Zustandsschätzung der Eckenströmung (gestört) 48
3.4 Physikalisch motivierte Regelung der Eckenströmung (ungestört) 50
3.5 Ljapunov-Regelung der Eckenströmung (gestört) 51

4.1 Skizze der rückwärts gewandeten Stufe 54
4.2 Stromlinienbild der rückwärts gewandeten Stufe 55
4.3 Experimenteller Aufbau 56
4.4 Experimentelle Untersuchung von $x_r(f_a, g_{\max})$ 57
4.5 Vergleich von Scherschicht- und Druckfluktuationen 58
4.6 Rechengitter der LES 60
4.7 Grobstrukturen und Wanddruck der LES (schwach aktuiert) 61
4.8 Konforme Abbildung für die rückwärts gewandte Stufe 62
4.9 Potentiallösung der Stufenströmung 63

4.10 Aktuator an der Stufenkante . . . 65
4.11 Skizze zur Wirbelproduktion . . . 66
4.12 Geschwindigkeitsprofile . . . 68
4.13 Kalibration des Kernwachstumsmodels (natürlich) . . . 69
4.14 Kalibration des Dissipationsmodels (natürlich) . . . 70
4.15 Grobstrukturen der Les . . . 72
4.16 Grobstrukturen des Wirbelverfahrens . . . 73
4.17 Vergleich der Aktuationseffekte . . . 74
4.18 Exploration der Aktuationsmöglichkeiten . . . 75
4.19 Rekonstruktion der Strömungsphasean der Stufe . . . 77
4.20 Phasenschätzung im Experiment . . . 78
4.21 Experimentelle Phasenregelung an der Stufe . . . 80
4.22 Modellreduktion für die Stufenströmung . . . 82
4.23 Vergleich von Les und reduziertem Modell . . . 83

5.1 Skizze des stumpfen Körpers . . . 85
5.2 Druckfeld im Nachlauf des stumpfen Körpers . . . 86
5.3 Experimenteller Aufbau . . . 88
5.4 Einströmprofile vom stumpfen Körper . . . 89
5.5 Hitzdrahtspektren vom stumpfen Körper . . . 90
5.6 Piv und Wanddruck der natürlichen Strömung . . . 90
5.7 Parametervariation . . . 92
5.8 Piv und Wanddruck der beeinflussten Strömung . . . 92
5.9 Konforme Abbildung für den stumpfen Körper . . . 93
5.10 Druckberechnung am stumpfen Körper . . . 95
5.11 Transiente der Strömung um den stumpfen Körper . . . 97
5.12 Wanddruck und Zirkulationsproduktionsrate der transienten Strömung . . . 98
5.13 Wanddruck und Zirkulationsproduktionrrate der beeinflussten Strömung . . . 100
5.14 Entkopplung der Scherschicht- und Nachlaufphysik . . . 101
5.15 Phasenbeziehung zwischen Aktuation und Wanddruck . . . 102
5.16 Skizze des Phasenreglers für den stumpfen Körpers . . . 104
5.17 Phasenregelung im Experiment . . . 105
5.18 Bedeutung des Phasenversatzes bei der Phasenregelung . . . 106
5.19 Robustheit des Phasenreglers . . . 107
5.20 Piv und Wanddruck der geregelten Strömung . . . 107
5.21 Modellreduktion am stumpfen Körper . . . 109
5.22 Grobstrukturen des reduzierten Modells . . . 110

6.1 Experimenteller Aufbau der Tandem-Konfiguration . . . 114
6.2 Rankine-Körper . . . 115

6.3 Ergebnisse für Modell A 116
6.4 Ergebnisse für Modell B — nur Einströmung 123
6.5 Ergebnisse für Modell B — Einströmung und Korrektur 125

7.1 Robustheit und Schnelligkeit von Reglungsstrategien 128
7.2 Strömungsbeeinflussung bei stumpfen Körpern 129
7.3 Rekonstruktion und Prädiktion 130
7.4 Einsatzmöglichkeiten von Wirbelverfahren 131

A.1 Bildbereich und physikalisches Gebiet der Stufe 133
A.2 Kalibration des Kernwachstumsmodells (schwach aktuiert) 134
A.3 Kalibration des Kernwachstumsmodells (stark aktuiert) 135
A.4 Kalibration des Dissipationsmodels (schwach aktuiert) 136
A.5 Kalibration des Dissipationsmodels (stark aktuiert) 137
A.6 Grobstrukturen und Wanddruck der LES (natürlich) 138
A.7 Grobstrukturen und Wanddruck der LES (stark aktuiert) 139

B.1 Bildbereich und physikalisches Gebiet des stumpfen Körpers 142

C.1 Strömungsberechnung um einen Ahmed-Körper 143
C.2 Interpolation und Integration 144
C.3 Gitterverfeinerung, Glättung, Spiegelwirbel und Panele 145
C.4 Strömungsberechnung für einen runden Freistrahl 146

Tabellenverzeichnis

2.1 Ein- und Mehrschrittverfahren 35

4.1 Newton–Raphson-Startwerte ζ_0 für die rückwärts gewandte Stufe 64

5.1 Experimentelle Kenngrößen beim stumpfen Körper 91

6.1 Sensorpositionen auf den beiden Körpern (in mm). Die x-Positionen für den zweiten Körper sind auf die Position der Körpernase bei $x^* = 360$ mm bezogen. . 115

B.1 Newton–Raphson-Startwerte ζ_0 für den stumpfen Körper 141

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole

$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
Δt	Zeitschrittweite
t	Zeit

Strömungsmechanische Symbole

a	Konstante der Schwarz–Christoffel-Transformation
$\mathbf{A}$	Flächenvektor
α	Anströmwinkel
$\beta_{\{0,\ldots,N\}}$	Winkel der Schwarz–Christoffel-Transformation
$c_{\{0,\ldots,N\}}$	Konstanten der Joukowski-Abbildung
C_1, C_2	Konstanten der Schwarz–Christoffel-Transformation
c_D	Widerstandsbeiwert
c_μ	Impulsbeiwert
c_p	Druckbeiwert
δ_{99}	99%-Dicke der Grenzschicht
δ_1	Verdrängungsdicke der Grenzschicht
δ_2	Impulsverlustdicke der Grenzschicht
$e_{\{0,\ldots,N\}}$	Punkte der Schwarz–Christoffel-Transformation im Bildbereich
$E_{\{0,\ldots,N\}}$	Punkte der Schwarz–Christoffel-Transformation im physikalischen Bereich
f	Frequenz
f_a	Aktuationsfrequenz
$\mathbf{f}$	Kraftdichtevektor eines äußeren Feldes
Φ	Geschwindigkeitspotential
ϕ	Phasenwinkel
γ	Zirkulationsdichte
Γ	Zirkulation
h	Stufen- bzw. Körperhöhe
H	Kanalhöhe
H_{12}	Formfaktor der Grenzschicht

Strömungsmechanische Symbole (Fortsetzung)

η	Imaginärteil der komplexen Koordinate im Bildbereich
$\mathbf{l}$	Vektor eines Kurvenelementes
L	charakteristische Länge
λ	Wellenlänge
M	Dipolmoment
N	Anzahl der Wirbel
N_p	Zeitschritte pro eingesetztem Wirbel
ν	kinematische Zähigkeit
$\boldsymbol{\omega}$	Wirbelstärkevektor
$\boldsymbol{\omega}_z$	z-Komponente des Wirbelstärkevektors
p	(statischer) Druck
p_0	Referenzdruck
p'	Schwankungsdruck
Ψ	Stromfunktion
Q	Quellstärke
Q_a	nominale Quellstärke des Aktuators
r	radiale Koordinate, Abstand
$\mathbf{r}$	Radius-, Abstandsvektor
R	Radius
$\mathcal{R}$	Routh-Korrektur
R_b	Kernradius
ρ	Dichte
Re	Reynolds-Zahl
τ_w	Wandschubspannung
θ	Phasenwinkel
u	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
$\mathbf{u}$	Geschwindigkeitsvektor
u_ϕ	azimuthale oder Umfangsgeschwindigkeit
U	charakteristische Geschwindigkeit
U_c	Konvektionsgeschwindigkeit
U_∞	Anströmgeschwindigkeit
v	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
w^z	komplexe Geschwindigkeit im physikalischen Bereich
$w^\zeta_{\{d,p,s,v\}}$	komplexe Geschwindigkeit im Bildbereich
$W_{\{d,p,s,v\}}$	komplexes Potential
ω	Kreisfrequenz
x	kartesische Ortskoordinate in Strömungsrichtung
$\mathbf{x}$	Ortsvektor

Strömungsmechanische Symbole (Fortsetzung)

ξ	Realteil der komplexen Koordinate im Bildbereich
χ	Wirbeltrajektorie
y	kartesische Ortskoordinate normal zur Strömungsrichtung
z	komplexe Koodinate im physikalischen Bereich
z'	Ableitung $\mathrm{d}z/\mathrm{d}\zeta$
ζ	komplexe Koordinate im Bildbereich
ζ'	Ableitung $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}z$
ζ''	Ableitung $\mathrm{d}\zeta'/\mathrm{d}z$

Regelungstechnische Symbole

$\mathbf{a}$	Zustandsvektor
$\mathsf{C}_{\mathbf{a}}$	Kovarianzmatrix des Schätzfehlers
$\mathsf{C}_{\mathbf{a}}^{K}$	zusammengesetzte Kovarianzmatrix des Schätzfehlers im Korrektorschritt
$\mathsf{C}_{\mathbf{a}}^{P}$	zusammengesetzte Kovarianzmatrix des Schätzfehlers im Prädiktorschritt
$\mathsf{C}_{\mathbf{a},\mathbf{s}}$	Kreuzkovarianzmatrix des Schätz- und Messfehlers
$\mathsf{C}_{\mathbf{s}}$	Kovarianzmatrix des Messfehlers
$\mathsf{C}_{\mathbf{v},k}$	Kovarianzmatrix des Messrauschens
$\mathsf{C}_{\mathbf{w}}$	Spektraldichtematrix des Systemrauschens
$\mathsf{C}_{\mathbf{w},k}$	Kovarianzmatrix des Systemrauschens
$\mathrm{E}\{\}$	Erwartungswert
$\mathbf{f}$,f	Systemgleichung
F	Jacobimatrix der Systemgleichung
g	Stellgröße, Aktuationssignal
$g_{\max}$	Aktuationsamplitude
$\mathbf{g}$,g	Platzhalter für Abbildungsfunktion
$\mathbf{h}$,h	Messgleichung
h_i	Schrittweite für die Berechnung der Sigma-Punkte
H	Jacobimatrix der Messgleichung
K	Kalman-Matrix
L	Länge des zusammengesetzten Zustandsvektors des SPKF
$L_{\mathbf{a}}$	Länge des Zustandsvektors des SPKF
$L_{\mathbf{w}}$	Länge des Vektors des Systemrauschens des SPKF
$L_{\mathbf{s}}$	Länge des Vektors des Messrauschens des SPKF
$\boldsymbol{\lambda}_i$	i-te Spalte von $\boldsymbol{\Lambda}$
$\boldsymbol{\Lambda}$	Wurzel einer Matrix (Cholesky-Zerlegung)
$\boldsymbol{\nu}$	Messwerte der Sigma-Punkte des SPKF
$\mathbf{s}$	Messwerte
$\boldsymbol{\sigma}$	Sigma-Punkt des SPKF

Regelungstechnische Symbole (Fortsetzung)

$\mathbf{v}$	Messrauschen
$\dot{\mathbf{w}}$	Systemrauschen
$\mathbf{w}$	Wiener-Prozess

Sonstige Formelzeichen

$\overline{a}$	(zeitlicher) Mittelwert von a oder konjugiert-komplexe Größe
$\langle a \rangle$	(räumlicher) Mittelwert von a
a'	Schwankungswert, $a' = a - \overline{a}$
a_{env}	Einhüllende von a
a_{min}	Minimalwert von a
a_{max}	Maximalwert von a
a_{rms}	RMS-Wert von a

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit werden Grobstrukturmodelle von ablösenden Scherschichten und aufgerollten Wirbeln auf der Basis von Wirbelverfahren untersucht. Ziel ist eine Verbesserung des physikalischen Verständnisses der Strömungsvorgänge und der Entwurf von Regelungskonzepten zur Beeinflussung der dominanten Strömungs- und Ablösephänomene. Die Strömungsbeeinflussung — mit dem Ziel einer Verbesserung der Wirkungsgrade von Verbrennungsmaschinen und der aerodynamischen Performanz von Fahrzeugen — ist vor dem Hintergrund knapper werdender Ressourcen, steigender Energiepreise und dem sich abzeichnenden Klimawandel von ökonomischem und ökologischem Interesse.

Anhand der Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe wird eine Regelungsmethode zur Mischungsverbesserung durch Anfachung der konvektiven Instabilitäten vorgestellt, wie sie z.B. am Flammhalter eines Triebwerks zum Einsatz kommen könnte. Desweiteren wird der druckinduzierte Widerstand eines länglichen stumpfen Körpers durch einen Regler gesenkt, der die Nachlaufströmung durch eine indirekte Unterdrückung der Nachlaufinstabilität symmetrisiert. Beide Regelungskonzepte werden im Experiment erprobt. Die entwickelten Wirbelverfahren werden durch eine Modellreduktion zu Streckenmodellen für den regelungstechnischen Entwurf von Zustandsschätzern und Zustandsreglern vereinfacht.

1.1 Problemstellung und Motivation

Die Umströmung von Fahrzeugen und der daraus resultierende Luftwiderstand kann bekanntlich durch eine aerodynamische Gestaltung des Rumpfes wesentlich beeinflusst werden. Maßgeblich sind dabei die Größe der angeströmten Querschnittsfläche und die Form des Rumpfes einschließlich der Verkleidung und Aufbauten. Dieser Entwurf ist stets ein ingenieurmäßiger Kompromiss zwischen strömungsmechanischen Idealvorstellungen (möglichst geringer Widerstand) und praktischen Anforderungen (Design, Raumbedarf, leichte Zugänglichkeit, hohe Zuverlässigkeit und geringe Kosten). Vor allem Dank der Entwicklung der Potentialtheorie im späten 19. und frühen 20. Jahrhundert ist der Entwurf aerodynamisch günstiger Formen zu einer hochentwickelten Disziplin des Fahrzeug- und Flugzeugbaus geworden. Mit der Entwicklung der Grenzschichttheorie

durch Prandtl (1904) wurde der theoretische Grundstein für die gezielte (widerstandmindernde) Beeinflussung der Körperumströmung bei einem bereits durch Größen- und Formfaktoren gegebenen Entwurf gelegt. Wie Leder (1992) darlegt, ermöglicht der zusätzliche Einbau von Stellgliedern (Aktuatoren) eine signifikante Manipulation der Vorgänge in den Grenz- und Scherschichten einer Strömung — mit dem Effekt, dass sich die aerodynamischen Zielgrößen verbessern. Zur Strömungsbeeinflussung kommen dabei unterschiedlichste Elemente oder Systeme in Frage, die mit dem umströmenden Medium in Wechselwirkung treten; sie können passiver oder aktiver Natur sein, wobei letztere entweder im Sinne einer Steuerung oder einer Regelung betrieben werden. Eine Vielzahl von Ansätzen zur passiven und aktiven Strömungsbeeinflussung sind in den letzten Jahrzehnten untersucht worden.

Passive Beeinflussungsmethoden sind Verfahren, die ohne den Einsatz von Stellenergie funktionieren. Hierzu gehören Leitbleche, Spoiler, spezielle Oberflächenstrukturen usw. Passive Methoden sind für eine große Anzahl von Konfigurationen experimentell und numerisch untersucht worden. An dieser Stelle sollen exemplarisch drei Methoden zur Widerstandssenkung bei stumpfen Körpern genannt werden, die als Vergleichsmaßstab für die vorliegende Untersuchung dienen: Bearman (1965) hat die Stabilisierung der Nachlaufströmung mit Hilfe einer sogenannten Splitter-Platte erreicht. Diese verhindert die Interaktion der ablösenden Scherschichten im unmittelbaren Nachlauf des Körpers und verzögert die Entstehung von widerstandsinduzierenden Nachlaufwirbeln. Der Einfluss von spannweitig modulierten Abströmkanten auf den Widerstand wurde von Tanner (1972) untersucht. Durch die spezielle Gestaltung werden in den ablösenden Scherschichten dreidimensionale Strukturen aufgeprägt, die der Entstehung von Nachlaufwirbeln entgegenwirken. Eine gezielte Beeinflussung der Wirbelablösung an den Abströmkanten durch Wirbeldisruptoren und gewellte Abströmkanten wird von Tombazis & Bearman (1997) bzw. Park *et al.* (2006) vorgestellt.

Passive Methoden, wie z.B. Wirbelgeneratoren, können jedoch auch nachteilige Effekte verursachen, wenn sich die Betriebsbedingungen vom Auslegefall entfernen. Einen Ausweg bieten die aktiven Methoden, bei denen der Stelleingriff zeitlich variabel ist: Mit solchen Methoden lassen sich in der Regel die Effekte von passiven Methoden nachbilden. Darüber hinaus kann der Arbeitsbereich einer günstigen Beeinflussung erweitert werden, indem die Aktuation an den jeweiligen Strömungszustand angepasst wird. Fiedler & Fernholz (1990) und Gad-el-Hak *et al.* (1998) geben einen Überlick über die Möglichkeiten der gesteuerten Strömungsbeeinflussung. So hat z.B. Bearman (1967) den Widerstand eines zweidimensionalen Körpers mit stumpfer Hinterkante durch konstantes Einblasen an der Basis senken können. Aus der Stabilitätsanalyse (vgl. Huerre & Monkewitz 1985, 1990) ist bekannt, dass Scherschichten konvektiv instabil und sensitiv für periodische Störungen mit geeigneten Frequenzen sind. Eine Aktuation mit periodischem Einblasen und Absaugen ist daher z.B. geeignet, die konvektive Scherschichtentwicklung zu beschleunigen. Huppertz (2001) konnte die Mischungsvorgänge bei der transitionellen Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe durch periodische Aktuation an der Ablösekante anfachen und auf diese Weise eine Verkürzung der Ablöseblase erzielen. Eine spannweitig ver-

teilte, periodische Anregung an der Hinterkante eines stumpfen Körpers untersuchten Kim *et al.* (2004): Sie erreichten eine Widerstandssenkung und eine Unterdrückung der Wirbelablösung im Nachlauf, sowohl im Experiment als auch in einer Large-Eddy-Simulation. Die Wirkungsweise von periodischer Aktuation wird bereits so gut verstanden, dass ausreichend zuverlässige Lösungen für den Einsatz in Demonstratoren entwickelt werden konnten. So hat z.B. Wygnanski (2004) die Auftriebserhöhung durch periodische Anregung an einem realen Flugzeug zeigen können. Automobilhersteller, wie Volvo[1] und Renault[2], erforschen Methoden zur gesteuerten Strömungsbeeinflussung, um den Luftwiderstand von Last- und Personenwagen zu reduzieren.

Die geregelte Strömungsbeeinflussung bietet zusätzliche Entwurfsfreiheitsgrade, um die Effizienz der Aktuation zu verbessern. Bislang wurde die Strömungsregelung anhand von einigen wenigen Standardkonfigurationen untersucht, etwa der Strömung um Kreiszylinder, über Stufen oder Kavitäten (siehe u.a. Cattafesta *et al.* 2003; Collis *et al.* 2004). Eine der ersten Anwendungen der experimentellen Strömungsregelung ist Roussopoulos (1993) mit der Nachlaufstabilisierung einer Kreiszylinderströmung bei niedrigen Reynolds-Zahlen gelungen.

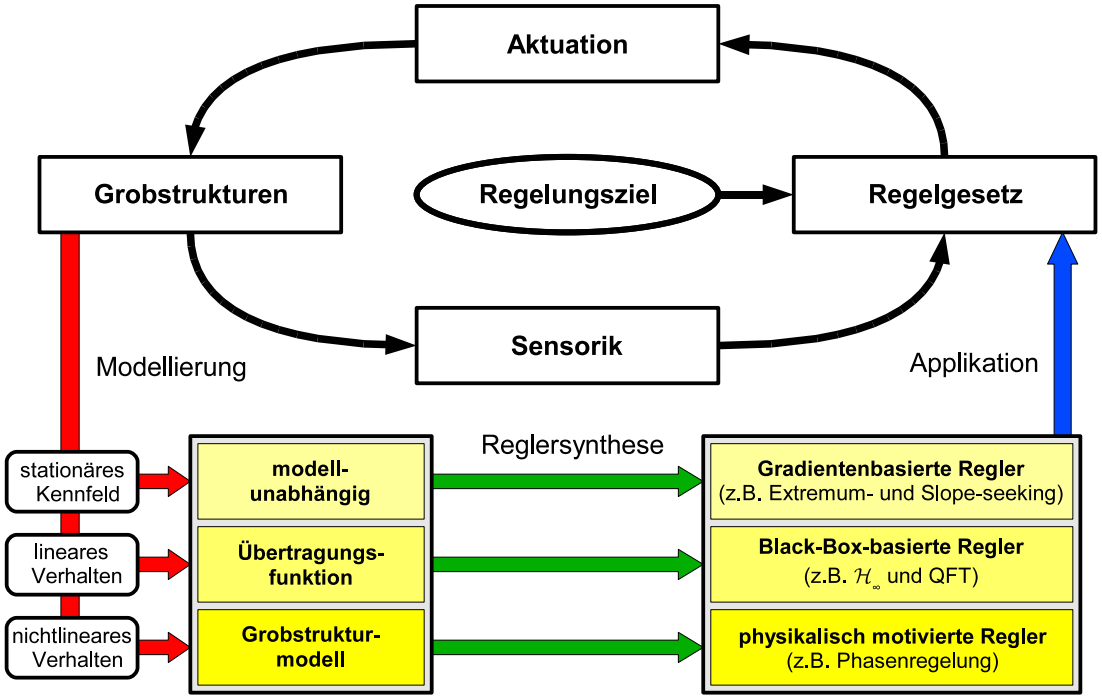


Abbildung 1.1: Die Dynamik der Grobstrukturen bestimmt die Wahl des Strömungsreglers: Grobstrukturen übertragen die Aktuationseffekte auf die Messgrößen, wie z.B. den Druck. Das Regelgesetz ermittelt das Stellsignal auf der Basis des durch Sensorinformationen erfassten momentanen Strömungszustandes. Die Grobstrukturdynamik wird dann durch die Aktuatoren so beeinflusst, dass das Regelziel, z.B. eine Senkung des Widerstandes, erreicht wird. Je nach dynamischem Verhalten der Strömung muss ein passendes Modellierungs- und Regelkonzept gewählt werden (siehe Text).

[1] Annual Progress Report for Heavy Vehicle Systems Optimization 2008, US Department of Energy, S. 35ff.
[2] Altica – A sporty estate with the accent on practicality 2006, Pressemitteilung von Renault, S. 4.

Voraussetzung für eine Regelung ist ein mathematisches oder zumindest ein konzeptionelles Modell, das den Effekt der Aktuation auf die Messgrößen beschreibt. Streckenmodell und Regler müssen unter Berücksichtigung des dynamischen Verhaltens der dominanten Strömungsphänomene (Scherschichten, Ablöseblasen, Wirbel), der sogenannten Grobstrukturen, gewählt werden (Abbildung 1.1). In Frage kommen drei methodische Ansätze: Gradientenbasierte Regler, Black-Box-Regler auf der Grundlage von Übertragungsfunktionen und physikalisch motivierte Regler auf der Basis von Grobstrukturmodellen.

A) Gradientenbasierte Regler: Gradientenbasierte Methoden stellen modellunabhängige Implementierungen eines Reglers dar. Solche Regler lassen sich realisieren, wenn das Ein-/Ausgangsverhalten der Stell- und Messgrößen durch ein stationäres Kennfeld mit einem ausgeprägten Extremum oder einem Übergang in einen Sättigungsbereich gekennzeichnet ist. Gradientenbasierte Regler ermöglichen die Adaption optimaler Aktuationsparameter an die jeweiligen Betriebsbedingungen (Henning & King 2005; Beaudoin *et al.* 2006; Henning *et al.* 2007; Pastoor *et al.* 2008). Regler auf der Basis eines Extremwertsuchers finden ein ausgeprägtes Maximum oder Minimum im stationären Kennfeld. Ein Beispiel ist die Anpassung der Höhe und damit der Resonanzfrequenz eines Helmholtzresonators zur Erhöhung des Druckrückgewinnes bei einer ablösenden Diffusorströmung (Garwon *et al.* 2003). Wenn die optimale Aktuation im stationären Kennfeld hingegen durch den Übergang eines steigenden oder fallenden Parameterbereiches in eine Sättigung gekennzeichnet ist, ist das sogenannte Slope-Seeking-Feedback die geeignetere Methode zur Adaption. Ein solches Verhalten liegt z.B. vor, wenn die ablösende Strömung an einem Flügel durch gepulstes Einblasen zum Wiederanlegen gebracht wird (Becker *et al.* 2006). Wenn die Strömung wieder anliegt, führt eine weitere Erhöhung der Aktuationsamplitude nicht zur einer weiteren Erhöhung des Auftriebs.

B) Black-Box-basierte Regler: Übertragungsfunktionen verbinden Eingangs- und Ausgangssignale durch ein lineares Modell. Die nichtlineare Dynamik der Grobstrukturen der Strömung wird nicht exakt widergegeben. Für Systeme mit linearen Übertragungsverhalten stellt die Regelungstechnik eine große Auswahl an Entwurfsverfahren für Regler zur Verfügung. Zur Regelung des turbulenten Wiederanlegens der Strömung hinter einer rückwärts gewandten Stufe untersuchten Becker *et al.* (2005), Becker (2005), King *et al.* (2004) und Henning & King (2007) Regler auf der Basis experimentell ermittelter Übertragungsfunktionen. Ein robuster Reglerentwurf ermöglichte hier die Vorgabe der Wiederanlegelänge und die Kompensation von Störungen durch periodisches Einblasen und Absaugen an der Abströmkante bei Reynolds-Zahlen bis zu 25 000, gebildet mit der Stufenhöhe. Stellgröße war hierbei die Aktuationsamplitude. Ein adaptiver Regler, der neben der Aktuationsamplitude auch die Aktuationsfrequenz anpasst, wird von Garwon (2006) vorgestellt. Henning *et al.* (2007) schlagen ein ähnliches Vorgehen zur Stabilisierung des Druckwiderstandes eines stumpfen Körpers bei Reynolds-Zahlen bis zu 70 000, gebildet mit der Körperhöhe, vor. Rowley *et al.* (2002) können mit einem Black-Box-basierten Regler die Rossiter-Moden der Strömung über eine Kavität unterdrücken.

C) Physikalisch motivierte Regler: Grobstrukturmodelle modellieren die dominanten Strukturen der Strömung explizit als Bindeglieder zwischen Systemeingang und -ausgang. Damit ist eine nichtlineare Beschreibung der Systemdynamik möglich, wie sie in realen Strömungen etwa bei der Wirbelpaarung oder bei Sättigungseffekten auftritt. Während die Optimale Regelungstheorie prinzipiell einen Reglerentwurf auf der Basis solcher Grobstrukturmodelle ermöglicht, ist man von der realen Anwendung im Experiment aufgrund des hohen numerischen Aufwandes noch weit entfernt. Einen Ausweg bieten Strömungsregler, die aus einem guten physikalischen Verständnis der Schlüsselprozesse der Strömung abgeleitet werden und mit geringerem Rechenaufwand arbeiten. Zur Modellierung können niederdimensionale Wirbel- und POD-Verfahren *(proper orthogonal decomposition)* verwendet werden.

Bei den POD-Verfahren wird das Geschwindigkeitsfeld kinematisch durch eine Reihe von ortsabhängigen globalen Moden und zeitabhängigen Fourierkoeffizienten approximiert (Galerkin-Approximation). Durch Beschränkung auf die energiereichsten Moden erhält man eine niederdimensionale Repräsentation des Strömungsfeldes. Die Dynamik der Fourierkoeffizienten wird durch die Projektion der Navier–Stokes-Gleichung auf den gewählten Unterraum der Galerkin-Approximation mathematisch beschrieben (Galerkin-System). Eine gute Übersicht zu dieser Methode findet sich bei Lumley & Blossey (1998) oder Cordier & Bergmann (2003).

POD-Verfahren sind zur modellbasierten Strömungsregelung für eine Reihe von verschiedenen Konfigurationen vorgeschlagen worden, z.B. den Nachlauf eines Kreiszylinders (Bergmann *et al.* 2005; Gerhard *et al.* 2003; King *et al.* 2005; Noack *et al.* 2003, 2004*b*, 2005; Tadmor *et al.* 2004; Siegel *et al.* 2003, 2007*a*, 2007*b*) oder die Strömung über eine Kavität (Samimy *et al.* 2004). Aufgrund ihrer mathematischen Struktur sind diese Verfahren gut für den Reglerentwurf im Zustandsraum geeignet.

Im Gegensatz dazu sind Wirbelverfahren (siehe Abschnitt 1.2) wegen des sich ändernden Zustandsraums der Wirbelpositionen für die meisten dieser Entwurfsverfahren ungeeignet. Wirbelverfahren haben jedoch gegenüber den POD-Verfahren den Vorzug, dass sie eine größere dynamische Bandbreite abdecken. Dies ist für die in dieser Arbeit untersuchten Konfigurationen von Vorteil.

1.2 Stand der Erforschung von Wirbelverfahren

Die Grundidee der Wirbelverfahren ist die Approximation der Wirbelstärkeverteilung eines Strömungsfeldes durch eine Lagrange'sche Formulierung mit diskreten wirbelstärkebehafteten Partikeln. Eine komplette Berechnung des Strömungsfeldes, wie bei einer Euler'schen Betrachtungsweise erforderlich, entfällt. Stattdessen sind zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Strömung nur noch die Wirbelstärketräger zu verfolgen. Daher sind Wirbelverfahren eine geeignete Methode zur niederdimensionalen Modellierung und Untersuchung von Wirbelschichten (Abbildung 1.2 *a, b*).

(a)

(b)

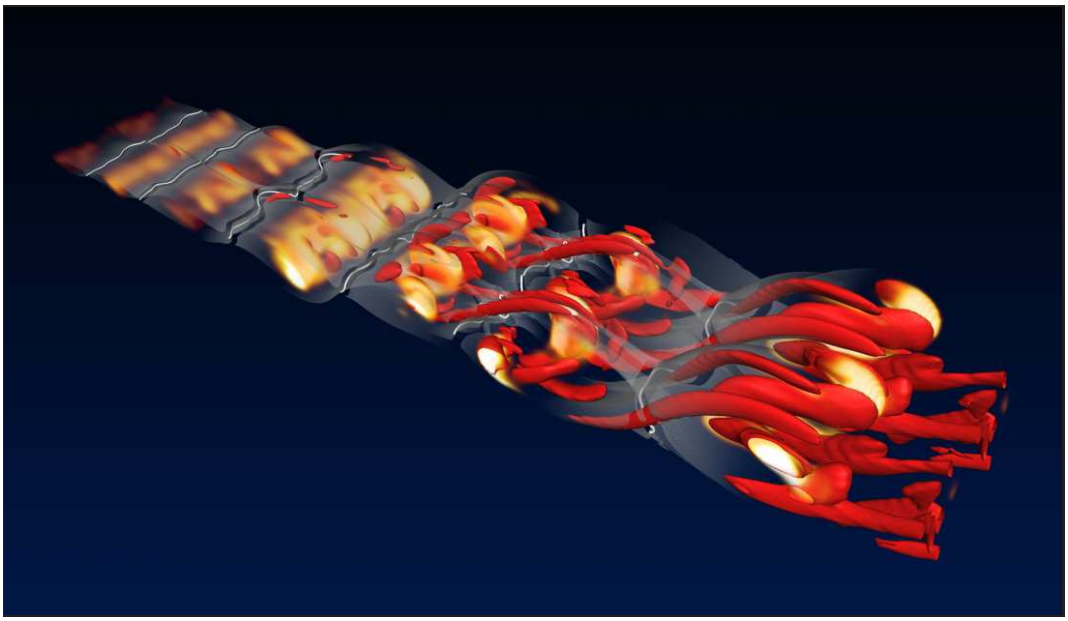


Abbildung 1.2: Darstellung einer ebener Scherschicht. Zweidimensionaler Schnitt in der Symmetrieebene der Scherschicht (a) als Schlierenbild (Van Dyke 1982) und Visualisierung der Querwirbel (gelb), Längswirbel (rot) und Stagnationslinien (weiß) einer numerischen Simulation (Weinkauf *et al.* 2004) in (b).

Wirbelschichten sind wirbelbehaftete Diskontinuitätenflächen des Geschwindigkeitsfeldes in einer ansonsten wirbelfreien Strömung. Stromlinien in der Nähe der Wirbelschicht verlaufen parallel zur Diskontinuitätenfläche. Der Geschwindigkeitsbetrag ändert sich beim Durchgang durch die Wirbelsicht abrupt. Eine Wirbelschicht stellt die Idealisierung einer dünnen Scherschicht hoher Wirbelstärke dar. Scherschichten entstehen in realen Strömungen an festen Wänden, wie etwa hinter scharfen Ecken, bei Strömungsablösung oder beim Zusammenfluss zweier Ströme unterschiedlicher Geschwindigkeit.

In einem Querschnitt normal zur Wirbelschicht sieht man eine Diskontinuitätslinie (Abbildung 1.2 a). Ist die untersuchte Strömung vor allem durch zweidimensionale Strukturen geprägt, kann die gewählte Querschnittsfläche stellvertretend für das gesamte Strömungsfeld untersucht werden. In diesem Fall genügt es, die Diskontinuitätslinie durch einzelne Stützstellen zu dis-

kretisieren und deren zeitliche Entwicklung zu berechnen. Diese Diskretisierung kann z.B. über diskrete Wirbel oder die Auswertung der Birkhoff–Rott-Gleichung (Rott 1956; Birkhoff 1962) erfolgen. In Strömungen, in denen die dreidimensionalen Effekte nicht vernachlässigt werden können, muss die Wirbelschicht sowohl entlang ihrer Ausbreitungsrichtung als auch normal hierzu diskretisiert werden. Übliche Verfahren hierzu sind das Einbringen von Ringwirbelelementen, Wirbelfilamenten oder Vortonen (vgl. Leonard 1985; Meiburg 1995; Novikov 1984).

Die theoretischen Grundlagen der Wirbelverfahren reichen zurück zu Helmholtz (1858) und Thomson (1869). Anfang des 20. Jahrhunderts wurden die ersten N-Wirbelprobleme erforscht. Eine Stabilitätsanalyse basierend auf einer Punktwirbelverteilung für die Wirbelstraße im Nachlauf eines Kreiszylinders (siehe Abbildung 1.3) führten von Kármán & Rubach (1912) durch. Föppl (1913) berechnete die Bewegung dieser Nachlaufwirbel. Eine numerische Simulation einer ebenen Scherschicht mit Punktwirbeln gelang Rosenhead (1931). Diese Untersuchung war der Anstoß zu einer ganzen Reihe weiterer Forschungarbeiten zu Wirbelverfahren für unterschiedliche Konfigurationen bis in die 60er Jahre des 20. Jahrhunderts hinein.

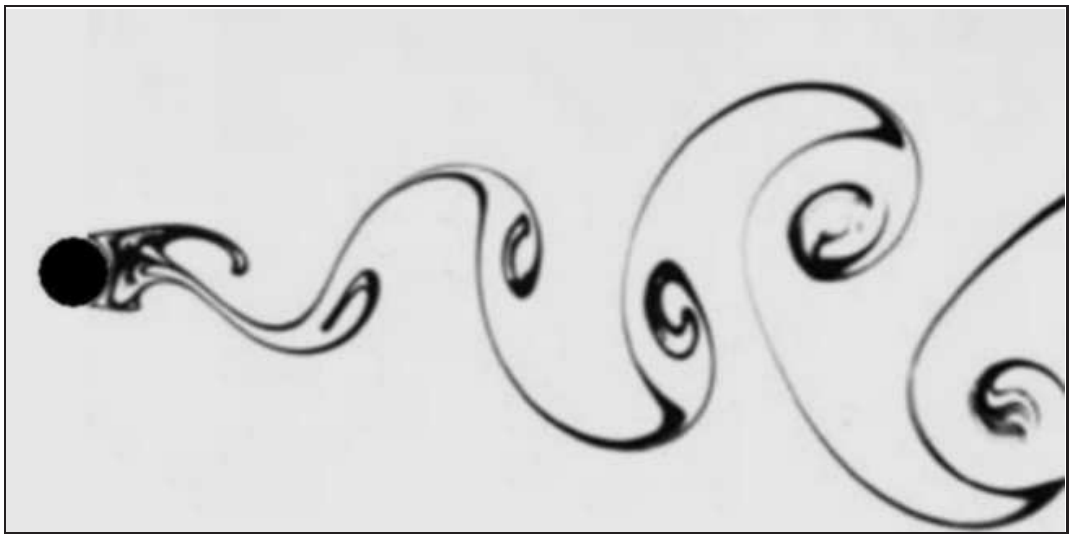


Abbildung 1.3: Darstellung der Symmetrieebene einer ebenen Nachlaufströmung um einen Kreiszylinder (invertierte Rauchsichtbarmachung aus Van Dyke 1982).

Zweifel an der physikalischen Konsistenz der Wirbelverfahren kamen auf, als Birkhoff (1962) mangelnde Konvergenzeigenschaften der Wirbelverfahren bei der Berechnung einer aufrollenden ebenen Scherschicht zeigte. Dennoch wurden die Wirbelverfahren von einer Vielzahl von Autoren weiterhin entwickelt, wobei sie unterschiedliche Verfahren zur Lösung des Konvergenzproblems einsetzten. Neben der ebenen Scherschicht (Chorin & Bernard 1973; Moore 1974, 1975, 1979; Clements & Maull 1975; Pullin 1978; Fink & Soh 1978) wurden auch die Strömungen um stumpfe Körper (Clements 1973), durch Blenden (Evans & Bloor 1977) und um Kreiszylinder (Sarpkaya & Schoaff 1979) mit Wirbelverfahren erforscht. Ein befriedigender mathematischer Beweis, dass mit den Wirbelverfahren Lösungen der Navier–Stokes-Gleichung nachgebildet werden können, stand jedoch bis dahin aus (Birkhoff & Fisher 1977). Diese Konvergenzeigenschaft konnte erst

später von Beale & Majda (1982*a*, 1982*b*) und Krasny (1986*a*, 1986*b*) für Wirbelverfahren mit regularisierten Wirbelkernen gezeigt werden.

In den 80er und 90er Jahren des 20. Jahrhunderts wurden hochauflösende Wirbelverfahren als alternativer Ansatz zur direkten numerischen Simulation der Navier–Stokes-Gleichung entwickelt (vgl. Ghoniem & Gagnon 1987; Cottet & Koumoutsakos 2000; Soteriou 2003), und um Methoden zur Berücksichtigung von Wandhaftung und Effekten kompressibler Fluide erweitert. Die Anwendung der Wirbelverfahren zur Modellierung dreidimensionaler Strömungen trugen Leonard (1985) und Meiburg (1995) voran. Ein systematischer Vergleich der Wirbelverfahren mit experimentellen und numerischen Daten für ablösende Scherströmungen wurde von Jaroch (1987), Böttcher (1991) und Spieweg (2000) durchgeführt. Wirbelverfahren auf der Basis der Birkhoff–Rott-Gleichung eignen sich gut, um komplizierte Geometrien zu modellieren. Starre (Jones 2003) oder flexible (Eldredge 2006) Wände im Strömungsfeld werden dabei durch Wirbelschichten ersetzt.

In den letzten zehn Jahren erlebten Wirbelverfahren als geeignete Methode zur Erzeugung von Grobstrukturmodellen für die Strömungsbeeinflussung (Cortelezzi 1996; Coller *et al.* 2000) und als dynamisches System für den Reglerentwurf (Tang & Aubry 2000; Noack *et al.* 2004*a*; Coller & Gururaja 2004; Protas 2004, 2004) eine kleine Renaissance. Die Möglichkeiten den Zustand eines Wirbelverfahrens durch einen dynamischem Beobachter zu rekonstruieren, untersuchten Tadmor & Banaszuk (2002). Suzuki & Colonius (2003) haben mit dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate Wirbelpositionen aus Wanddruckmessungen in numerischen Simulationen ermittelt. Allgemeine Übersichtsartikel zu Wirbelverfahren liegen von Leonard (1980), Sarpkaya (1989) und Krasny (1991) vor.

1.3 Ziele und Gliederung der Arbeit

Aus den oben zitierten Arbeiten ist bekannt, dass sich die Grobstrukturen ablösender Scherströmungen mit Wirbelverfahren gut beschreiben lassen. Wirbelverfahren ermöglichen eine qualitative Vorhersage wichtiger Schlüsselprozesse, wie etwa der Dynamik von Totwassergebieten, dem Auftreten konvektiver Instabilitäten, die zur Scherschichtaufrollung führen (Huerre & Monkewitz 1985, 1990), und der Ablösung von Wirbeln.

In dieser Arbeit werden Scherschichten und abgelöste Wirbel durch diskrete Wirbel modelliert. Ziel ist eine niederdimensionale Beschreibung der Grobstrukturdynamik, insbesondere der Wirkung von Aktuationseffekten auf die Strukturen und deren Einfluss auf leicht zugängliche Messgrößen, wie etwa den Wanddruck.

Zu den klassischen Aufgaben der Regelungstechnik zählen die Stabilisierung instabiler Systeme, die Kompensation von Störwirkungen und die Anpassung der Ausgangsgrößen eines Systems an statische oder dynamische Führungsgrößen. Im Unterschied zu diesen Aufgaben, für die es auf dem Gebiet der Strömungsregelung bereits eine Reihe von erprobten Entwurfsverfahren gibt (siehe z.B. Henning *et al.* 2007), hat die vorliegende Arbeit das Ziel, regelungstechnische

Methoden zu entwickeln, die durch den direkten Eingriff in die physikalischen Schlüsselprozesse eine bestmögliche Wirkung bei begrenztem Regelaufwand (Aktuationsleistung) erreichen. Beispielsweise geht es darum, bei gegebener Aktuationsleistung einen minimalen druckinduzierten Widerstand an einem stumpfen Körper zu erzwingen oder Mischungsvorgänge mit maximaler Durchmischung in einer ablösenden und wiederanlegenden Scherschicht anzufachen. Hierzu werden Ersatzzielgrößen aus der Analyse der Grobstrukturmodelle abgeleitet, für die dann physikalisch motivierte Regelungskonzepte entworfen und im Experiment erprobt werden.

In Kapitel 2 werden die verwendeten Methoden zur Modellierung und Zustandsschätzung vorgestellt. Diese Methoden werden in den folgenden Kapiteln zur Untersuchung von Konfigurationen mit zunehmender Komplexität eingesetzt.

Im Sinne einer Machbarkeitsstudie wird in Kapitel 3 die Eckenströmung mit einem Eckenwirbel untersucht. Dieses einfache Modell eines Rezirkulationsgebietes wird durch einen wirbelbasierten Zustandsschätzer beobachtet, während die Wirbelposition mit einem lokalen Aktuator geregelt wird (Abbildung 1.4 *a*).

Die Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe stellt ein komplexeres Rezirkulationsgebiet mit ablösender Scherschicht, Wirbelaufrollung und Wiederanlegen der Scherschicht dar (Abbildung 1.4 *b*). In Kapitel 4 wird ein niederdimensionales Wirbelverfahren für diese Strömungskonfiguration entwickelt und mit einer numerischen Simulation (LES) verglichen. Die Analyse des Wirbelverfahrens fließt in eine physikalisch motivierte Regelungsstrategie zur Mischungskontrolle ein.

Die Erkenntnisse zur Modellierung und Regelung werden in Kapitel 5 von der Stufenströmung auf die Strömung um einen stumpfen Körper übertragen. Bei dieser Konfiguration tritt eine Interaktion zweier ablösender Scherschichten auf (Abbildung 1.4 *c*), die durch das niederdimensionale Wirbelverfahren beschrieben wird. Die Analyse des Wirbelverfahrens erlaubt schließlich *a priori* die Synthese eines Phasenreglers zur Senkung des aerodynamischen Widerstandes im Experiment.

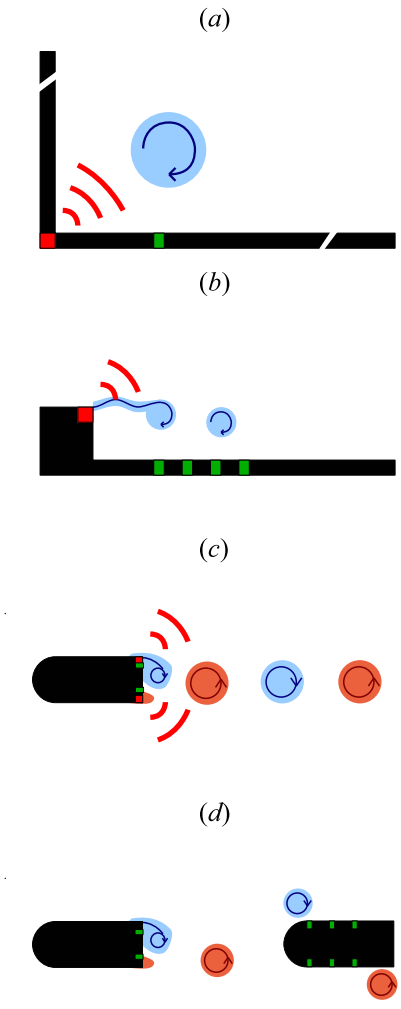


Abbildung 1.4: Übersicht der untersuchten Konfigurationen und Wirbelstrukturen: (*a*) Eckenströmung mit Eckenwirbel, (*b*) Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe, (*c*) Strömung um einen stumpfen Körper und (*d*) Tandem-Nachlaufströmung. Rote (grüne) Rechtecke markieren die Aktuatorpositionen (Sensorpositionen).

In Kapitel 6 wird eine Tandem-Konfiguration zweier stumpfer Körper (Abbildung 1.4 *d*) mit Hinblick auf eine Rekonstruktion und Prädiktion von Feldgrößen durch ein modellgestütztes Messverfahren untersucht. Hierbei wird erstmals ein Wirbelverfahren in Echtzeit parallel zu einem Experiment gerechnet.

Den Abschluss bildet eine Zusammenfassung der Resultate und ein Ausblick auf zukünftige Arbeiten in Kapitel 7.

Kapitel 2

Methoden

2.1 Strömungsmechanische Grundlagen

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik, mit denen sich Kinematik und Dynamik strömungsmechanischer Vorgänge prinzipiell berechnen lassen, werden aus den physikalischen Erhaltungssätzen gewonnen (z.B. Schade & Kunz 1989). Die strömungsmechanischen Grundlagen inkompressibler newton'scher und reibungsfreier Fluide, soweit sie für die Erläuterung der Wirbelverfahren benötigt werden, sind in diesem Abschnitt beschrieben. Es werden die üblichen Formelzeichen zur Bezeichnung von Geschwindkeiten ($\mathbf{u}$), Drücken (p) und der Zeit (t) verwendet. Alle physikalischen Größen werden mit der charakteristischen Länge L, der Geschwindigkeit U und der Dichte ρ entdimensionalisiert. Insbesondere werden die Zeit und alle Frequenzen als konvektive Zeiteinheit $t = t^* U^*/L^*$ bzw. Strouhal-Zahlen $f = f^* L^*/U^*$ ausgedrückt. Durch die hochgestellten Sternchen (*) wird die Referenz auf eine dimensionsbehaftete Größe gekennzeichnet.

Die Kontinuitätsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld erhält man aus der Massenbilanz.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.1}$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist demnach quellfrei. Aus der Impuls- und Drehimpulsbilanz erhält man

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \frac{1}{Re}\,\Delta \mathbf{u}\,, \tag{2.2}$$

mit der Volumenkraftdichte f und der Reynolds-Zahl Re. Zusammen mit (2.1) nennt man (2.2) die Navier–Stokes-Gleichungen. Die Zähigkeit des Fluids wird durch den Kehrwert der Reynolds-Zahl $Re = U^* L^*/\nu^*$ beschrieben, wobei ν^* die kinematische Viskosität des Mediums darstellt. Für reibungsfreie Fluide oder für den Grenzfall $Re \to \infty$ ergibt sich die Euler'sche Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p\,. \tag{2.3}$$

Die Navier–Stokes-Gleichungen repräsentieren das imkompressible Strömungsfeld über Geschwindigkeit und Druck. Man definiert die Wirbelstärke

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{2.4}$$

als Rotation des Geschwindigkeitsfeldes. Berechnet man nun die Rotation von (2.2), eliminiert man den Druck wegen $\nabla \times \nabla p = 0$ und erhält die Wirbeltransportgleichung

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{f} + \frac{1}{Re}\, \Delta \boldsymbol{\omega}\,. \tag{2.5}$$

Diese Transportgleichung für die Wirbelstärke ist völlig äquivalent zur Impulsbilanz. Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich wegen $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$ die Quellfreiheit des Wirbelstärkefeldes

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}\,. \tag{2.6}$$

Die Zirkulation einer Strömung wird durch

$$\Gamma = \oint\limits_{\partial \mathcal{A}} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\limits_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{2.7}$$

als Kurvenintegral der Geschwindigkeit entlang einer geschlossenen Kurve $\partial\mathcal{A}$ definiert. Unter den Gültigkeitsbedingungen des Stokes'schen Satzes kann sie auch als Flächenintegral der Wirbelstärke in der von $\partial\mathcal{A}$ umschlossenen Fläche $\mathcal{A}$ formuliert werden. Hierbei ist $\mathbf{A} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}A$, mit dem Flächennormalenvektor $\mathbf{n}$. Damit ist die Zirkulation ein Maß für die Rotation einer Strömung und charakterisiert die Stärke von Wirbeln. Berechnet man die Zirkulation nach (2.7) für eine materielle Kurve in einem inkompressiblen newton'schen Fluid, so erhält man den *Thomson'schen Satz*

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint\limits_{\partial \mathcal{A}} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \oint\limits_{\partial \mathcal{A}} \frac{1}{Re}\, \Delta \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}\,. \tag{2.8}$$

Für reibungsfreie Fluide in einem konservativen, d.h. zirkulationsfreien äußeren Kraftfeld ist die Strömung *zirkulationserhaltend*. Analog zu den Stromlinien des Geschwindigkeitsfeldes werden Wirbellinien als Linien definiert, die in jedem Punkte den Wirbelstärkevektor tangieren. Die Wirbellinien, die durch die Punkte einer geschlossenen Kurve gehen, bilden eine Wirbelröhre. Eine Wirbelröhre bezeichnet man auch als Wirbelfaden, wenn deren Querschnitt gegen Null geht und deren Wirbelstärke gleichzeitig gegen Unendlich strebt, so dass die Zirkulation konstant bleibt.

Integriert man (2.6) für einen Abschnitt einer Wirbelröhre oder eines Wirbelfadens, erhält man den *1. Helmholtz'schen Wirbelsatz*. Dieser besagt, dass das Flächenintegral der Wirbelstärke und damit die Zirkulation für jeden Querschnitt einer Wirbelröhre — analog zum Volumenstrom in einer Stromröhre — konstant ist.

$$\Gamma = \int\limits_{\mathcal{A}_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int\limits_{\mathcal{A}_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{2.9}$$

Daraus folgt, dass Wirbelröhren nicht im Strömungsfeld enden können, sondern entweder in sich selbst zurücklaufen (Wirbelringe) oder an Grenzflächen (Wände) stoßen. In einer zirkulationserhaltenden Strömung ist der Mantel einer Stromröhre für Materie und Wirbelstärke undurchdringbar. Hieraus folgt der *2. Helmholtz'sche Wirbelsatz*, der besagt, dass Wirbelstärke

an der Materie haftet und dass Wirbellinien stets von den gleichen Fluidelementen geformt werden. Obendrein gilt wegen (2.8) und (2.9) der *3. Helmholtz'sche Wirbelsatz*, der die zeitliche Konstanz der Zirkulation fordert.

In einem konservativen Feld kann in einer homogenen Strömung nach (2.5) keine Wirbelstärke entstehen. Nur in Wandnähe kann man sich eine Wirbelschicht vorstellen, die zur Erfüllung der Wandhaftbedingung erforderlich ist. Die Wirbelstärke dieser Schicht wird durch eine Kombination von Diffusion und Konvektion in das Strömungsfeld getragen. Die Produktion und der Transport von Wirbelstärke erfolgen dann stets so, dass sowohl die Wandhaftbedingung als auch die Quellfreiheit der Wirbelstärke gewährleistet sind (Lighthill 1963).

2.2 Wirbelverfahren

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Wirbelverfahren dargestellt, soweit sie zur Erzeugung niederdimensionaler Grobstrukturmodelle erforderlich sind. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf zweidimensionale Verfahren gerichtet. Dreidimensionale Methoden werden im Anhang C behandelt.

Wie in Kapitel 1 ausgeführt, sind Wirbelverfahren eine Approximation des Wirbelstärkefeldes durch z.B. Punktwirbel. Das Geschwindigkeitsfeld wird durch die Überlagerung einer wirbelfreien Grundströmung mit den induzierten Geschwindigkeiten aller im Feld befindlichen Punktwirbel

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}^{\omega}(\mathbf{x},\mathbf{x}_n,\Gamma_n) \tag{2.10}$$

angenähert. Ist auf diese Weise die Geschwindigkeit an den Orten $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ für alle Wirbel $n = 1,\ldots,N$ bekannt, so können die Wirbeltrajektorien durch Integration bestimmt werden.

Die einzelnen Terme von (2.10) ergeben sich aus der Potentialtheorie, die in Abschnitt 2.2.1 erläutert wird. Zur Erfüllung komplexer Randbedingungen werden die in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen konformen Abbildungen verwendet. Zum Vergleich der Wirbelmethoden mit Experimenten und numerischen Simulationen muss der Druck aus Schnappschüssen des Wirbelfeldes ermittelt werden (siehe Abschnitt 2.2.3). Abschnitt 2.2.4 legt dar, wie die Aktuatoren des Experiments und der Simulation durch gerichtete, oszillierende Quellen nachgebildet werden. Die Berücksichtigung zäher Effekte, wie etwa die Produktion von Wirbelstärke, der Zerfall und die Verschmelzung von Wirbeln, wird in Abschnitt 2.2.5 diskutiert.

2.2.1 Potentialtheorie

Für jedes wirbelfreie Vektorfeld lässt sich ein skalares Potential finden, aus dessen Gradienten man wieder das Vektorfeld bestimmen kann. In wirbelfreien Strömungen verschwindet die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes (2.4) an jeder Stelle, es muss also ein *Geschwindigkeitspotential* Φ existieren, für das

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \nabla\Phi$$

gilt. Damit ergibt sich für inkompressible Strömungen aus der Kontinuitätsgleichung (2.1) die Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitspotential

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi = 0\,. \tag{2.11}$$

Solche Strömungen werden Potentialströmungen genannt. In ihnen wirkt sich die Zähigkeit nicht aus. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes wird damit auf ein elliptisches Randwertproblem reduziert, wobei auf dem Integrationsrand die Normalkomponente $\partial\Phi/\partial n$ als Randbedingung vorgegeben wird. Da nur die Normal- nicht jedoch die Tangentialkomponente vorgegeben wird, kann die Potentialströmung lediglich die Nichtdurchdringungsbedingung nicht jedoch die Wandhaftbedingung erfüllen. In Wandnähe kann die Potentialströmung daher nur die Randbedingung für reibunsfreie Fluide erfüllen.

In einer Potentialströmung wird das Feld allein durch die Massenbilanz beschrieben, während die Impulsbilanz nur zur Berechnung des Druckes (siehe Abschnitt 2.2.3) erforderlich ist. Darüber hinaus ist (2.11) für stationäre und instationäre Fälle gültig. D.h. das zeitliche Verhalten wird nur durch die Randbedingungen bestimmt[1].

Von ebenen Strömungen spricht man, wenn eine kartesische Koordinate des Geschwindigkeitsvektors verschwindet und die anderen beiden Koordinaten unabhängig von der dritten Raumkoordinate sind, z.B.:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für einen solchen Fall vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (2.1) zu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,.$$

Diese Gleichung wird durch den Ansatz $u = \partial\Psi/\partial y$ bzw. $v = -\partial\Psi/\partial x$ erfüllt. Die Funktion Ψ wird als *Stromfunktion* bezeichnet. Der Name rührt daher, dass Kurven mit $\Psi(x,y,t_0) = \text{const}$ Stromlinien der ebenen Strömung zum Zeitpunkt $t = t_0$ darstellen. Aus der Wirbelfreiheit folgt auch für die Stromfunktion die Laplace-Gleichung

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\Psi = 0\,. \tag{2.12}$$

Für ebene, wirbelfreie Strömungen inkompressibler, newton'scher Fluide lassen sich Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion zu den Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen verknüpfen:

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,. \tag{2.13}$$

Üblicherweise werden Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion als Real- und Imaginärteil eines komplexen Potentials

$$W(z) = \Phi(x,y) + \mathrm{i}\ \Psi(x,y), \quad \text{mit } z = x + \mathrm{i}\ y\,, \tag{2.14}$$

[1] "The fluid flow is in a state of total amnesia." (Lugt 1996)

zusammengefasst. In der Funktionentheorie (z.B. Schade & Kunz 1989) wird eine differenzierbare komplexe Funktion einer komplexen Variable als analytische Funktion bezeichnet. Der Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind reelle Funktionen jeweils zweier reeller Variablen. Allgemeiner formuliert ist $W = W(z, \overline{z})$ eine komplexe Funktion zweier konjugiert komplexer Variablen, da $x = 1/2(z + \overline{z})$ und $y = -i/2(z - \overline{z})$. Soll die formale Abhängigkeit von $\overline{z}$ verschwinden, muss

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0$$

gelten. Die Trennung in Real- und Imaginärteil liefert gerade wieder die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen. Die komplexe Geschwindigkeit ergibt sich durch Ableitung des komplexen Potentials und Anwendung der Kettenregel zu

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u(x,y) - \mathrm{i}\,v(x,y)\,. \tag{2.15}$$

2.2.1.1 Lösungen der Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen

Vier wichtige komplexe Potentiale, die die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen lösen, werden im Folgenden diskutiert, da sich aus ihnen durch das Superpositionsprinzip physikalisch interessante Strömungen nachbilden lassen. Um die Verwendung der Gleichung zusammen mit konformen Abbildungen (siehe Abschnitt 2.2.2) leichter zu gestalten, werden die komplexe Potentiale in einem Koordinatensystem $\zeta = \xi + \mathrm{i}\,\eta$ formuliert.

Parallelströmung: Eine Parallelströmung (Abbildung 2.1 *a*) mit der konstanten Geschwindigkeit U_∞ und einem Winkel α gegen die ξ-Achse wird durch das komplexe Potential

$$W_p^\zeta = U_\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}\,\zeta \tag{2.16}$$

und die komplexe Geschwindigkeit

$$w_p^\zeta := \frac{\mathrm{d}W_p^\zeta}{\mathrm{d}\zeta} = U_\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} \tag{2.17}$$

beschrieben.

Quellströmung: Das komplexe Potential und die komplexe Geschwindigkeit einer Quelle (oder einer Senke bei negativem Vorzeichen von Q) lautet

$$W_s^\zeta = \frac{Q}{2\pi}\ln(\zeta - \zeta_s) \tag{2.18}$$

$$\text{bzw.} \qquad w_s^\zeta := \frac{\mathrm{d}W_s^\zeta}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta - \zeta_s}\,. \tag{2.19}$$

Hierbei ist ζ_s der Ort der Quelle. Die Quellstärke Q stellt den Volumenstrom pro Einheitsbreite einer zweidimensionalen Linienquelle dar, die in alle Richtungen abstrahlt (Abbildung 2.1 *b*). Dies ergibt sich aus dem Kurvenintegral des Betrages von (2.19) entlang eines Kreises um den Ursprung der Quelle.

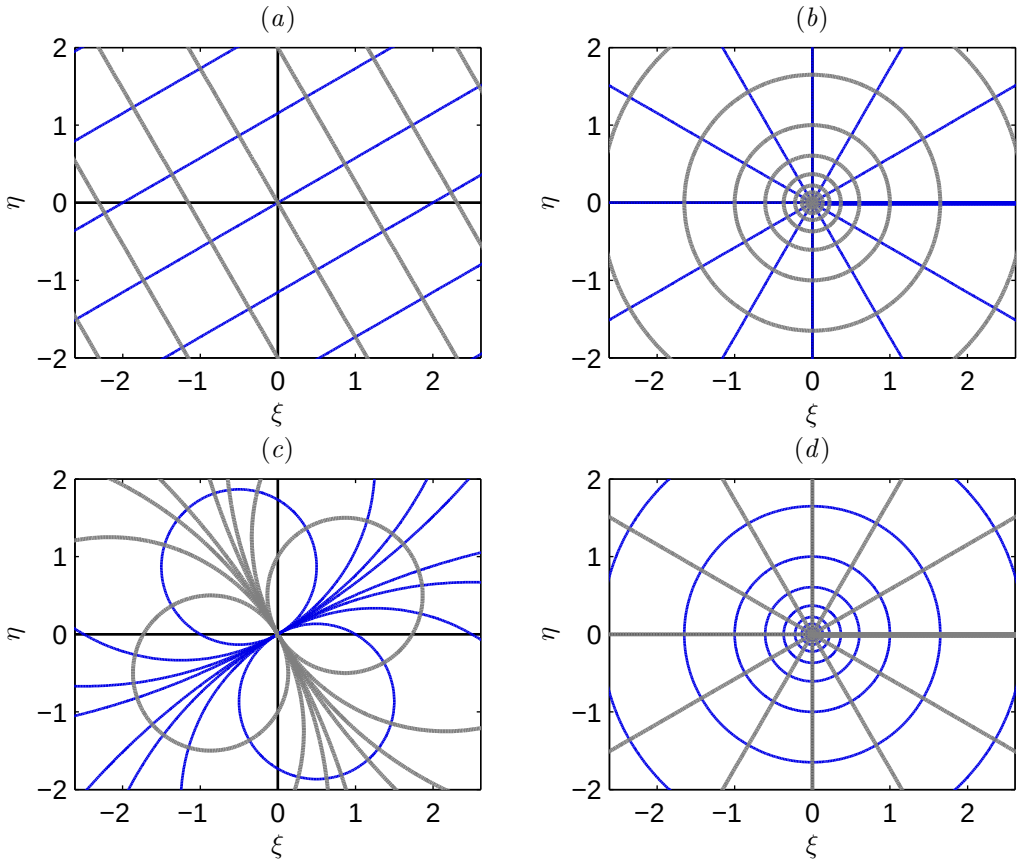


Abbildung 2.1: Überblick über die wichtigsten komplexen Potentiale für die Parallelströmung (a), die Quellströmung (b), die Dipolströmung (c) und die Wirbelströmung (d) in einem Koordinatensystem $\zeta = \xi + \mathrm{i}\,\eta$. Dargestellt sind die Stromlinien (blau) und Äquipotentiallinien (dicke graue Linien).

Dipolströmung: Überlagert man die Strömungsfelder einer Quelle und einer Senke mit vom Betrage her gleicher Quellstärke und verringert den Abstand d bei Vergrößerung von $|Q|$ so, dass das Produkt $M = Q\,d$ endlich bleibt, erhält man das komplexe Potential

$$W_d^\zeta = \frac{M}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta - \zeta_d}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} \tag{2.20}$$

und die komplexe Geschwindigkeit

$$w_d^\zeta := \frac{\mathrm{d}W_d^\zeta}{\mathrm{d}\zeta} = -\frac{M}{2\pi}\,\frac{1}{(\zeta - \zeta_d)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} \tag{2.21}$$

eines Dipols bei ζ_d mit dem Dipolmoment M. Die Richtung der Quelle ist dabei um den Winkel α gegen die ξ-Achse gedreht (Abbildung 2.1 c).

Wirbelströmung: Das komplexe Potential bzw. die komplexe Geschwindigkeit einer Wirbelströmung ist durch

$$W_v^\zeta = -\mathrm{i}\,\frac{\Gamma}{2\pi}\,\ln(\zeta - \zeta_v) \tag{2.22}$$

$$\text{bzw.} \qquad w_v^\zeta := \frac{\mathrm{d}W_v^\zeta}{\mathrm{d}\zeta} = -\mathrm{i}\,\frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta - \zeta_v} \tag{2.23}$$

für einen Wirbelfaden oder Punktwirbel mit der Zirkulation Γ bei ζ_v gegeben. Die gesamte Wirbelstärke ist hier im Ursprung konzentriert. Wie Abbildung 2.1 (d) zu entnehmen ist, beschreiben die Stromlinien geschlossene Kreise um das Wirbelzentrum. In einfach zusammenhängenden Gebieten stellt dies jedoch eine Verletzung des Maximumprinzips der Laplace-Gleichung für Φ bzw. Ψ dar. Beide Größen dürfen ihr Maximum nur auf den begrenzenden Oberflächen, nicht jedoch innerhalb des Gebietes erreichen (Helmholtz 1858), wie es bei geschlossenen Stromlinien jedoch auftritt. Die Singularität im Ursprung des Wirbels muss gedanklich aus dem Strömungsfeld entfernt werden. Hierdurch ergibt sich ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet (Lamb 1945), so dass das Maximumprinzip erfüllt werden kann.

2.2.1.2 Randbedingungen für Potentialströmungen

Wie weiter oben bereits erwähnt, können für Potentialströmungen nur die Normalenkomponenten des Geschwindigkeitspotentials als Randbedingungen vorgegeben werden. Insbesondere an festen Wänden bedeutet dies, dass zwar das Verschwinden der wandnormalen Geschwindigkeit, nicht jedoch die Wandhaftbedingung erfüllbar ist. In Wandnähe beschreibt die Potentialtheorie also lediglich reibungsfreie Fluide.

Ein Verschwinden der wandnormalen Geschwindigkeit wird dann erreicht, wenn die Wandkontur mit einer Stromlinie $\Psi = \text{const}$ zusammenfällt. Dies ist für einfache Geometrien leicht möglich. Für die Strömung entlang einer ebenen Wand mit $\eta = 0$ (Abbildung 2.2 a) müssen Quellen und Dipole auf der Wand plaziert werden. Eine Parallel- oder Dipolströmung muss so gewählt werden, dass die Strömung parallel zur Wandkontur verläuft, d.h. $\alpha = 0$. Für einen Wirbel wird ein an der Wand gespiegelter Wirbel (virtueller Bildwirbel) mit entgegengesetzt gleicher Zirkulation eingefügt.

$$\tilde{\Gamma} = -\Gamma \qquad \text{und} \qquad \tilde{\zeta} = \overline{\zeta} \tag{2.24}$$

Bei der Eckenströmung (Abbildung 2.2 b) mit Wirbeln im I. Quadranten müssen Bildwirbel mit entgegengesetzt gleicher Zirkulation im II. und IV. Quadranten und ein weiterer Wirbel mit gleicher Zirkulation im III. Quadranten eingesetzt werden.

$$\tilde{\Gamma}^{II} = -\Gamma \quad \text{und} \quad \tilde{\zeta}^{II} = -\overline{\zeta} \tag{2.25}$$

$$\tilde{\Gamma}^{III} = \Gamma \quad \text{und} \quad \tilde{\zeta}^{III} = -\zeta \tag{2.26}$$

$$\tilde{\Gamma}^{IV} = -\Gamma \quad \text{und} \quad \tilde{\zeta}^{IV} = \overline{\zeta} \tag{2.27}$$

Ähnliche Überlegungen können für Quellen angestellt werden. Die Umströmung eines kreisförmigen Zylinders (Abbildung 2.2 c) wird durch Überlagerung einer Parallel- und Dipolströmung erreicht. Ein Wirbel im Ursprung des Zylinders erzeugt konzentrische Stromlinien und erfüllt somit automatisch die Randbedingungen. Dies stellt physikalisch eine Rotation des Zylinders dar. Ein Wirbel außerhalb des Zylinders an der Stelle ζ mit der Zirkulation Γ erfordert den Einsatz eines virtuellen Bildwirbels mit

$$\tilde{\Gamma} = -\Gamma \qquad \text{und} \qquad \tilde{\zeta} = \zeta_0 + \frac{R^2}{\overline{\zeta - \zeta_0}} \tag{2.28}$$

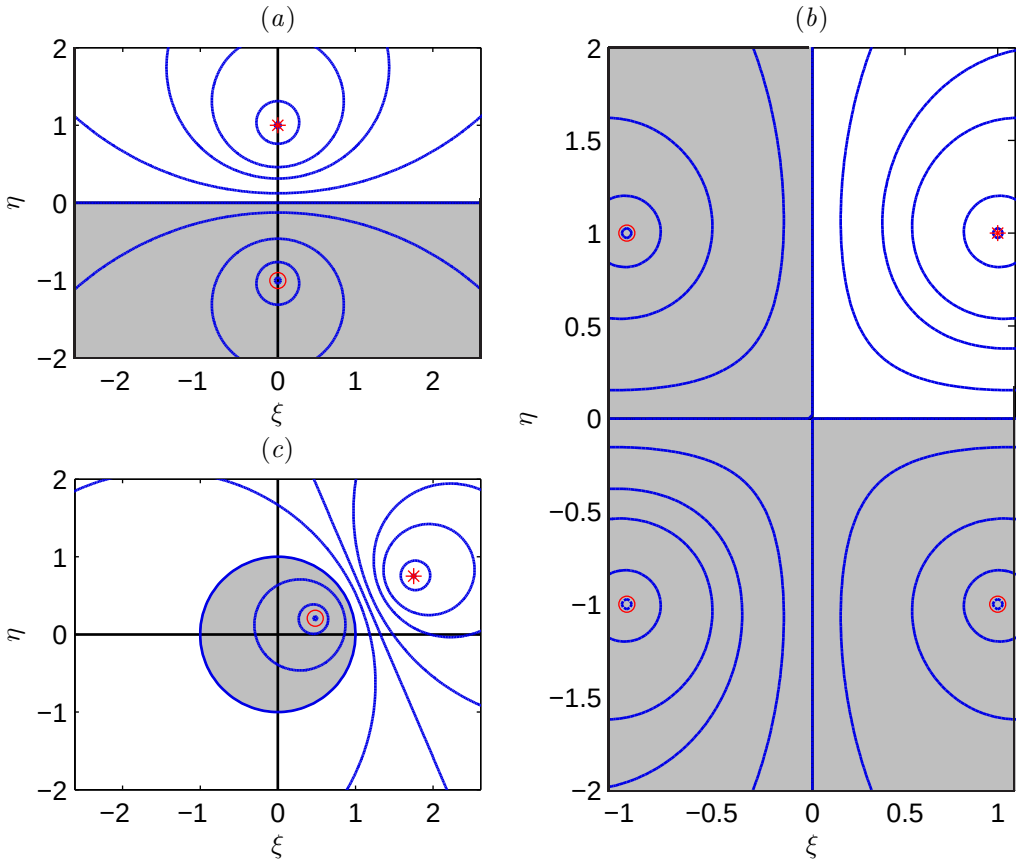


Abbildung 2.2: Erfüllung der reibungsfreien Randbedingungen für Wirbelströmungen an einfachen Geometrien durch virtuelle Bildwirbel: Ebene Wand (a), rechtwinklige Ecke im I. Quadranten (b) und Kreiszylinder (c). Dargestellt sind die Stromlinien (blau), reelle Wirbel (rote Sterne) und virtuelle Bildwirbel (rote Kreise). Die grau markierten Flächen sind Bereiche, die nicht zum Strömungsfeld gehören.

im Innern des Zylinders (z.B. Föppl 1913). Hierbei stellt ζ_0 den Ursprung und R den Radius des Zylinders dar.

Für komplexe Geometrien lassen sich solche einfachen Beziehungen nicht finden. Stattdessen werden in der Praxis entweder Panel-Verfahren oder konforme Abbildungen benutzt. Beim Panel-Verfahren (z.B. Fletcher 1988) wird, ähnlich wie bei der Kreiszylinderströmung durch den einzelnen Dipol, eine Stromlinie durch eine geeignete Quell-, Wirbel- oder Dipolverteilung auf die Wandkontur gezwungen. Numerisch wird dies durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems realisiert, mit dem die erforderliche Stärke (Quellstärke, Zirkulation, Dipolmoment) der einzelnen Panel-Elemente so bestimmt wird, das an bestimmten Kollokationspunkten entlang der Wand die wandnormale Geschwindigkeit verschwindet. Für eine niederdimensionale Repräsentation des Strömungsfeldes, die in dieser Arbeit erwünscht ist, ist das Verfahren der konformen Abbildung (siehe Abschnitt 2.2.2), welche eine einfache Geometrie auf die komplexe Geometrie transformiert, besser geeignet (siehe u.a. Clements 1973; Evans & Bloor 1977; Cortelezzi 1996; Coller *et al.* 2000; Pastoor *et al.* 2003).

2.2.2 Konforme Abbildung

Zur Einarbeitung der Randbedingungen soll die Methode der konformen Abbildung verwendet werden. Eine konforme Abbildung ist eine Transformation von Punkten der z-Ebene, z.B. dem Bereich der physikalischen Anschauung, auf Punkte in der ζ-Ebene, dem Bildbereich zur einfacheren Formulierung der Randbedingungen. Der Name konforme Abbildung rührt daher, dass bei der Transformation Winkel erhalten bleiben und infinitesimal kleine Dreiecke auf ähnliche Dreiecke abgebildet werden (z.B. Karamcheti 1966).

Die bekannteste konforme Abbildung ist die Joukowski-Abbildung

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{c_N}{\zeta^N}\,. \tag{2.29}$$

Sie bildet einen Kreiszylinder auf einen Zylinder beliebigen Querschnitts ab. So ergibt sich z.B. das in Abbildung 2.3 (b) dargestellte Joukowski-Profil zur Untersuchung von Tragflügeln aus (2.29) mit $c_1 = l^2$ und $c_i = 0$ für $i > 1$. Die Wandkontur ergibt sich aus den Grenzen eines gegen den Ursprung verschobenen Kreiszylinders (Abbildung 2.3 a). Dicke und Wölbung des Profiles hängen von der Verschiebung in ξ- bzw. η-Richtung ab. Im Grenzfall eines Zylinders im Ursprung erhält man die Umströmung einer unendlich dünnen Platte. Die Randbedingungen werden im Bildbereich von einer Parallel- und Dipolströmung und überlagerten reellen und virtuellen Wirbeln erfüllt.

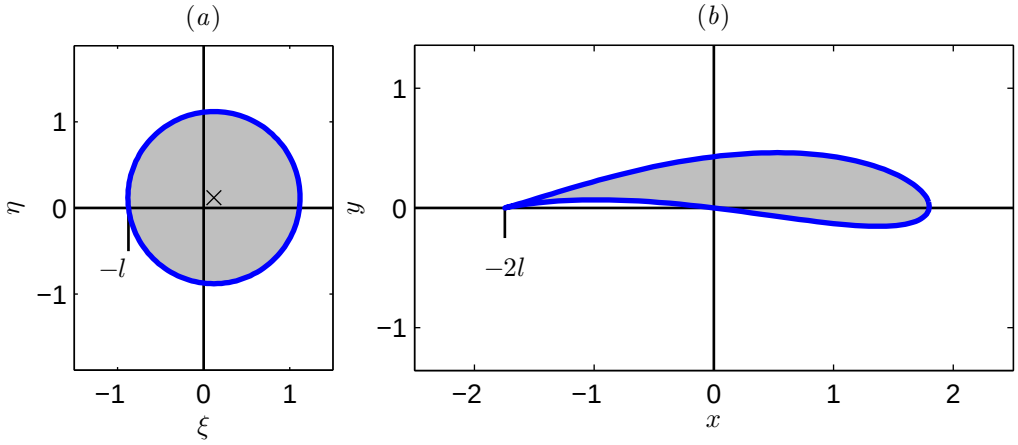


Abbildung 2.3: Abbildung eines Kreiszylinders (a) mit Radius $R = 1$ bei $\zeta = 0.12 + 0.12\,\mathrm{i}$ ($\times$) auf ein Joukowski-Profil (b) mit der Abbildung $z = \zeta + l^2/\zeta$ und $l = 0.87$. Die blauen Linien zeigen die Wandstromlinien.

Die Schwarz–Christoffel-Transformation ist eine konforme Abbildung des Inneren eines Vieleckes aus der z-Ebene auf die obere Halbebene der ζ-Ebene. Die hierzu erforderliche Transformationsgleichung wird aus der Schwarz–Christoffel'schen Gleichung gewonnen:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = C_1(\zeta - e_1)^{-\frac{\beta_1}{\pi}} \cdot (\zeta - e_2)^{-\frac{\beta_2}{\pi}} \cdot \ldots \cdot (\zeta - e_n)^{-\frac{\beta_n}{\pi}} := z'\,. \tag{2.30}$$

Hierbei beschreiben die Punkte $e_{\{1,2,\ldots,N\}}$ die Bildkoordinaten der Eckpunkte $E_{\{1,2,\ldots,N\}}$ des Vieleckes. Die Winkel $\beta_{\{1,2,\ldots,N\}}$ stellen die Außenwinkel an diesen Eckpunkten dar (Abbildung 2.4). Die Integration der Schwarz–Christoffel'schen Gleichung (2.30) liefert die gesuchte

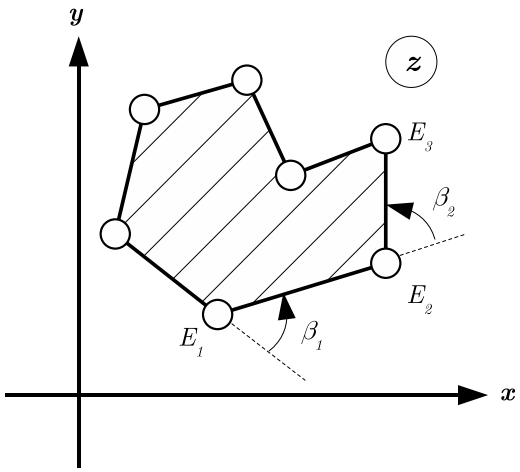


Abbildung 2.4: Einfach zusammenhängendes Gebiet für die Schwarz-Christoffel-Transformation (2.30). Die schraffierte Fläche im physikalischen Bereich z wird auf die obere Halbebene eines Bildbereiches ζ transformiert. Die Punkte $E_{\{1,2,\ldots,N\}}$ werden auf die Punkte $e_{\{1,2,\ldots,N\}}$ abgebildet. An den Eckpunkten treten die Winkel $\beta_{\{1,2,\ldots,N\}}$ auf.

Abbildungsvorschrift, die einen Punkt der ζ-Ebene eindeutig und konform auf einen Punkt der z-Ebene abbildet. Im Bildbereich werden die Randbedingungen von Parallelströmungen und überlagerten reellen Wirbeln und virtuellen Spiegelwirbeln erfüllt.

2.2.2.1 Invertierung der Transformation

Um nun Punkte aus dem physikalischen Bereich in den Bildbereich abzubilden, muss die Umkehrfunktion $\zeta(z)$ ermittelt werden. Die Existenz einer analytischen Umkehrfunktion ist gewährleistet, wenn am abzubildenden Punkt die Ableitung $z' \neq 0$ ist und die Ableitung $\zeta' = 1/z'$ existiert (Karamcheti 1966). Eine solche Umkehrfunktion ist i.A. nicht explizit berechenbar, sondern muss punkteweise iterativ mit dem Newton–Raphson-Verfahren ermittelt werden. Im eindimensionalen Fall ist das Verfahren anschaulich zu erklären: Für eine Funktion $f(x)$ mit einer Nullstelle auf einem monotonen Intervall $a < x < b$ wird der Ort der Nullstelle x_N gesucht. Für einen Schätzwert x_0 innerhalb des Intervalls wird nun eine Tangente an die Funktion gezeichnet. Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse bezeichnet den nächsten Schätzwert x_1. Kann die Tangente explizit berechnet werden und liegen der Schätzwert und die Nullstelle im Intervall, so konvergiert das Verfahren mit quadratischer Geschwindigkeit. Für den Fall der Umkehrfunktion $\zeta(z)$ werden die Bildkoordinaten ζ_s des physikalischen Punktes z_s gesucht. Dies kann als Nullstellensuche der Funktion $z - z_s$ formuliert werden. Ausgehend von einem Startwert ζ_i ist in jeder Iteration ein neuer Schätzwert gemäß

$$\zeta_{i+1} = \zeta_i - \frac{z(\zeta_i) - z_s}{\mathrm{d}z/\mathrm{d}\zeta|_{\zeta_i}} \tag{2.31}$$

zu berechnen. Um die Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten, sind die Startpunkte des Verfahrens für das jeweilige Problem geschickt zu bestimmen.

2.2.2.2 Transformation des Geschwindigkeitsfeldes

Das komplexe Potential, die Quellstärke, das Dipolmoment und die Zirkulation sind invariant gegen eine konforme Abbildung. D.h. es gibt eine Repräsentation des komplexen Potentials W^ζ im Bildbereich, die dem komplexen Potential W^z im physikalischen Bereich gleich ist: $W^z = W^\zeta$. Wenn eine dieser Funktionen bekannt ist, so ist die andere festgelegt. Die komplexe Geschwindigkeit im physikalischen Bereich kann bei bekanntem komplexen Potential W^ζ durch Ableitung und Anwendung der Kettenregel berechnet werden:

$$u - \mathrm{i}\, v = w^z := \frac{\mathrm{d}W^z}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}W^\zeta}{\mathrm{d}\zeta}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\,. \tag{2.32}$$

2.2.2.3 Routh-Korrektur für transformierte Wirbeltrajektorien

Die Bewegung eines Wirbels in einem unbegrenzten Gebiet wurde von Kirchhoff auf die Auswertung der Stromfunktion zurückgeführt. Routh (1881) hat diese Untersuchung um den Einfluss von Wänden erweitert. Betrachtet man die Bewegung eines Wirbels in einem Feld mit dem komplexen Potential W^ζ, so ergibt sich dessen Bewegungsgleichung zu

$$\frac{\partial\overline{\zeta}_n}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(W^\zeta + \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_n}{2\pi}\,\ln\left(\zeta-\zeta_n\right)\right) = 2\mathrm{i}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\underbrace{\Psi^\zeta + \frac{\Gamma_n}{2\pi}\,\ln|\zeta-\zeta_n|}_{=:\chi_n^\zeta}\right)\right],$$

da der Wirbel keine Selbstinduktion ausübt. Die Abkürzung χ_n^ζ wird Routh'sche Stromfunktion genannt. Die Bahn eines Wirbels ergibt sich aus $\chi_n^\zeta = \text{const}$. Eine Erweiterung der Theorie auch auf Mehrwirbelprobleme wurde von Lin (1942*a*, 1942*b*) vorgenommen.

Durch Anwendung der konformen Abbildung wird ein Wirbel aus dem ζ-Bereich eindeutig auf einen Wirbel gleicher Zirkulation im z-Bereich transformiert. Wenn sich der Wirbel bewegt, ist jedoch nicht gewährleistet, dass sich die Bewegung in beiden Bereichen auf korrespondierenden Punkten vollzieht. Um daher Wirbeltrajektorien im transformierten Bereich berechnen zu können, muss die Transformation der Routh'schen Stromfunktion gefunden werden. Die Herleitung (z.B. Lin 1942*b*) basiert auf der Invarianz der Stromfunktion gegen eine konforme Abbildung. Man erhält die Transformation der Routh'schen Stromfunktion des n-ten Wirbels

$$\chi_n^z = \chi_n^\zeta + \frac{\Gamma_n}{4\pi}\,\ln\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n} + k_n\,,$$

wobei k_n eine für die Wirbelbewegung unbedeutende Konstante darstellt. Analog lässt sich eine Korrektur der Geschwindigkeit eines Wirbels aus der Invarianz des komplexen Potentials herleiten (z.B. Lugt 1996). Es gilt die Äquivalenz

$$W^z = W^\zeta - \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_1}{2\pi}\,\ln\frac{\zeta-\zeta_1}{z-z_1} \tag{2.33}$$

für das komplexe Potential, welches sich aus einem Wirbel bei ζ_1 und weiteren Beiträgen W^ζ

zusammensetzt. Eine Taylor-Reihenentwicklung für $\zeta(z)$ ergibt

$$\zeta - \zeta_1 = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{z_1}}_{\zeta'(z_1)} (z - z_1) + \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z_1}}_{\zeta''(z_1)} (z - z_1)^2 + \mathcal{O}(z - z_1)^3 \,.$$

Einsetzen in (2.33) und Berechnung der komplexen Geschwindigkeit durch Ableitung für den Grenzübergang $z \to z_1$ bzw. $\zeta \to \zeta_1$ ergibt schließlich

$$\left.\frac{\mathrm{d}W^z}{\mathrm{d}z}\right|_{z_1} = \left.\frac{\mathrm{d}W^\zeta}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta_1} \left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_1} - \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_1}{4\pi}\,\frac{\zeta''(z_1)}{\zeta'(z_1)} \,.$$

Dies läst sich noch vereinfachen mit

$$\zeta'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}\zeta}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}\zeta}\,\zeta' \,.$$

Mit der Abkürzung

$$\mathcal{R}(\zeta) := \frac{\zeta''}{\zeta'} = \frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}\zeta} \tag{2.34}$$

erhält man schließlich die Geschwindigkeit des n-ten Wirbels im physikalischen Bereich:

$$w_n^z = \left.\frac{\mathrm{d}W^\zeta}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta_n} \left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n} \underbrace{- \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_n}{4\pi}\,\mathcal{R}(\zeta_n)}_{=: w^z_{n,\mathrm{Routh}}} \,. \tag{2.35}$$

Den Term $w^z_{n,\mathrm{Routh}}$ nennt man die Routh-Korrektur. In Abbildung 2.5 (*a, b*) ist der Effekt der Routh-Korrektur auf die Trajektorie eines Wirbels in der Nähe eines ellipsenartigen Körpers (siehe Abschnitt 6.3) dargestellt. Die nicht-korrigierte Trajektorie (gestrichelt) beschreibt im Bildbereich (Abbildung 2.5 *a*) einen Kreis um den Zylinder. Dies entspricht im physikalischen Bereich (Abbildung 2.5 *a*) einer Ellipse, deren Abstand zur Wand variiert. Durch die Korrektur (durchgezogen) wird der Effekt der konformen Abbildung auf den Wandeinfluss berücksichtigt. Die Wirbelbahn folgt nun der Wandkontur im physikalischen Bereich.

2.2.3 Druckberechnung

Mit dem Wirbelverfahren kann das instantane Geschwindigeitsfeld berechnet werden. Da jedoch die Wandhaftbedingung nicht erfüllt wird, stimmen die berechneten Geschwindigkeiten in Wandnähe nicht mit experimentellen Messungen und numerischen Simulationen überein. Der Wanddruck dagegen ist im Rahmen der Grenzschichttheorie vom Außenfeld aufgeprägt und ändert sich in der Grenzschicht normal zur Wand nicht (Prandtl 1965). Somit ist der Wanddruck eine geeignetere Größe, um das Wirbelverfahren mit Experimenten und Simulationen zu vergleichen. Die Berechnung des Druckfeldes aus einem gegebenen Schnappschuss des Wirbelverfahrens wird mit drei Methoden durchgeführt, die im Folgenden erläutert werden.

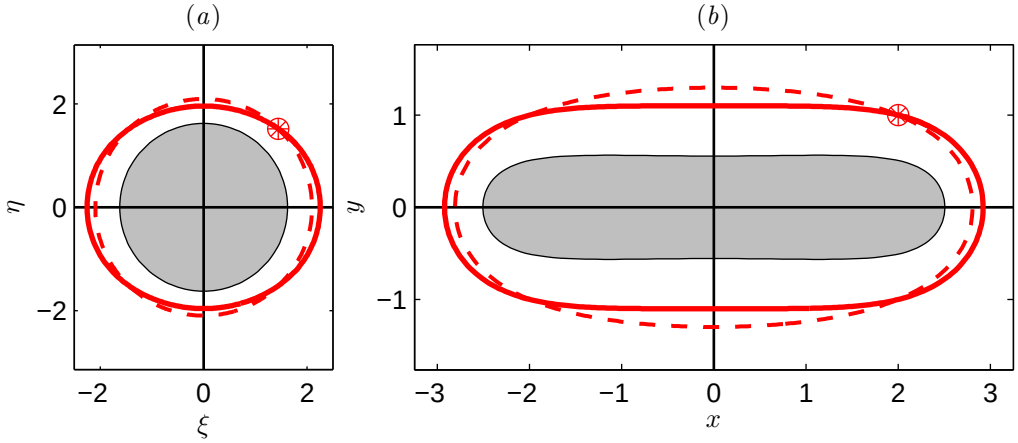


Abbildung 2.5: Anwendung der Routh-Korrektur bei Transformation eines Zylinders (a) mit $R = 1.63$ auf eine Ellipse (b) durch die konforme Abbildung $z = \zeta + 1.58/\zeta - 0.4/\zeta^3$. Wirbeltrajektorie eines Wirbels bei $z_0 = 2 + \mathrm{i}$ mit (durchgezogen) und ohne (gestrichelt) Routh-Korrektur.

2.2.3.1 Instationäre Bernoulli-Gleichung für Potentialströmungen

In einer Potentialströmung mit konservativem äußeren Kraftfeld vereinfacht sich (2.2) nach Integration zwischen zwei beliebigen Punkten im Strömungsfeld zu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \frac{1}{2}\,\mathbf{u}^2 + \mathcal{F} = \text{const}, \tag{2.36}$$

wobei $\mathcal{F}$ das Potential des Kraftfeldes darstellt (z.B. Schade & Kunz 1989). Der Einfluss des Kraftfeldes soll hier vernachlässigbar klein sein. In den in dieser Arbeit untersuchten Wirbelverfahren treten instationäre Geschwindigkeitspotentiale Φ im Wesentlichen durch sich bewegende Wirbel auf. Der instationäre Charakter der Aktuation wird vernachlässigt, da die Sensoren so platziert werden, dass sie nicht im direkten Einflussbereich der Aktuatoren liegen. Der Term $\partial\Phi/\partial t$ in (2.36) ergibt sich daher nur aus der Summe aller reeller und virtueller Wirbel. Der Beitrag des n-ten reellen Wirbels ergibt sich aus dem Realteil von (2.22) [2]

$$\Phi_n = \mathfrak{Re}\left\{W_n^{\zeta}\right\} = \frac{\Gamma_n}{2\pi}\,\arctan\frac{\eta - \eta_n}{\xi - \xi_n} \tag{2.37}$$

mit den Abkürzungen $\Delta\xi_n = \xi - \xi_n$ und $\Delta\eta_n = \eta - \eta_n$ zu

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} = \frac{\Gamma_n}{2\pi}\,\frac{\frac{\partial \xi_n}{\partial t}\,\Delta\eta_n - \frac{\partial \eta_n}{\partial t}\,\Delta\xi_n}{\Delta\xi_n^2 + \Delta\eta_n^2}\,. \tag{2.38}$$

Die partiellen Zeitableitungen der Wirbelkoordinaten ergeben sich nach Anwendung der Kettenregel und Aufspaltung in Real- und Imaginärteil zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} = \left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}\frac{\partial z_n}{\partial t} \;=\; & \underbrace{\mathfrak{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}\right\}u_n - \mathfrak{Im}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}\right\}v_n}_{=:\partial\xi_n/\partial t} + \\ & + \;\mathrm{i}\,\underbrace{\left(\mathfrak{Im}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}\right\}u_n + \mathfrak{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}\right\}v_n\right)}_{=:\partial\eta_n/\partial t}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

[2] Der Index v in (2.22) wird zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.

Für die zugehörigen virtuellen Wirbel, die sich durch Spiegelung im II., III. und IV. Quadranten ergeben, folgt analog zu (2.38) mit $\Delta\tilde{\xi}_n = \xi + \xi_n$ und $\Delta\tilde{\eta}_n = \eta + \eta_n$

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_n^{II}}{\partial t} = +\frac{\Gamma_n}{2\pi}\,\frac{\frac{\partial\xi_n}{\partial t}\,\Delta\eta + \frac{\partial\eta_n}{\partial t}\,\Delta\tilde{\xi}_n}{\Delta\tilde{\xi}_n^2 + \Delta\eta_n^2}\,, \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_n^{III}}{\partial t} = -\frac{\Gamma_n}{2\pi}\,\frac{\frac{\partial\xi_n}{\partial t}\,\Delta\tilde{\eta} - \frac{\partial\eta_n}{\partial t}\,\Delta\tilde{\xi}_n}{\Delta\tilde{\xi}_n^2 + \Delta\tilde{\eta}_n^2} \tag{2.41}$$

und

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_n^{IV}}{\partial t} = -\frac{\Gamma_n}{2\pi}\,\frac{\frac{\partial\xi_n}{\partial t}\,\Delta\tilde{\eta} + \frac{\partial\eta_n}{\partial t}\,\Delta\xi_n}{\Delta\xi_n^2 + \Delta\tilde{\eta}_n^2}\,. \tag{2.42}$$

Insbesondere gilt (2.42) auch für den Fall einer ebenen Wand bei $\eta = 0$. Für den virtuellen Wirbel im Innern eines Zylinders mit dem Radius R im Ursprung $\zeta_0 = 0$ folgt mit (2.37) und (2.28) nach längerer Rechnung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\Phi}_n}{\partial t} = \frac{\Gamma_n}{2\pi}\Bigg(&\frac{(2\xi\xi_n\frac{\partial\xi_n}{\partial t} + 2\xi\eta_n\frac{\partial\eta_n}{\partial t} - R^2\frac{\partial\xi_n}{\partial t})\,(\eta\xi_n^2 + \eta\eta_n^2 - R^2\,\eta_n)}{(\xi\xi_n^2 + \xi\eta_n^2 - R^2\,\xi_n)^2 + (\eta\xi_n^2 + \eta\eta_n^2 - R^2\,\eta_n)^2} - \\ -\ &\frac{(2\eta\xi_n\frac{\partial\xi_n}{\partial t} + 2\eta\eta_n\frac{\partial\eta_n}{\partial t} - R^2\frac{\partial\eta_n}{\partial t})\,(\xi\xi_n^2 + \xi\eta_n^2 - R^2\,\xi_n)}{(\xi\xi_n^2 + \xi\eta_n^2 - R^2\,\xi_n)^2 + (\eta\xi_n^2 + \eta\eta_n^2 - R^2\,\eta_n)^2}\Bigg)\,.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Aufgrund der Einschränkung auf Potentialströmungen gilt die Druckgleichung nur für wirbelfreie Gebiete, d.h. nicht innerhalb eines Wirbelkernes oder in Wandgrenzschichten. Ein Vergleich mit den folgenden Methoden zur Berechnung des Drucks zeigt jedoch, dass dieser Ansatz dennoch für eine grobe Abschätzung des Wanddruckes genügt.

2.2.3.2 Euler-Gleichung für Potentialströmungen

In einer ebenen Strömung verbleiben bei entsprechender Wahl des Koordinantensystems nur die ersten beiden Komponenten der Navier–Stokes-Gleichungen. Unter der Annahme reibungsfreier Fluide verschwindet obendrein der Term $\frac{1}{Re}\,\Delta\mathbf{u}$. Man erhält

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{und} \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}\,. \tag{2.45}$$

Der Druckverlauf entlang einer Linie lässt sich durch Integration von (2.44) bzw. (2.45) mit einer Integrationskonstante p_0 bestimmen. Die Gradienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial y}$ werden durch zentrale Differenzenquotienten angenähert. Bei der Näherung der lokalen Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ durch Differenzenquotienten müssen Geschwindigkeiten von verschiedenen Zeitpunkten berücksichtigt werden. Um Sprünge in den Ableitungen zu vermeiden, dürfen dabei nur aufeinanderfolgende Zeitschritte mit konstanter Anzahl an Wirbeln gewählt werden (Evans & Bloor 1977). Die Integration erfolgt dann durch Auswertung des Integranden mit der Simpson'schen Formel (siehe Abschnitt 2.3).

Für die Berechnung des Druckverlaufes in x-Richtung kann z.B. das Gitter in Abbildung 2.6 verwendet werden. Hierzu werden für drei Zeitpunkte $\tau - \Delta t$, τ und $\tau + \Delta t$ auf drei parallelen Bahnen $y - \Delta y$, y und $y + \Delta y$ die Geschwindigkeiten an äquidistanten Stützstellen in x-Richtung ausgewertet. Die Berechnung des Druckes erfolgt dann für $p = p(x)|_{y,\tau}$. Die Approximationen der einzelnen Terme des Integranden von (2.44) lauten:

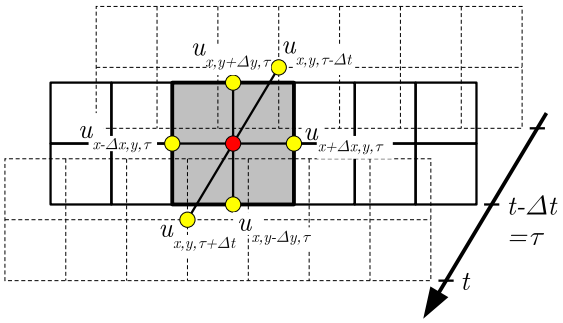


Abbildung 2.6: Berechnung des Druckverlaufes in x-Richtung mit der Euler-Gleichung.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,y,\tau} \approx \frac{1}{2\Delta x}\Big(u\big(x+\Delta x,y,\tau\big) - u\big(x-\Delta x,y,\tau\big)\Big) \tag{2.46}$$

$$\text{und} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,y,\tau} \approx \frac{1}{2\Delta y}\Big(u\big(x,y+\Delta y,\tau\big) - u\big(x,y-\Delta y,\tau\big)\Big) \tag{2.47}$$

$$\text{sowie} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x,y,\tau} \approx \frac{1}{2\Delta t}\Big(u\big(x,y,\tau+\Delta t\big) - u\big(x,y,\tau-\Delta t\big)\Big)\,. \tag{2.48}$$

2.2.3.3 Druck-Poisson-Gleichung

Durch Anwendung des Divergenz-Operators auf die Impulsbilanz (2.2) vereinfachen sich für inkompressible Fluide wegen (2.1) die Navier–Stokes-Gleichungen zu einer elliptischen, partiellen Differentialgleichung (Poisson-Gleichung) für den Druck:

$$\Delta p = \underbrace{-\nabla\mathbf{u}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^T}_{=:Q}\,. \tag{2.49}$$

Die beiden Punkt-Operatoren stellen eine doppelte Kontraktion[3] der Tensoren $\nabla\mathbf{u}$ dar. Nach Zerlegung von $\nabla\mathbf{u}$ in einen symmetrischen Anteil $\mathbf{S}$ und einen antisymmetrischen Anteil $\mathbf{W}$ erhält man für den Quellterm der Poisson-Gleichung:

$$Q = \mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{W} - \mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\mathbf{W}_{ij}\,\mathbf{W}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}\,\mathbf{S}_{ij}\right). \tag{2.50}$$

Der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten beschreibt in der Bewegungsanalyse eine Verzerrung des Fluidelementes durch Scherung, während durch den antisymmetrischen Anteil eine Rotation des Fluidelementes erfolgt. In einer geraden Scherschicht halten sich Scherung und Rotation die Waage, so dass $Q \approx 0$ gilt. Über eine (dünne) Scherschicht hinweg beobachtet man daher keine Druckänderung. Im Innern eines Wirbels überwiegt Rotation und es folgt $Q > 0$. Dies ist die hinreichende Bedingung für ein lokales Druckminimum, und tatsächlich entsprechen die Wirbelzentren Tiefdruckgebieten. Zwischen zwei gleichsinnig rotierenden Wirbeln tritt eine hohe Scherung auf und damit erhält man dort $Q < 0$. Dies ist die hinreichende Bedingung für das lokale Druckmaximum im Staupunkt zwischen den Wirbeln. In dieser Arbeit wird die Druck-Poisson-Gleichung vor allem zur physikalischen Interpretation verwendet. Lediglich

[3] Matrix-Notation: $\nabla\mathbf{u}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^T \Leftrightarrow \mathrm{vec}\{\nabla\mathbf{u}\}^T\,\mathrm{vec}\{\nabla\mathbf{u}^T\}$ nach Brewer (1978)

zur Überprüfung der mit der instationären Bernoulli-Gleichung und der Euler-Gleichung ermittelten Wanddrücke wird die Poisson-Gleichung numerisch ausgewertet. Hierzu wird (2.49) für ein finites Differenzenverfahren auf einem uniformen, zweidimensionalen Gitter mit der Gitterweite h über zentrale Differenzenquotienten formuliert:

$$p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - 4\,p_{i,j} + p_{i,j+1} + p_{i+1,j} = h^2\,Q_{i,j}\,. \tag{2.51}$$

Mit diesem Ansatz lässt sich die Druckberechnung auf die Invertierung eines Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\,\mathbf{p} = \mathbf{b} \tag{2.52}$$

zurückführen, mit den in einem Spaltenvektor angeordneten Drücken $\mathbf{p}$. Bei der Bestimmung von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ müssen die zentralen Differenzenquotienten für Elemente auf dem Rand durch Randbedingungen vervollständigt werden:

Dirichlet-Bedingung: Dirichlet- oder Randbedingungen 1. Art sind direkte numerische Vorgaben für den Druck P auf den Nachbarzellen von Gitterelementen am Rand. Diese Nachbarzellen müssen von der Berechnung der Matrix $\mathbf{A}$ gemäß (2.51) ausgeschlossen werden. Die Vorgabewerte werden stattdessen in den Vektor der rechten Seite $\mathbf{b}$ eingearbeitet. Für den linken unteren Punkt des Gitters gilt dann z.B.:

$$-4\,p_{1,1} + p_{1,2} + p_{2,1} = h^2\,Q_{1,1} - P_{unten} - P_{links}\,.$$

Neumann-Bedingung: Neumann- oder Randbedingungen 2. Art sind numerische Vorgaben für den Druckgradienten $\mathrm{d}P$ zwischen den Nachbarzellen von Gitterelementen. Auch hier ändert sich die Berechnung von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$, man erhält für die linke untere Ecke:

$$-2\,p_{1,1} + p_{1,2} + p_{2,1} = h^2\,Q_{1,1} + h\,\mathrm{d}P_{unten} + h\,\mathrm{d}P_{links}\,.$$

Gemischte Randbedingungen 3. Art oder Cauchy-Bedingungen werden in dieser Arbeit nicht verwendet. Neumann-Bedingungen werden an festen Wänden eingesetzt, wo der wandnormale Druckgradient verschwindet. Auf den übrigen Randstücken werden Dirichlet-Bedingungen aus der Euler-Gleichung gewonnen. Da die Matrix $\mathbf{A}$ konstant ist, genügt es, die Invertierung für ein bestimmtes Gitter einmal zu berechnen und abzuspeichern. Instationäre Daten finden nur in den Vektor der rechten Seite $\mathbf{b}$ Eingang.

2.2.4 Aktuatoren

Mit der Quelle aus (2.19) lässt sich ein Volumenstrom in den gesamten Raum einblasen bzw. aus diesem absaugen. In den nachgebildeten Experimenten sind die Aktuatoren durch Lautsprecher-Schlitz-Systeme realisiert, bei denen in einer kleinen Druckkammer durch Lautsprecher ein Über- bzw. Unterdruck erzeugt wird. Durch den Schlitz tritt dann bei Überdruck ein relativ schmal begrenzter ebener Freistrahl in die Strömung ein. Bei Unterdruck dagegen wird aus einem weiten Bereich Fluid in den Schlitz eingesogen. Dieses Verhalten wird in den hier vorgestellten Wirbelverfahren durch gerichtete Quellen modelliert.

Für gerichtete Quellen werden, neben einer nominalen Quellstärke Q_a und dem Ort ζ_a, die Stellgröße g, ein Winkel für die Strahlachse α_a sowie die Öffnungswinkel δ_+ für das Einblasen ($g > 0$) und δ_- für das Absaugen ($g < 0$) vorgegeben. Um den Aktuator volumenstromneutral zu halten, muss die Quellstärke je nach Betriebszustand angepasst werden:

$$Q(g, Q_a, \delta_+, \delta_-) = \begin{cases} Q_a & , g > 0 \\ Q_a \frac{\delta_+}{\delta_-} & , g < 0\,. \end{cases} \tag{2.53}$$

Die maximale Geschwindigkeit wird in einem Freistrahl auf der Strahlachse erreicht, zu den Rändern nimmt die Geschwindigkeit kontinuierlich auf null ab. Dieses Verhalten wird hier durch eine Dämpfungsfunktion berücksichtigt, die vom Winkelabstand γ des Aufpunktes ζ zur Strahlachse abhängt:

$$\begin{aligned} D(\zeta, g, \alpha_a, \delta_+, \delta_-) &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\pi\,\gamma/\delta\right) + 1\right)\left(1 - \sigma(\gamma - \delta/2)\right), \\ \text{mit} \quad \gamma &= |\alpha_a - \arctan\frac{\eta}{\xi}| \\ \text{und} \quad \delta &= \begin{cases} \delta_+ & , g > 0 \\ \delta_- & , g < 0\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Hier ist σ die Sprungfunktion. Die induzierte komplexe Geschwindigkeit der gerichteten Quelle ergibt sich dann aus

$$w_a^\zeta = g\,\frac{Q(g, Q_a, \delta_+, \delta_-)}{2\pi}\,\frac{D(\zeta, g, \alpha_a, \delta_+, \delta_-)}{\zeta - \zeta_a}\,. \tag{2.55}$$

Diese Lösung ist ebenfalls divergenz- und rotationsfrei. In Abbildung 2.7 (a–c) sind die induzierten Felder eines Aktuators und der Verlauf der Dämpfungsfunktion dargestellt.

2.2.5 Modellierung nicht-inhärenter physikalischer Phänomene

Das Einbringen einer Singularität im Ursprung des Punktwirbels birgt numerische Schwierigkeiten: Wirbel, die sich stark annähern, induzieren wechselseitig unphysikalisch hohe Geschwindigkeiten. Paradoxerweise haben Wirbelmethoden mit Punktwirbeln die Eigenschaft, die tatsächlichen physikalischen Effekte umso schlechter abzubilden, je feiner die Punktwirbel zur Diskretisierung einer Scherschicht verteilt werden. Diese mangelnde Konvergenzeigenschaft hat zur Folge, dass sich im Grenzübergang unendlich vieler Punktwirbel ein instantanes Aufrollen ergibt (Birkhoff 1962; Birkhoff & Fisher 1977). Zur Lösung dieses Problems wird eine Regularisierung des Geschwindigkeitsfeldes durch Wahl eines nicht-singulären Wirbelmodells (Abschnitt 2.2.5.1) vorgenommen.

Im Falle einer ebenen Strömung ($(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = 0$) in einem konservativen Kraftfeld ($\nabla \times \mathbf{f}{=}0$) vereinfacht sich die Wirbeltransportgleichung (2.5) und man erhält

$$\frac{\mathrm{D}\omega_z}{\partial t} = \frac{1}{Re}\,\Delta\omega_z\,. \tag{2.56}$$

Ist das Fluid reibungsfrei, so verschwindet außerdem noch die rechte Seite. D.h. die Wirbelstärke haftet einem Teilchen für alle Zeiten an, kann also weder erzeugt werden noch verloren gehen.

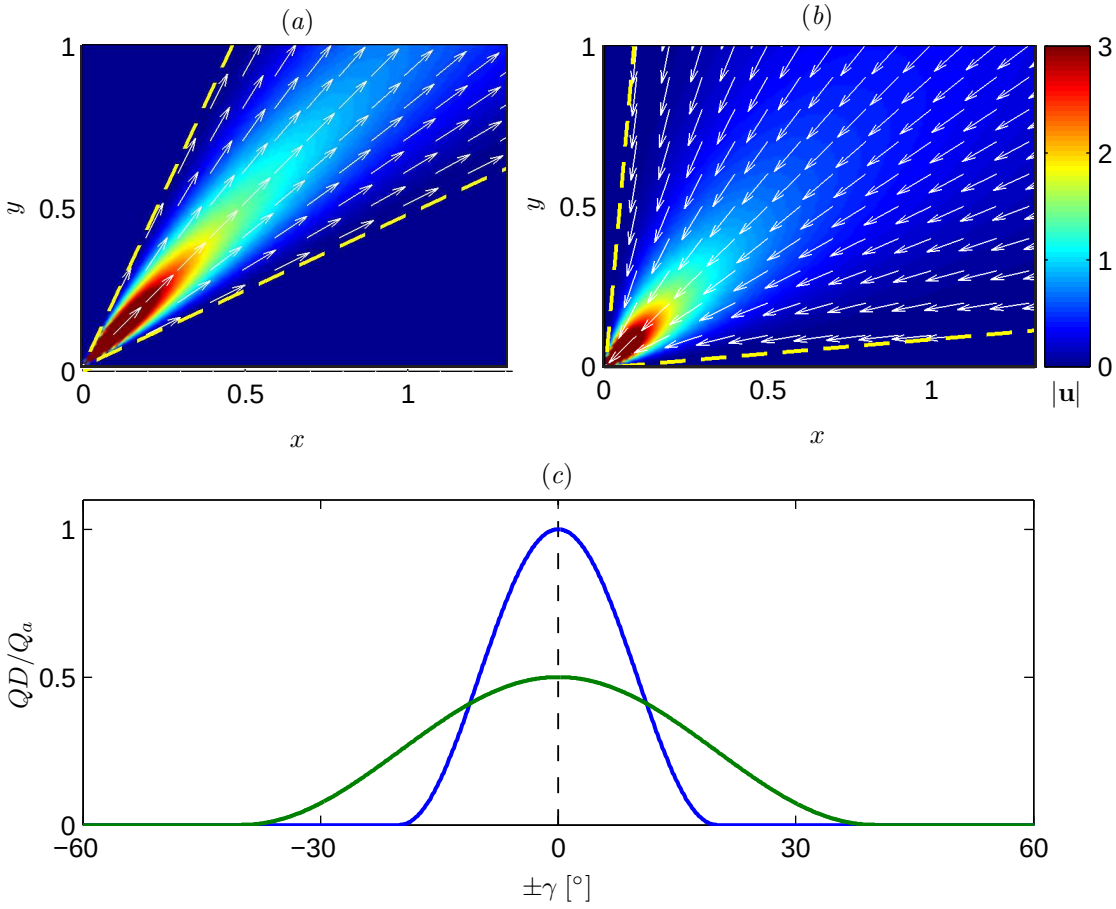


Abbildung 2.7: Geschwindigkeitsfelder und Dämpfungfunktion eines Aktuators mit $\alpha_a = 45°$. In (a) bzw. (b) sind für den Aktuator im einblasenden ($g > 0$, $\delta_+ = 40°$) bzw. einsaugenden ($g < 0$, $\delta_- = 80°$) Modus die Beträge des Geschwindigkeitsfeldes farbkodiert dargestellt (dunkelblau: $|\mathbf{u}| = 0$, dunkelrot: $|\mathbf{u}| = 3$). In (c) ist das Produkt aus modifizierter Quellstärke und Dämpfung normiert mit der nominalen Quellstärke für Einblasen (blau) und Absaugen (grün) in Abhängigkeit des Winkelabstandes zu Strahlachse gezeigt.

Zudem ist in der ebenen Strömung keine Stauchung und Rotation der Wirbellinien möglich. Um eine realistische Repräsentation des Strömungsfeldes zu erhalten, muss die Potentialtheorie um physikalische Modelle für die Produktion von Wirbelstärke durch Reibung an Wänden (Abschnitt 2.2.5.2), laminare und turbulente Diffusion von Wirbelstärke (Abschnitt 2.2.5.5), sowie dreidimensionale Effekte und den Wandeinfluss auf Wirbel (Abschnitt 2.2.5.3) erweitert werden. Wirbelverschmelzung (Abschnitt 2.2.5.4) tritt in reibungsbehafteten Fluiden auf und kann zur Vergößerung (Wirbelpaarung) und Auslöschung von Wirbeln führen. In dieser Arbeit wird sie insbesondere zur Verringerung des Rechenaufwandes eingesetzt.

2.2.5.1 Wirbelmodelle

Zur Regularisierung des Geschwindigkeitsfeldes sind eine Reihe von Verfahren vorgeschlagen worden. Chorin & Bernard (1973) haben Punktwirbel durch Wirbel mit endlichen Kernen ersetzt, in denen die Wirbelstärke als konstant angenommen wird. Hierdurch wird die Aufrollung

der Scherschicht bei geeigneter Überlappung der Wirbelkerne *(vortex blob)* verzögert. Moore (1974) dagegen hat die Wirbel im Innern eines Bereiches starker Aufrollung zu einem einzelnen Punktwirbel verschmolzen. Fink & Soh (1978) führten eine Umordnung (remeshing) der Wirbel durch, um die Scherschicht stets geeignet zu diskretisieren. Die Konvergenz von Wirbelmethoden mit Wirbelkernmodellen zu Lösungen der Navier–Stokes-Gleichungen wurde von Beale & Majda (1982a) und Krasny (1986a) gezeigt.

Ein einfaches Wirbelmodell mit endlichem Kern ist der Rankine-Wirbel. Bei diesem Modell wird ein starr rotierender Kern mit Radius R_b und konstanter Wirbelstärke ω_z angenommen. Außerhalb des Kernes verhält sich der Rankine-Wirbel wie ein Punktwirbel. Eine Verfeinerung dieses Modells stellt der Hamel–Oseen- oder Lamb-Wirbel dar. Er geht aus einer analytischen Lösung der zweidimensionalen, reibungsfreien Wirbeltransportgleichung hervor und beschreibt die laminare Diffusion von Wirbelstärke aus dem Wirbelzentrum nach außen. Kinematisch verbindet er den Rankine-Wirbel für $r \to 0$ mit dem Punktwirbel für $r \to \infty$, wobei r der Abstand zwischen Wirbel und Aufpunkt ist. Der Übergang wird durch eine exponentielle Zunahme der Zirkulation

$$\Gamma(r) = \Gamma_0 \left(1 - e^{-\frac{r^2}{R_b^2}} \right) \tag{2.57}$$

vermittelt. Der Parameter R_b ist der Radius des mit dem Oseen-Wirbel assoziierten Rankine-Wirbel mit dem gleichem Gradienten $\partial u_\phi / \partial r|_{r=0}$. Wegen der Stetigkeit der induzierten Felder wird in dieser Arbeit der Oseen-Wirbel eingesetzt. Ein Vergleich von Punkt-, Rankine- und Oseen-Wirbeln ist Abbildung 2.8 (a–c) zu entnehmen.

Wirbelkerne von virtuellen Wirbeln: Um die Randbedingungen zu erfüllen, müssen virtuelle Wirbel mit dem gleichen Wirbelmodell wie der zugehörige reelle Wirbel gerechnet werden. Für die ebene Wand oder die Eckenströmung kann für virtuelle Wirbel der gleiche Kernradius $\tilde{R}_b = R_b$ und der geometrische Abstand r zwischen virtuellem Wirbel und Aufpunkt verwendet werden. Beim Kreiszylinder hingegen muss für die virtuellen Wirbel ein Korrekturfaktor bei der Berechnung des Abstandes und für den Kernradius berücksichtigt werden:

$$\tilde{r} \approx \frac{R^2}{|\zeta_n - \zeta_0|^2} \, |\zeta - \tilde{\zeta}_n| \tag{2.58}$$

$$\text{und} \quad \tilde{R}_b \approx \frac{R^2}{|\zeta_n - \zeta_0|^2} \, R_b \,. \tag{2.59}$$

Der Wirbelkern des reellen Wirbels sollte stets kleiner oder gleich dem halben Abstand zur Wand sein.

Wirbelkernmodelle bei konformer Abbildung: Wird eine konforme Abbildung benutzt, so ist der Kernradius in der Regel nur im physikalischen Bereich angegeben. Da Kreise bei der konformen Abbildung in einigermaßen guter Näherung erhalten bleiben, kann der Kernradius im Bildbereich R_b^ζ lokal aus dem physikalischen Kernradius abgeschätzt werden:

$$R_b^\zeta \approx R_b \left| \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \right|_{\zeta_n} . \tag{2.60}$$

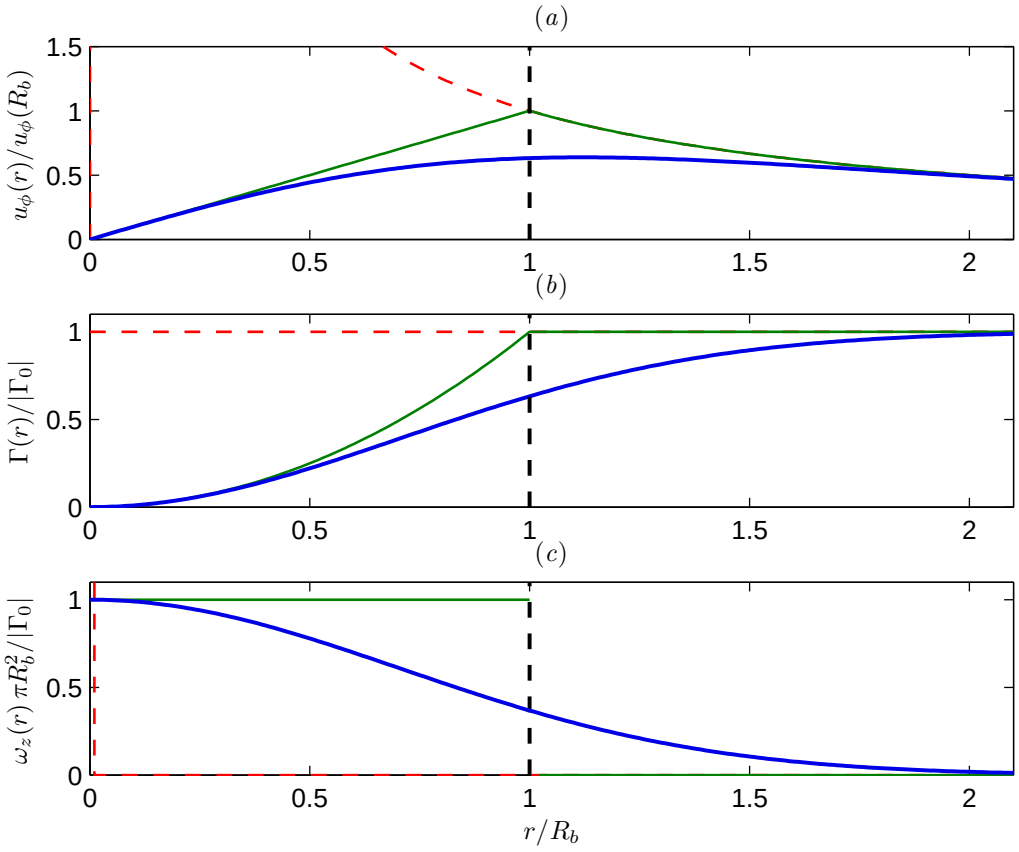


Abbildung 2.8: Vergleich der induzierten Umfangssgeschwindigkeiten (a) und Zirkulations- (b) und Wirbelstärkeverteilungen (c) als Funktion des Abstandes r berechnet für Punktwirbel (rot, gestrichelt), Rankine-Wirbel (grün) und Hamel–Oseen-Wirbel (blau).

In der Nähe singulärer Stellen von $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}$ muss die Größe von R_b^ζ beschränkt werden. Der geometrische Abstand wird im Bildbereich ermittelt.

2.2.5.2 Wirbelproduktion

Die Wirbelschicht, die von einer scharfen Kante ablöst, schwimmt ab und erfordert so eine kontinuierliche Produktion neuer Wirbelstärke. Für ein Wirbelverfahren bedeutet dies, das zu jedem Zeitschritt neue Wirbel in das Rechengebiet eingefügt werden müssen. Dies führt zu einem Widerspruch mit dem Thomson'schen Satz, dass die Potentialströmung zirkulationserhaltend ist: Eine Potentialströmung darf zwar Punktwirbel enthalten, es dürfen jedoch keine Wirbel hinzugefügt oder entfernt werden! Die Frage, wie Wirbelstärke in das Strömungsfeld hineingelangt, wurde und wird bis heute kontrovers diskutiert. Während etwa Hadamard (1926) die Produktion von Scherschichten in Potentialströmungen ablehnt, wird z.B. von Klein (1910) die Meinung vertreten, Scherschichten könnten an singulären Punkten, wie etwa einer Ecke, entstehen.

Prandtl (1922) hat eine praktische Lösung dieses Problems vorgeschlagen: Die Produktion von Wirbelstärke ist ein viskoser Effekt. Deshalb muss Wirbelstärke künstlich in das Potentialfeld eingetragen werden, um physikalische Strömungen nachbilden zu können. Die Bestimmung

des Ortes und die Höhe der eingetragenen Wirbelstärke ist Teil der Modellierung. Für die in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Joukowski-Profile und ähnliche Konfigurationen wird ein Verschwinden der Geschwindigkeit an den scharfen Kanten, etwa der Hinterkante eines Tragflügels, gefordert. Hierdurch werden Drucksprünge vermieden und ein Abfließen an der Hinterkante ermöglicht (Kutta'sche Abflussbedingung). Wird etwa der Ort des neu eingesetzten Wirbels vorgegeben, kann die Zirkulation aus der Bedingung $w^\zeta = 0$ ermittelt werden. Dieses Verfahren hat sich für die Berechnung von Profil- und Plattenumströmungen vielfach bewährt.

Bei den in dieser Arbeit anvisierten ablösenden Scherströmungen treffen zwei Teilströme mit den Geschwindigkeiten $U_0 = 0$ und $U_1 > 0$ an einer Körperhinterkante aufeinander. Hier führt die Kutta'sche Abflussbedingung jedoch zu einem unphysikalischen Abströmen des Fluids von der Hinterkante, wie in Abbildung 2.9 (a) zu erkennen ist. Stattdessen wird die von Giesing (1969) abgeleitete Wirbelproduktion in der Modellierung umgesetzt (Abbildung 2.9 b). Aus der

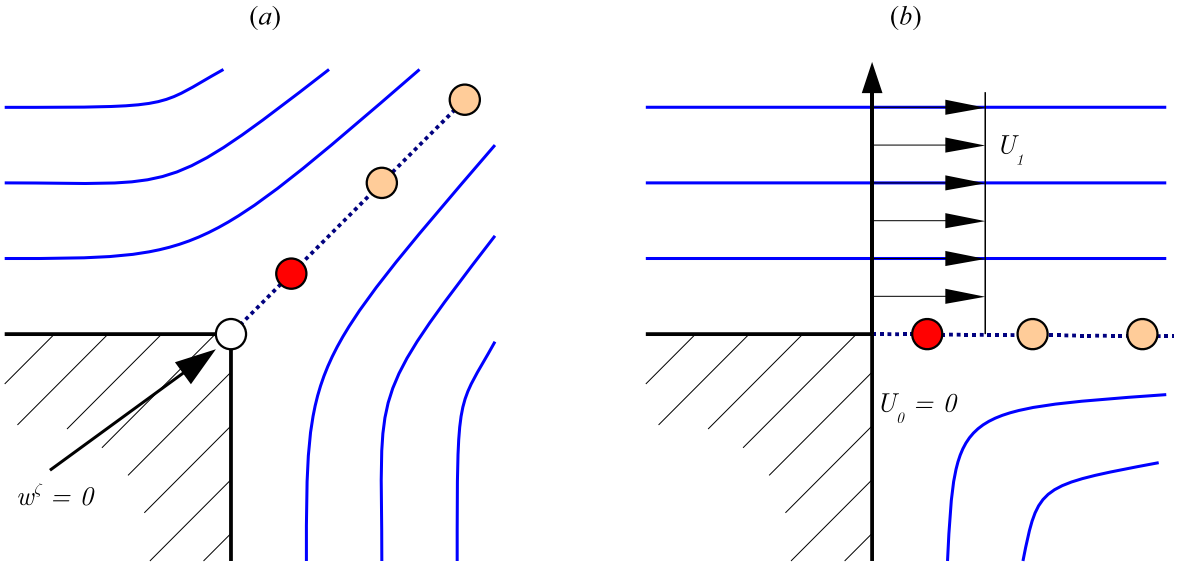


Abbildung 2.9: Kriterien für die Wirbelproduktion an einer umströmten scharfen Kante. Die Strömung geht mit der Geschwindigkeit U_1 von links nach rechts. Im Windschatten nahe des Körpers ruht das Fluid. In (a) wird die Kutta-Bedingung erfüllt, d.h. die Zirkulation des neu eingesetzten Wirbels (rot) so gewählt, dass an der Ecke die insgesamt induzierte Geschwindigkeit w^ζ exakt verschwindet. Es ergibt sich ein unphysikalischer Abströmwinkel. In (b) werden Wirbel gemäß der von Giesing (1969) vorgeschlagenen Methode eingesetzt: Der neu eingesetzte Wirbel (rot) schwimmt mit der Geschwindigkeit $U_1/2$ stromab, seine Stärke ergibt sich zu $\Delta\Gamma = -U_1^2/2\,\Delta t$. Dies entspricht dem erwarteten Abströmwinkel.

Annahme, dass über die sich entwickelnde Scherschicht hinweg kein Drucksprung erfolgt, lässt sich mit (2.36) für ein kleines Stück der Scherschicht mit der Länge Δl die Zirkulationsdichte γ ermitteln, die den Sprung der Tangentialgeschwindigkeit von U_0 auf U_1 bewirkt. Berechnet man (2.7) für eine geschlossene Kurve um dieses Teilstück der Scherschicht, so erhält man

$$\Delta\Gamma = (U_0 - U_1)\,\Delta l\,. \tag{2.61}$$

Die Konvektionsgeschwindigkeit des Scherschichtelementes wird mit

$$U_c = \frac{U_0 + U_1}{2} \tag{2.62}$$

abgeschätzt. Setzt man für $\Delta l = U_c \, \Delta t$ erhält man aus (2.61) die Produktionsrate

$$\frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} = \frac{1}{2}(U_0^2 - U_1^2) \, . \tag{2.63}$$

2.2.5.3 Wirbelzerfall

Dreidimensionale Transportprozesse, Reibung und Wandeinfluss bewirken in realen Strömungen eine Änderung der Wirbelstärke eines Fluidelementes. Zu diesen Vorgängen gehören:

- Stauchung und Rotation von Wirbellinien bzw. Wirbelstärkevektoren wegen des Terms $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}$ in (2.5) (Lugt 1996);
- Selbstinduktion und Selbstauslöschung deformierter Wirbelfilamente;
- Transport von Wirbelstärke in spannweitiger Richtung;
- Ausbildung von Lambda- (hairpin vortices) und schließlich Ringwirbeln in der Wandgrenzschicht;
- Bildung von Wirbelbrücken zwischen gegensinning rotierenden Wirbelfilamenten führt zu Auslöschung und zur Bildung von Ringwirbeln;
- Absorption oder Auslöschung von Wirbelstärke in der Wandgrenzschicht.
- Endliche Wirbelfilamente enden an festen Wänden. Dort bewirkt die Wandhaftbedingung eine Verringerung der Konvektionsgeschwindigkeit und eine Sekundärströmung durch eine Störung des Gleichgewichts zwischen Druck- und Fliehkräften (Tornado).

Diese Effekte sind nicht-inhärent in der Potentialtheorie und müssen ausgehend von einer physikalischen Intuition für die untersuchte Strömungskonfiguration modelliert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass die Summe dieser Effekte zu einer Abnahme der Induktionswirkung eines Wirbelfilaments in der zweidimensionalen Schnittebene des Wirbelverfahrens führt. Dies wird durch eine Ausblendung der Zirkulation erzielt. Diese Ausblendung wird entweder durch ein lineares oder ein exponentielles Modell realisiert. Wirbelfilamente, deren Zirkulation vom Betrage her unter einen Schwellwert fallen, werden aus dem Srömungsfeld entfernt und ermöglichen so die Einsparung von Rechenzeit.

Lineares Dissipationsmodell: Ein linearer zeitlicher Zerfall der Zirkulation wird durch die Abnahme der Zirkulation um ein festes Inkrement $\Delta\Gamma_D$ pro Zeitschritt beschrieben:

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Delta\Gamma_D \, . \tag{2.64}$$

Exponentielles Dissipationsmodell: Der zeitliche exponentielle Zerfall der Zirkulation $\Gamma(t) = \Gamma(t_0)\, e^{-(t-t_0)/T_D}$ wird durch eine geometrische Reihe beschrieben:

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1}\, e^{-\Delta t/T_D} \, . \tag{2.65}$$

2.2.5.4 Wirbelverschmelzung

In Scherschichten treten neben der Aufrollung von Scherschichtwirbeln mit einer charakteristischen Frequenz subharmonische Effekte auf, die als Paarung zweier Wirbel aufgefasst werden können. Hierbei nähern sich zwei Wirbel mit gleichsinniger Rotation an und beginnen durch viskose Effekte miteinander zu verschmelzen (z.B. Lo & Ting 1976). Dadurch entsteht ein Wirbel am Ort des gemeinsamen Schwerpunktes mit der Summe der Zirkulation beider Wirbel. Dieser physikalische Effekt ermöglicht eine Reduktion des numerischen Aufwands der Wirbelverfahren, indem Wirbel, die einen bestimmten Abstand zu einander unterschreiten, verschmolzen werden (z.B. Clements 1973). Die genauen Kriterien für die Verschmelzung sind Teil der Modellierung.

2.2.5.5 Wirbelkernwachstum

Im Wirbelmodell nach Oseen wird ein laminarer Diffusionsprozess zugrunde gelegt, der zu einem Wachstum des Kerns gemäß $R_b(t) = 2\sqrt{t/Re}$ führt. Bei hohen Reynolds-Zahlen nimmt dieses Wachstum ab, in realen Strömungen wird Wirbelstärke jedoch zunehmend durch turbulente Diffusion transportiert. Dieser Transportprozess orientiert sich an der lokalen Scherung und führt zur Aufweitung und Deformation des Wirbels. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine niederdimenionale Repräsentation des turbulenten Kernwachstums durch eine isotrope Aufweitung angenähert, d.h. die Kreisgestalt des Wirbelmodells bleibt erhalten. Es werden lineare und exponentielle Kernwachstumsmodelle untersucht.

2.3 Numerische Integrationsverfahren

Die Implementierung der Wirbel- und Analyseverfahren erfordert die numerische Integration der konstituierenden Gleichungen. Die numerische Integration erfolgt über die Approximation des bestimmten Integrals durch die Quadraturformel (Schwarz & Köckler 1986). Die in dieser Arbeit eingesetzten Quadraturmethoden basieren auf der exakten Integration eines interpolierenden Polynoms durch gegebene Stützstellen.

2.3.1 Newton–Cotes-Formeln zur numerischen Integration

Die numerische Integration einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ kann grob mit der Trapezregel und N Zwischenschritten mit der Schrittweite $h = (b - a)/N$ zu

$$F = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{n=1}^{N-1} f(a + n\,h) + f(b)\right) \tag{2.66}$$

angenähert werden. Eine Verringerung des numerischen Fehler erreicht man durch Anwendung der Kepler'schen Fassregel oder Simpson'schen Formel. Hierbei wird bei jedem Zwischenschritt auf der halben Schrittweite eine weitere Auswertung des Integranden vorgenommen und eine Parabel zur Beschreibung des Kurvenzuges angenommen. Diese Parabelstücke können dann

analytisch integriert werden zu

$$F = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{n=1}^{N-1} f(a+n\,h) + 4\sum_{n=1}^{N} f(a+(2n-1)\,h/2) + f(b)\right). \quad (2.67)$$

2.3.2 Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

Die Bewegungsgleichungen der Wirbel und die Modellgleichungen der Zustandsschätzer liegen als nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung vor, also in der allgemeinen Form $\dot{y} = f(x, y)$. Ihre numerische Integration mit der Schrittweite h erfolgt analog zum oben beschriebenen Verfahren. Es gibt Ein- und Mehrschrittverfahren, sowie explizite und implizite Verfahren, die sich hinsichtlich der Konsistenz- und Konvergenzordnung und des Stabilitätsgebietes unterscheiden. Eine Übersicht der verwendeten Methoden ist in Tabelle 2.1 zu finden.

Explizite Verfahren verwenden bei der Berechnung des nächsten Näherungswertes nur Werte, die vor dem zu berechnenden Zeitpunkt liegen. Die Gleichung für den Näherungswert lässt sich also explizit hinschreiben. Bei impliziten Verfahren wird zur Berechnung der zu berechnende Wert selber benötigt. Die Gleichung für den Näherungswert ist daher nur implizit angegeben. Der Näherungswert muss durch Lösung eines Gleichungssystems oder iterativ durch ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren ermittelt werden. Der Vorteil von impliziten gegenüber expliziten Verfahren ist das größere Stabilitätsgebiet. Da dieses jedoch nur bei steifen Differentialgleichungen von Bedeutung ist, können in dieser Arbeit bei hinreichend kleinen Zeitschrittweiten explizite Verfahren eingesetzt werden.

Einschrittverfahren benutzen zu Berechnung der Näherung an die Lösung Werte des aktuellen Zeitpunktes, während bei den Mehrschrittverfahren zuvor berechnete Lösung weiterverwendet werden. Der Vorteil von Einschritt- gegenüber Mehrschrittverfahren ist, dass weniger Funktionsauswertungen für dieselbe Konsistenzordnung erforderlich sind, wenn die Lösungen vorausgegangener Zeitschritte gespeichert werden.

2.4 Schätzverfahren

2.4.1 Erweitertes Kalman-Filter

Das erweiterte Kalman-Filter (EKF) ist eine etablierte und effiziente Methode, um den Zustand und Parameter eines dynamischen Systems aus einer Reihe von unvollständigen oder verrauschten Messungen zu schätzen (Gelb 1986). Es wird dabei angenommen, dass die wahren Zustände durch normalverteilte Störungen vom geschätzten Wert abweichen. Der mittlere quadratische Schätzfehler wird durch das Verfahren minimiert. Bei der Herleitung wird davon ausgegangen, dass sich Mittelwerte und Kovarianzen der Zustandsgrößen durch eine lineare Transformation (Taylor-Näherung 1. Ordnung) auf Mittelwerte und Kovarianzen der Messgrößen bzw. der Zeitableitungen der Zustände abbilden lassen.

explizite Einschrittverfahren		
Euler	$\mathcal{O}(h)$	$\mathrm{f}_1 := \mathrm{f}\big(x_k, y_k\big)$ $x_{k+1} = x_k + h$ $y_{k+1} = y_k + h\,\mathrm{f}_1$
Heun	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathrm{f}_1 := \mathrm{f}\big(x_k, y_k\big)$ $\mathrm{f}_2 := \mathrm{f}\big(x_k + h, y_k + h\,\mathrm{f}_1\big)$ $x_{k+1} = x_k + h$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2\right)$
Runge–Kutta-4	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathrm{f}_1 := \mathrm{f}\big(x_k, y_k\big)$ $\mathrm{f}_2 := \mathrm{f}\big(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\,\mathrm{f}_1\big)$ $\mathrm{f}_3 := \mathrm{f}\big(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\,\mathrm{f}_2\big)$ $\mathrm{f}_4 := \mathrm{f}\big(x_k + h, y_k + h\,f_3\big)$ $x_{k+1} = x_k + h$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(\mathrm{f}_1 + 2\,\mathrm{f}_2 + 2\,\mathrm{f}_3 + \mathrm{f}_4\right)$
explizite Mehrschrittverfahren		
Adams–Bashforth-2	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathrm{f}_{k-1} := \mathrm{f}\big(x_{k-1}, y_{k-1}\big)$ $\mathrm{f}_k := \mathrm{f}\big(x_k, y_k\big)$ $x_{k+1} = x_k + h$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(3\,\mathrm{f}_k - \mathrm{f}_{k-1}\right)$
Adams–Bashforth-3	$\mathcal{O}(h^3)$	$\mathrm{f}_{k-2} := \mathrm{f}\big(x_{k-2}, y_{k-2}\big)$ $\mathrm{f}_{k-1} := \mathrm{f}\big(x_{k-1}, y_{k-1}\big)$ $\mathrm{f}_k := \mathrm{f}\big(x_k, y_k\big)$ $x_{k+1} = x_k + h$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(23\,\mathrm{f}_k - 16\,\mathrm{f}_{k-1} + 5\,\mathrm{f}_{k-2}\right)$

Tabelle 2.1: Übersicht über die verwendeten expliziten Ein- und Mehrschrittverfahren zur numerischen Integration nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Ein kontinuierliches dynamisches System wird durch

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{g}, t) \tag{2.68}$$

beschrieben, wobei $\mathbf{a}$ den tatsächlichen Zustand des Systems und $\mathbf{g}$ die Stellgrößen repräsentieren. Aus einem Wiener-Prozess $\mathbf{w}$ wird das mittelwertfreie, weiße Systemrauschen $\dot{\mathbf{w}}$ mit der Spektraldichtematrix $\mathbf{C}_\mathbf{w}$ abgeleitet. Der tatsächliche Systemzustand zu diskreten Zeitpunkten t_k bildet sich über die Messgleichung

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{h}(\mathbf{a}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{g}_k, t_k) \tag{2.69}$$

auf die Messwerte $\mathbf{s}_k$ ab. Hier stellt $\mathbf{v}_k$ das Messrauschen mit der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{v},k}$ dar.

Der Zustand eines erweiterten Kalman-Filters zu einem Zeitpunkt t_k wird durch zwei Variablen repräsentiert, nämlich den geschätzten Zustandsvektor $\hat{\mathbf{a}}_k$ und die Kovarianzmatrix des

Schätzfehlers $\mathsf{C}_{\mathbf{a},k}$. Letztere ist ein Maß für die Genauigkeit des geschätzten Zustands. Die Zustandsschätzung erfolgt in zwei unterschiedlichen Phasen:

Prädiktionsphase *(time update)*: In dieser Phase stehen keine Messungen zur Verfügung. Vom geschätzten Zustand zum Zeitpunkt t_{k-1} aus wird durch numerische Integration der Systemgleichung (2.68) mit einem geeigneten Integrationsverfahren (siehe z.B. Abschnitt 2.3) der Schätzwert zum Zeitpunkt t_k ermittelt:

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \hat{\mathbf{a}}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{0}, \mathbf{g}, t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{2.70}$$

Die Kovarianz des Schätzfehlers ändert sich entsprechend gemäß

$$\mathsf{C}_{\mathbf{a},k} = \mathsf{C}_{\mathbf{a},k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\mathsf{F}\,\mathsf{C}_{\mathbf{a}} + \mathsf{C}_{\mathbf{a}}\,\mathsf{F}^T + \mathsf{C}_{\mathbf{w}}\right) \mathrm{d}t\,. \tag{2.71}$$

Dabei ist

$$\mathsf{F} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}\right|_{\hat{\mathbf{a}},\mathbf{g}} \tag{2.72}$$

die Jacobimatrix des dynamischen Systems, ausgewertet mit der momentanen Schätzung des Zustandsvektors.

Korrekturphase *(measurement update)*: In dieser Phase wird die aktuelle Messung dazu verwendet, den prädizierten Zustand zu korrigieren. Im Folgenden werden Zustände vor der Korrektur durch ein hochgestelltes $(-)$ und nach der Korrektur durch ein hochgestelltes $(+)$ gekennzeichnet. Die Korrektur des Zustandes erfolgt auf der Basis der Innovation

$$\Delta\hat{\mathbf{s}}_k = \mathbf{s}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{a}}_k^-, \mathbf{0}, \mathbf{g}_k, t_k)\,, \tag{2.73}$$

d.h. der Abweichung zwischen tatsächlicher und geschätzter Messung, und der optimalen Kalman-Matrix

$$\mathsf{K}_k = \mathsf{C}_{\mathbf{a},k}^-\,\mathsf{H}_k^T \left(\mathsf{H}_k\,\mathsf{C}_{\mathbf{a},k}^-\,\mathsf{H}_k^T + \mathsf{C}_{\mathbf{v},k}\right)^{-1}\,, \tag{2.74}$$

wobei

$$\mathsf{H}_k = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{a}}\right|_{\hat{\mathbf{a}}_k^-,\mathbf{g}_k} \tag{2.75}$$

die Jacobimatrix der Messgleichung, ausgewertet mit dem geschätzten Zustand vor der Korrektur, ist. Der korrigierte Zustandsvektor ergibt sich aus

$$\hat{\mathbf{a}}_k^+ = \hat{\mathbf{a}}_k^- + \mathsf{K}_k\,\Delta\hat{\mathbf{s}}_k\,, \tag{2.76}$$

während für die korrigierte Kovarianzmatrix des Schätzfehlers

$$\mathsf{C}_{\mathbf{a},k}^+ = \left(\mathsf{I} - \mathsf{K}_k\,\mathsf{H}_k\right)\,\mathsf{C}_{\mathbf{a},k}^- \tag{2.77}$$

gilt.

Die anschauliche Bedeutung der Spektraldichtematrix bzw. Kovarianz von System- und Messrauschen lässt sich für ein System mit nur einer Zustandsgröße anhand von Extremalbetrachtungen von $\mathbf{C}_{\mathbf{v},k}$ bzw. $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}$ gewinnen: Wenn $\mathbf{C}_{\mathbf{v},k}$ groß ist, bringt das erweitere Kalman-Filter der Messung nur wenig Vertrauen entgegen. Das nach (2.74) berechnete $\mathbf{K}$ ist klein. Daher zieht das Filter den prädizierten Zustand bei der Korrektur (2.76) vor. Bei einem idealen Sensor verschwindet $\mathbf{C}_{\mathbf{v},k}$ und es folgt $\mathbf{K} \to \mathbf{H}_k^{-1}$. Nach der Korrektur gemäß (2.77) ist die Kovarianz des Schätzfehlers daher exakt null. Ist dagegen $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}$ groß, erwartet das Filter ein hohes Maß an Systemrauschen. Die Kovarianz des Schätzfehlers wächst schnell mit jedem Prädiktionsschritt (2.71) an. In der Korrekturphase zieht das Filter daher Messinformationen den geschätzten Zuständen vor.

2.4.2 Sigma-Punkt-Kalman-Filter

Nichtlineare System- und Messgleichungen werden beim erweiterten Kalman-Filter um den geschätzten Zustand durch eine Taylor-Reihe bis zum linearen Glied entwickelt und zur Transformation der Mittelwerte und Kovarianzen verwendet. Wenn diese Berechnung aufgrund der Komplexität der Systemgleichung oder der Dimension des Zustandsraumes unmöglich oder sehr aufwändig ist oder wenn die Linearisierungen aufgrund eines hochgradig nichtlinearen Verhaltens zu extrem großen Fehlern führt, bietet sich das *Sigma-Punkt-Kalman-Filter* (SPKF) als alternatives Verfahren zur Zustandsschätzung an (Julier & Uhlmann 2004). Bei diesem Verfahren erfolgt die Zustandsschätzung aus der zeitlichen Entwicklung von Testpunkten, den sogenannten Sigma-Punkten, die sich aus dem geschätzten Anfangszustand und dem geschätzten Anfangsfehler ergeben. Anhand der Abbildung der Sigma-Punkte durch (2.68) bzw. (2.69) werden Mittelwerte und Kovarianzen von Zustands- und Messgrößen ermittelt. Diese Vorgehensweise basiert auf der *unscented transformation*, bei der die Abbildung der statistischen Momente der Eingangsgrößen auf die Statistik der Ausgangsgrößen durch eine nichtlineare Gleichung anhand der Auswertung und Gewichtung geeigneter Stützstellen geschätzt wird. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom *unscented* Kalman-Filter. Alternativ kann die Transformation über die *Stirling'sche Polynomformel* hergeleitet werden (Heine *et al.* 2006): Eine Transformation quadratischer Ordnung, hier entwickelt für ein eindimensionales System $b = \mathrm{g}(a)$ um den Mittelwert $\overline{a} = \mathrm{E}\{a\}$, ergibt sich mit

$$\mathrm{g}(a) \approx \mathrm{g}(\overline{a}) + \frac{\mathrm{g}(\overline{a}+h) - \mathrm{g}(\overline{a}-h)}{2h}(a-\overline{a}) + \frac{\mathrm{g}(\overline{a}+h) + \mathrm{g}(\overline{a}-h) - 2\,\mathrm{g}(\overline{a})}{2h^2}(a-\overline{a})^2 + \mathcal{O}(h^3)\,,$$

wobei die Ableitungen durch zentrale Differenzenquotienten mit der Schrittweite h ersetzt werden. Dieser mehr ingenieurmäßige Ansatz wird daher auch Zentraler-Differenzen-Kalman-Filter genannt. Mit dieser Formulierung lassen sich nun Transformationsvorschriften angeben, die auf der Auswertung einer begrenzten Anzahl von Funktionsberechnungen basieren. Obige Vorschrift lässt sich auch auf mehrdimensionale Systeme erweitern. Hierfür wird die Eingangsgröße jedoch zunächst statistisch über eine Cholesky-Zerlegung $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{a}} = \mathrm{chol}\,\mathbf{C}_{\mathbf{a}}$ entkoppelt:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{a}}^{-1}\,\mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{a}} = \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{a}}^{T}\,.$$

Die Matrix $\mathbf{C_a}$ ist hier die Kovarianzmatrix des Eingangs. Anstelle der Cholesky-Zerlegung sind auch andere Matrixwurzeln möglich. Möchte man nun den Mittelwert von $\mathbf{b}$ aus dem Mittelwert von $\mathbf{a}$ bestimmen, so folgt mit obiger Entkopplung und anschließender Rücktransformation:

$$\overline{\mathbf{b}} = \mathrm{E}\{\mathbf{g}(\mathbf{a})\} \approx \mathbf{g}(\overline{\mathbf{a}}) + \sum_{i=1}^{L_\mathbf{a}} \frac{\mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} + h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) + \mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} - h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) - 2\,\mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}}\big)}{2\,h_i^2}\,. \tag{2.78}$$

Hierbei sind $L_\mathbf{a}$ die Anzahl der Zustandsgrößen und $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)} := \boldsymbol{\Lambda}_\mathbf{a}\mathbf{e}_i$. Die 1. Ableitung aus der Stirling'schen Formel verschwindet, weil der Erwartungswert $\mathrm{E}\{\mathbf{a} - \overline{\mathbf{a}}\} = \mathbf{0}$ ist. Die Funktionsauswertungen von $\mathbf{g}(.)$ erfolgen für die Sigma-Punkte $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{a}^{(0)} = \overline{\mathbf{a}}$ und $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{a}^{(i)} = \overline{\mathbf{a}} \pm h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}$. Die quadratisch genaue Transformation des Mittelwertes ist also mit $2\,L_\mathbf{a} + 1$ Simulationen des Systems $\mathbf{g}(.)$ durchführbar. Analog lassen sich auch die Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned}
\mathbf{C_b} &= \mathrm{E}\big\{(\mathbf{b} - \overline{\mathbf{b}})(\mathbf{b} - \overline{\mathbf{b}})^T\big\} \\
&\approx \sum_{i=1}^{L_\mathbf{a}} \frac{1}{4\,h_i^2} \Big(\mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} + h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) - \mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} - h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big)\Big) \Big(\mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} + h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) - \mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} - h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big)\Big)^T + \\
&+ \sum_{i=1}^{L_\mathbf{a}} \frac{1}{2\,h_i^4} \Big(\mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} + h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) + \mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} - h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) - 2\,\mathbf{g}\big(\overline{a}\big)\Big) \\
&\qquad \Big(\mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} + h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) + \mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} - h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) - 2\,\mathbf{g}\big(\overline{a}\big)\Big)^T
\end{aligned} \tag{2.79}$$

und die Kreuzkovarianzmatrix

$$\mathbf{C_{a\,b}} = \mathrm{E}\big\{(\mathbf{a} - \overline{\mathbf{a}})(\mathbf{b} - \overline{\mathbf{b}})^T\big\} \approx \sum_{i=1}^{L_\mathbf{a}} \frac{\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}}{2\,h_i} \Big(\mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} + h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big) - \mathbf{g}\big(\overline{\mathbf{a}} - h_i \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}\big)\Big)^T \tag{2.80}$$

unter Vernachlässigung statischer Momente vierter Ordnung transformieren, wenn man berücksichtigt, dass ungerade statistische Momente von Normalverteilungen verschwinden.

Analog zum erweiterten Kalman-Filter werden auch beim Sigma-Punkt-Kalman-Filter zwei Zustände, nämlich der geschätzte Zustandsvektor $\hat{\mathbf{a}}$ und die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers $\mathbf{C_a}$, in den Prädiktionsschritten zeitlich aufintegriert und im Korrekturschritt auf der Basis von Messdaten korrigiert (siehe z.B. van der Merwe 2004).

Prädiktionsphase *(time update)*: Zu Beginn der Prädiktionsphase werden Zustand und Kovarianzmatrix des Schätzfehlers mit dem Erwartungswert und der Kovarianzmatrix des Systemrauschens $\mathbf{C}_{\mathbf{w},k}$ zusammengefasst.

$$\hat{\mathbf{a}}_{k-1}^P = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{k-1}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}^T \tag{2.81}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{a},k-1}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{a},k-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{\mathbf{w},k} \end{bmatrix}. \tag{2.82}$$

Aus der Cholesky-Zerlegung von $\mathbf{C}^P_{\mathbf{a},k-1}$ werden dann die $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{\mathbf{a}}$ ermittelt. Aus dem zusammengesetzten Vektor $\hat{\mathbf{a}}^P_{k-1}$ ergeben sich die $2\,L+1$ Sigma-Punkte:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}_{k-1} = \hat{\mathbf{a}}^P_{k-1} \tag{2.83}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{k-1} = \hat{\mathbf{a}}^P_{k-1} + h_i \boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{\mathbf{a}}, \quad i = 1 \ldots L \tag{2.84}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{k-1} = \hat{\mathbf{a}}^P_{k-1} - h_i \boldsymbol{\lambda}^{(i-L)}_{\mathbf{a}}, \quad i = L+1 \ldots 2\,L \tag{2.85}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{k-1} = \left[(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a},k-1})^T \quad (\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{w},k-1})^T \right]^T . \tag{2.86}$$

Die Länge des zusammengesetzten Vektors ergibt sich aus $L = L_{\mathbf{a}} + L_{\mathbf{w}}$, also der Länge von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{w}$. Für die Schrittweite wird üblicherweise $h_i = \sqrt{3}$ angenommen. Die Schätzung der zeitlichen Entwicklung von $\hat{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{a}}$ folgt nun indirekt über die Integration der Sigma-Punkte mit der Systemgleichung (2.68):

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a},k} = \boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a},k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}\big(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{w}}, \mathbf{g}, t\big)\, \mathrm{d}t\,, \quad i = 0 \ldots 2\,L\,. \tag{2.87}$$

Für die Integration empfehlen sich höherwertige Einschrittverfahren, wie etwa das Runge–Kutta-Verfahren 4. Ordnung. Aus den gewichteten Sigma-Punkten werden die prädizierten neuen Zustände und Kovarianzen

$$\hat{\mathbf{a}}^-_k = \boldsymbol{\sigma}^{(0)}_{\mathbf{a},k} + \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{2\,h_i^2} \left(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a},k} + \boldsymbol{\sigma}^{(i+L)}_{\mathbf{a},k} - 2\,\boldsymbol{\sigma}^{(0)}_{\mathbf{a},k} \right) \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^-_{\mathbf{a},k} &= \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{4\,h_i^2} \big(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a},k} - \boldsymbol{\sigma}^{(i+L)}_{\mathbf{a},k}\big)\big(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a},k} - \boldsymbol{\sigma}^{(i+L)}_{\mathbf{a},k}\big)^T + \\ &+ \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{2\,h_i^4} \big(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a},k} + \boldsymbol{\sigma}^{(i+L)}_{\mathbf{a},k} - 2\,\boldsymbol{\sigma}^{(0)}_{\mathbf{a},k}\big)\big(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathbf{a},k} + \boldsymbol{\sigma}^{(i+L)}_{\mathbf{a},k} - 2\,\boldsymbol{\sigma}^{(0)}_{\mathbf{a},k}\big)^T \end{aligned} \tag{2.89}$$

gemäß (2.78) bzw. (2.79) am Ende der Prädiktonsphase berechnet. Die Arbeitsweise des SPKF während der Prädiktionsphase wird in Abbildung 2.10 (a) für das Zustandsraummodell eines Wirbels in der Nähe eines Zylinders (siehe Kapitel 6) illustriert.

Korrekturphase *(measurement update)*: Analog zur Prädiktionsphase werden Zustand und Kovarianzmatrix des Schätzfehlers nun mit dem Erwartungswert und der Kovarianz des Messrauschens zusammengefasst:

$$\hat{\mathbf{a}}^K_k = \left[(\hat{\mathbf{a}}^-_k)^T \quad \mathbf{0}^T \right]^T \tag{2.90}$$

$$\mathbf{C}^K_{\mathbf{a},k} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^-_{\mathbf{a},k} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{\mathbf{v},k} \end{bmatrix} . \tag{2.91}$$

Die Länge $L = L_{\mathbf{a}} + L_{\mathbf{v}}$ richtet sich nun nach der Zahl der Zustände von $\mathbf{a}$ und der Länge von $\mathbf{v}$. Wie zuvor wird ein Satz von $2\,L+1$ Sigma-Punkten aus der Cholesky-Zerlegung von $\mathbf{C}^K_{\mathbf{a},k}$

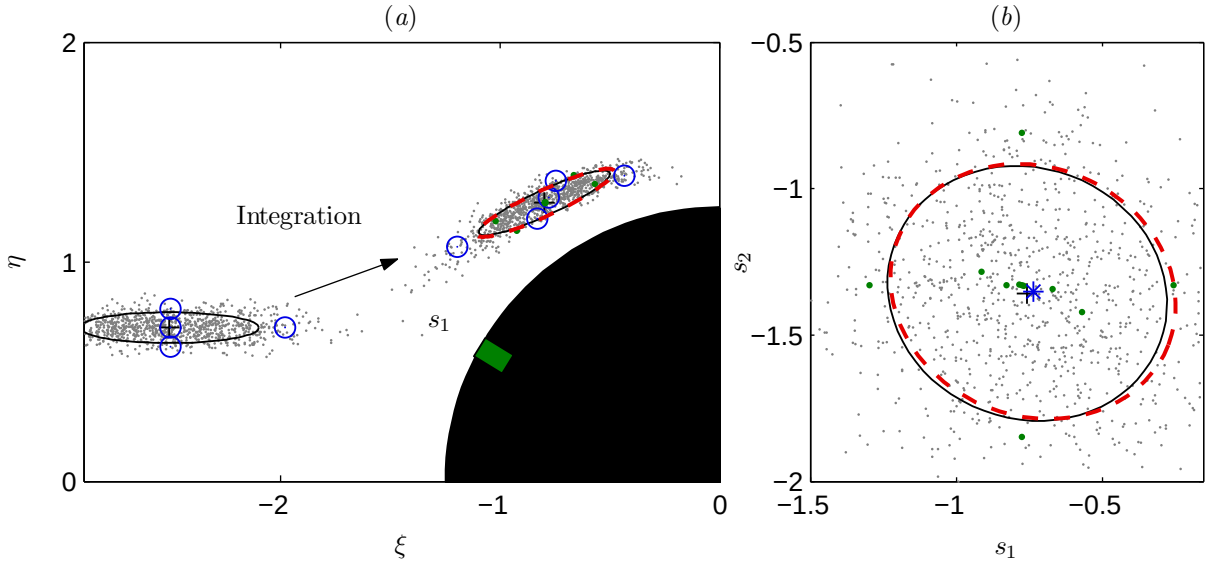


Abbildung 2.10: Vergleich der geschätzten Statistik des SPKF mit einer Monte-Carlo-Simulation. In (a), wird die Position eines Wirbels bei $\hat{\zeta}_0 = -2.5 + 0.7\mathrm{i}$ $(+)$ in der Nähe eines Zylinders (siehe hierzu Kapitel 6) angenommen. Die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers $\mathbf{C_a}$ für die beiden Zustände ξ und η wird auf $C_{\xi\xi} = 9 \times 10^{-2}$, $C_{\eta\eta} = 3 \times 10^{-3}$ und $C_{\xi\eta} = C_{\eta\xi} = 0$ geschätzt (schwarze Ellipse). Für die Monte-Carlo-Simulation werden 2 000 Testpunkte (feine graue Punkte) unter Berücksichtigung der Kovarianzen $C_{\xi\xi}$ und $C_{\eta\eta}$ um die Position ζ_0 normalverteilt. Jeder Testpunkt wird nun durch Integration der Modellgleichung (6.9) separat entwickelt. Die neue mittlere Position ist $\hat{\zeta}_1 = -0.8 + 1.3\mathrm{i}$, mit den Kovarianzen $C_{\xi\xi} = 5 \times 10^{-2}$, $C_{\eta\eta} = 1.2 \times 10^{-2}$ und $C_{\xi\eta} = C_{\eta\xi} = 2.3 \times 10^{-2}$. Das SPKF reproduziert diese statistischen Größen durch Entwicklung von lediglich fünf Sigma-Punkten $(\circ)$ mit (6.13) und Auswertung von (2.88) und (2.89) (rote, gestrichelte Ellipse). Das grüne Rechteck markiert den Sensor #1. Ein zweiter Sensor befindet sich gespiegelt an der Abszisse. In (b) wird für die Testpunkte (6.10) (feine graue Punkte) und für sieben Sigma-Punkte (grüne Punkte) die Messgleichung (6.14) nach der Integration ausgewertet. Die Schätzung der Kovarianzmatrix der Messung $\mathbf{C_s}$ (rote, gestrichelte Ellipse) stimmt sehr gut mit der Berechnung durch die Monte-Carlo-Simulation (schwarze Ellipse) überein.

und $\hat{\mathbf{a}}_k^K$ bestimmt

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{a}}_k^K \tag{2.92}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{a}}_k^K + h_i \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}}^{(i)}, \quad i = 1 \ldots L \tag{2.93}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{a}}_k^K - h_i \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}}^{(i)}, \quad i = L+1 \ldots 2L \tag{2.94}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)} = \left[(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a},k}^{(i)})^T \quad (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v},k}^{(i)})^T \right]^T . \tag{2.95}$$

und diese mit der Messgleichung (2.69) abgebildet auf

$$\boldsymbol{\nu}_k^{(i)} = \mathbf{h}\big(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a},k}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v},k}^{(i)}, \mathbf{g}_k, t_k\big), \quad i = 0 \ldots 2L . \tag{2.96}$$

Durch Auswertung von

$$\hat{\mathbf{s}}_k^- = \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a},k}^{(0)} + \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{2\,h_i^2} \left(\boldsymbol{\nu}_k^{(i)} + \boldsymbol{\nu}_k^{(i+L)} - 2\,\boldsymbol{\nu}_k^{(0)} \right) \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{s},k}^- &= \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{4\,h_i^2} \big(\boldsymbol{\nu}_k^{(i)} - \boldsymbol{\nu}_k^{(i+L)}\big)\big(\boldsymbol{\nu}_k^{(i)} - \boldsymbol{\nu}_k^{(i+L)}\big)^T + \\ &+ \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{2\,h_i^4} \big(\boldsymbol{\nu}_k^{(i)} + \boldsymbol{\nu}_k^{(i+L)} - 2\,\boldsymbol{\nu}_k^{(0)}\big)\big(\boldsymbol{\nu}_k^{(i)} + \boldsymbol{\nu}_k^{(i+L)} - 2\,\boldsymbol{\nu}_k^{(0)}\big)^T \end{aligned} \tag{2.98}$$

gemäß (2.78) bzw. (2.79) ergeben sich die geschätzte Messung und die geschätzte Kovarianz der Messung. Die Berechnung von $\mathbf{C}_{\mathbf{s},k}$ wird in Abbildung 2.10 (b) an einem Beispiel illustriert. Die Kreuzkovarianz zwischen Zustands- und Messgrößen wird nach (2.80) mit

$$\mathbf{C}_{\mathbf{a}\,\mathbf{s},k} = \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{2\,h_i} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}}^{(i)} \left(\boldsymbol{\nu}_k^{(i)} - \boldsymbol{\nu}_k^{(i+L)}\right)^T \tag{2.99}$$

abgeschätzt und zur Berechnung der Kalman-Matrix verwendet:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{C}_{\mathbf{a}\,\mathbf{s},k}\,\mathbf{C}_{\mathbf{s},k}^{-1}\,. \tag{2.100}$$

Die Korrektur des Zustandsvektors und der Kovarianzmatrix des Schätzfehler erfolgt dann durch

$$\hat{\mathbf{a}}_k^+ = \hat{\mathbf{a}}_k^- + \mathbf{K}_k\,(\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_k) \tag{2.101}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{a},k}^+ = \mathbf{C}_{\mathbf{a},k}^- - \mathbf{K}_k\,\mathbf{C}_{\mathbf{s},k}\,\mathbf{K}_k^T\,. \tag{2.102}$$

Wie beim erweiterten Kalman-Filter lässt sich eine anschauliche Deutung der Korrekturmaßnahme für ein System mit einem Zustand und einer Messgröße finden. Die Kreuzkovarianz $\mathbf{C}_{\mathbf{a}\,\mathbf{s}}$ beschreibt in diesem Fall die Korrelation zwischen Zustand und Messwert. Ein vom Betrage hoher Wert bedeutet, dass der Messwert im hohen Maße vom Zustand abhängt. Das Vorzeichen besagt, ob der Zusammenhang positiv oder negativ proportional ist. Die Kovarianz $\mathbf{C}_{\mathbf{s}}$ gibt an, wie stark die Messgröße verrauscht ist. Ist das Messrauschen klein und die Korrelation hoch, wird nach (2.100) ein hoher Korrekturfaktor $\mathbf{K}$ berechnet. Dieser bewirkt wegen (2.101) eine starke Korrektur des geschätzten Zustandes. Entsprechend ist der Korrektureingriff klein, wenn die Korrelation gering oder das Messrauschen hoch ist.

Kapitel 3

Dynamischer Beobachter und Zustandsregler für den Eckenwirbel

Bevor in Kapitel 4 und Kapitel 5 Wirbelverfahren für komplexe, ablösende Scherschichten entwickelt und für die Reglersynthese analysiert werden, soll zunächst anhand eines einfachen Strömungsfalles untersucht werden, ob sich Wirbelverfahren generell als Modell für die Zustandsregelung und Zustandsschätzung eignen. Die Eckenströmung ist aufgrund der einfachen potentialtheoretischen Beschreibung eine beliebte Konfiguration, um numerische Untersuchungen von Rezirkulationsgebieten durchzuführen (vgl. Suh 1993; Tadmor & Banaszuk 2002; Noack *et al.* 2004*a*). Eine physikalische Bedeutung hat diese Konfiguration als vereinfachtes Modell für Mischungsvorgänge, etwa bei einem Flammhalter in einem Triebwerk. In diesem Abschnitt wird ein 1-Wirbelverfahren zur Approximation der Eckenströmung entwickelt. Ausgehend von diesem Modell können ein dynamischer Beobachter auf der Basis des erweiterten Kalman-Filters zur Zustandsrekonstruktion und ein Zustandsregler zur Stabilisierung des Eckenwirbels synthetisiert werden[1].

3.1 Modellierung des Prozesses

Für die Eckenströmung im I. Quadranten lassen sich die reibungsfreien Randbedingungen wie in Abschnitt 2.2.1.2 beschrieben erfüllen. Die dort vorgestellten Gleichungen können mit $\zeta = z$ verwendet werden. Die Eckenströmung setzt sich aus einer stationären Grundströmung und der instationären Aktuator- und Wirbelströmung zusammen (Abbildung 3.1 *a*–*d*). Die Grundströmung wird durch das komplexe Potential $W = \frac{1}{2}\, z^2$ beschrieben. Die Ableitung ergibt die komplexe Geschwindigkeit

$$w_b^z = z\,. \tag{3.1}$$

[1] siehe auch: Schieske, D. 2007 *Zustandsregelung und Zustandsrekonstruktion eines Eckenwirbels.* Studienarbeit, Fakultät III, Technische Universität Berlin

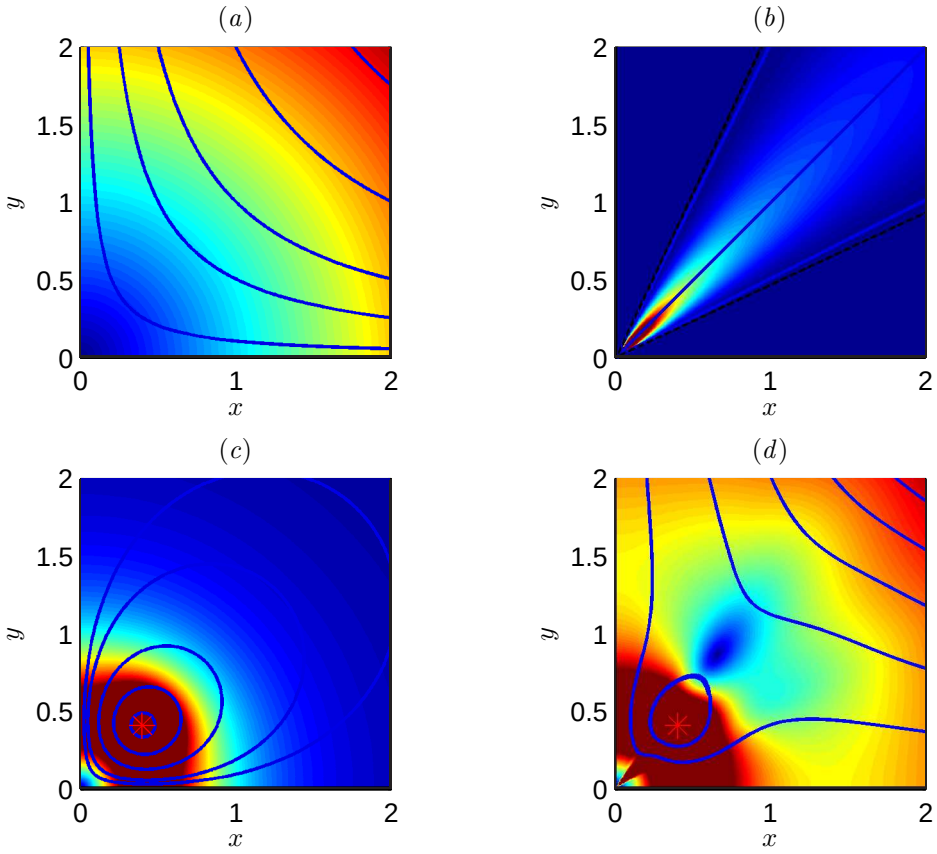


Abbildung 3.1: Geschwindigkeitsbetrag (Farbskala wie in Abbildung 2.7) und Stromlinien (blau) für die stationäre Eckenströmung (a), den einblasenden Aktuator (b), einen Eckenwirbel (c) und die Überlagerung aller drei Strömungen (d). Der Öffnungswinkel δ_+ beim Einblasen ist in (b) durch die schwarzgestrichelte Linie dargestellt. Die aktuelle Wirbelposition ist in (c–d) jeweils durch einen roten Stern markiert.

Als Aktuator wird eine gerichtete Quelle im Ursprung angenommen, die mit einem Öffnungswinkel von $\delta_+ = 40°$ unter $\alpha_a = 45°$ einbläst und mit einem Öffnungswinkel von $\delta_- = 90°$ einsaugt. Die induzierte Geschwindigkeit ergibt sich nach (2.55) zu

$$w_a^z = g\,\frac{Q(g, Q_a, \delta_+, \delta_-)}{2\pi}\,\frac{D(z, g, \alpha_a, \delta_+, \delta_-)}{z}\,. \tag{3.2}$$

Für jeden reellen Wirbel im I. Quadranten und die zugehörigen virtuellen Wirbel in den anderen drei Quadranten folgt

$$w_{v,n}^z = -\mathrm{i}\,\frac{\Gamma_n}{2\pi}\,\frac{1}{z - z_n} \tag{3.3}$$

$$\text{und}\quad \hat{w}_{v,n}^z = \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_n}{2\pi}\left(\frac{1}{z + \overline{z_n}} - \frac{1}{z + z_n} + \frac{1}{z - \overline{z_n}}\right) \tag{3.4}$$

als Beitrag des n-ten Wirbels zur induzierten Geschwindigkeit. Damit folgt zunächst allgemein für das komplexe Geschwindigkeitsfeld mit N Wirbeln:

$$w^z(z) = w_b^z(z) + w_a^z(z) + \sum_{n=1}^{N}\left(w_{v,n}^z(z) + \hat{w}_{v,n}^z(z)\right). \tag{3.5}$$

In Abbildung 3.1 (a–d) sind die Grundströmung, die Aktuation und die Wirbelströmung mit $N = 1$ einzeln und als Überlagerung dargestellt. Für den n-ten Wirbel erhält man aus (3.5) die komplexe Geschwindigkeit

$$w_n^z = w_b^z(z_n) + w_a^z(z_n) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{N} w_{v,j}^z(z_n) + \sum_{j=1}^{N} \hat{w}_{v,j}^z(z_n)\,. \tag{3.6}$$

Da keine konforme Abbildung verwendet wird, ist eine Routh-Korrektur nicht erforderlich. Der Fixpunkt z_f eines 1-Wirbel-Systems ($N = 1$) lässt sich mit $x_f = y_f = \sqrt{|\Gamma_1|/8\pi}$ bestimmen. Die induzierten Geschwindigkeiten werden durch das Wirbelmodell von Oseen mit einem Kernradius von $R_b = 0.15$ regularisiert.

Eine Gleichung für das Druckfeld erhält man mit $\zeta = z$ sowie $\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = u_n$ und $\frac{\partial \eta_n}{\partial t} = v_n$ aus (2.36) bis (2.42). Die instationäre Bernoulli-Gleichung für die Eckenströmung lautet, wenn die Konstante zu Null angenommen wird

$$\begin{aligned} p(z) + \frac{1}{2}\left|w^z(z)\right|^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\Gamma_n}{2\pi} \Bigg(& \frac{u_n\Delta y_n - v_n\Delta x_n}{\Delta x_n^2 + \Delta y_n^2} \quad + \\ + \frac{u_n\Delta y_n + v_n\Delta \hat{x}_n}{\Delta \hat{x}_n^2 + \Delta y_n^2} - \frac{u_n\Delta \hat{y}_n - v_n\Delta \hat{x}_n}{\Delta \hat{x}_n^2 + \Delta \hat{y}_n^2} - & \frac{u_n\Delta \hat{y}_n + v_n\Delta x_n}{\Delta x_n^2 + \Delta \hat{y}_n^2} \Bigg) \quad = \quad 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2 Zustandsschätzung mit dem erweiterten Kalman-Filter

Die Eckenströmung mit N Wirbeln wird nun explizit durch einen einzigen Wirbel ($N = 1$) approximiert. Die Position und Zirkulation des dominanten Wirbels im oben beschriebenen Prozess soll durch ein erweitertes Kalman-Filter (siehe Abschnitt 2.4.1) anhand von Druckmessungen an einer einzelnen Wandposition $z_s = x_s$ (untere Wand) geschätzt werden. Für das Kalman-Filter werden daher die Zustandgröße

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

und die Kovarianzmatrix $\mathbf{C_a}$, mit

$$\mathbf{C}_{\mathbf{a},0} = \begin{pmatrix} 0.1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4^2 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

eingeführt. Für die Systemgleichung erhält man

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, g, t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

und mit (3.6) folgt für $N = 1$:

$$\dot{a}_1 = a_1 + g\,\frac{Q(\ldots)}{2\pi}\,\frac{a_1\,D(\ldots)}{a_1^2+a_2^2} - \frac{a_3}{4\pi}\,\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2} + \frac{a_3}{4\pi\,a_2} \tag{3.11}$$

$$\dot{a}_2 = -a_2 + g\,\frac{Q(\ldots)}{2\pi}\,\frac{a_2\,D(\ldots)}{a_1^2+a_2^2} + \frac{a_3}{4\pi}\,\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2} - \frac{a_3}{4\pi\,a_1} \tag{3.12}$$

$$\dot{a}_3 = 0\,. \tag{3.13}$$

Die Messgleichung wird aus (3.7) abgeleitet. Daraus folgt

$$\mathrm{h}(\mathbf{a}, g, t) = p(z_s) = -\frac{1}{2}\,|w^z(z_s)|^2 - \frac{\partial\Phi(z_s)}{\partial t}\,. \tag{3.14}$$

Das Quadrat des Geschwindigkeitsbetrages ergibt sich durch Auswertung von (3.1) bis (3.4) zu

$$|w^z(z_s)|^2 = \left(x_s + \frac{a_3\,a_2}{\pi}\left(\frac{1}{(x_s-a_1)^2+a_2^2} - \frac{1}{(x_s+a_1)^2+a_2^2}\right)\right)^2, \tag{3.15}$$

wobei ausgenutzt wird, dass der Aktuator an der Messposition keinen Beitrag leisten kann. Aufgrund der Randbedingungen verschwindet außerdem die v-Komponente der Geschwindigkeit. Die Zeitableitung des Potentials ergibt sich gemäß (3.7) zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(z_s)}{\partial t} = &-\frac{a_3}{2\pi}\left(\frac{\dot{a}_1\,a_2 + \dot{a}_2\,(x_s-a_1)}{(x_s-a_1)^2+a_2^2} + \frac{\dot{a}_1\,a_2 - \dot{a}_2\,(x_s+a_1)}{(x_s+a_1)^2+a_2^2} + \right.\\ &+ \left.\frac{\dot{a}_1\,a_2 - \dot{a}_2\,(x_s+a_1)}{(x_s+a_1)^2+a_2^2} + \frac{\dot{a}_1\,a_2 + \dot{a}_2\,(x_s-a_1)}{(x_s-a_1)^2+a_2^2}\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Das erweiterte Kalman-Filter benötigt die Jacobi-Matrizen der System- und Messgleichungen. Die hierfür erforderlichen Ableitungen $\mathbf{F} = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{a}$ und $\mathbf{H} = \partial\mathbf{h}/\partial\mathbf{a}$ werden mit der symbolverarbeitenden Toolbox von MATLAB$^{\mathrm{TM}}$ berechnet. Auf eine Darstellung wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Für die Jacobi-Matrix der Systemgleichung $\mathbf{F}$ werden drei Varianten vorab berechnet, nämlich für Aufpunkte außerhalb (1) bzw. innerhalb des Wirkbereichs der Aktuation beim Ausblasen (2) und Einsaugen (3). Die in (3.16) auftretenden Wirbelgeschwindigkeiten $\dot{a}_1$ und $\dot{a}_2$ werden bei der Berechnung von $\mathbf{H}$ durch die Systemgleichung ersetzt. Die Integration der Systemgleichung und der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers erfolgt in den Prädiktionsschritten mit dem Heun-Verfahren (2. Ordnung, explizit) mit einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.01$.

Die Arbeitsweise des EKF bei der Korrektur falscher Anfangsbedingungen wird in Abbildung 3.2 deutlich. Die tatsächlichen Anfangsbedingungen lauten $\mathbf{a}_0 = [0.6 \quad 0.6 \quad -4]^T$, das EKF startet mit den geschätzten Anfangsbedingungen in (3.8). Auf der Basis der Druckdaten (Abbildung 3.2 *b*), die von einem Sensor bei $x_s = 0.3$ erfasst werden, wird der Schätzfehler über ca. 2–3 Perioden abgebaut. Bei den gewählten Parametern beträgt die Periodenlänge $T \approx 3.6$. Die Korrekturschritte erfolgen alle fünf Zeitschritte. Der anfänglich wirre Verlauf der geschätzten Wirbeltrajektorie schwingt sich auf den tatächlichen Verlauf ein (Abbildung 3.2 *a*).

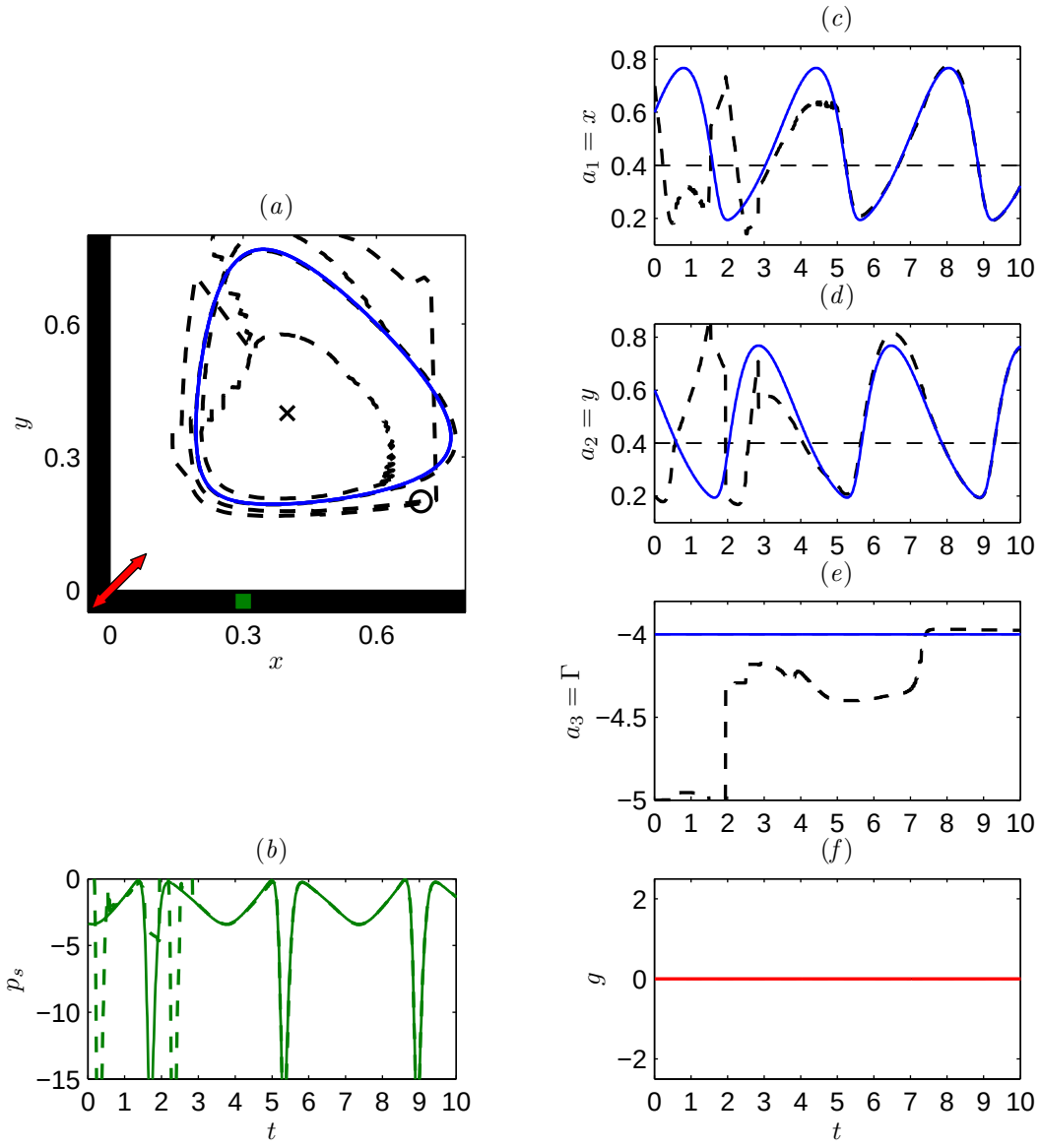


Abbildung 3.2: Zustandsschätzung der ungestörten Eckenströmung. In (a) sind tatsächliche (blau, durchgezogen) und geschätzte (schwarz, gestrichelt) Wirbeltrajektorien, sowie die Anfangsbedingungen ($\circ$) und der Fixpunkt ($\times$) gezeigt. Die Aktuation ist durch einen Doppelpfeil im Ursprung, der Sensor durch ein Rechteck bei $x_s = 0.3$ symbolisiert. In (b–f) wird der zeitliche Verlauf der Mess-, Zustands- und Stellgrößen widergegeben (wahrer Wert: durchgezogen, geschätzter Wert: gestrichelt). Man erkennt, dass die fehlerhafte Schätzung der Anfangsbedingungen nach ca. 2–3 Perioden abgebaut ist.

In einem weiteren Testfall wird die Fähigkeit des EKF demonstriert, nicht-modellierte Störungen im realen System bei der Schätzung zu kompensieren. Hierzu werden in das Strömungsfeld Störwirbel eingespeist. Diese Störwirbel haben eine zufällige Position im Bereich $x, y \in [0.01, 0.7]$ und eine zufällige Zirkulation, die zwischen $0.05\,\Gamma_1$ und $0.5\,\Gamma_1$ liegt. Die Einspeisung erfolgt mit einer Frequenz von $f_n \approx 5.5$, d.h. etwa 20 Störwirbel pro Periode. In Abbildung 3.3 wird ersichtlich, dass das EKF nun ständig eine Korrektur durchführen muss, um die Fehler, die durch die nicht im Modell berücksichtige Dynamik der Störwirbel entstehen, zu kompensieren. Es fällt auf, dass die Störwirbel kaum einen Einfluss auf die Druckmessungen haben und das 1-Wirbelsystem etwas in Richtung des Fixpunktes bewegen. Hierdurch nimmt die Periodenlänge T ab.

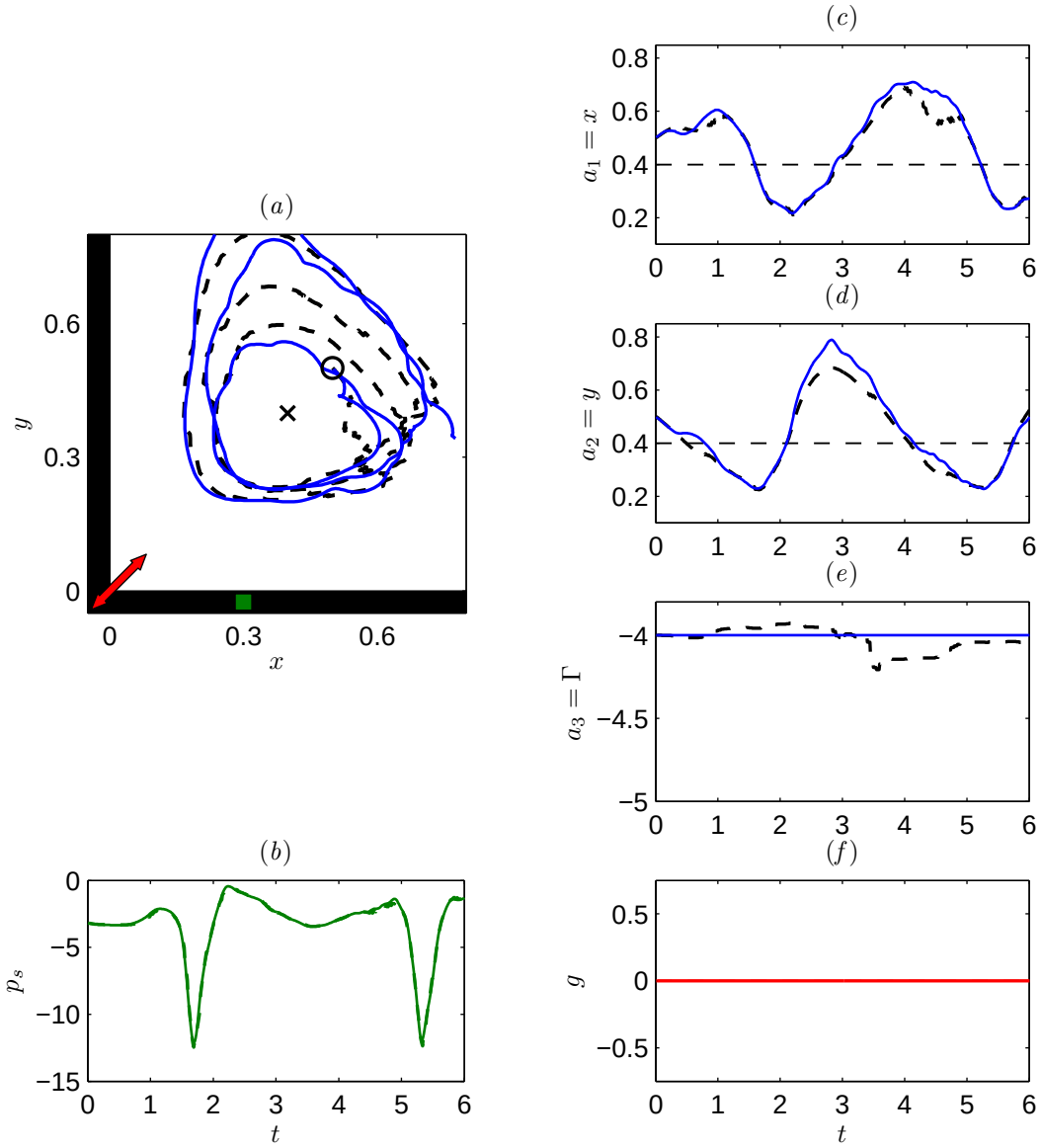


Abbildung 3.3: Zustandsschätzung der gestörten Eckenströmung. Wie in Abbildung 3.2, doch nun werden Störwirbel mit einer Frequenz von $f_n \approx 5.5$ in das Strömungsfeld eingetragen. Das Kalman-Filter muss ständig eine Zustandskorrektur durchführen.

3.3 Zustandsregelung zur Stabilisierung des Fixpunktes

Für den Eckenwirbel wird nun eine Regelung vorgeschlagen, die den Wirbel auf den geschätzten Fixpunkt $\hat{z}_f = \hat{x}_f + \mathrm{i}\,\hat{y}_f$ führt. Hierzu wird zunächst ein Stellgesetz aus physikalischen Überlegungen abgeleitet.

- Der Wirbel gelangt in Richtung des Fixpunktes, wenn der Aktuator für $a_1 < \hat{x}_f$ und $a_2 < \hat{y}_f$ ausbläst ($g > 0$) und für $a_1 > \hat{x}_f$ und $a_2 > \hat{y}_f$ einsaugt ($g < 0$). Ansonsten ist die Stellgröße $g = 0$.
- Die Stellgröße g sollte mit dem Abstand $r = \sqrt{(\hat{x}_f - a_1)^2 + (\hat{y}_f - a_2)^2}$ zwischen Fixpunkt und Wirbel skalieren, d.h. bei großen Abständen arbeitet der Aktuator mehr als bei kleinen.
- Die Stellgröße g soll proportional zum Winkel γ bezüglich der Strahlachse, analog zum Dämpfungsmaß D des Aktuators, abnehmen. Damit wird verhindert, dass eine ineffiziente Aktuation durch Ausblasen erfolgt, wenn der Wirbel sich gar nicht im Wirkbereich des Aktuators befindet.

Mit diesen Annahmen wird ein Zustandsregler $g = \pm K_P\, r\, D$ mit Verstärkungsfaktor $K_P = 10$ für das ungestörte System aufgebaut. Die Zustände werden dabei mit dem EKF geschätzt. In Abbildung 3.4 erkennt man, dass der Wirbel in den Fixpunkt geführt wird. Die natürliche Dynamik der Wirbelbewegung bleibt weitestgehend erhalten, wie man durch Vergleich der Zeitreihen von a_1 in Abbildung 3.4 (c) und Abbildung 3.2 (c) bzw. von a_2 in Abbildung 3.4 (d) und Abbildung 3.2 (d) feststellen kann. Im Stellgrößenverlauf $g(t)$ sind die Phasen ohne Aktuation und die Abnahme der Aktuationsamplitude mit dem Regelfehler über der Zeit deutlich erkennbar.

Als Vergleich zu dem physikalisch motivierten Regler wird nun ein Ljapunov-Regler entworfen. Hierzu ist eine Koordinatentransformation der Modellgleichung in den (geschätzten) Fixpunkt erforderlich:

$$a_1 = \tilde{a}_1 + \hat{a}_{f,1} \quad \text{bzw.} \quad a_2 = \tilde{a}_2 + \hat{a}_{f,2}\,. \tag{3.17}$$

Nun wird eine Ljapunov-Funktion V gesucht, die sich aus den Zustandsgrößen des Systems zusammensetzt und die positiv definit ist. Nach Ljapunov ist ein System dann asymptotisch stabil, wenn die zeitliche Ableitung $\dot{V}$ negativ definit ist.

Als Ljapunov-Kandidat wird

$$V = \tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2 =: \tilde{r}^2 \tag{3.18}$$

gewählt, was physikalisch dem quadratischen Abstand zum Fixpunkt entspricht. Für die Ableitung folgt durch Einsetzen der transformierten Modellgleichung

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\,\tilde{a}_1\,\dot{\tilde{a}}_1 + 2\,\tilde{a}_2\,\dot{\tilde{a}}_2 \\ &= 2\tilde{a}_1\,a_1 - 2\tilde{a}_2\,a_2 + \frac{a_3}{2\pi}\,\frac{\tilde{a}_1\,a_1^3 - \tilde{a}_2\,a_2^3}{a_1\,a_2\,r^2} + \\ &+ g\frac{Q\,D}{\pi}\,\frac{\tilde{a}_1\,a_1 + \tilde{a}_2\,a_2}{r^2}\,, \quad \text{mit} \quad r^2 = a_1^2 + a_2^2\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Wird dabei z.B. $\dot{V} = -K_P\,V$ mit $K_P > 0$ gefordert, lässt sich eine Gleichung für die Stellgröße g ableiten, die ein exponentielles Abklingen von V, und damit dem quadratischen Abstand zum

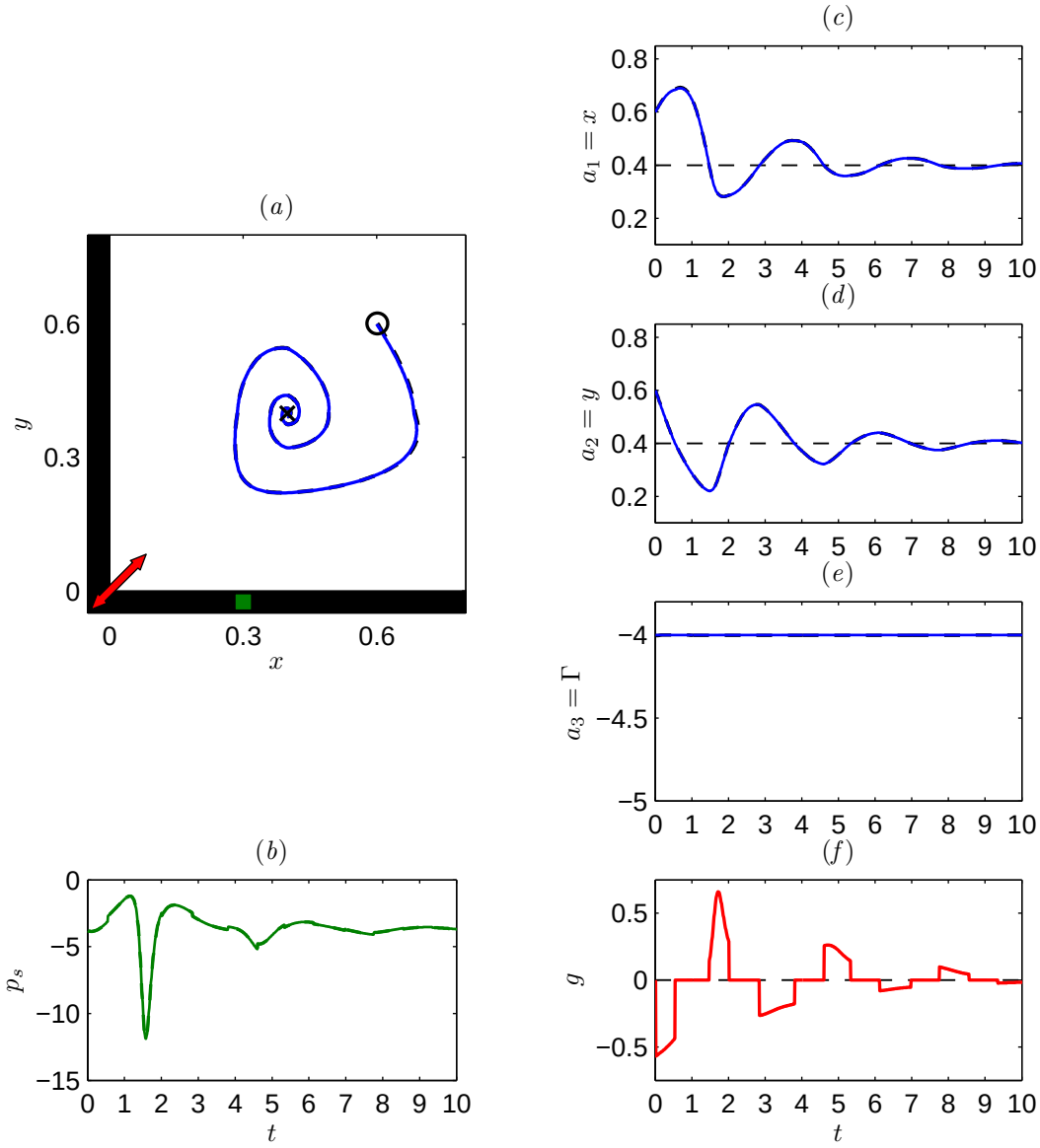


Abbildung 3.4: Regelung der ungestörten Eckenströmung mit rekonstruierten Zuständen. Wie in Abbildung 3.2 (*a*–*d*), jedoch wird in (*f*) jetzt zusätzlich ein von null verschiedener Stellgrößenverlauf angezeigt. Der Regler führt den Wirbel in den Fixpunkt.

Fixpunkt, erzwingt. Dazu wird g so gewählt, dass die ersten drei Terme von (3.19) exakt kompensiert werden und als Restglied gerade $-K_P\,\tilde{r}^2$ verbleibt. In Abbildung 3.5 sind Wirbeltrajektorien und Zustandsgrößen der gestörten Strömung (Störungsparameter wie in Abschnitt 3.2) für den Ljapunov-Regler mit $K_P = 1.5$ dargestellt. Man erkennt, dass die natürliche Wirbeldynamik komplett unterbunden wird. Stattdessen läuft der Wirbel direkt, d.h. aperiodisch in den Fixpunkt. Im Vergleich zum physikalisch motivierten Regler muss hierfür wesentlich mehr Stellenergie aufgewendet werden.

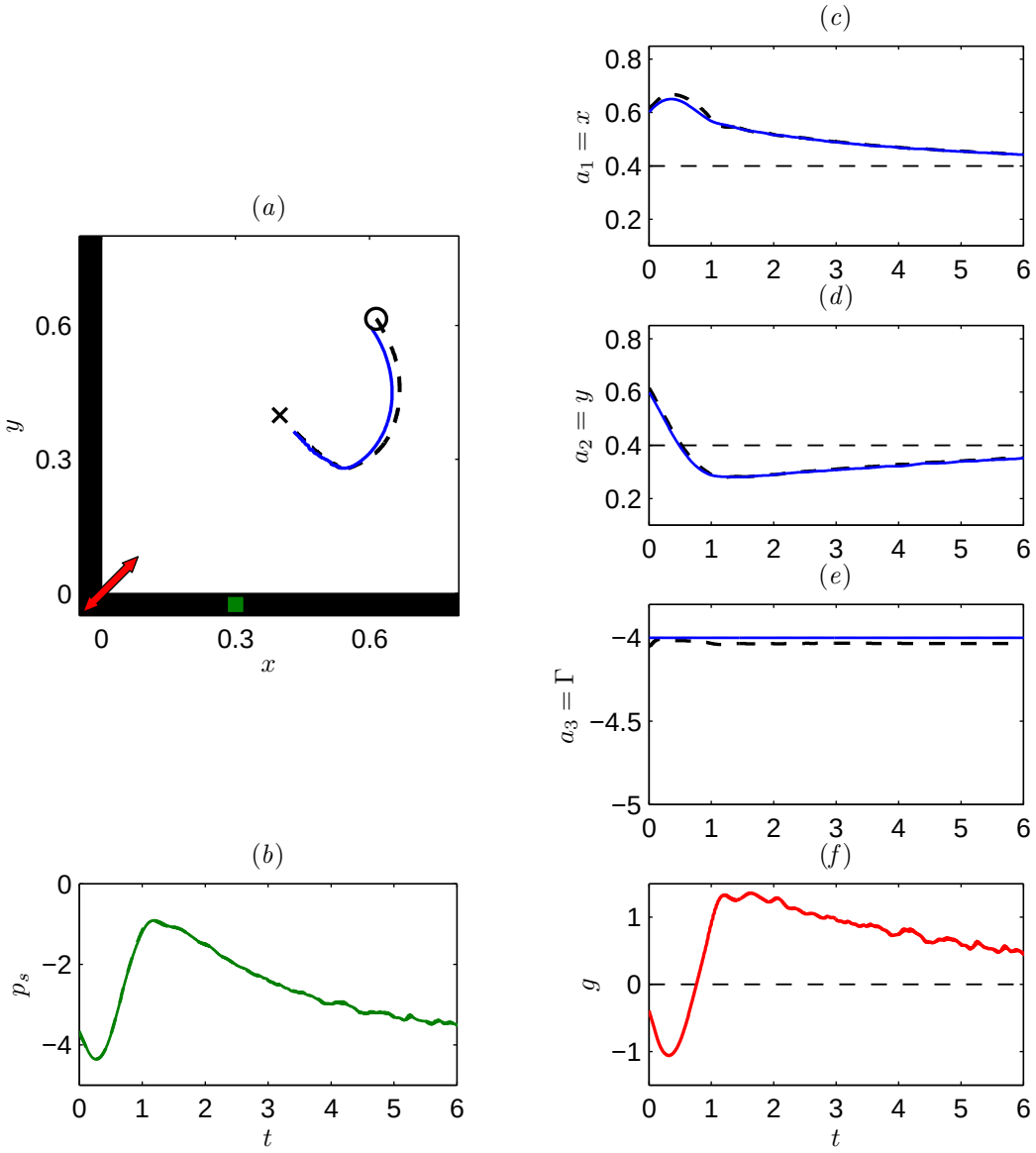


Abbildung 3.5: Ljapunov-Regelung der gestörten Eckenströmung mit rekonstruierten Zuständen.

3.4 Beurteilung der Ergebnisse

An einem 1-Wirbel-System wird gezeigt, dass sich eine Zustandsrekonstruktion und -regelung auf der Basis eines Wirbelverfahrens prinzipiell betreiben lässt. Der dynamische Beobachter kann die Position und die Zirkulation des dominanten Wirbels aus Druckmessungen an einem Sensor ermitteln. Mit zwei oder mehr Sensoren lässt sich Schätzung sogar noch verbessern[2]. Die Bestimmung der Jacobi-Matrizen für den EKF ist jedoch schon bei einem einfachen System so komplex, dass die Berechnung mit MATLAB™ durchgeführt und auf eine Dokumentation der Gleichungen verzichtet wird.

[2]siehe Studienarbeit von Schieske (2007)

3.5 Folgerungen für die weitere Arbeit

Zur Modellierung der Grobstrukturdynamik sind in den im Folgenden untersuchten Konfigurationen viele hundert Wirbel erforderlich. Für solche Mehrwirbelsysteme ist eine direkte Schätzung der Wirbelpositionen und der Zirkulation durch einen dynamischen Beobachter viel zu aufwändig. Der Aufbau einer Zustandsregelung für ein System mit so vielen Freiheitsgraden ist nur mühsam, wenn überhaupt möglich. Die hohe Zahl der Wirbel ist jedoch im Wesentlichen der Auflösung der Scherschichtphysik und insbesondere der Repräsentation der Aktuationseffekte geschuldet, nicht jedoch der Darstellung bereits aufgerollter Scherschicht- und Nachlaufwirbel. Letztere lassen sich zu einzelnen Wirbeln zusammenfassen (Modellreduktion, vgl. Clements 1973; Coller & Gururaja 2004), wodurch die Anzahl der Freiheitsgrade erheblich abnimmt. Solche „niedrigstdimensionale“ Wirbelverfahren werden jeweils am Ende von Kapitel 4 und Kapitel 5 für die Stufe und den stumpfen Körper vorgeschlagen und als Modelle für dynamische Beobachter auf der Basis numerischer bzw. experimenteller Daten eingesetzt. Aus der Analyse dieser Modelle wird dann eine physikalisch motivierte Regelung abgeleitet. Bei der Untersuchung der Tandem-Konfiguration in Kapitel 6 wird ein „niedrigstdimensionales“ Wirbelverfahren zu einem Modell für einen dynamischen Beobachter auf der Basis des Sigma-Punkt-Kalman-Filters entwickelt.

Kapitel 4

Untersuchung der Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe

Die durch aktive Methoden beeinflusste Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe im Bereich laminarer und transitioneller Reynolds-Zahlen ist ein häufig gewählter Testfall für experimentelle (z.B. Huppertz 2001) und numerische (z.B. Bärwolff & Jeggle 1997; Kaltenbach & Janke 2000; Wengle *et al.* 2001) Untersuchungen. Durch Ablösung an der Hinterkante und Wiederanlegen bildet sich hinter der Stufe eine Ablöseblase aus. Damit stellt die Stufenkonfiguration eine einfache Näherung zur Untersuchung von Strömungen etwa in einer Brennkammer mit Flammhalter dar. Das zeitliche Verhalten dieser Ablöseblase und die Verweilzeit von z.B. Brennstoffpartikeln in der Blase ist kritisch für eine effiziente Verbrennung. Durch geschickte Beeinflussung der Strömung kann die Verweilzeit manipuliert und so die Verbrennung verbessert werden. Verschiedene Methoden zur Regelung der Größe der Ablöseblase auf der Basis von Black-Box-Modellen finden sich z.B. bei Becker (2005), Garwon (2006) oder Henning (2008). In dieser Untersuchung wird ein wirbelbasiertes Grobstrukturmodell zur Ergänzung der bestehenden Regelungsansätze beschrieben.

Die bei der Stufenströmung auftretenden transitionellen Strömungprozesse bei Reynolds-Zahlen $Re_H > 3\,000$ werden anhand von Abbildung 4.1 umrissen. Die charakteristischen Größen zur Entdimensionalisierung der konstituierenden Gleichungen sind die Anströmgeschwindigkeit U^*_∞ und die Stufenhöhe H^*, sowie ggf. die Dichte ρ^* von Luft. Die Strömung wird in einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung an der Oberkante der Stufe beschrieben.

Die von links eintretende Strömung mit einem laminaren Grenzschichtprofil kann der plötzlichen Querschnittserweiterung nicht folgen und löst an der Stufenkante ab. Die abgelöste Scherschicht ist durch eine Kelvin–Helmholtz-Instabilität konvektiv instabil. D.h. kleine Störungen werden bei der Bewegung stromab angefacht und führen schließlich bei ca. drei Stufenhöhen zur Aufrollung von Scherschicht- oder Querwirbeln. Diese Querwirbel konvektieren etwa mit der halben Anströmgeschwindigkeit stromab. Nach einer Lauflänge von ca. sechs bis sieben Stufenhöhen legt sich die Scherschicht wieder an die Wand an und bildet eine turbulente Wandgrenzschicht

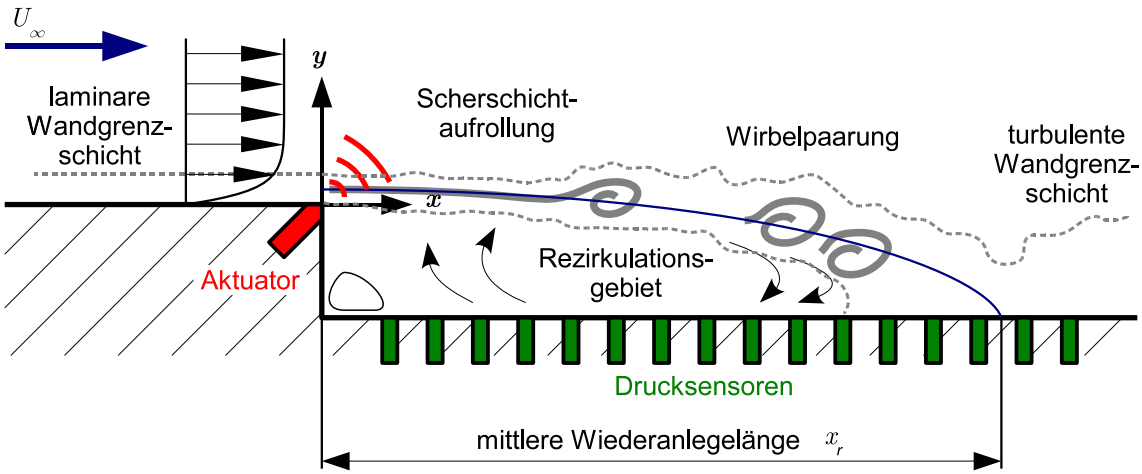


Abbildung 4.1: Prinzipskizze der Strömung über die rückwärts gewandete Stufe.

aus. Die zum Teil durch Wirbelpaarung verschmolzenen Scherschichtwirbel zerfallen durch Interaktion mit der Wand in kleinskaligere Strukturen und werden von der Wandgrenzschicht absorbiert. Zusätzlich ist die Entwicklung der Scherschicht durch spannweitige, dreidimensionale Effekte überlagert. Diese sind jedoch im Vergleich zu den dominanten zweidimensionalen Strukturen klein (Abbildung 4.2). Scherschichten sind besonders sensitiv bezüglich Störungen mit einer Frequenz f^* in der Nähe von

$$f_{\delta_2} = \frac{\delta_2^* f^*}{\overline{u}^*_{\max}} \approx 0.014\,. \tag{4.1}$$

Dabei ist δ_2^* die Impulsverlustdicke der Scherschicht und $\overline{u}^*_{\max}$ die maximale Geschwindigkeit bei $x = 3.0$ (Huppertz 2001).

Wände und Scherschicht begrenzen die Ablöseblase. Ihre Größe wird durch die mittlere Wiederanlegelänge x_r charakterisiert. Diese Länge markiert den Punkt, an welchem die entdimensionalisierte Wandschubspannunge

$$c_f = \frac{\tau^*_W}{1/2\rho^* U^*_\infty} = \frac{\eta^*\, \partial u^*/\partial y^*|_W}{1/2\rho^* U^*_\infty} \tag{4.2}$$

im zeitlichen Mittel verschwindet, d.h. $\overline{c}_f = 0$. Die tatsächliche Größe der Ablöseblase stellt sich im zeitlichen Mittel als Gleichgewicht von Mitnahme und Inkorporation von impulsarmen Fluid *(entrainment)* und druckgetriebener Rückströmung ein. In der Ablöseblase bildet sich ein rechtsdrehendes Rezirkulationsgebiet und ein kleiner, linksdrehender Eckenwirbel aus.

Zur Manipulaton der Scherschicht und Ablöseblase befindet sich an der Stufenkante ein Aktuator. Mit der Stellgröße

$$g = g_{\max}\, \sin(2\pi\, f_a\, t) \tag{4.3}$$

lässt sich periodisches Einblasen und Absaugen realisieren. Damit kann die ablösende Scherschicht durch eine volumenstrom-neutrale Anregung beeinflusst werden. Ein Regelungsziel ist

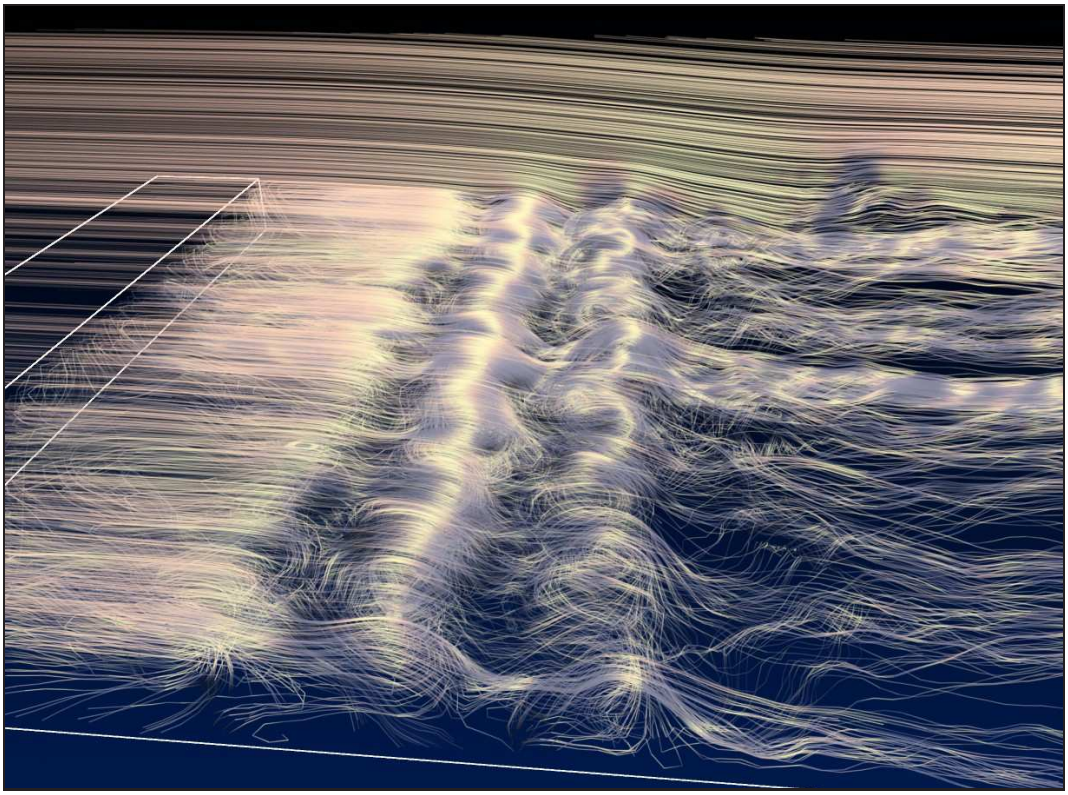


Abbildung 4.2: Illuminierte Stromlinien der Strömung über eine rückwärts gewandte Stufe bei $Re_H = 3\,000$ (Weinkauf *et al.* 2003). Der zweidimensionale Charakter der Strömung wird an der Aufrollung zweier Querwirbel und einer nur geringen Ausprägung spannweitiger Störungen deutlich.

z.B. die Mischungsverbesserung. Diese kann über eine Verstärkung des Entrainments erreicht werden. Hierzu ist die Anregung so zu wählen, dass die natürlichen Instabilitätsmechanismen angefacht werden. Die größeren Wirbelstrukturen verstärken den Queraustausch von Impuls und führen so zu einer schnelleren Vergleichmäßigung des Geschwindigkeitsfeldes. Hierdurch kommt es zu einer Verkürzung der Ablöseblase. Als geeignete Anregung wird eine harmonische Aktuation mit Frequenzen um $f_{\delta_2} \approx 0.01$ (Huppertz 2001) vorgeschlagen. Damit kann die Ablöseblase um bis zu 45% verkürzt werden. Der Strömungszustand wird über ein Feld von Drucksensoren in Strömungsrichtung überwacht. Das Maximum des Varianz der Wanddruckschwankungen liegt nach empirischen Untersuchungen von Mabey (1972) bei ca. 90% der Wiederanlegelänge. Die Berechnung der Varianz benötigt ein Zeitfenster von bis zu 100 Wirbelablösungen. Das von Becker (2005) vorgestellte modellgestützte Messverfahren auf der Basis des anfänglich exponentiellen Wachstums der in den aufgerollten Wirbeln konzentrierten Wirbelstärke erlaubt eine zeitlich hochauflösendere Approximation der Wiederanlegelänge aus den Wanddruckdaten.

4.1 Experimenteller Aufbau und numerische Vergleichssimulation

Die zum Vergleich mit dem Wirbelverfahren betrachteten numerischen und experimentellen Untersuchungen werden bei einer Reynolds-Zahl von $Re_H = 4\,000$ durchgeführt.

4.1.1 Windkanal

Die Experimente werden an einem Windkanal im Institut für Luft- und Raumfahrt durchgeführt. Dabei handelt sich um einen offenen Windkanal mit Axialverdichter, Diffusor, Beruhigungskammer und Düse mit anschließender Messstrecke und Ausströmdiffusor. Die Messbox hat eine Höhe von 300 mm und eine Breite von 400 mm (Abbildung 4.3 *a*).

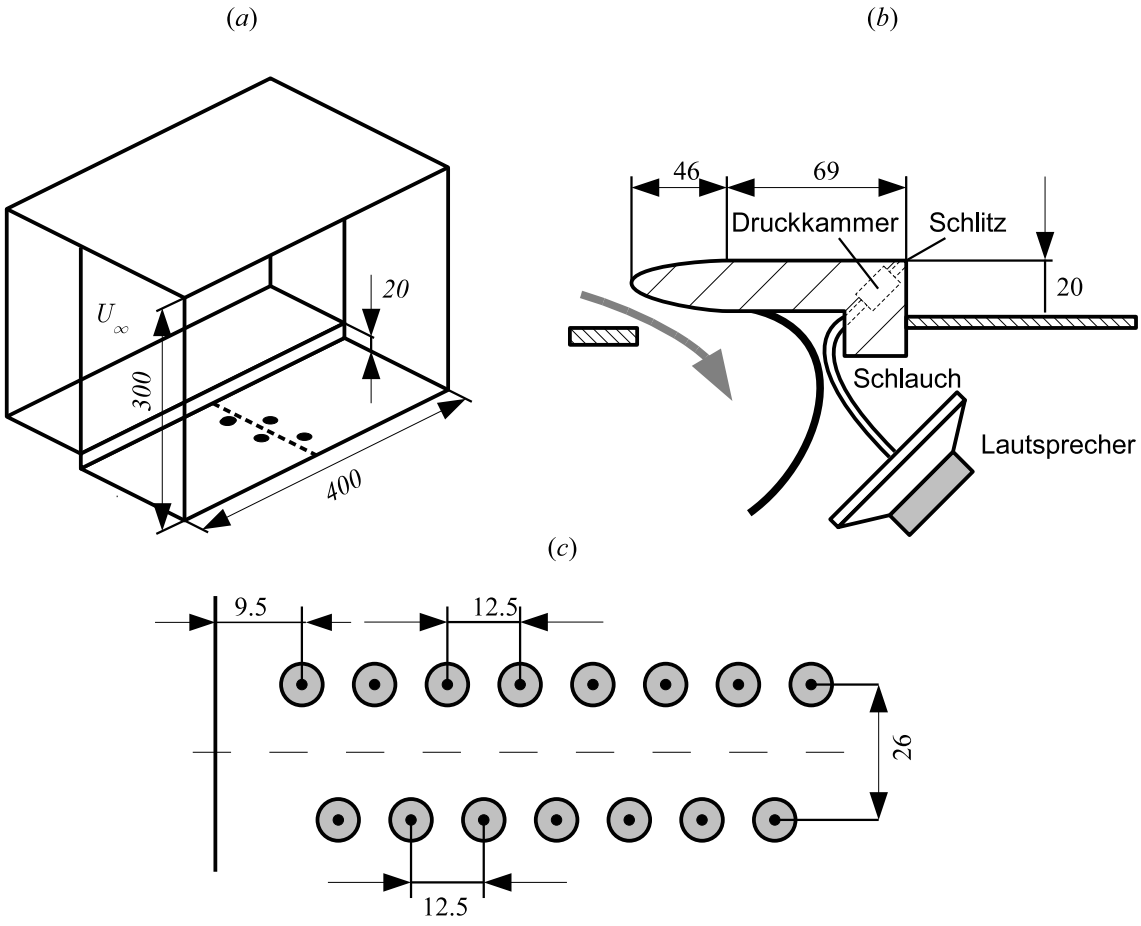


Abbildung 4.3: Schematische Skizze des experimentellen Aufbaus mit den Abmessungen der Messstrecke (*a*), einer Detailskizze der Stufe, mit Hancock-Nase und Aktuator (*b*) und den 15 Sensorpositionen im Nachlauf der Stufe (*c*). Alle Abmessungen in mm.

Die Stufe mit einer Höhe von 20 mm ist vertikal an der Rückseite der Messbox angeordnet. Damit ergibt sich ein Erweiterungsverhältnis von $(h - H)/h = 14/15$. Die sich in der Düse

ausbildende Grenzschicht wird am Anfang der Messstrecke an einer Hancock-Nase abgeschält und durch eine Öffnung ins Freie geführt (Abbildung 4.3 *b*). Im Anschluss bildet sich eine neue Grenzschicht aus. Die Anregung der Strömung wird durch vier Lautsprecher realisiert. Diese sind durch Plastikschläuche mit einer geschlitzten Druckkammer an der Stufenkante verbunden. Der Schlitz erstreckt sich über die gesamte Kanalbreite, seine Weite beträgt 2 mm. Fünfzehn wandbündige Drucksensoren sind beginnend bei 9.5 mm stromab der Stufe, mit einem Abstand von 6.25 mm in Strömungsrichtung zueinander, linker und rechter Hand der Kanalmitte montiert (Abbildung 4.3 *c*). Zur Messung der Geschwindigkeitsfluktuationen und Spektren in der Scherschicht wird die Hitzdrahtanemometrie eingesetzt. Mit ihr wird auch eine Aktuatorkennlinie zur Kompensation des Frequenzgangs der Lautsprecher erstellt. Der verwendte Hitzdraht hat einen Durchmesser von 5 μm. Die Messwerterfassung und die Steuerung des Aktuators erfolgt über einen digitalen Signalprozessor (DSP) des Typs DS 1103 PPC der Firma dSPACE$^{\text{TM}}$. Eine detailiertere Beschreibung der Messtechnik findet sich in der Dissertation von Henning (2008).

Bei $Re_H = 4\,000$ beträgt der Turbulenzgrad weniger als 0.5%. Die Impulsverlustdicke der Scherschicht bei $x = 3$ ist in der Größenordnung von $\delta_2 = 0.02$. Nach Huppertz (2001) liegt daher die Frequenz der Scherschichtinstabilität bei $f_{\text{inst}} \approx 0.7$, die optimale Aktuationsfrequenz bei $f_a \approx 0.49$.

Im Zuge einer Parameterstudie werden die Anregefrequenz und die Anregeamplitude variiert und der Einfluss auf die Wiederanlegelänge untersucht (Abbildung 4.4). Hierbei fällt für kleine Aktuationsamplituden ($g_{\max} \leq 0.05$) auf, dass ein sehr weiter Frequenzbereich um $f \approx 0.4$ herum existiert, indem sich die Wiederanlegelänge effizient verkürzen lässt. Bei großen Aktuationsamplituden ($g_{\max} \geq 0.2$) hingegen findet sich ein subharmonischer Frequenzbereich

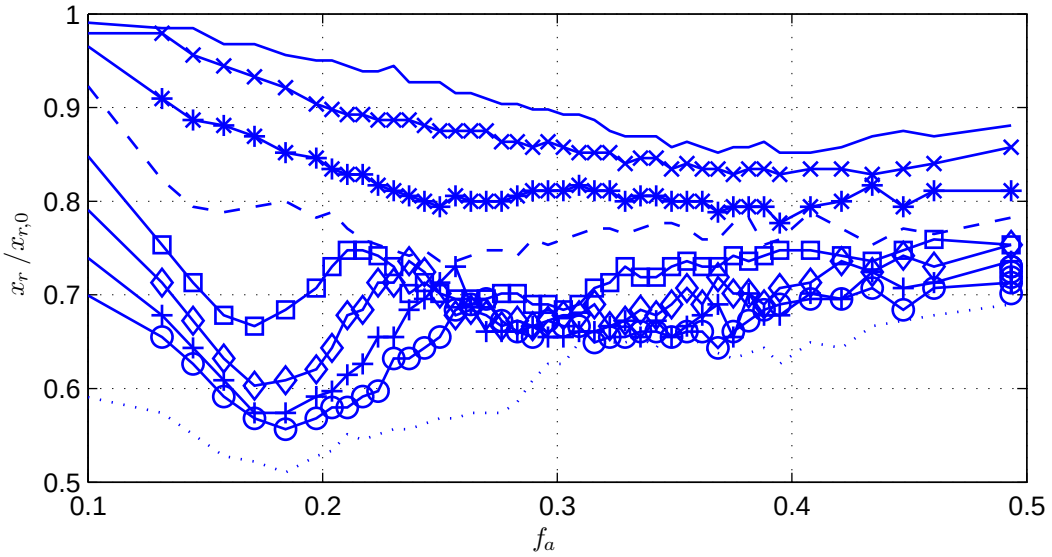


Abbildung 4.4: Zusammenhang zwischen Aktuationsparametern und der mittleren Wiederanlegelänge. Dargestellt ist die mit $x_{r,0}$ normierte Wiederanlegelänge als Funktion der Aktuationsfrequenz für verschiedene Aktuationsamplituden: $g_{\max} = \{$ 0.01 (durchgezogen), 0.02 ($\times$), 0.05 ($*$), 0.1 (gestrichelt), 0.2 ($\square$), 0.3 ($\diamond$), 0.4 ($+$), 0.5 ($\circ$), 1.0 (gepunktet) $\}$. Für kleine Amplituden erhält man die maximale Verkürzung bei $f_a \approx 0.4$, bei hohen Amplituden in der Nähe von $f_a \approx 0.18$.

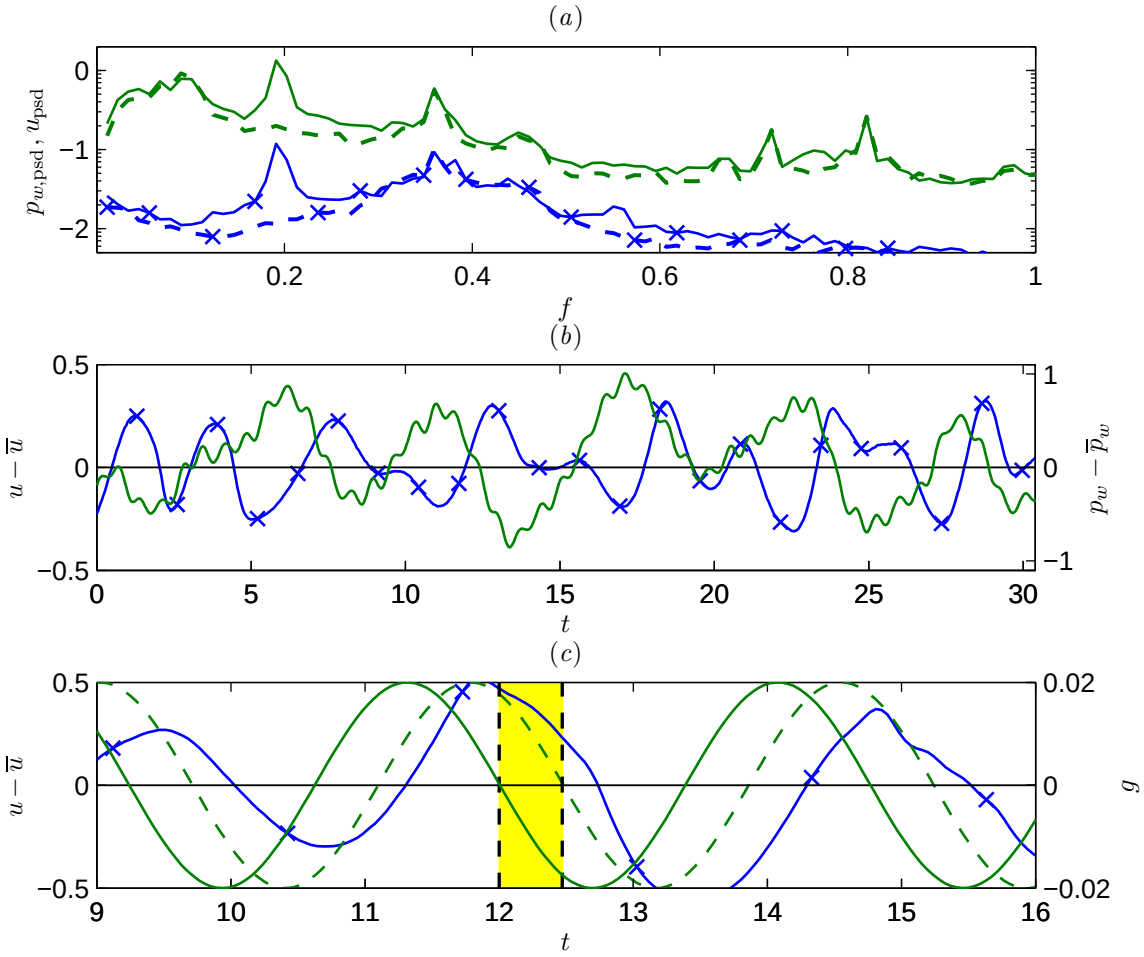


Abbildung 4.5: Spektren (a) und Phasenlage (b) von Hitzdrahtmessungen (blau, $\times$) $u-\overline{u}$ bei $x=3$ und $y=0.1$ und dem Wanddruck (grün, ohne Symbol) $p-\overline{p}$ bei $x=2.9$. In (a) findet sich für die natürliche Strömung (gestrichelt) ein Maximum bei $f\approx 0.38$, deutlicher in den Hitzdrahtmessungen als in den Wanddrucksignalen. Bei Aktuation (durchgezogen) mit $f_a=0.2$ und einer Amplitude von $g_{\max}=0.2$ tritt die Aktuationsfrequenz in beiden Spektren hervor. Die Phasendifferenz (b) zwischen Hitzdraht- und Wanddrucksignal ist bei diesem Aktuationsfall konstant bei ca. 180°. In (c) ist die Phasenlage von Hitzdrahtsignal (blau, $\times$) und Aktuationssignal (grün, gestrichelt) für $f_a=0.38$ erkennbar. Zusätzlich ist ein um $\Delta\phi\approx+0.34\pi$ (getönter Bereich) verschobenes Aktuationssignal (grün, durchgezogen) dargestellt (siehe Text).

($f\approx 0.2$), in dem die Wiederanlegelänge noch stärker verkürzt wird. Huppertz (2001) führt die hohe Effizienz der subharmonischen Aktuation auf eine Forcierung von Wirbelpaarungen zurück. Hierdurch entstehen regelmäßig große Wirbelstrukturen in der Scherschicht, die durch eine Mischungsverbesserung zur Verkürzung der Ablöseblase beitragen. Offenkundig sind recht hohe Aktuationsamplituden erforderlich, um diesen Vorgang zu initiieren.

Betrachtet man das Spektrum von Hitzdrahtmessungen oberhalb der Scherschicht bei $x=3$ und $y=0.1$ (Abbildung 4.5 a), so erkennt man eine maximale Fluktuationsintensität im Bereich $0.3<f<0.5$ mit einem Maximum bei $f\approx 0.38$. Dies liegt deutlich tiefer als der Literaturwert und erklärt die Abweichungen bei der optimalen Aktuationsfrequenz zu der Empfehlung von Huppertz (2001).

Bei Aktuation mit $f_a = 0.2$ und $g_{\max} = 0.2$ tritt die Aktuationsfrequenz deutlich im Spektrum hervor, während die Intensitäten im Bereich der natürlichen Instabilitätsfrequenzen nahezu unverändert bleiben. In den Wanddruckdaten der natürlichen und aktuierten Strömung, gemessen bei $x = 2.9$, erkennt man ein ähnliches Frequenzverhalten wie in den Hitzdrahtmessungen. Auffällige Unterschiede sind im Wanddruck zum einen ein tieffrequenter Anteil, der mit $f \approx 0.1$ grob bei etwa einem Viertel der natürlichen Instabilitätsfrequenz liegt. Dieser Anteil ist auf die Oszillation der Ablöseblase zurückzuführen, die sich auch im Zeitverhalten der Wiederanlegelänge wiederspiegelt (siehe hierzu Abschnitt 4.3.1). Der andere Unterschied tritt im Bereich $f > 0.7$ und insbesondere bei $f \approx 0.8$ auf. Hier bilden sich akustische Störungen mit der Blattfolgefrequenz des Axialverdichters im Wanddruck ab. Aufgrund der akustischen Impedanz lassen sich diese Druckschwankungen jedoch im Geschwindigkeitsfeld kaum erkennen.

Im zeitlichen Verlauf von Geschwindigkeit und Wanddruck im aktuierten Fall (Abbildung 4.5 *b*) erkennt man einen nahezu konstanten Phasenversatz von etwa 180°. Der Hitzdraht detektiert ein Maximum der Geschwindigkeit, wenn gerade ein Wirbel unter dem Sensor vorbeischwimmt. Zu diesem Zeitpunkt hinterlässt der Wirbel an seinem Fußpunkt gerade ein Druckminimum. Im Hitzdrahtsignal fällt die Überlagerung der natürlichen Instabilitätsfrequenz stärker ins Auge als im Drucksignal. Die Aktuation unterbindet demnach nicht die Aufrollung von Wirbeln mit der natürlichen Frequenz, sondern verstärkt lediglich jeden zweiten Wirbel.

Für $f_a = 0.38$ ist in Abbildung 4.5 (*c*) der Zeitverlauf des Aktuations- und des Hitzdrahtsignals dargestellt. Rechnet man von der Position des Hitzdrahtes mit einer geschätzten Konvektionsgeschwindigkeit von $U_c = 1/2$ auf die Stufenkante zurück, so ergibt sich ein Zeitverzug von $\Delta\tau \approx 6$ bzw. ein Phasenversatz von $\Delta\phi \approx 0.34\pi$. Korrigiert man das Aktuationssignal um diesen Versatz, so erkennt man am Maximum des Hitzdrahtsignals, dass der virtuelle Geburtszeitpunkt eines Wirbels gerade beim Umschalten von Ausblasen zu Einsaugen liegt (hier $t = 12$).

4.1.2 Large-eddy simulation

Für die numerische Simulation[1] wird der Strömungslöser MGLET verwendet (Manhart 1996). MGLET basiert auf einem Finite-Volumen-Verfahren zur räumlichen Diskretisierung der Navier–Stokes'schen Gleichungen. Mit diesem Verfahren kann eine Grobstruktur- oder *large-eddy*-Simulaton (LES) von turbulenten Strömungen vorgenommen werden. Im Gegensatz zu einer direkten numerischen Simulation wird bei der LES der Rechenaufwand durch ein dynamisches *subgrid-scale*-Modell (Germano *et al.* 1991) reduziert. Dieses Zusatzmodell erlaubt die Verwendung eines vergleichsweise groben Gitters, da der Einfluss der vom Gitter nicht aufgelösten Strukturen durch das Modell berücksichtigt wird. MGLET wurde von Bärwolff & Jeggle (1997) anhand von Simulationsstudien auf einem sehr feinen Gitter (direkte numerische Simulation) und experimentellen Daten (Wengle *et al.* 2001) validiert. Die Daten stimmen qualitativ mit einer ähnlichen Simulation (Kaltenbach & Janke 2000) überein.

[1] Die Rechnungen wurden freundlicherweise von Maiko Garwon durchgeführt. Eine detaillierte Beschreibung von MGLET findet sich in dessen Dissertation (Garwon 2006).

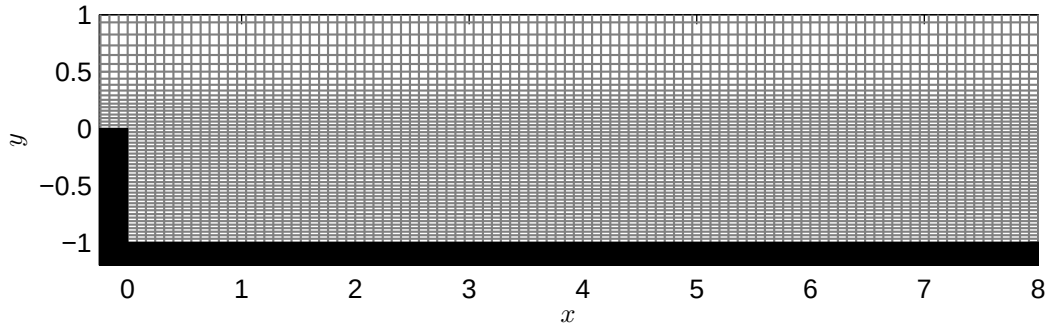


Abbildung 4.6: Ausschnitt aus dem Rechengitter der numerischen Simulation (LES) in der x, y-Schnittebene. Der Wandbereich und das Gebiet der Ablöseblase wird feiner aufgelöst, als der restliche Strömungsbereich.

Das Rechengebiet ist $23 \times 12 \times 6$ Stufenhöhen in Strömungs-, wandnormaler und spannweitiger Richtung groß und wird in $256 \times 80 \times 64$ Volumenelemente eingeteilt. Das Erweiterungsverhältniss berägt $(h - H)/h = 11/12$, dabei ist h die Höhe des Windkanals stromab der Stufe. In spannweitiger Richtung ist das gewählte Gitter äquidistant. Zur Verbesserung der Diskretisierung feinskaliger Strukturen sind die Wand- und Scherbereiche der Strömung mit einer feineren Gitterweite aufgelöst, als das übrige Gebiet (Abbildung 4.6). Für die unteren Begrenzungen werden reibungsbehaftete, für die oberen Ränder reibungsfreie Randbedingungen angenommen. In spannweitiger Richtung wird das Rechengebiet periodisch fortgesetzt. Als Einströmbedingung bei $x = -5$ wird ein kastenförmiges Geschwindigkeitsprofil vorgegeben, aus dem sich anschließend eine laminare Grenzschicht entwickelt. Die Anregung durch periodisches Ein- und Ausblasen wird durch eine Manipulation der Randbedingungen in der Nähe der Stufenkante erzeugt. In dieser Arbeit werden numerische Daten der natürlichen Strömung, sowie eines schwach und eines stark aktuierten Falles mit $f_a = 0.4$ und $g_{\max} = 0.0003$ bzw. $g_{\max} = 0.02$ untersucht.

In Abbildung 4.7 (a) ist die momentane Wirbelstärkeverteilung eines Schnappschusses der schwach aktuierten Strömung dargestellt. Die Aufrollung zweier Scherschichtwirbel und der Wirbelzerfall beim Wiederanlegen sind klar zu erkennen. Unterhalb des Wirbels bei $x = 4.5$ ist im Wanddruck (Abbildung 4.7 b) ein Minimum zu erkennen. Das Fluktuationsmaximum des Wanddruckes tritt bei $x_{p_{w,\max}^{\mathrm{rms}}} \approx 5$ auf (Abbildung 4.7 c). Nach Mabey (1972) kann die mittlere Wiederanlegelänge mit $x_r = 5.6$ abgeschätzt werden. Entsprechende Darstellungen für die natürliche und die stark aktuierte Strömung finden sich in Abbildung A.6 und Abbildung A.7 im Anhang. Die maximalen Druckfluktuationen der natürlichen Strömung treten bei $x_{p_{w,\max}^{\mathrm{rms}}} \approx 6$ auf, was einer mittleren Wideranlegelänge von $x_r = 6.7$ entspricht. Bei der stark aktuierten Strömung verschieben sich beide Größen stromauf zu $x_{p_{w,\max}^{\mathrm{rms}}} \approx 4.2$ bzw. $x_r = 4.6$.

4.2 Modellierung mit dem Wirbelverfahren

Aus Abbildung 4.2 geht hervor, dass die Grobstrukturen und die Scherschichtentwicklung in erster Linie durch zweidimensionale Prozesse geprägt und daher durch ein Wirbelverfahren be-

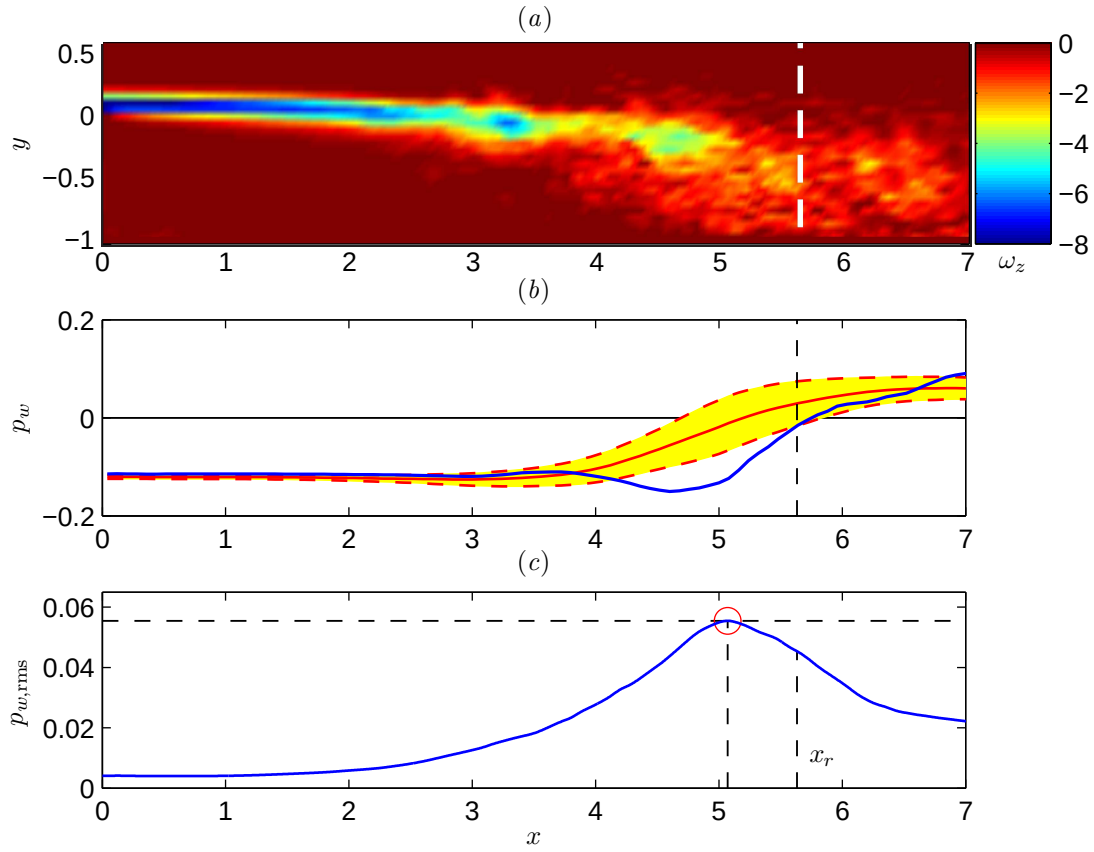


Abbildung 4.7: Korrelation von Grobstrukturen und Wanddruck anhand von numerischen Daten der schwach aktuierten Strömung. In (a) ist die Wirbelstärkeverteilung $\omega_z(x, y)$ für einen Schnappschuss der natürlichen Strömung durch ein Farbschema (dunkelblau: $\omega_z = -8$, dunkelrot: $\omega_z = 0$) visualisiert. Die Scherschicht und zwei aufgerollte Wirbel bei $x = 3.25$ und $x = 4.5$ sind deutlich zu erkennen. Der momentane Wanddruckverlauf (blau, durchgezogen), sowie Mittelwert und Standardabweichung (rote Linien) sind in (b) dargestellt. Der Wirbel bei $x = 4.5$ prägt ein Druckminimum ein. In (c) wird mit der Methode von Mabey (1972) aus der Standardabweichung des Wanddrucks die mittlere Wiederanlegelänge zu $x_r = 5.6$ geschätzt.

schreibbar sind. Die wesentlichen Elemente des Verfahrens sind die konforme Abbildung und die Berechnung der Grundströmung (Abschnitt 4.2.1), die Einarbeitung der Aktuatorik (Abschnitt 4.2.2), die Aufstellung der Kinematik und des dynamischen Modells (Abschnitt 4.2.3), die Druckberechnung an der Wand (Abschnitt 4.2.4) und die physikalischen Modelle zur Wirbelproduktion (Abschnitt 4.2.5), Dissipation (Abschnitt 4.2.7) und Wirbelverschmelzung (Abschnitt 4.2.8).

4.2.1 Konforme Abbildung und Grundströmung

Die konforme Abbildung der oberen Halbebene des Bildbereichs auf das physikalische Gebiet der rückwärts gewandten Stufe in einem nach oben begrenzten Windkanal ergibt sich mit der in Abbildung 4.8 $(a,\ b)$ gezeigten Wahl des Koordinatensystems wie folgt (Milne-Thomson 1968). Der Ursprung des Bildbereichs e_1 wird auf $E_1 \to -\infty$ im physikalischen Gebiet abgebildet. Die Isoline $\eta = 0$ stellt die Begrenzung des Windkanals dar. Ein Voranschreiten entlang der ξ-Achse

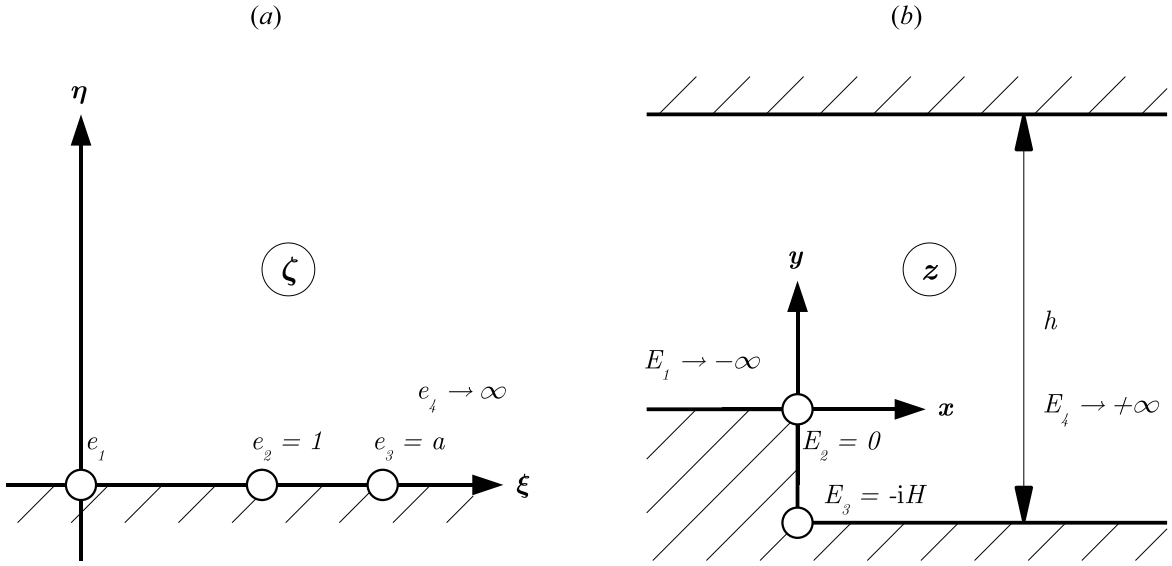


Abbildung 4.8: Konforme Abbildung für die rückwärts gewandte Stufe. Die obere Halbebene des Bildbereichs ζ in (a) wird auf das physikalische Gebiet z in (b) abgebildet. Die Punkte e_1 bis e_4 der ξ-Achse entsprechen den Punkten E_1 bis E_4, die die festen Wände des Rechengebietes vorgeben.

von $\xi \to -\infty$ nach $\xi = 0$ entspricht im physikalischen Bereich dem Abschreiten der oberen Wand von $x \to +\infty$ nach $x \to -\infty$. Dort wird die Richtung um $\beta_1 = 180°$ umgebogen und nun läuft man für $0 < \xi < 1$ entlang der unteren Wand in positive x-Richtung.

Die Oberkante der Stufe stellt im physikalischen Bereich den Koordinatenursprung dar. Um später möglichst leicht integrieren zu können, wird dieser Punkt gerade auf $e_2 = \xi_1 = 1$ gelegt. Für $1 < \xi < a$ läuft man nun entlang der Wand in negative y-Richtung, während x konstant bleibt. Hierzu ist eine Umlenkung um $\beta_2 = -90°$ erforderlich.

Die Stufenunterkante wird im Bildbereich zunächst auf eine variable Position $e_3 = \xi_2 = a$ abgebildet. Für $\xi > a$ läuft man nun entlang der Wand in positive x-Richtung, während y konstant bleibt. Hier wird daher um $\beta_3 = +90°$ umgelenkt. Die Festlegung von a erfolgt weiter unten mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung.

Stromab der Stufe soll sich der Kanal unbegrenzt in x-Richtung ausbreiten. Bildet man einen Punkt aus dem Unendlichen des physikalischen Bereiches in das Unendliche des komplexen Bereiches ab, so ergibt sich hierfür ein konstanter Faktor in der Schwarz-Christoffel'schen Gleichung, der mit der Konstante C_1 zusammengefasst wird.

Damit lässt sich (2.30) für die rückwärts gewandte Stufe spezialisieren:

$$z' := \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = C_1 \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta - a} \right)^{1/2}, \quad \text{mit } C_1, a \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

Geht man von positiven Konstanten C_1 und a aus, so ergibt sich aus dem Verlauf des Gradienten z' entlang der Wand $\eta = 0$ zwingend ein positives Vorzeichen für den Term

$$\tau(\zeta) = \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta - a} \right)^{1/2}. \tag{4.5}$$

Bestimmung der Konstanten C_1 und a: Die Konstanten C_1 und a können unter Annahme einer Quellströmung aus dem Ursprung des Bildbereiches über die Auswertung der Kontinuitätsgleichung gewonnen werden. Das Strömungspotential einer Quelle bei $\zeta_s = 0$, also im negativ Unendlichen des physikalischen Bereiches liegend, kann gemäß (2.18) wie folgt angegeben werden:

$$W_s(\zeta) = \frac{Q}{2\pi} \ln \zeta = U_\infty \frac{h-H}{\pi} \ln \zeta \,. \tag{4.6}$$

Dabei wird Q so gewählt, dass der Volumenstrom pro Kanalbreite stromauf der Stufe gerade der Einströmgeschwindigkeit U_∞ entspricht. Da die Quelle, die auf der Wandbegrenzung plaziert ist, in alle Richtungen abstrahlt, im Bildbereich jedoch nur die obere Halbebene gültig ist, muss die Quelle insgesamt den doppelten Volumenstrom abstrahlen, also $Q = 2\, U_\infty\, (h-H)$ gewählt werden. Gemäß (2.32) ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld im physikalischen Bereich zu:

$$\begin{aligned} w_s^z(\zeta) &= \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \\ &= U_\infty \frac{h-H}{\pi}\,\frac{1}{C_1}\left(\frac{\zeta-a}{\zeta-1}\right)^{1/2} . \end{aligned} \tag{4.7}$$

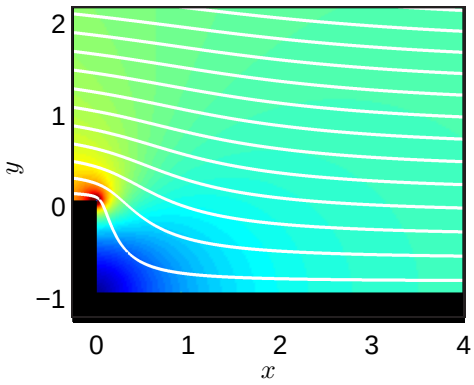


Abbildung 4.9: Potentialströmung über die rückwärts gewandte Stufe.

Weit stromab der Stufe muss die Geschwindigkeit im Kanal aufgrund der Querschnittserweiterung nach der Kontinuitätsgleichung auf $u = U_\infty\,(h-H)/h$ abfallen. Über den Grenzübergang

$$\lim_{\zeta\to\infty} w_s^z(\zeta) = U_\infty \frac{h-H}{\pi}\,\frac{1}{C_1} \stackrel{!}{=} U_\infty \frac{h-H}{h}$$

erhält man durch Koeeffizientenvergleich $C_1 = h/\pi$. Entsprechend muss die Geschwindigkeit weit stromauf der Stufe gerade wieder die Einströmgeschwindigkeit U_∞ ergeben.

$$w_s^z(\zeta=0) = U_\infty \frac{h-H}{h}\,\sqrt{a} \stackrel{!}{=} U_\infty \,.$$

Hieraus folgt $\sqrt{a} = h/(h-H)$.

Berechnung der Abbildung: Zur Bestimmung der Abbildungsvorschrift $z(\zeta)$ ist (4.4) zu integrieren. Mit Hilfe der Integraltafel von Gröbner & Hofreiter (1965) erfolgt die Lösung in zwei Schritten. Mit dem ersten Schritt wird das Integral in zwei etwas einfachere Ausdrücke aufgespalten, im zweiten werden beide Terme integriert.

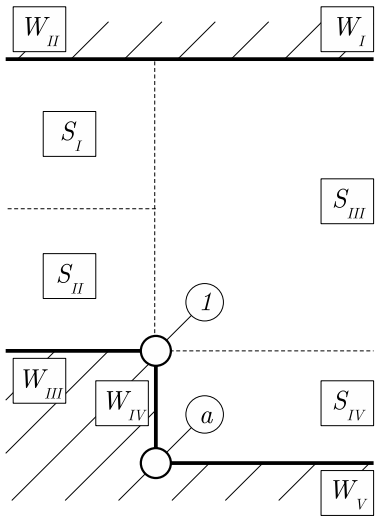
$$\begin{aligned} &\downarrow \quad \text{Gröbner \& Hofreiter (1965), S.31 (56)} \\ z(\zeta) &= C_1 \left(\frac{2}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\tau'^2 - 1}\, d\tau' - 2 \int \frac{1}{\tau^2-1}\, d\tau \right) \quad \text{mit } \tau'(\zeta) = \sqrt{a}\,\tau(\zeta)\,. \\ &\downarrow \quad \text{Gröbner \& Hofreiter (1965), S.21 (13b)} \\ &= C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \underbrace{\frac{\sqrt{a}\,\tau - 1}{\sqrt{a}\,\tau + 1}}_{\mathcal{A}} - \ln \underbrace{\frac{\tau-1}{\tau+1}}_{\mathcal{B}} \right) + C_2\,, \quad \text{mit } C_2 \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Die Integrationskonstante C_2 erhält man, indem man den Grenzübergang $\zeta \to a$ durchführt. Dieser Punkt entspricht im physikalischen Bereich gerade dem Fußpunkt der Stufe, also $z = -i\,H$. Wegen $\lim_{\zeta\to a}\tau(\zeta) \to +\infty$ folgt $\lim_{\zeta\to a} z(\zeta) = C_2 \stackrel{!}{=} -i\,H$.

Der Logarithmus einer komplexen Zahl $z = re^{i\,\phi}$ berechnet sich zu $\ln z = \ln r + i(\phi + 2\pi n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Der Realteil des Logarithmus ist stets eindeutig, während der Imaginärteil periodische Lösungen hat. Die Logarithmusfunktionen in (4.8) müssen daher noch auf Eindeutigkeit hin untersucht werden. Hierbei ergeben sich folgende Korrekturterme für $\mathfrak{Im}\{\ln \mathcal{A}\} = \phi + \Delta\phi_{\mathcal{A}}$ bzw. $\mathfrak{Im}\{\ln \mathcal{B}\} = \phi + \Delta\phi_{\mathcal{B}}$:

$$\Delta\phi_{\mathcal{A}} = \begin{cases} -2\pi & \eta = 0, 0 < \xi < 1 \\ 0 & \text{Rest} \end{cases} \qquad \Delta\phi_{\mathcal{B}} = \begin{cases} -2\pi & \eta = 0, \xi < 1 \\ 0 & \text{Rest} \end{cases}.$$

Inverse Abbildungsvorschrift: Wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben lässt sich keine explizite Umkehrfunktion $\zeta(z)$ für (4.8) ermitteln, so dass numerische Näherungslösungen verwendet werden müssen. Die Startpunkte für das Newton–Raphson-Verfahren sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Im Anhang A sind in Abbildung A.1 (*a, b*) transformierte Koordinatenlinien von Bildbereich und physkalischem Bereich dargestellt.



Bereich	x	y	ξ_0	η_0
1	0	0	1	0
a	0	$-H$	a	0
W_I	≥ 0	$h - H$	-1	0
W_{II}	< 0	$h - H$	$-\frac{1}{8}$	0
W_{III}	< 0	0	$\frac{1}{4}$	0
W_{IV}	0	$> -H, < 0$	$1 - \frac{a-1}{2}$	0
W_V	≥ 0	-H	2	0
S_I	< 0	$> \frac{h-H}{2}, < h - H$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
S_{II}	< 0	$> 0, < \frac{h-H}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
S_{III}	≥ 0	$> 0, < h - H$	1	1
S_{IV}	≥ 0	$> -H, \leq 0$	2	$\frac{1}{4}$
Fußpunkt	$< 0.05\,H$	$> -H, < -0.95\,H$	a	$\frac{1}{64}$

Tabelle 4.1: Startwerte $\zeta_0 = \xi_0 + \mathrm{i}\ \eta_0$ für das Newton–Raphson-Verfahren zur Berechnung von $\zeta(z)$ für die rückwärts gewandte Stufe.

4.2.2 Aktuation

Die Aktuation mittels periodischem Einblasen und Absaugen an der Stufenkante wird mit der in Abschnitt 2.2.4 vorgestellten gerichteten Quelle realisiert. Hierbei soll die Strahlachse einen Winkel von $\alpha_a = 45°$ einnehmen, mit einem Öffnungswinkel von 40° beim Einblasen und 270° beim Absaugen.

Die Position ζ_a der Quelle wird über das gewünschte Geschwindigkeitsverhältnis $\tan\alpha_a = v_{a,0}/u_{a,0}$ an der Stelle $x_{a,0} = N_\mathrm{p}\Delta t/4$ eingestellt, mit der Integrationsschrittweite Δt (Abschnitt 4.2.3) und der Zahl der Intergrationsschritte N_p pro eingesetztem Wirbel (Abschnitt 4.2.5). Nach einigen Umformungen erhält man mit $\zeta_{a,0} = \zeta(x_{a,0})$

$$\xi_a = \xi_{a,0} + \eta_{a,0}\,\frac{\tan\alpha_a\,\mathrm{d}\eta_{a,0} - \mathrm{d}\xi_{a,0}}{\tan\alpha_a\,\mathrm{d}\xi_{a,0} + \mathrm{d}\eta_{a,0}}\,, \qquad (4.9)$$

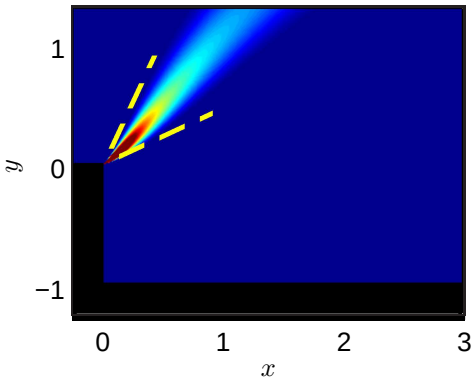


Abbildung 4.10: Umsetzung des physikalischen Aktuators im Wirbelverfahren.

wobei die Abkürzung $\mathrm{d}\xi_{a,0} := \mathfrak{Re}\left\{\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}z\right\}_{\zeta_{a,0}}$ bzw. $\mathrm{d}\eta_{a,0} := \mathfrak{Im}\left\{\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}z\right\}_{\zeta_{a,0}}$ verwendet wird. Die eingangs getroffenen Anforderungen lassen sich mit $\alpha_a^\zeta = \arctan\eta_{a,0}/(\xi_{a,0}-\xi_a)$, $\delta_-^\zeta = 180°$ und $\delta_+^\zeta = 40°$ $\delta_-^\zeta/270°$ realisieren. Die Quellstärke Q_a wird so gewählt, dass bei der Stellgröße $g = 1$ die am Punkt $z_{a,0}$ vom Aktuator induzierte Geschwindigkeit exakt eins ist.

4.2.3 Kinematik und dynamisches Modell

Für die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten im physikalischen Bereich wird die invertierte Ableitung $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}$ benötigt:

$$\zeta' := \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\pi}{h}\,\zeta\,\left(\frac{\zeta-a}{\zeta-1}\right)^{1/2}\,. \qquad (4.10)$$

Mit ihr lässt sich das Geschwindigkeitsfeld an einem beliebigen Aufpunkt z durch Überlagerung der komplexen Geschwindigkeiten aller Quellen, Wirbel und der an der ξ-Achse gespiegelten virtuellen Wirbel im Rechengebiet zu

$$\begin{aligned} w^z(z,t) \;=\; & \left(\underbrace{U_\infty\,\frac{h-H}{\pi}\,\frac{1}{\zeta}}_{=:\,w_0^\zeta(\zeta)} + \underbrace{g(t)\,\frac{Q\,D}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta-\xi_a}}_{=:\,w_a^\zeta(\zeta,g(t))} - \right. \\ & \left. -\;\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta-\zeta_j} + \underbrace{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta-\overline{\zeta}_j}}_{=:\,\tilde{w}_v^\zeta(\zeta)}\right)\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_\zeta \end{aligned} \qquad (4.11)$$

berechnen. Für die Berechnung der Wirbelbewegung wird aufgrund der Verwendung einer konformen Abbildung noch die Routh-Korrektur

$$\mathcal{R}(\zeta) := \frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\pi}{2\,h}\,\frac{2\zeta^2 - \zeta\,(3+a) + 2a}{(\zeta-1)^{3/2}\,(\zeta-a)^{1/2}} \qquad (4.12)$$

benötigt, so dass man als dynamisches Modell des n-ten Wirbels

$$w_n^z = \left(w_0^\zeta\,(\zeta_n) + w_a^\zeta\,(\zeta_n, g(t)) - \mathrm{i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta_n-\zeta_j} + \tilde{w}_v^\zeta\,(\zeta_n)\right)\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n} - \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_n}{4\pi}\,\mathcal{R}(\zeta_n) \qquad (4.13)$$

erhält. Die zeitliche Integration erfolgt mit dem Runge–Kutta-Verfahren 4. Ordnung aus Abschnitt 2.3 mit einer festen Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.025$.

Die Regularisierung des Geschwindigkeitsfeldes erfolgt durch die Verwendung des in Abschnitt 2.2.5.1 vorgestellten Oseen'schen Wirbelmodells mit finitem Kernradius R_b. In den Gleichungen (4.11) und (4.13) ist die Zirkulation Γ_j daher folgendermaßen zu verstehen

$$\Gamma_j = \Gamma_{j,0}\left(1 - e^{(r/R_b^\zeta)^2}\right), \tag{4.14}$$

mit $r = |\zeta - \zeta_j|$ und R_b^ζ gemäß (2.60) und der nominalen Zirkulation $\Gamma_{j,0}$. Die Kernradien der virtuellen Wirbel sind identisch mit den Radien der zugehörigen reellen Wirbel.

4.2.4 Sensorik

Geschwindigkeitsmessungen lassen sich im Modell problemlos an beliebigen Punkten z durch Auswertung von (4.11) durchführen. Die Berechnung des Wanddruckes erfolgt durch Integration von

$$p(x) = p_0 + \int_{x_{p,0}}^{x} \frac{\partial p}{\partial \chi}\,\mathrm{d}\chi \tag{4.15}$$

beginnend bei einem weit stromab gelegenen Punkt $x_{p,0} = 20$ an der unteren Wand mit nahezu konstantem Druck $p_0 = 0$, stromauf bis zur Position x. Die numerische Integration von (4.15) erfolgt wie in Abschnitt 2.2.3.2 beschrieben. Da an der Wand $v = 0$ gilt, entfällt die Notwendigkeit $\partial u/\partial y$ zu berechnen. Daher muss die Geschwindigkeit für die drei Zeitschritte nur auf einer Bahn bei $y = -1$ berechnet werden.

4.2.5 Wirbelproduktion

Alle $N_p = 2m$ Zeitschritte mit $m \in \mathbb{N}^+$ wird ein neuer Wirbel in das Strömungsfeld eingesetzt. Die Wirbelproduktion erfolgt gemäß der in Abschnitt 2.2.5.2 beschriebenen Methode von Giesing.

Zur Abschätzung der Wirbelproduktion nach (2.63) werden folgende Näherungen vorgenommen (Abbildung 4.11):

$$\begin{aligned} U_0 &= 0 \\ U_1(t) &= \mathfrak{Re}\left\{w^z(z_p, t)\right\} \\ U_c(t) &= \frac{U_1(t)}{2} + \mathfrak{Re}\left\{w_a^z\left(z_{a,0}, g(t)\right)\right\} . \end{aligned}$$

Der Punkt $z_p = \mathrm{i}\ y_p = \mathrm{i}\ 0.2$ wird so gewählt, dass die Geschwindigkeit U_1 mit der Geschwindigkeit am Grenzschichtrand von Experiment oder Simulation übereinstimmt (Abbildung 4.12 *a*). Die

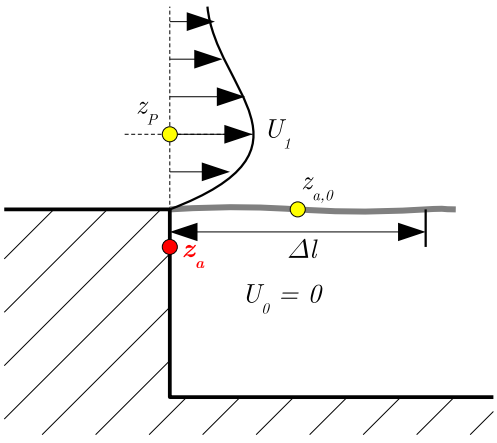


Abbildung 4.11: Skizze zur Abschätzung der Wirbelproduktionsrate.

über die Zeit $\Delta T = N_p\,\Delta t$ eingebrachte Zirkulation ergibt sich dann wegen (2.61) bis (2.63) aus dem Integral

$$\Delta\Gamma = -\int_{T_1}^{T_1+\Delta T} U_1(t)\,U_c(t)\,dt\,, \tag{4.16}$$

welches mit der Simpson'schen Formel abgeschätzt wird zu

$$\Delta\Gamma_n \approx -\frac{\Delta t}{3}\left(G_0 + G_{N_p} + \sum_{k=1}^{N_p-1} w_k\,G_k\right), \tag{4.17}$$

mit

$$G_k = \frac{1}{2}\,U_1\big(t_k\big)^2 + U_1\big(t_k\big)\,U_c\big(t_k\big) \tag{4.18}$$

und $t_k = T_{n-1} + k\Delta t$. Die Gewichte für die Simpson'sche Formel sind $w_k = 4$ für $k = 1, 3, \ldots, N_p - 1$ bzw. $w_k = 2$ für $k = 2, 4, \ldots, N_p - 2$. Die eingetragene Zirkulation $\Delta\Gamma_n$ wird zum Zeitpunkt $t = T_n$ in einem Wirbel an der Position

$$z_{v,0} = \frac{\Delta l}{2} \approx \overline{U}_c\,\frac{\Delta T}{2} \tag{4.19}$$

konzentriert. Die Berechnungen in dieser Arbeit wurden mit $N_p = 2$ durchgeführt.

4.2.6 Wirbelkernwachstum

Zur Approximation des transitionellen Wachstums der Scherschichtdicke wird ein lineares Kernwachstumsmodell verwendet

$$R_b(t) = \mathrm{Min}\left\{R_{b,0} + \frac{\Delta R}{\Delta t}\,(t - t_0),\ R_{b,\max}\right\}. \tag{4.20}$$

Die Parameter $R_{b,0}$, $\Delta R/\Delta t$ und $R_{b,\max}$ werden durch Kalibration gegen die numerische Simulation ermittelt. Hierzu wird die mittlere Wirbelstärkeverteilung für verschiedene x-Positionen als Funktion der vertikalen Position durch die Exponentialfunktion

$$\overline{\omega}_z(y)|_x \approx \kappa\,e^{-\left(\frac{y-y_0(x)}{R_b(x)}\right)^2}$$

approximiert, mit dem lokalen Kernradius $R_b(x)$, der mittleren lokalen Scherschichtposition y_0 und einer hier unbedeutenden Konstante κ (Abbildung 4.13 *a*). Der mittlere Verlauf des Kernradius in Strömungsrichtung ist in Abbildung 4.13 (*b*) dargestellt. Im Bereich $0 < x < 3$ ist ein nahezu lineares Wachstum erkennbar, dem sich eine exponentielle Zunahme, insbesondere durch Aufrollung von Wirbeln, anschließt. Die Parameter von (4.20) können aus der linearen Approximation des Kernwachstums mit $R_{b,0} = 0.07$ und $\Delta R_b/\Delta x = 0.02$ abgeschätzt werden. Für die zeitliche Wachstumsrate wird $\Delta R_b/\Delta t \approx 1/2\ \Delta R_b/\Delta x$ angenommen. Der maximale Kernradius wird mit $R_{b,\max} = 0.4$ festgesetzt. Die Abbildungen Abbildung A.2 (*a, b*) und Abbildung A.3 (*a, b*) aus Anhang A für die schwach bzw. stark aktuierte Strömung zeigen ein ähnliches anfängliches Kernwachstum. Durch die Aktuation wird der Beginn des exponentiellen Wachstum weiter stromauf verlagert und der Bereich linearen Wachstums entsprechend verkürzt.

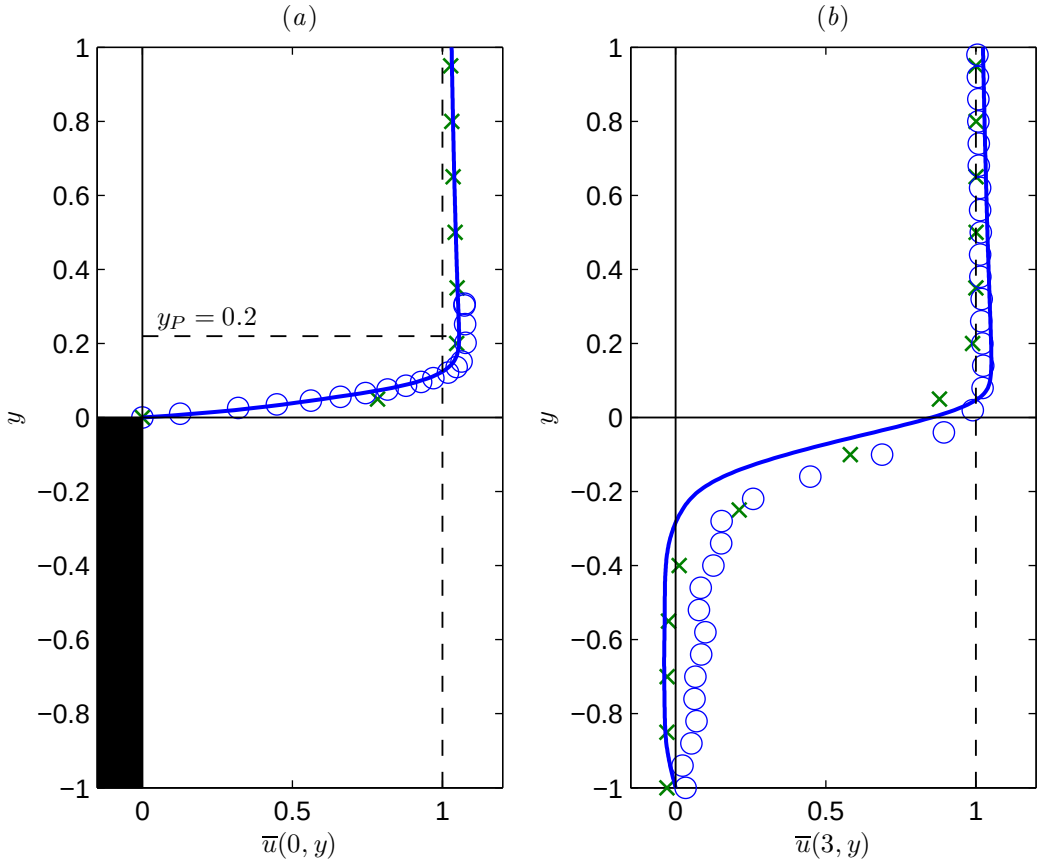


Abbildung 4.12: Vergleich des Einströmprofils an der Stufenkante (a) und des Geschwindigkeitsprofiles bei $x = 3$ (b) aus der numerischen Simulation (durchgezogen), dem Experiment ($\circ$) und dem Wirbelverfahren ($\times$) für die natürliche Strömung. Die experimentellen Resultate stammen von Hitzdrahtmessungen, mit denen die Strömungsrichtung nicht erkannt wird. Die Messungen für $y < -0.3$ in (b) sind daher nicht vertrauenswürdig.

4.2.7 Dissipationsmodelle

In Modell der Stufenströmung werden drei Dissipationsmodelle berücksichtigt. Das erste Modell dient dazu, Wirbel auszublenden, die nahe an die Rückseite der Stufe gelangt sind. Diese Wirbel würden nämlich durch die Induktion ihrer Spiegelwirbel unphysikalisch hohe Geschwindigkeiten erhalten und das Abströmen der Scherschicht stören. Dieses Modell geht von einer Zerstörung von Wirbeln mit $\mathfrak{Re}\{z_n\} < x_K = 0.05$ durch die Wand und einem raschen exponentiellen Abklingen der Zirkulation für Wirbel mit $\mathfrak{Re}\{z_n\} < 2\,x_K$ durch die Wandgrenzschicht aus. Die Zeitkonstante beträgt $T_{D,K} = 0.25$ Ein ähnliches Modell wird für den vertikalen Wandabstand $\mathfrak{Im}\{z_n\} < y_K = -0.95$ aufgestellt. Diesen Modellen kommt nur in der Anlaufphase der Strömung eine tragende Rolle zu.

Das dritte Dissipationsmodell beschreibt die Absorption der Wirbelstärke durch die sich im Anschluss an die Ablöseblase ausbildende turbulente Wandgrenzschicht. Dieses Modell wird durch Vergleich der zeitlich gemittelten Zunahme der Zirkulation in Strömungsrichtung zwischen

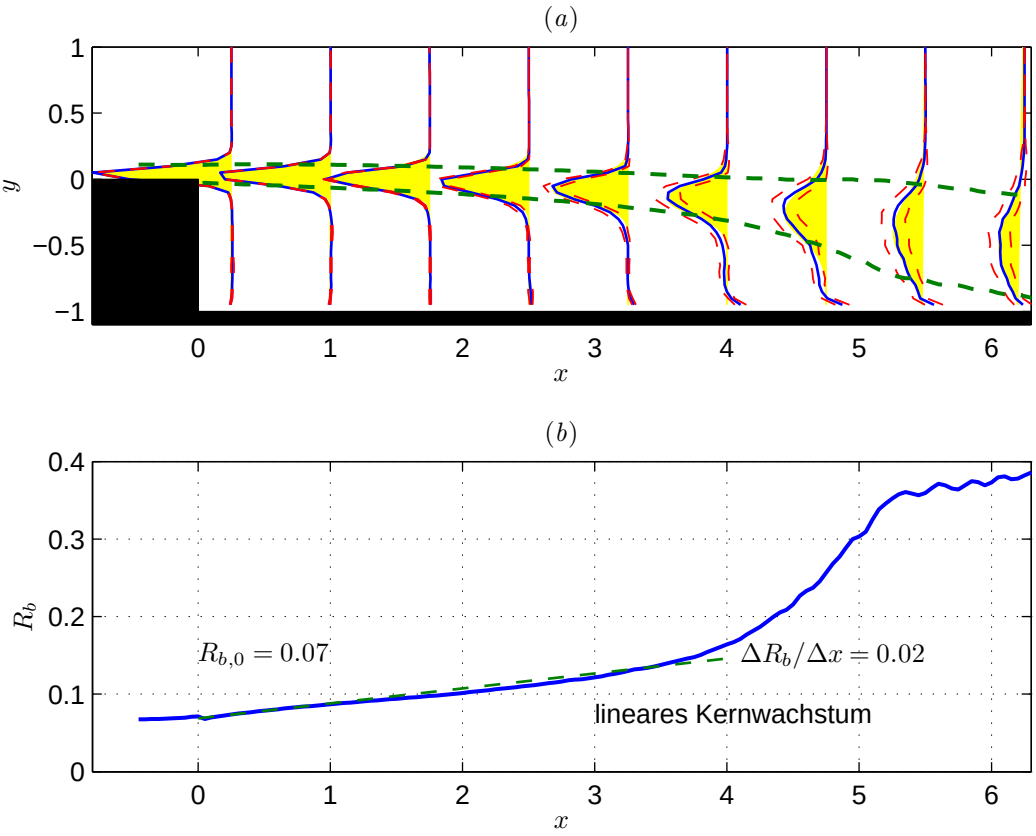


Abbildung 4.13: Kalibration des Kernwachstumsmodells anhand der numerischen Daten der natürlichen Strömung. In (a) sind die mittlere Wirbelstärkeverteilung $\overline{\omega}_z(x,y)$ (blau, durchgezogen) und die Standardabweichung $\overline{\omega}_z \pm \omega_z'$ (rot, gestrichelt) für verschiedene x-Positionen als Funktion des Wandabstandes y dargestellt. Die Verläufe werden durch Exponentialfunktionen angenähert (gelbe Flächen), und zur lokalen Approximation der Kernradien $R_b(x)$ verwendet. Die Aufweitung der Scherschicht wird durch $y_0(x) \pm R_b(x)$ (grün, gestrichelt) dargestellt. Der geschätzte mittlere Verlauf von $R_b(x)$ wird in (b) gezeigt. Auf den ersten drei Stufenhöhen lässt sich der Verlauf gut durch ein lineares Wachstumsmodell beschreiben.

Wirbelverfahren und der numerischen Simulation entwickelt. Der Verlauf von

$$\Gamma(x) = \int_{y_0}^{y_1} \big(v(x,y,t) - v(0,y,t)\big)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{x} \big(u(\chi,y_0,t) - u(\chi,y_1,t)\big)\,\mathrm{d}\chi \tag{4.21}$$

beschreibt die Änderung der Zirkulation eines rechteckigen Bilanzgebietes bei Verschiebung der rechten Bilanzgrenze (x). Hierdurch gelangt ein immer längerer Abschnitt der Scherschicht in das Bilanzgebiet. Die Berechnung von (4.21) erfolgt über die Integration des Zirkulationsgradienten

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}x}\right|_{x,t} \;\approx\; & \frac{1}{2\,h}\int_{y_0}^{y_1} \big(v(x+h,y,t) - v(x-h,y,t)\big)\,\mathrm{d}y + \\
+\; & \frac{1}{6}\Big(u(x-h,y_0,t) + 4\,u(x,y_0,t) + u(x+h,y_0,t)\Big) - \\
-\; & \frac{1}{6}\Big(u(x-h,y_1,t) + 4\,u(x,y_1,t) + u(x+h,y_1,t)\Big)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

mit der Simpson'schen Regel und anschließende zeitliche Mittelung. Für eine unendlich ausgedehnte Scherschicht ist ein konstanter Gradient von $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}x = -1$ zu erwarten. Obere und untere Grenze der Zirkulationsberechnung sind $y_0 = -0.8$ bzw. $y_1 = +0.8$.

Der in Abbildung 4.14 (*a, b*) dargestellte, zeitlich gemittelte Verlauf von (4.21) und (4.22) der natürlichen Strömung zeigt für $x < 2$ einen nahezu konstanten Abfall der Zirkulation von $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}x = -1$. Im Bereich $2 < x < 5.9$ wächst die Zirkulation betragsmäßig schneller an, es liegt also ein Bereich von stärker konzentrierter Wirbelstärke vor. Es schließt sich für $x > 5.9$ ein Dissipationsbereich an, wo die Zirkulation mit der Lauflänge x nur noch schwächer zunimmt. Für den Grenzübergang $x \to \infty$ wächst $\Gamma(x)$ nicht weiter an. In unmittelbarer Nähe, nämlich an der Stelle $x_{p'^{\mathrm{rms}}_{w,\max}} = 6$, treten im zeitlichen Mittel die höchsten Wanddruckfluktuationen auf. Der mittlere Verlauf der Zirkulation im Dissipationsbereich $x > x_{D,0}$ wird durch eine Exponentialfunktion

$$\overline{\Gamma}(x)\big|_{x>x_{D,0}} \approx \Gamma(x_{D,0}) + K_D \left(e^{-(x-x_{D,0})/\kappa_{D,x}} - 1\right) , \tag{4.23}$$

mit $x_{D,0} = 5.9$, $\kappa_{D,x} = 4.75$ und $K_D = 3.75$ angenähert. Eine Auswertung der schwach und stark aktuierten Strömung zeigt einen ähnlichen Verlauf (siehe Abbildung A.4 und Abbildung A.5 im

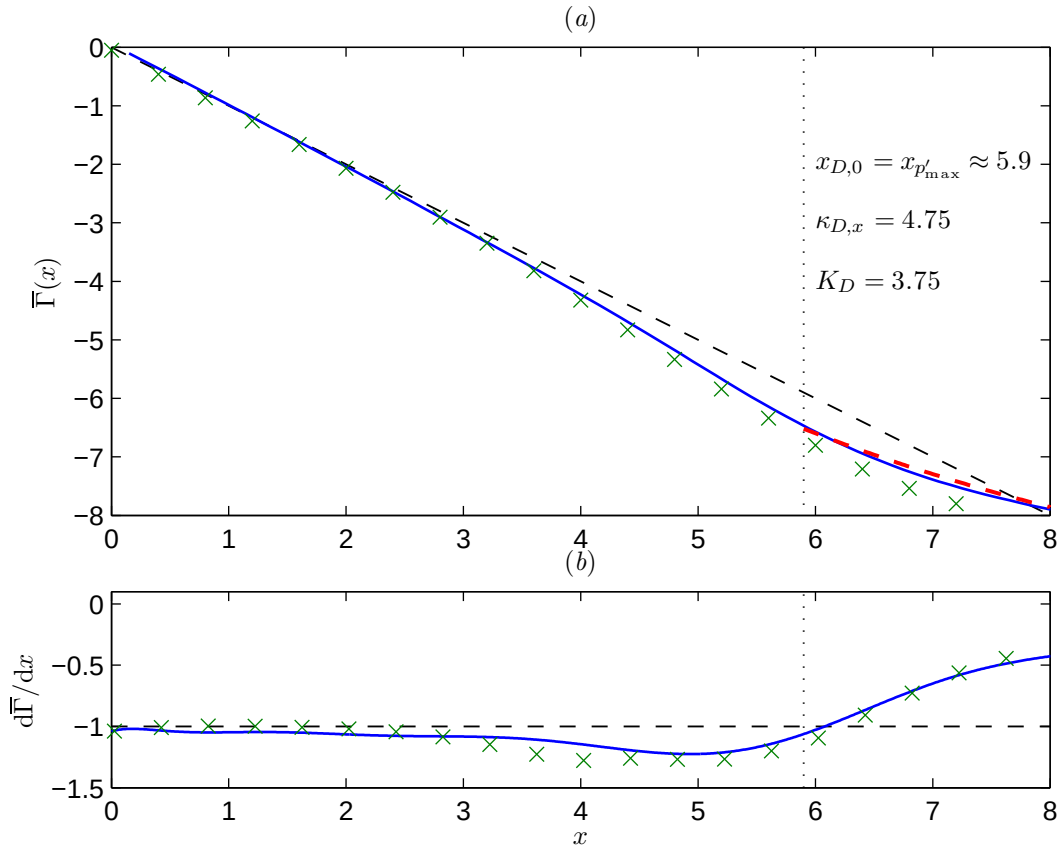


Abbildung 4.14: Zeitlich gemittelte Zirkulation (*a*) und zugehöriger Gradient in Strömungsrichtung (*b*) der natürlichen Strömung, berechnet mit Daten der numerischen Simulation (blau, durchgezogen) und dem Wirbelverfahren (×). Die Analyse zeigt einen Dissipationsbereich, der etwa bei $x_{D,0} = 5.9$ beginnt. Für das Dissipationsmodell (4.23) wird ein exponentieller Abfall mit zunehmender Lauflänge mit den Konstanten $\kappa_{D,x} = 4.75$ und $K_D = 3.75$ angenommen (rot, gestrichelt).

Anhang). Die Parameter der Exponentialfunktion (4.23) stimmen mit der natürlichen Strömung bis auf den Beginn des Dissipationsbereiches überein. Auch in diesen beiden Fällen beginnt die Dissipation etwa an der Stelle, wo im zeitlichen Mittel die höchsten Wanddruckfluktuationen auftreten. Daher wird der Beginn des Dissipationsbereichs $x_{D,0}$ im Wirbelverfahren durch $x_{p_{w,\max}^{\mathrm{rms}}}$ festgesetzt.

Die Absorption der Zirkulation wird vom Wirbelverfahren durch ein Dissipationsmodel mit zeitlichem, exponentiellen Abfall nachgebildet. Die Zeitkonstante wird mit $T_D = 1/2\,\kappa_{D,x}$ abgeschätzt. Es wird nur auf Wirbel mit $\mathfrak{Re}\{z_n\} > x_{D,0}$ angewendet. Der Vergleich von numerischen Daten und den Ergebnissen des Wirbelverfahrens in Abbildung 4.14 (*a, b*) zeigt, bis auf eine leichte betragsmäßige Überschätzung der Zirkulation durch das Wirbelverfahren, eine rechte gute Übereinstimmung.

4.2.8 Wirbelverschmelzung

Um eine möglichst ungestörte Entwicklung und Aufrollung der Scherschicht zu ermöglichen, wird die Wirbelverschmelzung erst für Wirbel mit $\mathfrak{Re}\{z_n\} > x_{m,0} = 4$ aktiviert. Als weiteres Kriterium muss ein kritischer Abstand zwischen zwei Wirbeln unterschritten werden, der gemäß

$$r_{m,\mathrm{crit}} = \mathrm{Min}\left\{\frac{\mathfrak{Re}\{z_n\} - x_{m,0}}{8},\ \frac{1}{2}\right\} \tag{4.24}$$

linear über eine Lauflänge von vier Stufenhöhen bis auf den Maximalwert von einer halben Stufenhöhe anwächst. Der Kernradius des verschmolzenen Wirbels wird ggf. so vergrößert, dass die maximal induzierte Geschwindigkeit des Wirbels vom Betrage her eins ist. Mit diesen Einstellungen ergibt sich eine durchschnittliche Anzahl an diskreten Wirbeln im Strömungfeld von $\overline{N} \approx 300$.

4.3 Analyse des Wirbelverfahrens

Das Wirbelverfahren wird nun durch einen Vergleich mit MGLET dahingehend untersucht, ob eine qualitative und ggf. quantitative Übereinstimmung in der Repräsentation der Grobstrukturen vorliegt (Abschnitt 4.3.1). Insbesondere ist dabei von Interesse, ob der Mechanismus, über den die Aktuation auf die Grobstrukturen einwirkt, richtig modelliert wurde. Von weiterer Bedeutung aus regelungstechnischer Sicht ist der Gültigkeitsbereich des Modells. D.h. kann das Wirbelverfahren z.B. auch die Wirkung der Aktuation in anderen Betriebspunkten als denen, die für den Entwurf verwendet wurden, vorhersagen (Abschnitt 4.3.2)?

4.3.1 Vergleich der Grobstrukturen

Der Grobstrukturvergleich erfolgt zunächst durch in Augenscheinnahme der Entwicklung der Scherschichten. Die natürliche Strömung (Abbildung 4.15 *a*) zeigt über zwei bis drei Stufenhöhen eine nahezu ungestörte, ebene Scherschicht. Im Anschluss kommt es zur Aufrollung von zwei

Scherschichtwirbeln, die in eine große, walzenartige Wirbelstruktur unmittelbar stromauf des Wiederanlegepunktes strömen. Im Bereich $3.5 < x < 7$ ist in Wandnähe Rückströmung zu beobachten. Im zeitlichen Verlauf der Wiederanlegelänge (Abbildung 4.15 c) sind Schwankungen von bis zu 10% um den Mittelwert etwa mit einem Viertel der Instabilitätsfrequenz (vier Perioden) beobachtbar. Die Wiederanlegelänge wird bei dieser Untersuchung nicht aus dem Wanddruck bestimmt, sondern durch die Betrachtung der wandnahen Rezirkulationsgebiete.

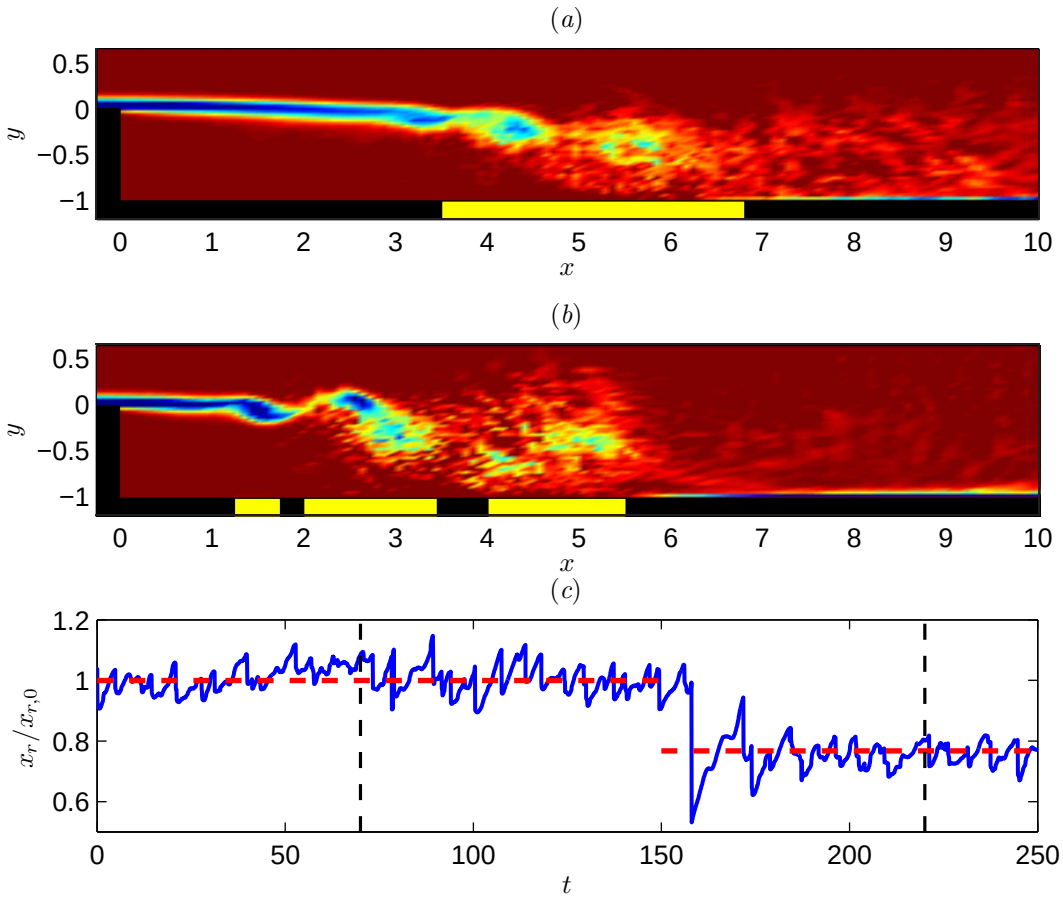


Abbildung 4.15: Grobstrukturen der natürlichen (a) und der stark aktuierten Strömung ($f_a = 0.4$, $g_{\max} = 0.02$) (b) und das zeitliche Verhalten der Wiederanlegelänge (c) aus der numerischen Simulation. In (a, b) sind die Wirbelstärkeverteilung (Farbskala wie in Abbildung 4.7 a) und Bereiche mit wandnaher Rückströmung durch gelbe Balken visualisiert. In der aktuierten Strömung erkennt man eine Wirbelpaarung bei $x \approx 3$. In (c) ist der zeitliche Verlauf der Wiederanlegelänge (blau) und die Mittelwerte (rot, gestrichelt) für den natürlichen ($t < 150$) und den aktuierten Fall dargestellt. Die senkrechten gestrichelten Linien bei $t = 70$ bzw. $t = 220$ markieren die Zeitpunkte der ausgewählten Schnappschüsse (a, b).

Durch Aktuation, hier der stark aktuierte Fall, wird der Entstehungsort der Scherschichtwirbel stromauf verlagert, so dass der erste Scherschichtwirbel schon bei $x \approx 1.5$ zu beobachten ist (Abbildung 4.15 b). Wirbelpaarung ist in der aktuierten Strömung häufig schon bei $x \approx 3$ zu erkennen. Das walzenartige Einrollen der Scherschicht kurz vor dem Wiederanlegen verschiebt sich

ebenfalls stromauf. Die aufgerollten Wirbel sind insgesamt stärker als im natürlichen Fall, was sich in der Ausprägung mehrerer Rezirkulationsgebiete um die Fußpunkte der Wirbel auswirkt. Nach dem Einschalten der Aktuation zum Zeitpunkt $t = 150$ gibt es eine kurze Verzugszeit von etwa vier Perioden bevor die Wiederanlegelänge sprunghaft um etwa 40% verkürzt wird (Abbildung 4.15 c). Anschließend nimmt die Wiederanlegelänge wieder etwas zu, bis sich nach insgesamt 20 Perioden quasistationäres Verhalten einstellt: Die Wiederanlegelänge nimmt im Mittel um etwa 20% ab, die Schwankungen sind mit dem natürlichen Fall vergleichbar.

Das Wirbelverfahren liefert im natürlichen Fall eine qualitativ korrekte Darstellung der Scherschichtwirbel und des Einrollens kurz vor dem Wiederanlegen (Abbildung 4.16 a). Das Rezirkulationsgebiet wird im Vergleich zur LES geringfügig stromauf verschoben. Dies könnte durch numerische Fehler des Wirbelverfahrens bedingt sein, die zu einer stärkeren Anfachung der Scherschichtentwicklung führen. Der zeitliche Verlauf der Wiederanlegelänge wird ebenfalls gut wiedergegeben (Abbildung 4.16 c), es fallen jedoch deutlich stärkere Schwankungen (20%) auf. Die Periodenlänge der Schwankungen ist vergleichbar mit den Ergebnissen der LES.

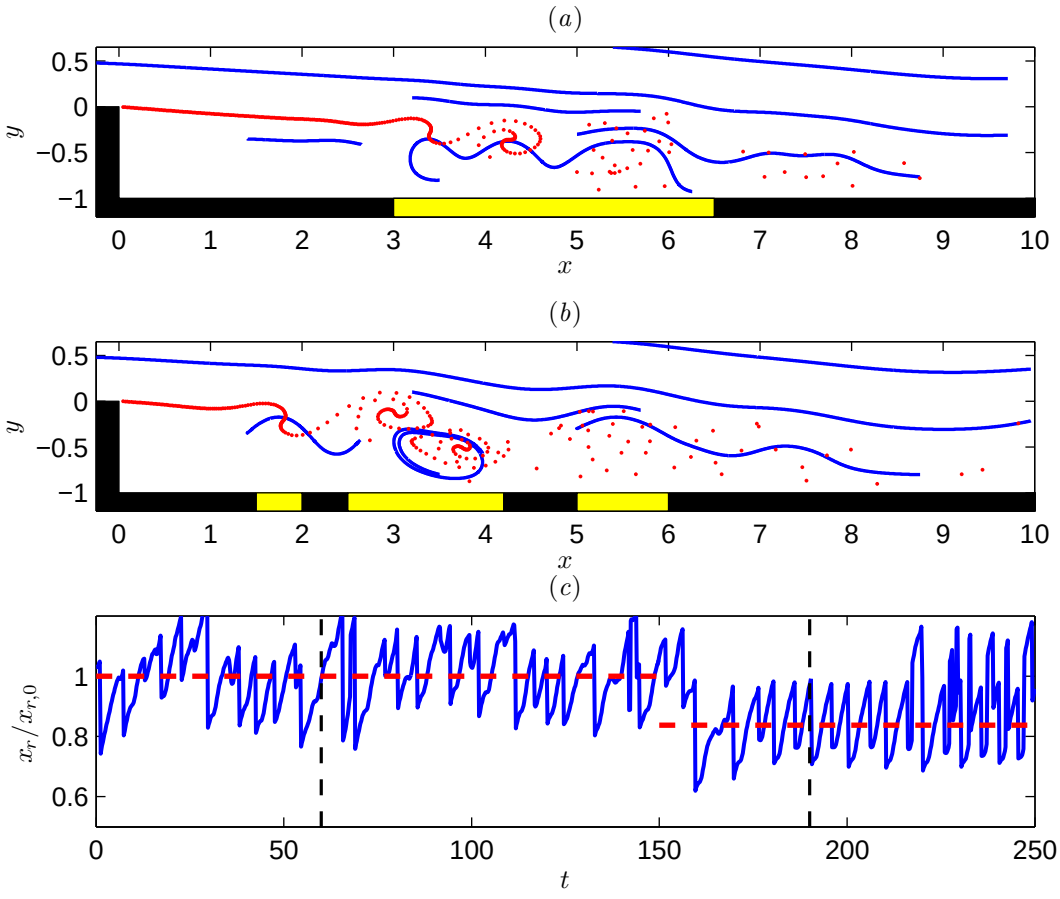


Abbildung 4.16: Grobstrukturen der natürlichen (a) und aktuierten Strömung ($f_a = 0.4$, $g_{\max} = 0.01$) (b) und das zeitliche Verhalten der Wiederanlegelänge (c) berechnet mit dem Wirbelverfahren. Darstellung wie in Abbildung 4.15, jedoch sind in (a, b) die Wirbelpositionen (•) und Stromlinien (blau) gezeichnet. Grobstrukturen und Änderung der Wiederanlegelänge beim Einschalten der Aktuation werden im Vergleich zur numerischen Simulation gut wiedergegeben.

Um der im natürlichen Fall beobachteten stärkeren Anfachung durch numerische Fehler Rechnung zu tragen, wird die Aktuationsamplitude im Wirbelverfahren geringer, nämlich mit $g_{\max} = 0.01$ angesetzt. Wie bei den Ergebnissen der LES zeigt sich auch bei den Wirbelverfahren eine Verlagerung der Grobstrukturen stromauf und das Auftreten von Wirbelpaarung (Abbildung 4.16 *b*). Auch die Entstehung mehrerer Rezirkulationsgebiete und das zeitliche Verhalten der Wiederanlegelänge (Abbildung 4.16 *c*) wird qualitativ richtig widergespiegelt. Wie im natürlichen Fall werden die Schwankungen der Wiederanlegelänge mit etwa 20% zu hoch geschätzt. Die Verkürzung der mittleren Wiederanlegelänge wird mit nur 17% etwas zu gering vorhergesagt. Dies liegt jedoch möglicherweise an der Bestimmung der Wiederanlegelänge über die Auswertung der Rezirkulationsgebiete. Während in der numerischen Simulation die Wirbelstärke der von der Wandgrenzschicht absorbierten Wirbel relativ homogen verteilt wird, treten bei den Wirbelverfahren aufgrund der Konzentration der Wirbelstärke in diskreten Wirbeln z.T. sehr weit stromab liegende Rezirkulationsgebiete auf. Die Methode von Mabey (1972) liefert bessere Resultate, ermöglicht jedoch nicht die zeitlich aufgelöste Betrachtung der Wiederanlegelänge.

4.3.2 Dynamische Bandbreite

Um die dynamische Bandbreite des Wirbelverfahrens zu eruieren, wird eine Exploration des Wirbelverfahrens für andere Betriebspunkte durchgeführt. Hierzu wird die Aktuationsfrequenz im Bereich $0.2 \leq f_a \leq 0.8$ variiert. Die Aktuationsamplitude ist mit $g_{\max} = 0.01$ die gleiche, die auch in Abschnitt 4.3.1 verwendet wurde.

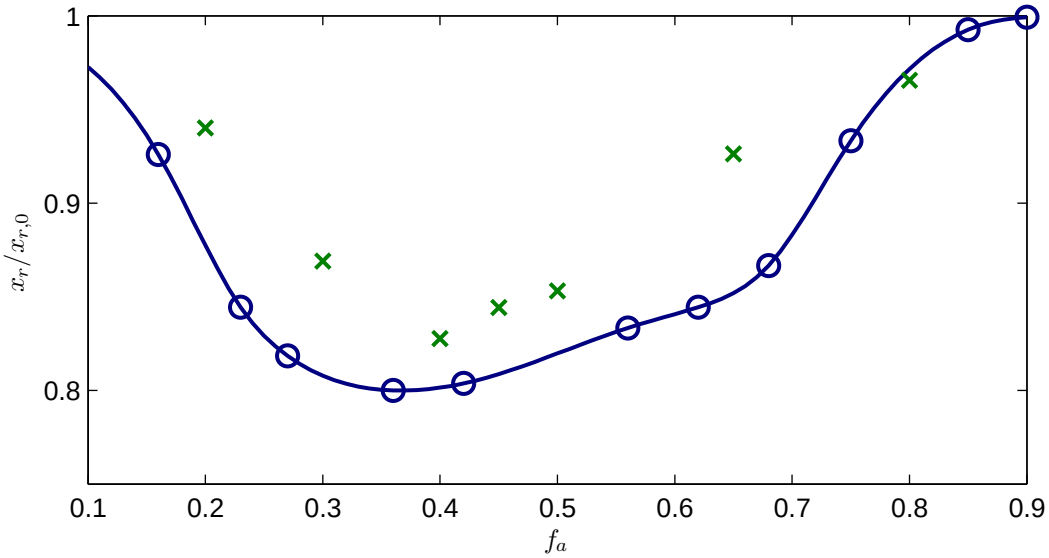


Abbildung 4.17: Einfluss der Aktuationsfrequenz auf die Wiederanlegelänge im Vergleich von stark aktuierter numerischer Simulation (durchgezogen, mit ∘) und Wirbelverfahren (×). In beiden Fällen wird die stärkste Verkürzung der Wiederanlegelänge im Frequenzbereich $0.35 < f_a < 0.45$ erzielt. Die Frequenzabhängigkeit wird vom Wirbelverfahren recht gut wiedergegeben.

Die Frequenzabhängigkeit des Aktuationseffektes auf die Wiederanlegelänge zeigt sich in Abbildung 4.17. Hier ist die relative Verkürzung, berechnet anhand der Wanddruckdaten, als Funktion der Aktuationsfrequenz für das Wirbelverfahren und die LES [2] dargestellt.

Der Einfluss der Aktuationsfrequenz auf die Grobstrukturen ist in Abbildung 4.18 (a–d) exemplarisch für $f_a = \{0.2, 0.4, 0.8\}$ der natürlichen Strömung gegenübergestellt. Bei $f_a = 0.2$ (Abbildung 4.18 b) wird ein der natürlichen Strömung ähnliches Bild der Grobstrukturen nachgebildet. Die Strukturen werden jedoch etwas stärker und treten getaktet, also noch periodischer als in der natürlichen Strömung, auf. Hierduch kommt es zu einer geringen Verkürzung der Wiederanlegelänge. Der Fall $f_a = 0.4$ in Abbildung 4.18 (c) wurde weiter oben bereits erläutert und wird hier nur zur Bequemlichkeit beim Vergleich erneut abgebildet. Aktuiert man mit $f_a = 0.8$ werden kleine Strukturen in der Scherschicht ausgebildet (Abbildung 4.18 d). Diese Strukturen sind nicht in der Lage, eine effiziente Verkürzung der Wiederanlegelänge zu erzielen.

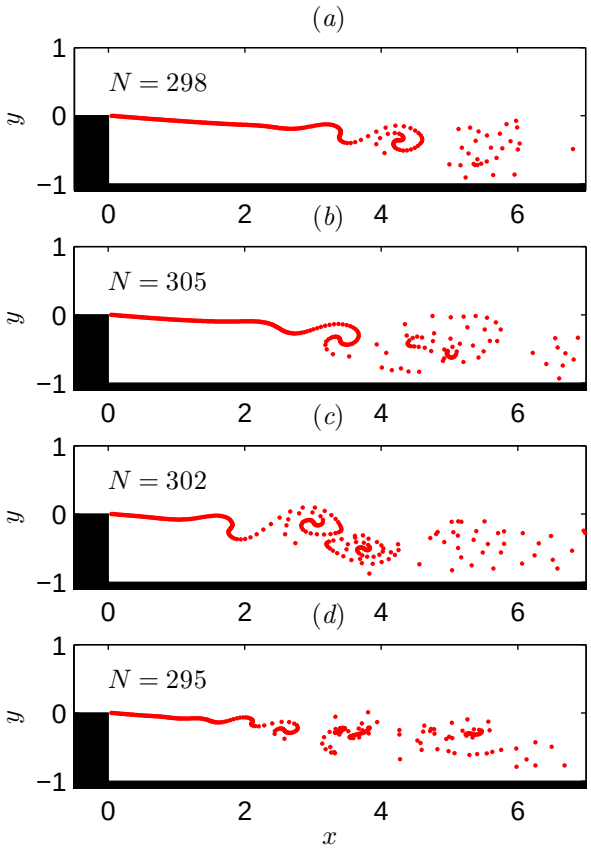


Abbildung 4.18: Scherschichtentwicklung der natürlichen (a) und der aktuierten Strömung (b–d), berechnet mit dem Wirbelverfahren. Die Aktuationsfrequenz entspricht $f_a = 0.2$ (b), $f_a = 0.4$ (c) und $f_a = 0.8$ (d). Die Aktuationsamplitude ist konstant bei $g_{\max} = 0.01$. N gibt die augenblickliche Anzahl der diskreten Wirbel an.

Aus der Sicht des Wirbelverfahren ist die Aktuation mit $f_a = 0.4$ besonders gut geeignet die Wiederanlegelänge zu verkürzen, weil die regelmäßige Ausprägung starker Scherschichtwirbel und die Wirbelpaarung bei $x \approx 3$ zu einer starken abwärts gerichteten Induktion von diskreten Wirbeln stromab führt. Diese gelangen so schneller in Wandnähe als im natürlichen Fall und werden rascher dissipiert. Hierdurch verringert sich die aufwärts gerichtete Induktionswirkung stromab liegender Wirbel. Als Folge kommt es zur frühen Aufrollung der Scherschicht und das Ablösegebiet wird kleiner.

4.3.3 Beurteilung der Modellierung

Das Wirbelverfahren ermöglicht eine ausreichend genaue Wiedergabe der Grobstrukturdynamik und der Aktuationseffekte, um die Auswirkungen der Strömungsbeeinflussung widerzuspiegeln. Ein direkter Reglerentwurf auf der Basis der Wirbelverfahren ist aufgrund der hohen und sich

[2] Garwon, M. (2003) private Mitteilung

ständig ändernden Zahl an Freiheitsgraden (~ 300 Wirbel) kaum gangbar. Stattdessen wird das Wirbelverfahren dazu benutzt, physikalisch motivierte Regelungskonzepte zu entwickeln und auszuprobieren. Eine am Wirbelverfahren erprobte und dann zur Validierung im Experiment implementierte Phasenregelung wird in (Abschnitt 4.4) vorgestellt.

4.4 Phasenregelung im Experiment

Aus der Analyse der Wanddruckdaten des Wirbelverfahrens und der LES (vgl. Abbildung 4.7 *b*) geht hervor, dass sich in den Druckschwankungen ein Wellenzug etwa mit der Konvektionsgeschwindigkeit der Scherschichtwirbel ausbreitet. Aufgrund des Wirbelwachstums und einer leichten Krümmung der Scherschicht wachsen die Fluktuationen zunächst exponentiell an (Becker 2005), erreichen ein Maximum bei ca. 90% der Wiederanlegelänge (Mabey 1972) und fallen dann wieder ab. Die Druckschwankungen an der Wand werden daher, ähnlich einem POD-Modell, durch eine laufende Welle mit in Strömungsrichtung modulierter Hüllkurve modelliert (Abschnitt 4.4.1). Die Phasenlage dieser laufenden Welle definiert die Strömungsphase, die aus Messungen identifiziert (Abschnitt 4.4.2) und für einen geschlossenen Regelkreis zur Verkürzung des Rezirkulationsgebietes im Experiment verwendet wird (Abschnitt 4.4.3).

4.4.1 Definition der Strömungsphase

Die laufende Welle wird durch

$$\begin{aligned} p'_w(x,t) &= p'_{\mathrm{env}}(x)\ \sin\left(\omega\, t + \theta - \frac{2\pi}{\lambda}\, x\right) \\ &= p'_{\mathrm{env}}(x)\ \underbrace{\left[\cos\theta \quad \sin\theta\right]}_{=:\boldsymbol{\theta}^T}\ \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\omega t & -\cos\omega t \\ \cos\omega t & \sin\omega t \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{M}}\ \begin{bmatrix} \cos k_p x \\ \sin k_p x \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.25}$$

modelliert. Hierbei beschreibt $p'_{\mathrm{env}}(x)$ die Einhüllende, $\phi_f = \omega\, t + \theta$ die Strömungsphase und $k_p = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl. Die Strömungsphase setzt sich aus einem deterministischen Anteil $\omega\, t$, der z.B. durch die Aktuationsfrequenz bestimmt wird, und einer nicht-deterministischen Phasendifferenz θ zusammen. Diese Phasendifferenz ergibt sich aus der Summe von Störungen θ_n und Modellfehlern θ_e.

Aus einem Schnappschuss (Abbildung 4.19 *a*) werden momentane Druckwerte p'_w an den Sensorpositionen M_i ermittelt. Aus solchen Schnappschüssen wird mit einer gleitenden Berechnung der lokalen Standardabweichung an jedem Sensor die Einhüllende $p'_{\mathrm{env}}(x_i)$ geschätzt (Abbildung 4.19 *b*). Alternativ kann der auf einem Ekf basierende Wirbelwachstumssensor von Becker (2005) verwendet werden, der zeitlich höher aufgelöst arbeitet. Die Wellenzahl k_p wird durch harmonische Projektion der Druckdaten auf eine Filterdatenbank k_i gemäß

$$P_{r,i} = \sum_j \cos(k_i\, x_j)\, p_n(x_j,t) \tag{4.26}$$

$$P_{\mathrm{i},i} = \sum_j \sin(k_i\, x_j)\, p_n(x_j,t) \tag{4.27}$$

gewonnen, wobei $p_n(x_j,t) = p'_w(x_j,t)/p'_{\mathrm{env}}(x_j,t)$ den mit der Einhüllenden normierten Wanddruck darstellt. Dann wird der energiereichste Wellenzug gewählt, d.h. die Wellenzahl k_m mit dem höchsten Betrage $\sqrt{P_{r,m}^2 + P_{\mathrm{i},m}^2}$. Die zugehörige Wellenlänge wird zeitlich mit einem Tiefpass gefiltert, dessen Eckfrequenz etwa eine Größenordnung unter der Aktuationsfrequenz liegt:

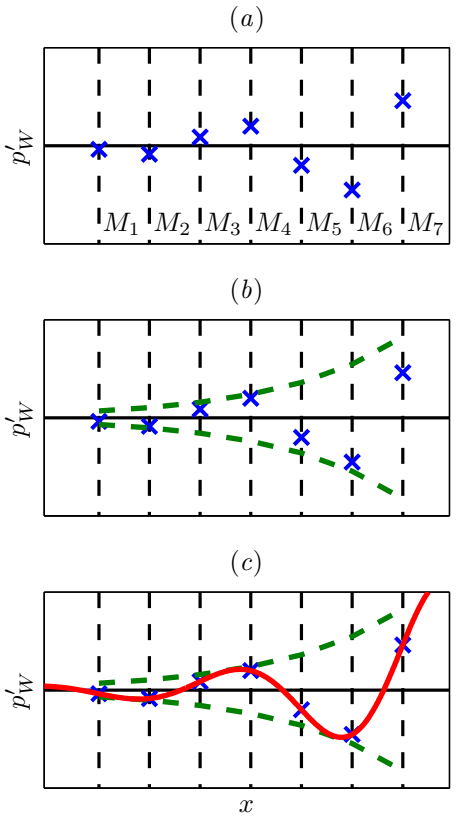


Abbildung 4.19: Rekonstruktion der Strömungsphase aus Wanddruckdaten des Wirbelverfahrens (siehe Text).

$$\lambda(t_k) = \lambda(t_{k-1})\, F_\lambda + \lambda_m \left(1 - F_\lambda\right), \quad \text{mit} \quad F_\lambda = \frac{T_\lambda}{T_\lambda + \Delta t}\,.$$

In der Filterdatenbank werden nur Wellenlängen abgelegt, die ganzahlige Vielfache des Mikrofonabstandes sind. Als kleinste Wellenlänge wird der dreifache Mikrofonabstand gewählt, nicht der nach Shannon (1949) mindestens erforderliche zweifache Abstand.

Nun muss der nicht-deterministische Teil $\theta = \theta_n + \theta_e$ der Strömungsphase betrachtet werden. Hierzu wird zunächst die Phasenlage des energiereichsten Wellenzuges k_m um den deterministischen Anteil korrigiert:

$$\begin{aligned} \text{Mit} \quad \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{M} &= [P_{r,m} \quad P_{\mathrm{i},m}] \\ \text{und} \quad \boldsymbol{\theta}^T &= [P_{r,m} \quad P_{\mathrm{i},m}]\, \mathbf{M}^{-1} =: \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} \end{bmatrix} \\ \text{folgt} \quad \theta_m &= \arctan \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\,. \end{aligned}$$

Die aktuelle Schätzung von θ wird auf der Basis von θ_m durch Tiefpassfilterung mit einer Eckfrequenz im Bereich der Aktuationsfrequenz korrigiert:

$$\theta(t_k) = \theta(t_{k-1})\, F_\theta + \theta_m \left(1 - F_\theta\right), \quad \text{mit} \quad F_\theta = \frac{T_\theta}{T_\theta + \Delta t}\,.$$

Mit diesen Größen wird die laufende Welle berechnet (Abbildung 4.19 *c*).

4.4.2 Schätzung der Strömungsphase

Die Phasenschätzung nach obigem Schema stellt für mit dem Wirbelverfahren ermittelte Wanddruckverteilungen keine Schwierigkeit dar. Dies liegt darin begründet, dass die berechneten Wanddrücke tatsächlich gut mit der Modellvorstellung der laufenden Welle übereinstimmen und dass beliebig viele, rauschfreie Sensoren verwendet werden können. Eine größere Herausforderung stellt dagegen die Umsetzung der Phasenschätzung im Experiment dar. Sie wird auf dem DSP implementiert und bei $Re_H = 4\,000$ für die aktuierte Strömung in Echtzeit eingesetzt. Durch die Aktuation werden die Strukturen in der Strömung getaktet. Als Aktuationsfrequenz wird $f_a = 0.36$ gewählt.

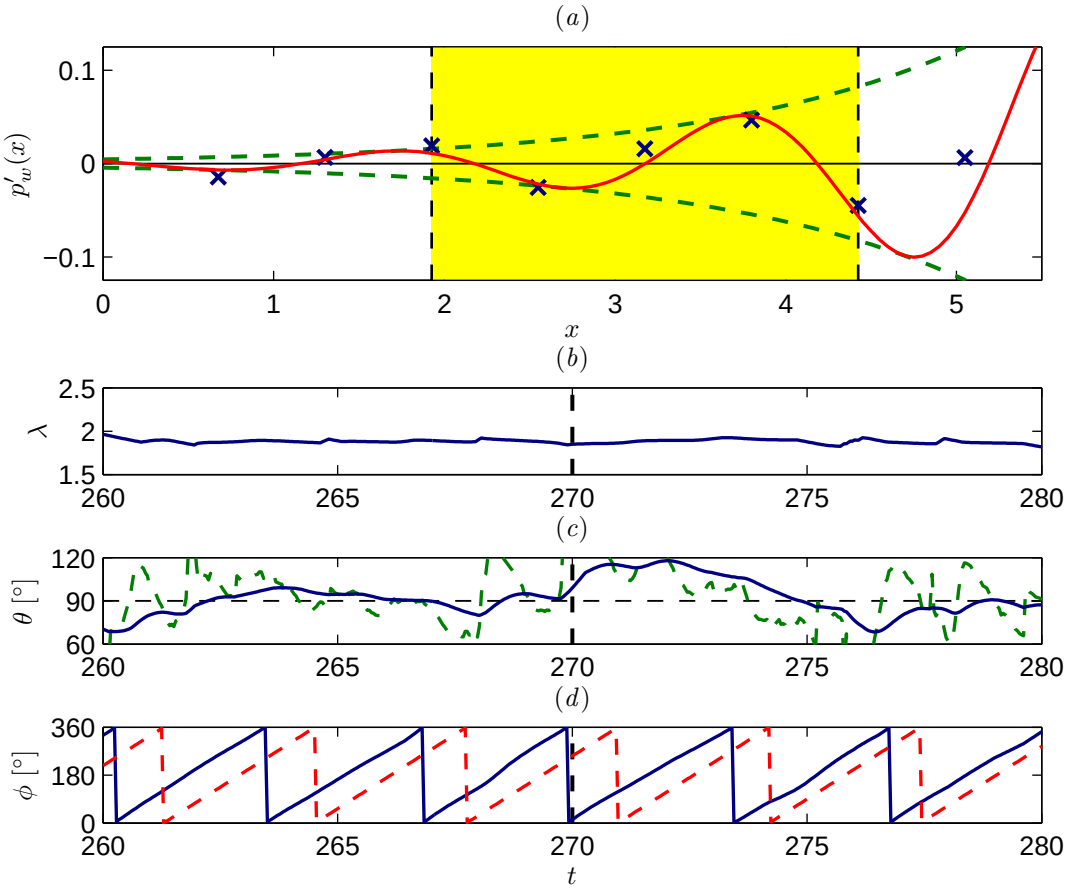


Abbildung 4.20: Rekonstruktion der Wanddruckfluktuationen als laufende Welle aus experimentellen Daten der aktuierten Strömung ($f_a = 0.36$, $g_{\max} = 0.2$) in Echtzeit. Die laufende Welle (rot, durchgezogen), Sensorinformationen ($\times$) und geschätzte Einhüllende (grün, gestrichelt) eines Schnappschusses zum Zeitpunkt $t = 270$ sind in (a) dargestellt. Der schraffierte Bereich markiert die zur Korrektur eingesetzten Sensoren. Das zeitliche Verhalten der Schätzgrößen wird in (b–d) widergegeben: Die geschätzte Wellenlänge (b), die aus Messungen ermittelte Phasenlage des energiereichsten Wellenzuges (grün, gestrichelt) und die gefilterte Phasendifferenz (blau, durchgezogen) des Modells (c), sowie die Aktuations- (rot, gestrichelt) und Strömungsphase (blau, durchgezogen) in (d).

In Abbildung 4.20 (a) ist die Rekonstruktion der laufenden Welle anhand eines Schnappschusses dargestellt. Die Korrektur der Phasen- und Wellenlängenschätzung erfolgt nur mit Sensorda-

ten mit $2 \leq x_s \leq 4.5$. Man erkennt eine gute Repräsentation des Wanddrucks $p'_w(x)$ als laufende Welle für $x < 5$. Die geschätzte Wellenlänge in Abbildung 4.20 (b) schwankt um $\lambda \approx 1.8$. Dieser Wert ist etwas höher, als mit $\lambda = 1/2f_a = 1.6$ vermutet. Die Konvektionsgeschwindigkeit ist mit $U_c = 1/2$ um 10% zu gering geschätzt. Zwischen Aktuationsphase ϕ_a und Strömungsphase ϕ_f liegt bei gesteuerter Beeinflussung ein Phasenversatz von grob $\theta \approx 90°$ (Abbildung 4.20 c, d) vor. Rechnet man die laufende Welle nun auf den Ursprung an der Stufenkante zurück ($x = 0$), so ergibt sich genau dieser Phasenversatz zwischen dem Aktuationssignal und dem virtuellen Drucksignal an dieser Stelle. Dies entspricht dem in Abbildung 4.5 (b, c) beschriebenen Verhalten: Zwischen Hitzdrahtsignalen oberhalb der Scherschicht und den Wanddruckfluktutationen einerseit tritt ein Phasenversatz von 180° auf. Andereseits beobachtet man einen Phasenversatz von $-90°$ zwischen Aktuationssignal und auf den Ursprung zurückgerechnetem Hitzdrahtsignal.

4.4.3 Strömungsregelung durch Phasenrückkopplung

Der Zustandsschätzer wird nun um eine Phasenrückkopplung erweitert. Hierzu wird die Phase des Aktuators nicht mehr vorgegeben, sondern aus der Strömungsphase bestimmt, zuzüglich dem in Abschnitt 4.4.2 beobachteten Phasenversatz von 90°. Zusätzlich soll durch die Rückkopplung eine Phasendifferenz $\Delta\phi_a$ erzwungen werden. Das Stellsignal ergibt sich damit zu

$$g = g_{\max} \sin \phi_a \,, \quad \text{mit} \quad \phi_a = \phi_f + \frac{\pi}{2} + \Delta\phi_a \,. \tag{4.28}$$

Als Aktuationsfrequenz wird nun $f_a = 0.18$ gewählt. Diese Frequenz erzielt bei einer Aktuationsamplitude von $g_{\max} = 0.2$ die größte Verkürzung (Abbildung 4.4). Die relativ niedrige Aktuationsfrequenz korrespondiert mit einer großen Wellenlänge. Hierdurch stehen mehr Sensoren zur Auflösung der Wellenlänge zur Verfügung. Ansonsten werden die gleichen Parameter wie in Abschnitt 4.4.2 verwendet.

Im Experiment wird nun eine Variation der erzwungenen Phasendifferenz durchgeführt. Hierzu wird $\Delta\phi_a$ in Inkrementen von 30° zwischen $-180°$ und $+180°$ modifiziert und die Wiederanlegelänge bestimmt. In Abbildung 4.21 erkennt man, dass sich die Effizienz der Aktuation hinsichtlich der Verkürzung der Wiederanlegelänge für $\Delta\phi_a > 0°$ gegenüber der gesteuerten Beeinflussung um bis zu 10% verbessern lässt. Wählt man dagegen $\Delta\phi_a < 0°$ verlängert sich das Rezirkulationsgebiet um 10%.

Die Schätzung der Strömungsphase ist nicht robust. Nur in einem Bereich von $\Delta\phi_a = \pm 60°$ lässt sich die Phase zuverlässig bestimmen. Bei höheren Phasendifferenzen erfolgen die Änderungen von λ_m und besonders θ_m zu schnell für die gewählten Tiefpassfilter. Die Schätzung hinkt der tatsächlichen Strömungsphase hinterher, so dass nicht die nominale Phasendifferenz $\Delta\phi_a$ erreicht wird. Diese Tendenz nimmt mit betragsmäßig hohen Phasendifferenzen stark zu. Aus diesem Grund lassen sich $|\Delta\phi_a| > 60°$ nur durch eine Erhöhung der Eckfrequenzen der Tiefpassfilter realisieren. Dies führt aber zu keiner wirklichen Verbesserung des Verfahrens, da die dann berechneten Stellgrößen so stark verrauscht sind, dass keine harmonische Anregung mehr gewährleistet ist.

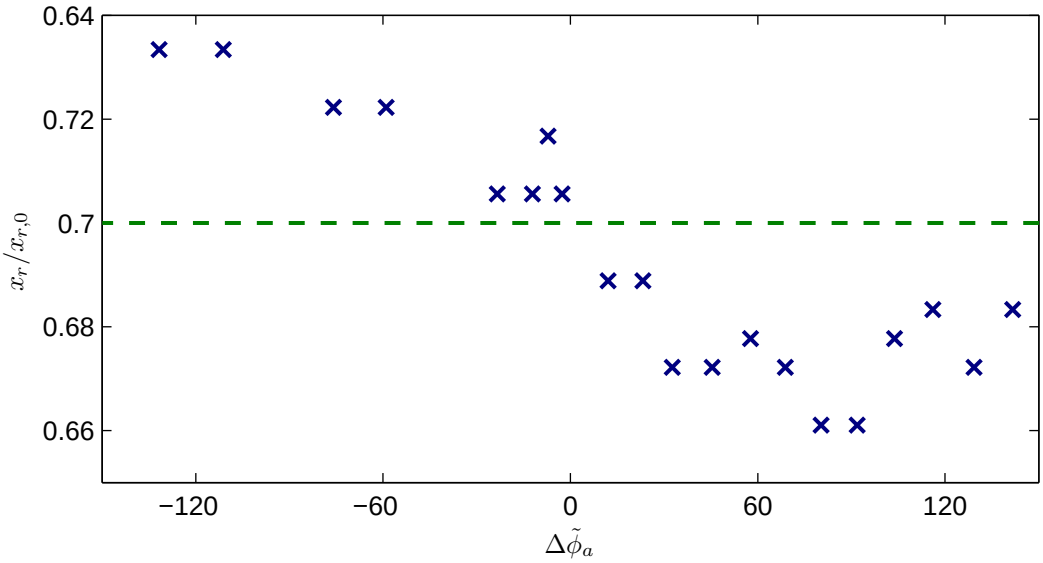


Abbildung 4.21: Experimentelle Strömungsregelung durch Phasenrückkopplung an der rückwärts gewandten Stufe. Dargestellt ist die Änderung der Wiederanlegelänge durch das Erzwingen von Phasendifferenzen $\Delta\phi_a$ ($\times$) im Vergleich zur gesteuerten Strömungsbeeinflussung (grün, gestrichelt). Da die nominale Differenz $\Delta\phi_a$ nicht immer eingehalten wird, ist stattdessen die tatsächlich realisierte Differenz $\Delta\tilde{\phi}_a$ auf der Abszisse aufgetragen. Durch Rückkopplung der Strömungsphase lässt sich die Wiederanlegelänge für $\Delta\phi_a > 0$ weiter verkürzen.

Die Definition einer durch zeitliche und räumliche Messungen bestimmten Strömungsphase lässt bei gesteuerter Beeinflussung eine gute Schätzung des Strömungszustandes zu. Bei Rückkopplung mit einer zusätzlichen Phasendifferenz jedoch weicht die Strömung, insbesondere bei hohen Phasendifferenzen, immer mehr vom modellierten Verhalten ab. Neu erzeugte Wirbel laufen den vorausgehenden Wirbeln nun früher oder später nach, wodurch die Modellvorstellung einer laufenden Welle gestört wird. Gerade in einer Modulation des Abschwimmens der Wirbel durch eine Phasenregelung liegt jedoch die Möglichkeit einer Verbesserung der Regelung. Eine neue Definition der Strömungsphase wird daher im nächsten Abschnitt anhand einer Modellreduktion erarbeitet.

4.5 Modellreduktion

Die Definition der Strömungsphase in Abschnitt 4.4.1 ist für eine Phasenregelung nicht flexibel genug, weil sie eine räumliche Ausbreitung der Druckfluktuationen in Form eines Wellenzuges mit zu einem Zeitpunkt konstanter Wellenlänge vorschreibt. Effekte, die eine Verkürzung oder Verlängerung des Abstandes zwischen zwei Wirbeln bewirken, wie etwa Wirbelpaarung oder die oben beschriebene Phasenregelung, können sich in dem Modell der laufenden Welle nicht niederschlagen. Aus diesem Grunde wird ein Wirbelverfahren durch eine Modellreduktion soweit vereinfacht, dass es zur direkten Schätzung der aktuellen Wirbelpositionen verwendet werden kann.

Die Grobstrukturen werden in diesem vereinfachten Modell direkt durch einzelne diskrete Wirbel und nicht mehr durch einen Wirbelhaufen dargestellt (Coller & Gururaja 2004). Erreicht wird dies zunächst durch eine radikalere Wahl der Parameter für die Wirbelverschmelzung (vgl. Abschnitt 4.2.8): Hierzu wird $x_{m,0} = 2$ und $r_{m,\mathrm{crit}} = \mathrm{Min}\left\{\mathfrak{Re}\left\{z_n\right\} - x_{m,0},\ \frac{\lambda}{2}\right\}$ gesetzt, wobei λ die Wellenlänge der natürlichen oder einer aktuierten Wirbelfolge sein kann. Dadurch wird nach einem kurzen Anlaufbereich $x < x_{m,0}$ mit einer fein diskretisierten Scherschicht jeder Wirbel von einem Scherschichtwirbel geschluckt, bis dieser etwa den Abstand einer halben Wellenlänge zum Ende der Scherschicht hat. Dann bildet sich ein neuer Wirbel aus. Dieses Verfahren funktioniert für die natürliche Strömung recht gut. Das eigentliche Ziel ist jedoch die Formulierung eines niederdimensionalen Modells für die Strömungsregelung. Hierzu muss das Modell

- Aktuationseffekte auflösen;
- hinsichtlich seines Zustandes durch Sensorsignale korrigierbar sein.

Diese Anforderungen werden von dem bisherigen Ansatz nicht erfüllt.

Für ein reduziertes Modell der aktuierten Strömung ($f_a = 0.4$, $g_{\max} = 0.003$) wird als Strömungsphase der Phasenwinkel des Drucksignals bei $x_s = 2$ definiert. Mit der geschätzten Konvektionsgeschwindigkeit $U_c = 1/2$ und der Periodenlänge $T_a = 1/f_a = 2.5$ ergibt sich eine Phasenkorrektur von $\Delta\phi_0 = 2\pi\, x_s/(U_c\, T_a)$ für $x = 0$. Damit lässt sich folgende Beziehung für das Aktuationssignal anschreiben:

$$\begin{aligned} g &= g_{\max} \sin\phi_a\,, \\ \text{mit}\quad \phi_a &= \phi_f - \frac{2\pi}{\lambda}\, x_s + \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Nach den Erkenntnissen aus Abschnitt 4.1.1 und Abschnitt 4.4.2 taktet die Aktuation die Entstehung neuer Wirbel. Rechnet man von der Stufenkante auf den Ort der Wirbelaufrollung stromab, z.B. gerade bei x_s, so kann die Entstehung direkt durch die geschätzte Strömungsphase gesteuert werden. Das in Abschnitt 4.2.5 vorgestellte Verfahren zur Wirbelproduktion wird nur noch zur Abschätzung der Produktionsrate verwendet. Ansonsten wird die Wirbelproduktion als periodisches Ereignis folgendermaßen realisiert:

Ein Wirbel wird bei $\phi_f = 90°$ an der Stelle $(x_s,-0.2)$ eingesetzt (mittlere Scherschichtposition bei x_s nach Abschnitt 4.2.6) und festgehalten (Abbildung 4.22 *a*). Die Zirkulation dieses Wirbels wächst derweil mit der berechneten Produktionsrate an (Abbildung 4.22 *b*). Wenn erstmalig in einer Periode $\phi_f > 270°$ gilt, wird der Wirbel losgelassen (Abbildung 4.22 *c, d*), die Zirkulation wächst aber bis zum Ende der Aufrollungsperiode ($\phi_f = 450° = 90°$) an (Abbildung 4.22 *e*).

Der Anlaufbereich der ebenen Scherschichtentwicklung wird durch $N_{v,f}$ feststehende diskrete Wirbel im Bereich $0 < x < x_s$ realisiert. Die in Abschnitt 4.2 beschriebenen Kernwachstums- und Dissipationsmodelle werden weiterverwendet. Eine Wirbelverschmelzung ist nicht erforderlich.

Die Phasenschätzung am Sensor bei $x_s = 2$ erfolgt mit einem EKF. Hierzu wird das lokale zeitliche Drucksignal als sinusförmiger Wellenzug mit den nomimal konstanten Parametern Frequenz f, Amplitude $p'_{w,\max}$ und Offset $p_{w,0}$ und dem linear zunehmenden Phasenwinkel $\phi_f = 2\pi f\, t + \phi_{f,0}$ approximiert (Tadmor & Banaszuk 2002):

$$\mathbf{a} = [f \quad \phi_f \quad p'_{w,\max} \quad p_{w,0}]^T \tag{4.29}$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) = [0 \quad 2\pi a_1 \quad 0 \quad 0]^T \tag{4.30}$$

$$s = \mathrm{h}(\mathbf{a}) = a_3 \sin a_2 + a_4\,. \tag{4.31}$$

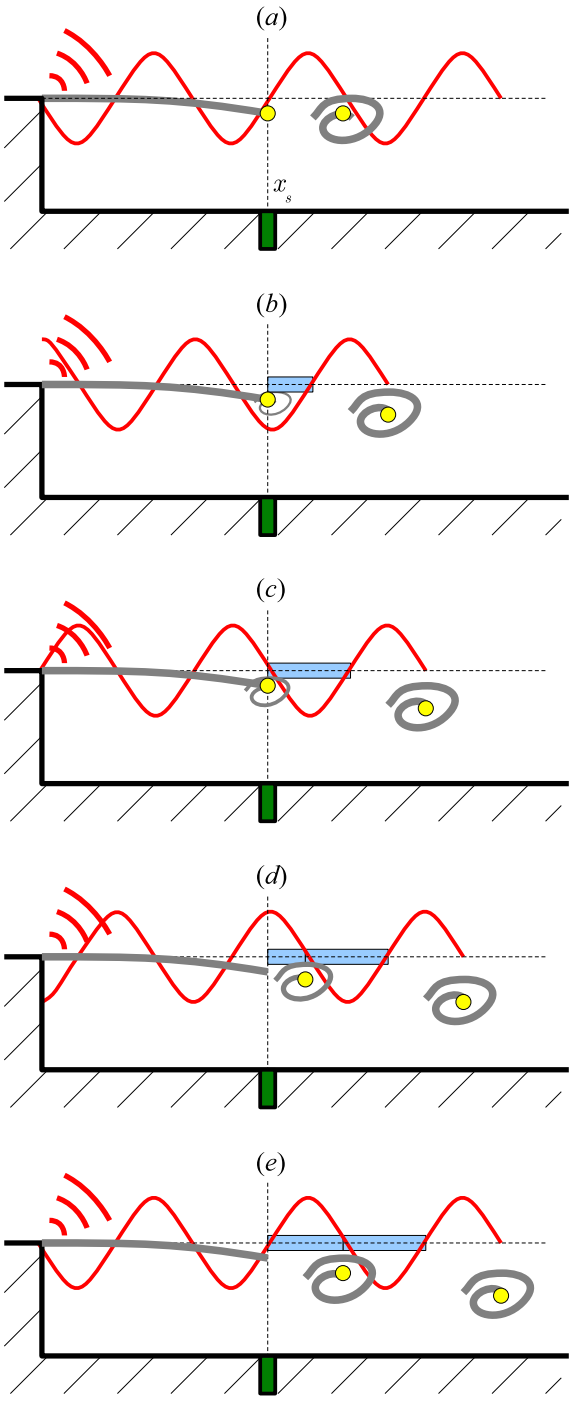


Abbildung 4.22: Vereinfachtes Wirbelproduktionsmodell für die Stufenströmung mit Scherschichten (dicke graue Linie), Wirbelpositionen (○), dem Aktuationssignal als räumlichen Wellenzug (rot, durchgezogen) und dem Sensor bei x_s. Die getönten Bereiche markieren die durch einen Wirbel zusammengefassten Abschnitte der Scherschicht (siehe Text).

Die geschätzte Phasenlage des Modells entspricht der Strömungsphase ϕ_f.

In Abbildung 4.23 (*a, b*) ist das reduzierte Modell parallel zur schwach aktuierten Strömung dargestellt. Lediglich durch den Abgleich der Phasenlage der Druckfluktuationen an einer Stelle, nämlich bei $x_s = 2$ ab $t = 0$, ist bereits eine sehr gute Grobstrukturverfolgung mittels des Wirbelverfahrens möglich, wie der Schnappschuss zum Zeitpunkt $t = 10$ verdeutlicht. Die Druckschwankungen bei $x = 3$, die vom

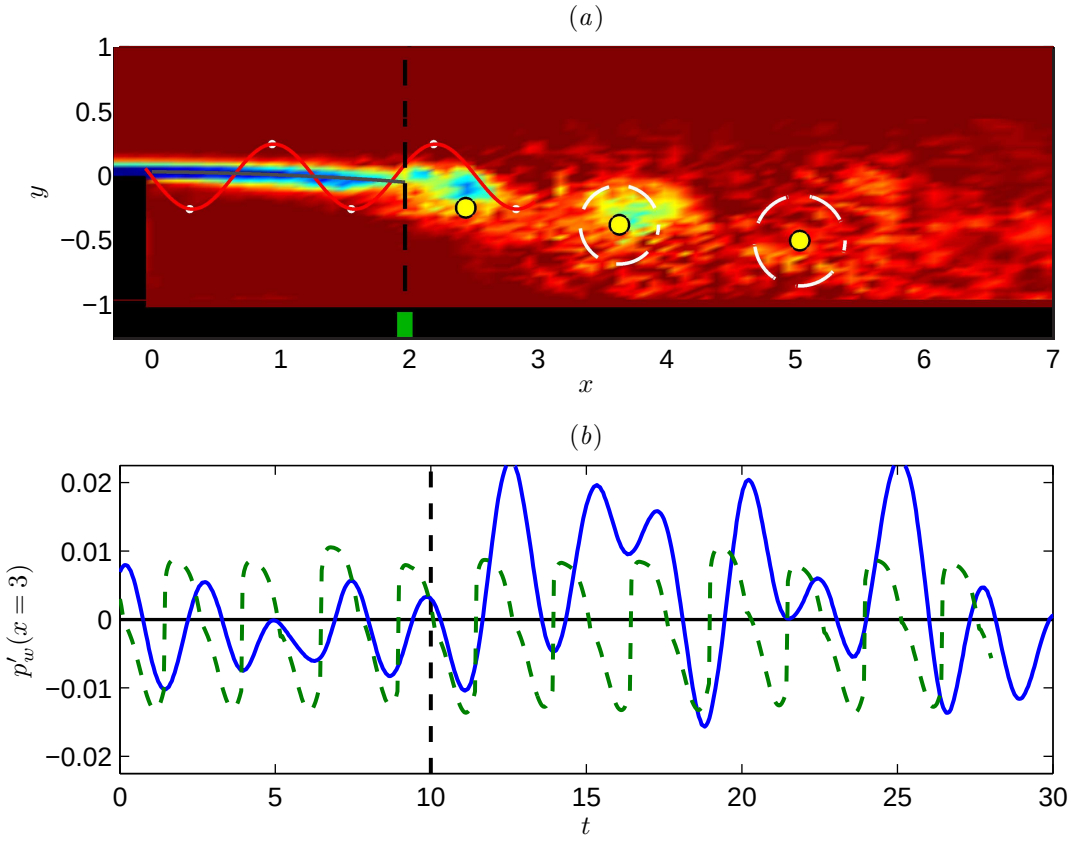


Abbildung 4.23: Vergleich der schwach aktuierten Strömung, berechnet mit LES und dem reduzierten Wirbelverfahren ($N_{v,f} = 20$). In (a) sind die Wirbelpositionen ($\circ$) und Kernradien (gestrichelt) über die Wirbelstärkeverteilung (Farbskala wie in Abbildung 4.7 a) der LES gezeichnet (siehe auch Beschreibung von Abbildung 4.22). In (b) ist der zeitliche Verlauf der Wanddruckschwankungen von LES (blau, durchgezogen) und Wirbelverfahren (grün, gestrichelt) an der Stelle $x = 3$ dargestellt. Die dicke senkrechte Linie bei $t = 10$ markiert den Zeitpunkt des obigen Schnappschusses. Die Phasenkorrektur des Modells beginnt bei $t = 0$ über die Sensorinformation bei $x_s = 2$. Die Druckdaten des Wirbelverfahrens für $t > 10$ sind auf der Basis der momentanen Schätzung der Strömungsphase prädizierte Werte.

Wirbelverfahren vorhergesagt werden, stimmen in Amplitude und Phasenlage grob mit der LES überein. Die Druckdaten des Wirbelverfahrens für $t > 10$ sind auf der Basis der momentan geschätzten Strömungsphase prädizierte Werte. Die genaue Signalform und das Oszillieren der Ablöseblase wird von dem reduziertem Modell nicht aufgelöst.

Eine Berücksichtigung anderer Aktuationsamplituden und -frequenzen ist mit nur einem Sensor nicht möglich. Mit mehreren Sensoren und dem Wirbelwachstumssensor von Becker (2005) könnte der Beginn des exponentiellen Wachtums der Scherschichtwirbel in einem empirischen Modell mit der Aufrollung des ersten Scherschichtwirbels verbunden und somit eine aktuationsabhängige Wahl von x_s ermöglicht werden.

Eine Umsetzung des reduzierten Modells im Experiment und die Erweiterung für andere Betriebspunkte wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht durchgeführt. Stattdessen wird das Konzept der Phasenregelung an der Strömungsregelung für einen stumpfen Körper weiterverfolgt.

Kapitel 5

Untersuchung der Strömung um einen stumpfen Körper

Die Untersuchung der Umströmung stumpfer Körper, wie etwa von Platten, Kreiszylindern, Kugeln oder Quadern ist von großer Bedeutung, weil diese Konfigurationen als generische Formen von technischer Relevanz betrachtet werden können. Als stumpfe Körper werden Körper bezeichnet, deren Abmessungen quer zur Strömung gleich oder größer als die Längsausdehnung sind und deren Widerstand überwiegend druck- und nicht reibungsinduziert ist. Nominal zweidimensionale stumpfe Körper weisen eine Nachlaufströmung auf, die durch an der Hinterseite wechselseitig ablösende Wirbel charakterisiert ist (von Kármán'sche Wirbelstraße). Eine der bekanntesten experimentellen Untersuchungen des Nachlaufs eines Fahrzeugs wurde von Ahmed *et al.* (1984) für verschiedene Rampenwinkel eines Fließhecks durchgeführt. Im Sonderforschungsbereich 557 wird diese Konfiguration experimentell und numerisch auf Möglichkeiten der Widerstandssenkung durch aktive Beeinflussung untersucht. Der Grenzfall eines Heckwinkels von 90° (stumpfes Heck) stellt die Approximation eines Busses oder Lastwagens dar. Diese und ähnliche Fälle, mit und ohne Berücksichtigung des Bodeneffektes, ist von einer Vielzahl von Autoren experimentell und numerisch untersucht worden (z.B. Hucho & Sovran 1993; Bearman 1997; Krajnović & Davidson 2003).

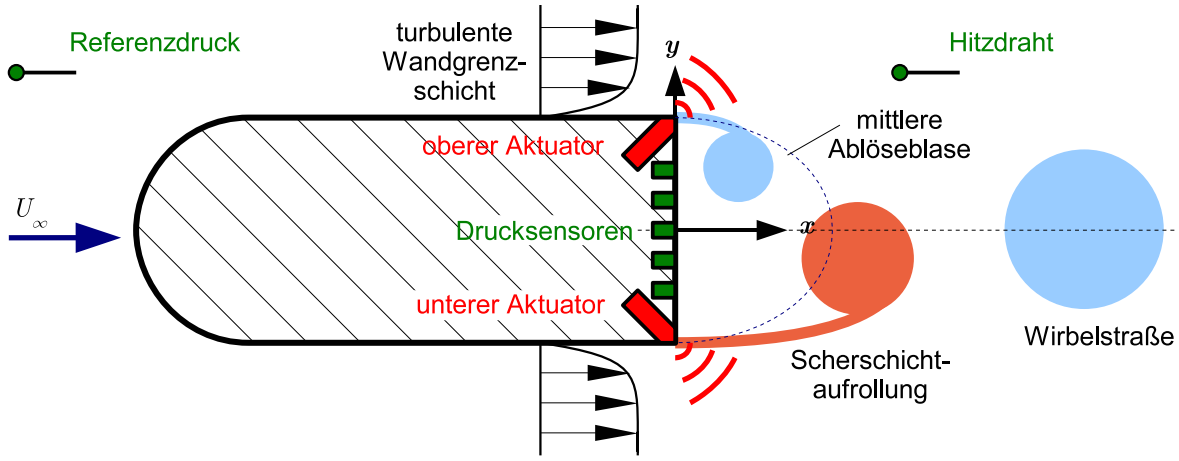


Abbildung 5.1: Prinzipskizze der Strömung um den stumpfen Körper.

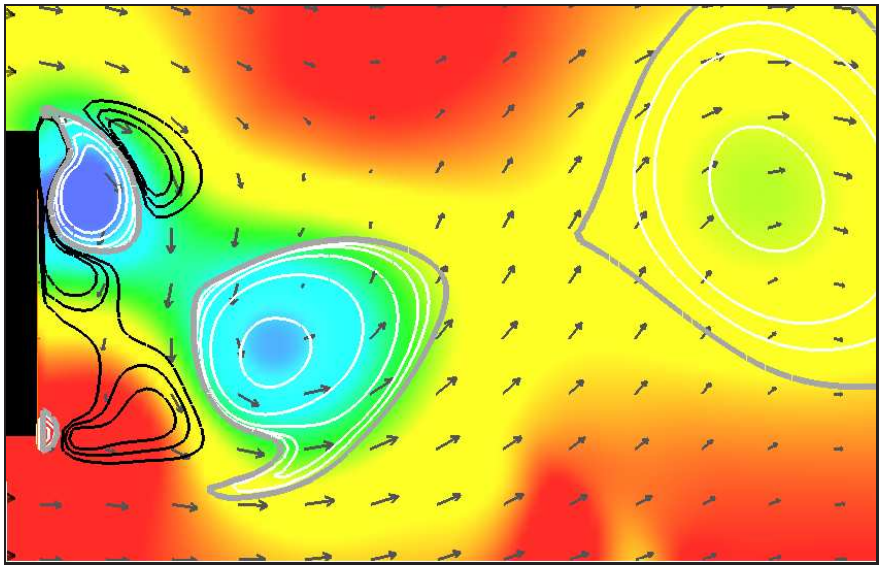


Abbildung 5.2: Farbkodiertes Druckfeld (dunkelblau: niedriger Druck, dunkelrot: hoher Druck) und Geschwindigkeitsvektoren im unbeeinflussten Nachlauf des stumpfen Körpers, berechnet mit der uRANS-Methode. Die Linien stellen Isolininen von Q dar (schwarz $Q < 0$, grau $Q \approx 0$, weiß $Q > 0$). Die Position der abgelösten Wirbel ist durch ein Druckminimum gekennzeichnet. Der körpernahe Wirbel an der oberen Kante führt zu einer Abnahme des Drucks über ca. 50% der Basis.

In dieser Arbeit wird speziell ein länglicher stumpfer Körper mit stumpfen Heck und großer spannweitiger Ausdehnung ohne Bodeneffekt untersucht. Die charakteristischen Größen zur Entdimensionalisierung der konstituierenden Gleichungen sind die Anströmgeschwindigkeit U^*_∞ und die Körperhöhe H^*, sowie ggf. die Dichte ρ^* von Luft. Die Strömung wird in einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung im vertikalen und horizontalen Mittelpunkt des Hecks (Basis) beschrieben (Abbildung 5.1).

Die von links eintreffende Strömung wird vom Körper nach oben und unten verdrängt. An den Wänden bildet sich eine Wandgrenzschicht aus, die nach einer gewissen Lauflänge einen turbulenten Zustand erreicht. Wie bei der Stufenströmung kann das Fluid dem abrupten Wegknicken der Wandkontur am Heck des Körpers nicht folgen und löst ab. Es bilden sich zwei Scherschichten aus, die zu Scherschichtwirbeln aufrollen. Aufgrund einer absoluten Nachlaufinstabilität (Huerre & Monkewitz 1990) kommt es zu alternierendem Aufrollen und Abschwimmen von Wirbeln von der oberen und unteren Kante. Es entsteht eine von Kármán'sche Wirbelstraße. Die Frequenz der Wirbelfolge liegt bei länglichen stumpfen Körpern im Bereich von $f_{\text{inst}} \approx 0.26$ (Leder 1992). Im zeitlichen Mittel ergibt sich im unmittelbaren Nachlauf des Körpers eine Ablöseblase mit einem Rezirkulationsgebiet. Die Ausdehnung der Ablöseblase in Strömungsrichtung ist relativ klein ($x < 1$).

Das Ziel der Untersuchung ist die Senkung des druckinduzierten Widerstandes durch eine geeignete Strömungsregelung. Zur Erfassung des Basisdrucks dient ein Feld von Drucksensoren auf dem Heck des Körpers. Die Beeinflussung der Strömung erfolgt über separat steuerbare Aktuatoren an den beiden Ablösekanten.

Abbildung 5.2 zeigt das mit der uRANS-Methode[1] berechnete Druckfeld im Nachlauf für einen ausgewählten Schnappschuss. Nahe der oberen Kante und etwa eine Körperhöhe stromab sind zwei ausgeprägte Druckminima zu erkennen. Ein weiteres, aber deutlich schwächeres lokales Minimum tritt bei ca. drei Körperhöhen auf. Diese Tiefdruckgebiete korrelieren direkt mit der Position von Wirbeln, wie die physikalische Interpretation des Quellterms Q der Druck-Poisson-Gleichung (2.49) in Abschnitt 2.2.3.3 zeigt. Die Wanddruckschwankungen und damit der Basisdruck werden vom Druckfeld des körpernahen Wirbels bestimmt. Tatsächlich erstreckt sich die Abnahme des Drucks, die durch den gerade abgelösten Wirbel induziert wird, über die halbe Basis. Das Regelungsziel kann nur durch eine Anhebung des Basisdrucks erreicht werden. Da dieser wie eben gezeigt mit den Grobstrukturen im nahen Nachlauf zusammenhängt, läuft die Regelung auf eine Beeinflussung dieser Strukturen hinaus. Vor der Reglersynthese erfolgt eine Beschreibung des experimentellen Aufbaus (Abschnitt 5.1) und des Wirbelverfahrens (Abschnitt 5.2), sowie eine Analyse des Einflusses der Aktuation auf die Grobstrukturen in Abschnitt 5.3. Aus den Folgerungen wird dann ein physikalisch motivierter Phasenregler abgeleitet. Die experimentellen Resultate werden in Abschnitt 5.4 vorgestellt. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Modellreduktion in Abschnitt 5.5, analog zu dem in Abschnitt 4.5 vorgestellten Verfahren für die Stufenströmung.

5.1 Experimenteller Aufbau und Voruntersuchung

Alle Experimente[2] zum stumpfen Körper werden in einem saugenden Windkanal des Instituts für Strömungsmechanik und Technische Akustik durchgeführt. Die Dimensionen der geschlossenen Messstrecke sind $l^* = 2500$ mm, $h^* = 555$ mm und $w^* = 550$ mm in Strömungs-, transversaler und spannweitiger Richtung. Der stumpfe Körper hat die Länge $L^* = 262$ mm, die Höhe $H^* = 72$ mm und die gleiche spannweitige Ausdehnung wie der Windkanal ($W^* = w^*$) (Abbildung 5.3). In der Nähe der gerundeten Nase sind Stolperdrähte angebracht, um den laminar-turbulenten Umschlag der Grenzschichten anzuregen. Der Körper ruht auf zwei Aluminiumstäben und ist vertikal zentriert im Windkanal eingebaut. Bei eingebautem Körper ist die geometrische Verblockung des Windkanals mit etwa 13.3% recht hoch. Dies macht eine Verblockungskorrektur der Ergebnisse erforderlich, um eine Vergleichbarkeit der Resultate mit Literaturangaben zu ermöglichen. Die Anströmgeschwindigkeit $U^*_{\infty,c} = U^*_\infty \sqrt{B_c}$ wird gemäß der von Mercker (1980) beschriebenen Methode korrigiert. Die Korrekturfaktoren B_c werden experimentell bestimmt. Die maximale Anströmgeschwindigkeit des Windkanals beträgt 20 ms^{-1} mit einem Turbulenzgrad von weniger als 0.5%. Damit lassen sich Versuche mit Reynolds-Zahlen bezogen auf die Körperhöhe im Bereich von 23 000 bis 70 000 durchführen.

Die Anregung der Strömung wird durch Aktuatoren an der Ober- und Unterkante ermöglicht. Sie sind, wie bei der Stufe, durch Lautsprecher-Schlitz-Systeme realisiert. Die Schlitzweite

[1] Scouten, J. (2007) private Mitteilung

[2] Die Experimente wurden freundlicherweise von Lars Henning durchgeführt. Eine detailliertere Beschreibung der Messtechnik und des Versuchsaufbaus findet sich in seiner Dissertation (Henning 2008).

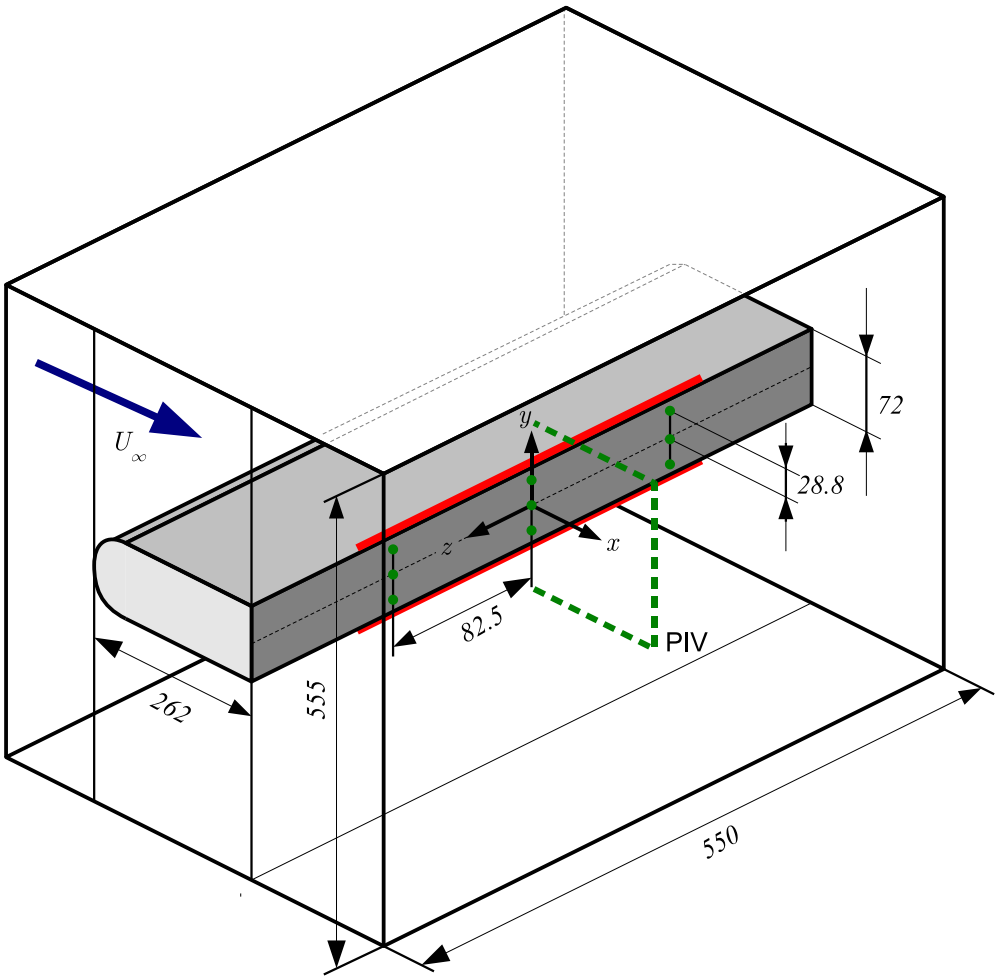


Abbildung 5.3: Schematische Skizze des experimentellen Aufbaus mit den Abmessungen der Messstrecke und des stumpfen Körpers, sowie den Aktuatoren und Sensorpositionen.

beträgt $s^* = 1\,\mathrm{mm}$ und die Schlitze erstrecken sich über die halbe Kanalbreite. Die Aktuatoren sind so kalibriert, dass die Stellgröße g der Ausströmgeschwindigkeit in der Schlitzmitte entspricht. Durch harmonische Stellgrößen $g_{t,b} = g_{\max} \sin\left(2\pi\, f_a\, t\right)$ wird von den Aktuatoren ein periodisches Ausblasen und Einsaugen erzeugt. Der Aufwand der Aktuation wird über einen dimensionslosen Anregungs- oder Impulsbeiwert

$$c_\mu = 2\frac{s^*}{H^*}\frac{(u^*_{a,\mathrm{rms}})^2}{(U^*_{\infty,c})^2}\,, \tag{5.1}$$

bewertet. Hierbei ist $u^*_{a,\mathrm{rms}} = g_{\max}/\sqrt{2}$ die Effektivgeschwindigkeit, die der Aktuator erzielt. Der Faktor 2 kommt dadurch zustande, dass zwei Aktuatoren verwendet werden.

Der Druck an der Basis wird von 3×3 Differenzdrucksonden aufgenommen, die in drei Reihen bei $y^* = \{-32, 0, 32\}$ mm und $z^* = \{-82, 0, 82\}$ mm montiert sind. Die Drucksonden sind kalibriert und temperaturkompensiert. Der Referenzdruck wird stromauf des Körpers gemessen. Der Strömungswiderstand des Körpers wird direkt über Dehnungsmessstreifen an den Aluminiumstäben erfasst. Basisdruck und Widerstand werden durch dimensionslose Druck- und

Widerstandsbeiwerte

$$c_p(y,t) = \frac{\Delta p^*}{\rho^* \, (U^*_{\infty,c})^2/2}\,,$$
$$c_D(t) = \frac{F^*_x}{\rho^* \, (U^*_{\infty,c})^2 \, H^* \, W^*/2}\,,$$

beschrieben. Dabei ist Δp^* die momentane Druckdifferenz zwischen dem an der Basis montierten Sensor und der Referenzdrucksonde (siehe Abbildung 5.1), F^*_x ist die gemessene Widerstandkraft. Zeitlich gemittelter Basisdruck und Widerstand werden durch $\overline{c}_p(y)$ bzw. $\overline{c}_D$ gekennzeichnet. Wird der Druck über die gesamte Basis räumlich gemittelt, so wird dies durch $\langle c_p(t) \rangle$ angezeigt. Für die Bestimmung von Spektren und Einströmprofilen wird ein Hitzdraht bei $(x^*, y^*) = (72, 50)$ mm bzw. bei $(x^*, y^*) = (-0.7, 36)$ mm im Mittelschnitt verwendet.

PIV-Messungen werden ebenfalls im Mittelschnitt ($x^* \in [0, 144]$ mm, $y^* \in [-58, 58]$ mm und $z^* = 0$ mm) bei $Re_H = 23\,000$ mit einer räumlichen Auflösung von $dx^* = dy^* = 2.3$ mm durchgeführt. Die zeitliche Auflösung ist auf 4 Hz beschränkt. Das PIV-System besteht aus einem frequenzverdoppelnden Nd:YAG-Laser und einer CCD-Kreuzkorrelationskamera *(PCO SensiCam Double Shutter)*. Die Berechnung der Geschwindigkeitsfelder erfolgt mit dem VidPIV-Programm der Firma ILA$^{\text{TM}}$. Die Messdatenerfassung und die spätere Implementierung der Regler wird auf einem digitalen Signalprozessor des Typs PPC1005 der Firma dSPACE$^{\text{TM}}$ durchgeführt. Die Samplingrate beträgt 1000 Hz.

5.1.1 Natürliche Strömung

Die natürliche Strömung wird für den relevanten Bereich von Reynolds-Zahlen auf der Basis von Geschwindigkeits- und Druckmessungen untersucht. Die daraus abgeleiteten Kenngrößen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Der Referenzfall für die Modellierung ist $Re_H = 46\,000$.

Kurz vor der oberen Kante ($x = -0.01$) wird das Geschwindigkeitsprofil der ablösenden Grenzschicht in y-Richtung mit dem Hitzdraht vermessen. Die Profile sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Man erkennt eine Übergeschwindigkeit von ca. 2% bei $y = 0.75$. Bei $Re_H = 46\,000$ ergibt sich die 99%-Dicke zu $\delta_{99} = 0.167$. Dieser für eine turbulente Grenzschicht recht hohe Wert ist möglicherweise auf eine Ablöseblase in der Nähe der Körpervorderkante zurückzuführen. Die Impulsverlustdicke beträgt $\delta_2 = 0.014$ und der Formparameter, der sich aus dem Verhältnis der Verdrängungsdicke zur Impulsverlustdicke ergibt, ist $H_{12} = \delta_1/\delta_2 = 1.206$. Mit zunehmender Reynolds-Zahl wird die ablösende Grenzschicht dünner.

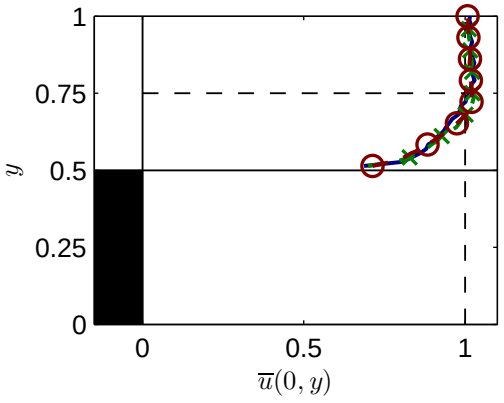


Abbildung 5.4: Experimentell ermittelte Einströmprofile am stumpfen Körper bei $x = -0.01$ für $Re_H = 23\,000$ (durchgezogen), $Re_H = 46\,000$ (×) und $Re_H = 70\,000$ (○) (Henning 2008).

Das Spektrum der Geschwindigkeitsfluktuationen wird mit dem Hitzdraht bei $(x, y) = (1, 0.7)$ im Mittelschnitt gemessen (Abbildung 5.5). Die Fluktuationen korrespondieren mit dem Vorbeischwimmen der ablösenden Wirbel. Die dominante Frequenz bei $Re_H = 46\,000$ ist $f_{\text{inst}} \approx 0.24$. Dieser Wert stimmt gut mit den Literaturwerten zur dominanten Frequenz der Nachlaufinstabilität stumpfer Körper überein. Mit zunehmenden Reynolds-Zahlen steigt die dominante Frequenz an. Gleichzeitig wird der Frequenzbereich ausgeprägter Fluktuationen breiter.

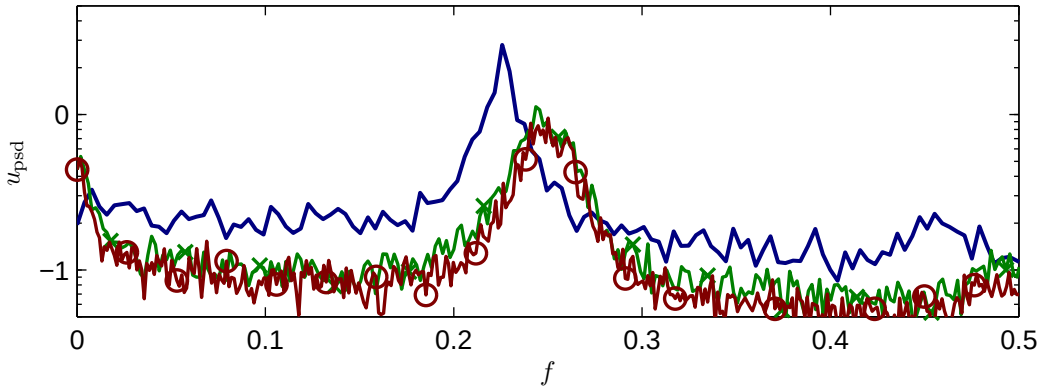


Abbildung 5.5: Experimentell ermittelte Geschwindigkeitsspektren am stumpfen Körper bei (x,y,z)=(1,0.7,0) für $Re_H = 23\,000$ (durchgezogen), $Re_H = 46\,000$ (×) und $Re_H = 70\,000$ (○) (Henning 2008).

Aus dem mit der PIV-Methode ermittelten Geschwindigkeitsfeld eines Schnappschusses wird die Wirbelstärkeverteilung in der Schnittebene mit (2.4) über Differenzenquotienten abgeschätzt. In Abbildung 5.6 (*a, b*) erkennt man, wie die Grobstrukturen auch im Experiment den zeitlichen Verlauf des Wanddrucks bestimmen.

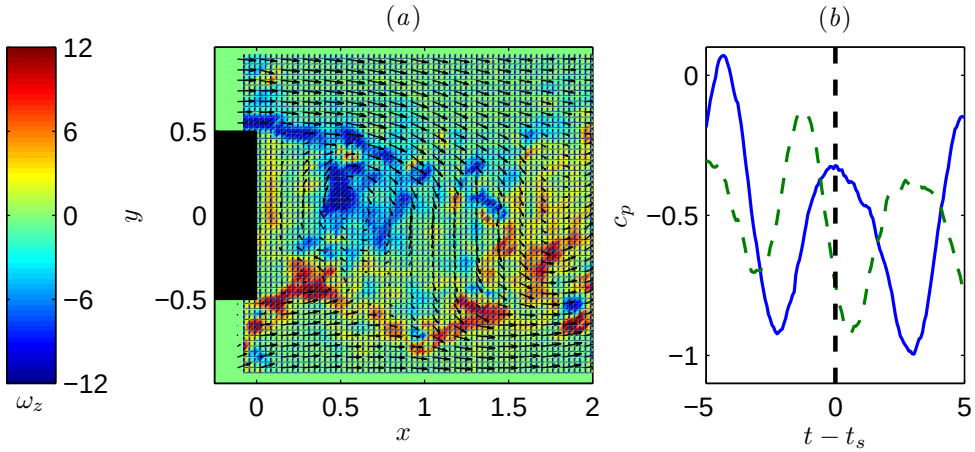


Abbildung 5.6: Farbkodiertes Wirbelstärkefeld (dunkelblau: $\omega_z = -12$, hellgrün: $\omega_z = 0$, dunkelrot: $\omega_z = +12$) und Geschwindigkeitsfeld (schwarze Pfeile) der natürlichen Strömung zum Zeitpunkt $t = t_s$ (*a*) gemessen mit der PIV bei $Re_H = 23\,000$ und der Wanddruckverlauf $c_p(t)|_y$ an der oberen (durchgezogen) und unteren (gestrichelt) Kante (*b*) (Pastoor *et al.* 2008).

Das Wirbelstärkefeld deutet auf einen wandnahen Wirbel bei $(x, y) = (0.35, -0.35)$ hin. Im Wanddruck nahe der oberen Kante zeigt $c_p(t)|_{y=+0.44}$ ein Maximum, während an der unteren Kante $c_p(t)|_{y=-0.44}$ im Bereich des Druckminimums liegt. Der zeitliche Druckverlauf zeigt eine von lang- und kurzwelligen Störungen überlagerte, nahezu harmonische Oszillation mit $f \approx 0.24$ um einen von Null verschiedenen Mittelwert. Die Frequenz entspricht der dominanten Frequenz der Wirbelablösung (Abbildung 5.5). Zwischen beiden Signalen tritt ein Phasenunterschied von ca. 180° auf, der durch das alternierende Ablösen von Wirbeln von der Ober- bzw. Unterkante verursacht wird. Die zeitliche Mittelung der Geschwindigkeitsfelder anhand von 200 PIV-Schnappschüssen gibt Aufschluss über die mittlere Länge der Ablöseblase hinter dem Körper. Sie wird grob auf $x_r \approx 0.8$ geschätzt.

Der zeitlich und über die ganze Basis gemittelte Wanddruck für die natürliche Strömung beträgt bei $Re_H = 46\,000$ etwa $\langle \overline{c}_{p,0} \rangle \approx -0.52$. Es herrscht also ein starker Unterdruck gegenüber dem Referenzdruck. Daraus ergibt sich ein hoher mittlerer Widerstand von $\overline{c}_{D,0} \approx 0.89$.

Re_H	U^*_∞	δ_{99}	δ_2	H_{12}	f_{inst}	$\langle \overline{c}_{p,0} \rangle$	$\overline{c}_{D,0}$
23 000	4.2 ms^{-1}	0.22	0.017	1.19	0.22	-0.53	0.89
46 000	8.4 ms^{-1}	0.16	0.014	1.21	0.24	-0.52	0.89
70 000	12.6 ms^{-1}	0.16	0.013	1.20	0.24	-0.51	0.91
41 000†		0.12	0.017	1.47	0.24	-0.57	NA
40 000‡		0.22	0.017	NA	0.25	-0.55	NA

† Bearman (1967), $H^* = 25.4$ mm, $x = -0.1$

‡ Park *et al.* (2006), $H^* = 60$ mm, $x = -0.033$

Tabelle 5.1: Experimentell ermittelte Strömungsparameter der natürlichen Strömung und Vergleich mit Literaturwerten (Pastoor *et al.* 2008).

5.1.2 Beeinflusste Strömung

Die Empfindlichkeit der Strömung bezüglich der Aktuation wird durch eine Parametervariation untersucht. Hierzu wird für die interessierenden Reynolds-Zahlen die Aktuationsfrequenz schrittweise verändert und der Effekt auf den Basisdruck und den Widerstand betrachtet. Beide Aktuatoren arbeiten bei dieser Untersuchung in Phase, d.h. sie erhalten das gleiche Aktuationssignal.

In Abbildung 5.7 (*a, b*) sind der zeitlich gemittelte Basisdruck und Widerstand in Abhängigkeit der Aktuationsfrequenz dargestellt. Beide Größen sind mit den korrespondierenden Größen der natürlichen Strömung normiert. Die Aktuationsamplitude ist $c_\mu = 0.011$. Dies entspricht einer maximalen Ausblasgeschwindigkeit in Höhe der Anströmgeschwindigkeit. Den maximalen mittleren Basisdruck erhält man bei einer Anregung mit $f_a = 0.15$. Der mittlere Basisdruck erhöht sich gegenüber der natürlichen Strömung um etwa 40%. Dadurch ergibt sich eine Widerstandsreduktion um fast 15%. Für Frequenzen unter $f_a = 0.05$ oder über $f_a = 0.3$ ist kein positiver Einfluss auf den mittleren Basisdruck messbar. In einem kleinen Frequenzband um die

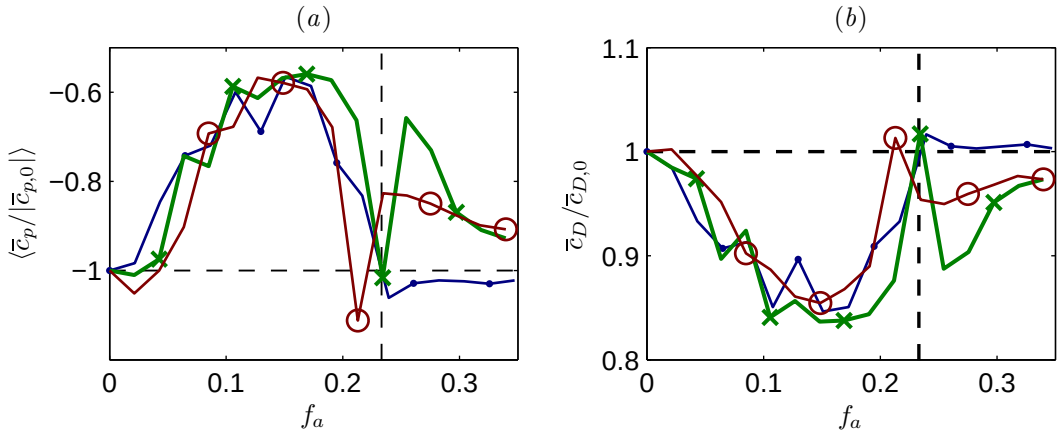


Abbildung 5.7: Parametervariation für die beeinflusste Strömung mit gleichphasiger Aktutation bei $Re_H = 23\,000$ (durchgezogen), $Re_H = 46\,000$ (×) und $Re_H = 70\,000$ (○). Einfluss der Aktuationsfrequenz bei $c_\mu = 0.011$ ($g_{\max} \approx 1$) auf den Basisdruck (a) bzw. den Widerstand (b) (Pastoor *et al.* 2008).

Instabilitätsfrequenz herum, also für $f_a \approx f_{\text{inst}}$, bricht der Basisdruck deutlich ein. Dies führt zu einer Anhebung des Widerstandes über das Niveau der natürlichen Strömung.

Der Schnappschuss der PIV in Abbildung 5.8 (a) zeigt eine Symmetrisierung des körpernahen Nachlaufs. Zwei Wirbelstrukturen erscheinen zur gleichen Zeit bei $x = 1$, was auf eine Synchronisation der Wirbelablösung zurückzuführen ist. Hierdurch wird das Auftreten der alternierenden Wirbelstraße verzögert und die Ablöseblase verlängert. Die mittlere Länge der Ablöseblase erhöht sich um ca. 38% auf $x_r \approx 1.1$. In den Wanddruckfluktuationen des oberen und unteren Sensors (Abbildung 5.8 b) erkennt man, dass der Phasenunterschied nahezu verschwunden ist.

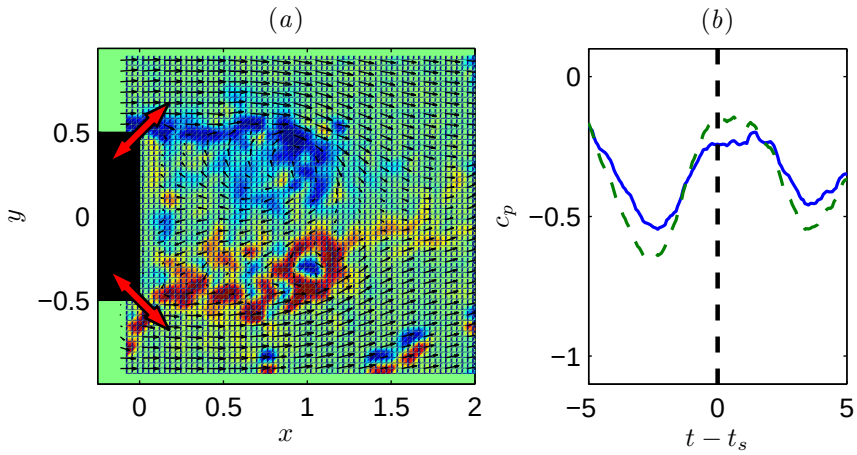


Abbildung 5.8: Wie Abbildung 5.6, jedoch für die gleichphasig beeinflusste Strömung mit $f_a = 0.15$ und $c_\mu = 0.009$ bzw. $g_{\max} = 0.93$ (Pastoor *et al.* 2008).

5.2 Modellierung mit dem Wirbelverfahren

Analog zur Modellierung der Stufenströmung wird nun ein Wirbelverfahren für die Strömung um den stumpfen Körper entwickelt. Da viele Schritte identisch sind oder nur eine geringe Variation erfordern, wird die Beschreibung hier knapper gehalten.

Konforme Abbildung und Grundströmung: Der Ursprung des Koordinatensystems wird vertikal zentriert an die Hinterkante gelegt. Eine konforme Abbildung bildet die obere Halbebene des Rechengebiets (Abbildung 5.9 *a*) auf die Körper- und Kanalwände ab (Abbildung 5.9 *b*).

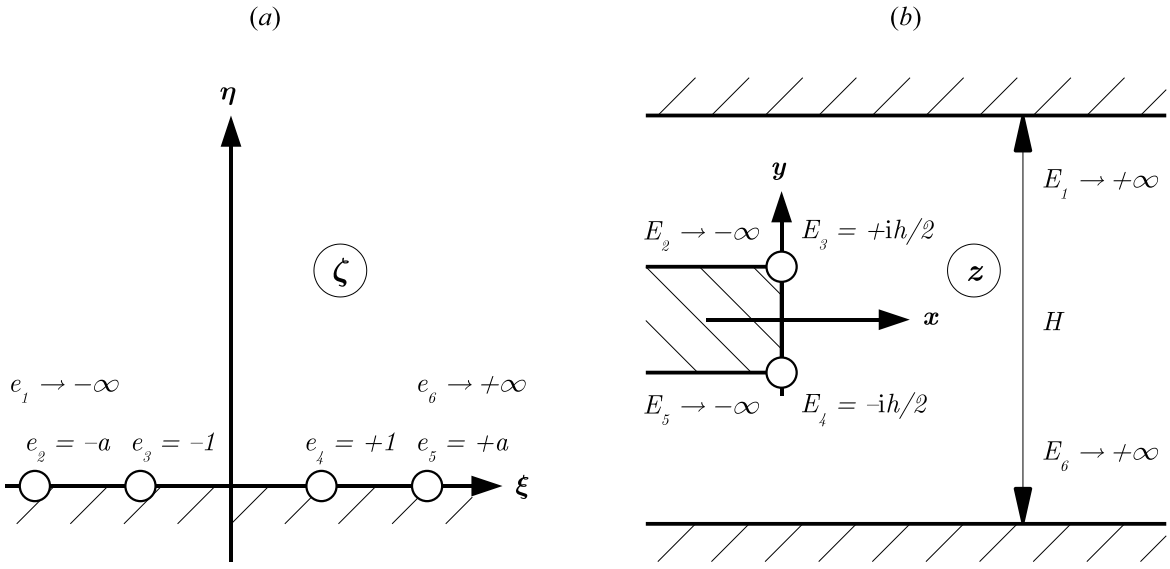


Abbildung 5.9: Konforme Abbildung für den stumpfen Körper. Die obere Halbebene des Rechengebiets ζ in (a) wird auf das physikalische Gebiet z in (b) abgebildet. Die Punkte $e_{\{1,\ldots,6\}}$ der ξ-Achse entsprechen den Eckpunkten $E_{\{1,\ldots,6\}}$.

Die konforme Abbildung ergibt sich in Übereinstimmung mit Clements (1973) und Milne-Thomson (1968) zu

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= C_2 + C_1 \frac{1}{2a}\Bigg(2a \ln\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right) - \\ &- \sqrt{a^2-1}\ln\left(\frac{1 - a\,\zeta - \sqrt{a^2-1}\sqrt{\zeta^2-1}}{-\zeta + a}\right) + \\ &+ \sqrt{a^2-1}\ln\left(\frac{-1 - a\,\zeta + \sqrt{a^2-1}\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta + a}\right)\Bigg), \quad \text{mit } C_2 \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{5.2}$$

mit der Ableitung

$$z' := \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = C_1 \frac{\left(\zeta^2-1\right)^{1/2}}{\zeta^2 - a^2}, \quad \text{mit } C_1, a \in \mathbb{R}^+. \tag{5.3}$$

Die Konstanten $a/\sqrt{a^2-1} = h/(h-H)$, $C_1 = h/\pi$ und $C_2 = -7\mathrm{i}$ folgen aus geometrischen Überlegungen und der Kontinuitätsgleichung (2.1). Bei der numerischen Lösung muss die Mehr-

deutigkeit der Logarithmusfunktionen beachtet werden (Anhang B). Die Umkehrfunktion kann nicht analytisch bestimmt werden und wird daher, wie bei der Stufenströmung, iterativ über das Newton–Raphson-Verfahren ermittelt (Tabelle B.1). Zur Erzeugung der Potentialströmung werden zwei Quellen mit $Q = 2\,U_\infty\,h/(h-H)$ bei $\zeta_s = \pm a$ platziert.

Aktuation: Der Aktuator der Stufenströmung wird für die obere Kante des stumpfen Körpers übernommen, für die untere Kante werden die geometrischen Größen an der x-Achse gespiegelt. Die Quellstärke jedes Aktuators ist über die Stellgrößen $g_t(t)$ und $g_b(t)$ für den oberen bzw. unteren Aktuator separat einstellbar.

Kinematik: Zur Transformation des Geschwindigkeitsfeldes aus dem Bildbereich wird die Ableitung

$$\zeta' := \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\pi}{h}\,\frac{\zeta^2 - a^2}{(\zeta^2-1)^{1/2}} \tag{5.4}$$

bestimmt. Das Geschwindigkeitsfeld ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} w^z(z,t) = \;&= \;\Bigg(U_\infty\,\frac{h}{\pi(h-H)}\,\frac{2\,\zeta}{\zeta^2-a^2} + \underbrace{g_t(t)\,\frac{Q\,D}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta+\xi_a}}_{=:\,w^z_{a,t}(z,g_t(t))} + \underbrace{g_b(t)\,\frac{Q\,D}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta-\xi_a}}_{=:\,w^z_{a,b}(z,g_b(t))} - \\ &- \;\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta-\zeta_j} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta-\overline{\zeta}_j}\Bigg)\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\bigg|_\zeta\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Bei der Induktion der Wirbel wird das Oseen'sche Wirbelmodell berücksichtigt, d.h. die Zirkulation muss gemäß (4.14) regularisiert werden.

Dynamik: Die Verwendung der konformen Abbildung macht die Routh-Korrektur für die Bewegung der Wirbel erforderlich. Sie lautet bei der Strömung um den stumpfen Körper

$$\mathcal{R}(\zeta) := \frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\pi}{h}\,\zeta\,\frac{\zeta^2 - 2 + a^2}{(\zeta^2-1)^{3/2}}\,. \tag{5.6}$$

Damit ergibt sich die Dynamik des n-ten Wirbels

$$\begin{aligned} w^z_n \;&= \;\Bigg(U_\infty\,\frac{h}{\pi(h-H)}\,\frac{2\,\zeta_n}{\zeta_n^2-a^2} + g_t(t)\,\frac{Q\,D}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta_n+\xi_a} + g_b(t)\,\frac{Q\,D}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta_n-\xi_a} - \\ &- \;\mathrm{i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta_n-\zeta_j} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta_n-\overline{\zeta}_j}\Bigg)\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\bigg|_{\zeta_n} - \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_n}{4\pi}\,\mathcal{R}(\zeta_n)\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die zeitliche Integration erfolgt mit dem Adams–Bashforth-Verfahren 3. Ordnung aus Abschnitt 2.3 mit einer festen Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.01$.

Sensorik: Das momentane Druckfeld wird durch Auswertung der Poisson-Gleichung (2.49) auf einem uniformen Gitter in einem rechteckigen Gebiet $x \in [\Delta x, 10]$ und $y \in [-3, +3]$ mit einer Gitterweite von $\Delta x = \Delta y = 0.02$ ermittelt. Der Quellterm Q wird in diesem Gebiet durch zentrale Differenzenquotienten des Geschwindigkeitsfeldes approximiert. In Abbildung 5.10 erkennt man die Wahl der Randbedingungen. Am Einströmrand zwischen $-h/2 < y < +h/2$ wird ein verschwindender Druckgradient in x-Richtung (Neumann-Bedingung) gefordert. Für die übrigen Randelemente wird analog zu Abschnitt 2.2.3.2 der Druck durch Integration der Euler-Gleichungen (2.44) und (2.45) bestimmt (Dirichlet-Bedingung), wobei zunächst der Druck $p_0 = p(10, 0) = 0$ vorgegeben wird. Für ein großes Ensemble an Druckfeldern wird der Druck in der oberen und unteren linken Ecke gemittelt. Anschließend wird das Druck aller berechneten Felder an diesen Wert angepasst.

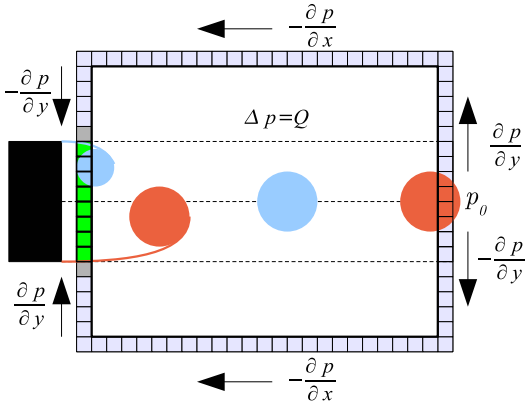


Abbildung 5.10: Berechnung des Drucks mit der Poisson-Gleichung.

Wirbelproduktion: Die Wirbelproduktion erfolgt analog zur Wirbelproduktion bei der Stufe an der oberen und unteren Kante. Die Produktionsrate und die Konvektionsgeschwindigkeit werden für beide Kanten separat bei $y_p = \pm 0.7$ ermittelt. Neu eingesetzte Wirbel erhalten als Geschwindigkeit der zwei vergangenen Zeitschichten für die Integration mit dem Adams–Bashforth-Verfahren jeweils die aktuelle Konvektionsgeschwindigkeit.

Kernwachstumsmodell: Der initiale Kernradius wird aus experimentellen Messungen der Grenzschichtdicke zu $R_{b,0} = 0.05$ bestimmt. In Ermangelung einer numerischen Simulation wird für das Wachstumsmodell das gleiche Modell wie bei der Stufenströmung angenommen.

Dissipationsmodelle: Beim stumpfen Körper werden zwei Dissipationsmodelle eingesetzt. Das erste Modell dient wie bei der Stufe dazu, Wirbel die nahe an die Hinterkante gelangt sind auszublenden. Wirbel mit $\mathfrak{Re}\{z_n\} < x_K = 0.05$ werden von der Wand absorbiert, für Wirbel mit $\mathfrak{Re}\{z_n\} < 2\,x_K$ wird ein exponentielles Abklingen der Zirkulation mit der Zeitkonstante $T_{D,K} = 0.25$ angenommen.

Ein zweites Modell bewirkt ein lineares Abklingen der Zirkulation für Wirbel mit $\mathfrak{Re}\{z_n\} > 10$ über einen Abstand von zehn Körperhöhen zur Basis. Hiermit wird ein sanftes Ausblenden der Wirbel aus dem Strömungsfeld erzielt.

Wirbelverschmelzung: Es werden die gleichen Einstellungen zur Verschmelzung von Wirbeln wie bei der Stufenströmung verwendet. Es ergeben sich im Mittel $\overline{N} \approx 660$ Wirbel im Strömungsfeld.

Verblockungskorrektur: Um die berechneten Geschwindigkeiten und Drücke des Wirbelverfahrens mit den experimentellen Daten und Literaturwerten vergleichen zu können, wird mit der Kontinuitäts- und Bernoulli-Gleichung eine Korrektur der Verblockung durchgeführt:

$$\begin{aligned} U_{\infty,c} &= \frac{h}{h-H} \\ c_{p,c} &= \frac{c_p + 1/2\,(1-U_{\infty,c}^2)}{U_{\infty,c}^2} \end{aligned}$$

5.3 Analyse der Grobstrukturen

Es werden nun die vom Wirbelverfahren berechneten Grobstrukturen und Druckverläufe mit experimentellen Daten verglichen (Abschnitt 5.3.1 und Abschnitt 5.3.2). Anschließend wird eine Untersuchung des physikalischen Wirkmechanismus der Aktuation durchgeführt (Abschnitt 5.3.3). Hierzu wird mit dem Wirbelverfahren die Transiente von der Anlaufströmung über die konvergierte natürliche Strömung bis hin zur eingeschwungenen beeinflussten Strömung berechnet und ausgewertet (Abbildung 5.11 *a*–*o*).

5.3.1 Natürliche und beeinflusste Strömung

Der Vergleich des Wirbelverfahrens mit dem Experiment erfolgt zunächst durch einen Vergleich der Grobstrukturen und der Druckdaten der natürlichen Strömung für einen ausgewählten Schnappschuss $t = t_s$. Die durch PIV ermittelten Grobstrukturen des Experiments Abbildung 5.6 (*a*) werden vom Schnappschuss Abbildung 5.11 (*k*) des Wirbelverfahrens gut widergegeben, wobei aufgrund der niederdimensionalen Modellierung eine starke Glättung der Wirbelstärkeverteilung erfolgt. Der mittlere Basisdruck wird vom Wirbelverfahren mit $\langle \overline{c}_p \rangle^{\mathrm{vm}} = -0.55$ berechnet, wird also betragsmäßig gegenüber dem experimentellen Wert von $\langle \overline{c}_p \rangle^{\mathrm{exp}} = -0.52$ um etwa 5% überschätzt. Der Vergleich von Zeitreihen des Wanddrucks an der oberen und unteren Sensorposition (Abbildung 5.6 *b* und Abbildung 5.11 *l*), zeigt, dass im Experiment zusätzlich zur dominanten Schwankung sehr lang- und sehr kurzwellige Druckschwankungen auftreten, die beide nicht vom Wirbelverfahren modelliert werden. Die dominanten Fluktuationen treten im Wirbelverfahren bei einer Frequenz von $f = 0.22$ auf, stimmen also mit der experimentellen Instabilitätsfrequenz sehr gut überein. Wertet man die Zeitreihen statistisch aus, so findet sich eine brauchbare Übereinstimmung der Mittelwerte ($\overline{c}_p|^{\mathrm{vm}}_{y=\pm 0.44} = -0.46$ vs. $\overline{c}_p|^{\mathrm{exp}}_{y=\pm 0.44} = -0.5$) und eine gute Vorhersage der Standardabweichung ($c_{p,\mathrm{rms}}|^{\mathrm{vm}}_{y=\pm 0.44} = 0.26$ vs. $c_{p,\mathrm{rms}}|^{\mathrm{exp}}_{y=\pm 0.44} = 0.24$).

Im beeinflussten Fall, das Wirbelverfahren rechnet mit $f_a = 0.15$ und $g_{\max} = 1.2$, stimmen die vorhergesagten Grobstrukturen (Abbildung 5.11 *n*) gut mit dem Experiment überein (Abbildung 5.8 *a*). Auch die Erhöhung des mittleren Basisdrucks gegenüber der natürlichen Strömung um 40% auf $\langle \overline{c}_p \rangle^{\mathrm{vm}} = -0.33$ wird im Vergleich zum Experiment gut beschrieben. Dort wird ebenfalls ein Druckanstieg um 40% verzeichnet. Die Druckschwankungen an den oberen und unteren Sensorpositionen werden vom Wirbelverfahren (Abbildung 5.11 *o*) um den Faktor drei

zu niedrig geschätzt (vgl. Abbildung 5.8 *b*). Ihre Phasenlage bezüglich des Aktuationssignals entspricht aber den experimentellen Ergebnissen.

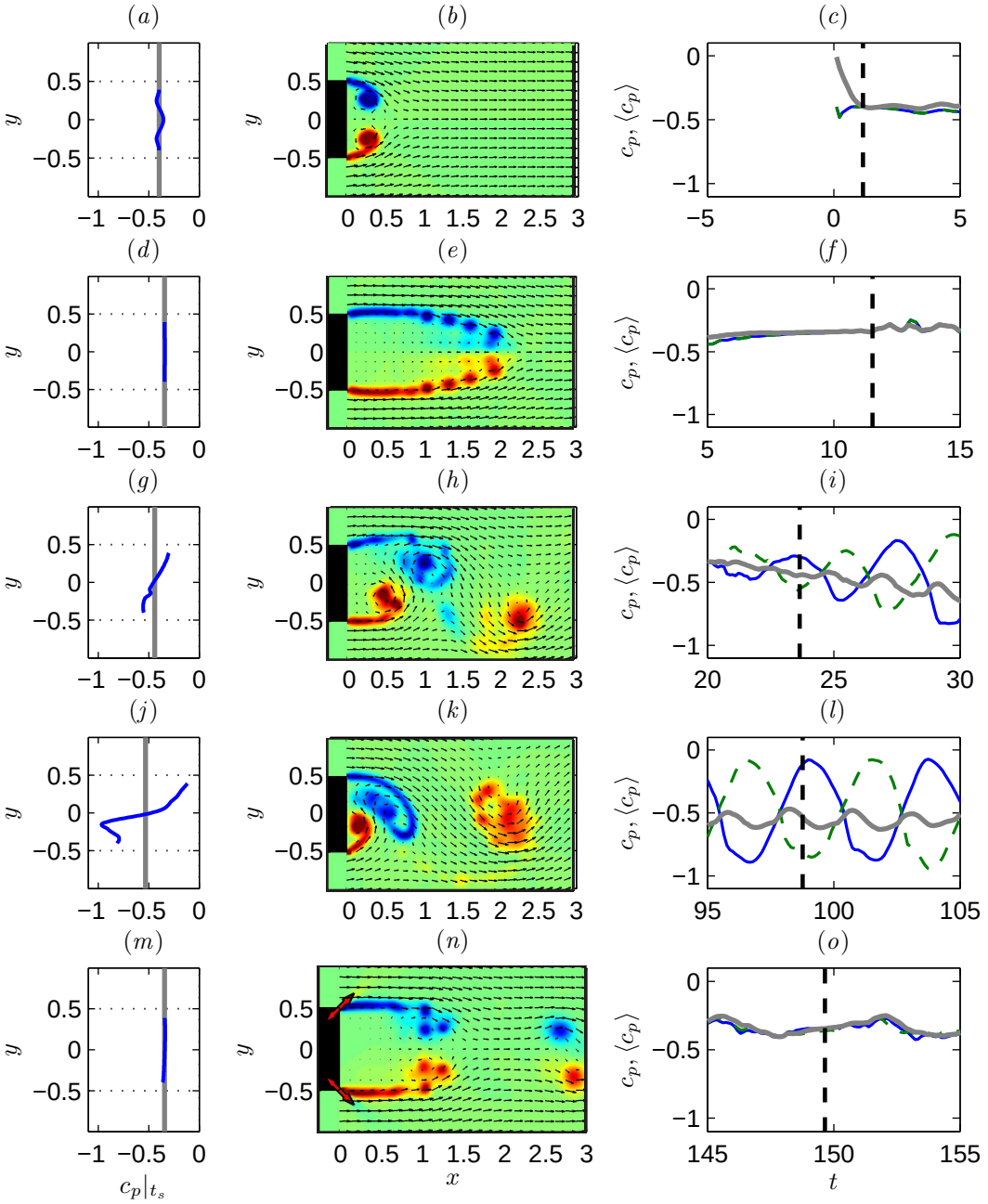


Abbildung 5.11: Berechnung der Transiente der Strömung um den stumpfen Körper mit dem Wirbelverfahren: Anfahrwirbel (*a–c*), unabhängige, symmetrische Scherschichten (*d–f*), Scherschichtinteraktion durch Nachlaufinstabilität (*g–i*), periodische Wirbelstraße (*j–l*) und ab $t = 115$ periodisch beeinflusste Strömung (*m–o*) mit $f_a = 0.15$ und $g_{\max} = 1.2$. In (*a, d, g, j, m*) ist der aktuelle (blau) und der räumlich gemittelte (grau) Basisdruck dargestellt. Die Wirbelstärkeverteilung (Farbstufen wie in Abbildung 5.6) und das zugehörige Geschwindigkeitsfeld (schwarze Pfeile) finden sind in (*b, e, h, k, n*). Der Zeitverlauf des räumlich gemittelten Basisdrucks (grau), sowie des Drucks an der oberen (blau, durchgezogen) und der unteren (grün, gestrichelt) Körperkante wird für einen kleinen Zeitabschnitt um den momentanen Zeitpunkt $t = t_s$, markiert durch die vertikale Linien (schwarz, gestrichelt), in (*c, f, i, l, o*) gezeigt.

5.3.2 Analyse der Transiente

Aus der Betrachtung zweier Schnappschüsse allein sind die physikalischen Vorgänge in der Nachlaufströmung nicht erfassbar. Daher wird im Folgenden die zeitliche Entwicklung der Strömung anhand von Zeitreihen des Basisdrucks und der Zirkulationsproduktionsrate, im beeinflussten Fall zusätzlich auch anhand des Stellgrößenverlaufs, untersucht. Diese Entwicklung wird mit den in Abbildung 5.11 ausgewählten Schnappschüssen in Beziehung gesetzt.

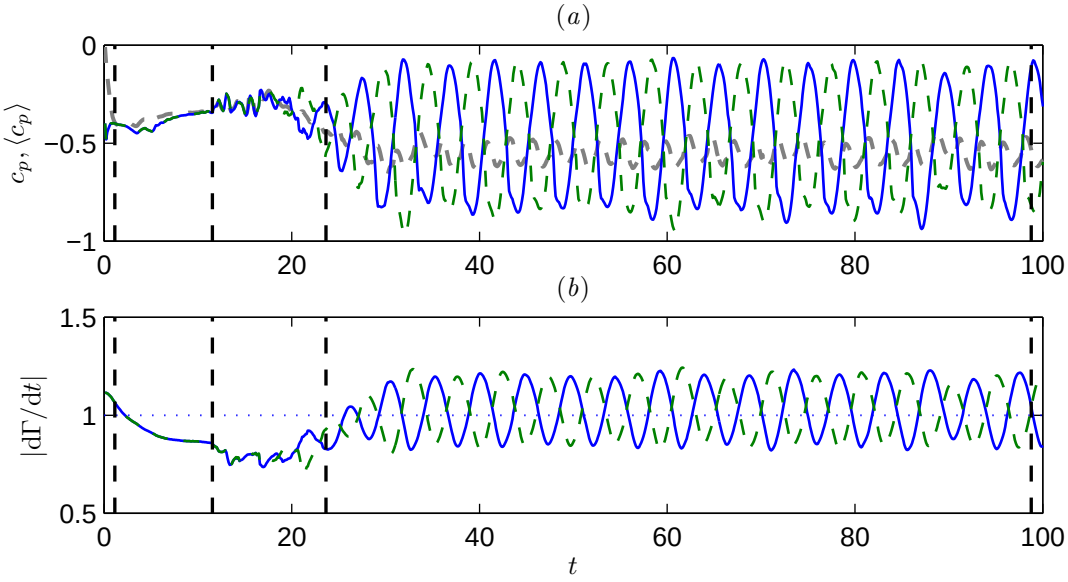


Abbildung 5.12: Druck (a) und Betrag der Zirkulationsproduktionsrate (b) der transienten Strömung aus Abbildung 5.11 (a–l) an der oberen (blau, durchgezogen) und unteren (grün, gestrichelt) Kante. Zusätzlich ist in (a) der räumlich gemittelten Basisdrucks (grau) dargestellt. Die durch vertikale Linien (schwarz, gestrichelt) markierten Zeitpunkte entsprechen den in Abbildung 5.11 ausgewählten Schnappschüssen.

A) Anfahrwirbel: Das Fluid setzt sich sprunghaft in Bewegung und löst an den Hinterkanten des Körpers ab. Die sich ausbildenden Scherschichten sind zum Zeitpunkt $t_s = 1$ zu zwei nahezu symmetrischen Wirbeln aufgerollt (Abbildung 5.11 b). Zu dieser Wirbelkonfiguration gehört eine relativ gleichmäßige Druckverteilung auf der Basis mit leichtem Druckabfall in der Nähe der Fußpunkte der Wirbel auf dem Heck (Abbildung 5.11 a). In Abbildung 5.12 (a) ist ein starker Abfall des Basisdrucks von $\langle c_p \rangle = +0.42$ bei der reinen Potentialströmung zum Zeitpunkt $t = 0$ auf $\langle c_p \rangle = -0.4$ zum Zeitpunkt $t = t_s$ zu beobachten. Die aufgerollten Wirbel sind stark, da in der Anfangsphase eine vom Betrag hohe Zirkulationsproduktionsrate ($|\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t| > 1$) vorliegt (Abbildung 5.12 b). Die Anfahrwirbel schwimmen in der Folge stromab und dissipieren.

B) Symmetrische Scherschichtwirbel: Scherschichten sind empfindlich bezüglich Störungen in der Wirbelanordnung oder -stärke. Aufgrund der konvektiven Kelvin–Helmholtz-Instabilität werden diese Störungen stromab angefacht und führen nach einer anfänglich geraden und bezüglich der x-Achse symmetrischen Entwicklung beider Scherschichten zur Aufrollung von Scherschichtwirbeln (Abbildung 5.11 e). Zum Zeitpunkt $t_s = 11.5$ verzeichnet man

eine gleichmäßige Druckverteilung auf der Basis (Abbildung 5.11 *d*). Die Scherschichtwirbel sind zu schwach und zu weit von der Basis entfernt, um sich in Druckverlauf abzuzeichnen. Dies liegt zum einen daran, dass die Frequenz der Scherschichtinstabilität mit der Dicke der Scherschichten skaliert und daher recht hoch ist, etwa eine Größenordnung über der Nachlaufinstabilitätsfrequenz. Deshalb rollen sich nur kleine Abschnitte der Scherschichten zu einzelnen Wirbeln auf. Dies geschieht etwa eine Körperhöhe stromab der Basis. Weiter stromab kommt es zur Wirbelpaarung. Ein weiterer Grund für die relative Schwäche der Scherschichtwirbel in dieser Phase ist die Abnahme der Zirkulationsproduktionsrate vom Betrage her auf $|\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t| \approx 0.8$ (Abbildung 5.12 *b*). Dies liegt daran, dass bei den gerade abschwimmenden Scherschichten eine minimale Geschwindigkeitsdifferenz über die Scherschichten hinweg zu verzeichnen ist. Mit der gestreckten, symmetrischen Entwicklung der Scherschichten einher geht ein Anstieg des Basisdrucks auf $\langle c_p \rangle = -0.36$ (Abbildung 5.12 *a*).

C) Nachlaufinstabilität: Zwischen $t_s = 11.5$ und $t_s = 23.5$ beginnen die beiden vorher nahezu unabhängigen Scherschichten zu interagieren. Jede kleine Störung der Symmetrie zwischen der oberen und unteren Wirbelkonfiguration wird in Strömungsrichtung verstärkt. Im fernen Nachlauf treten die gepaarten Wirbel aus der oberen bzw. unteren Scherschicht in alternierender Folge mit gestreckter räumlicher Wellenlänge auf. Diese Nachlaufwirbel nehmen nun Einfluss auf die stromauf gelegene Scherschichtentwicklung und führen bereits dort zu einer asymmetrischen Aufrollung (Abbildung 5.11 *h*) mit der charakteristischen Frequenz der Nachlaufinstabilität. Da sich diese Instabilität zeitlich und entgegen der Strömungsrichtung entwickelt wird sie als absolute Instabilität bezeichnet. In der Druckverteilung auf der Basis spiegelt sich die asymmetrische Wirbelkonfiguration wider (Abbildung 5.11 *g*). Deutlich ist hier der Fußabdruck des von der Unterkante ablösenden Wirbels zu erkennen. Mit zunehmender Asymmetrie der Wirbelfolge und einer Verkürzung der nicht-aufgerollten Scherschichten geht eine Erhöhung der betragsmäßigen Zirkulationsproduktionsrate (Abbildung 5.12 *b*) und eine erneute Abnahme des Basisdrucks (Abbildung 5.12 *a*) einher. In beiden Zeitreihen ist zwischen den Prozessen in der oberen bzw. unteren Scherschicht eine Phasendifferenz von ca. 180° zu beobachten.

D) von Kármán'sche Wirbelstraße: Wechselseitige Interaktion der Nachlaufwirbel verstärkt die alternierende Ablösung von Wirbeln. Abbildung 5.11 (*k*) zum Zeitpunkt $t_s = 98.5$ zeigt eine stark verkürzte Ablöseblase und eine voll entwickelte von Kármán'sche Wirbelstraße in der unmittelbaren Nähe der Basis. Hierzu gehören deutliche Fußabdrücke der Wirbel in den Druckverläufen auf dem Heck (Abbildung 5.11 *j*). Die Zeitreihen des Drucks (Abbildung 5.12 *a*) und der Zirkulationsproduktionsrate (Abbildung 5.12 *b*) spiegeln den alternierenden Charakter der Strömung mit der Frequenz $f = 0.24$ wieder. Der Basisdruck oszilliert mit kleiner Amplitude (0.01) um $\langle \overline{c}_p \rangle = -0.55$, während die Zirkulationsproduktionsrate vom Betrage her mit einer Amplitude von 0.15 um $|\mathrm{d}\overline{\Gamma}/\mathrm{d}t| \approx 1|$ schwankt. Die Transition zur eingeschwungenen natürlichen Strömung dauert mit den im Wirbelverfahren verwendeten Parametern etwa 30 konvektive Zeiteinheiten.

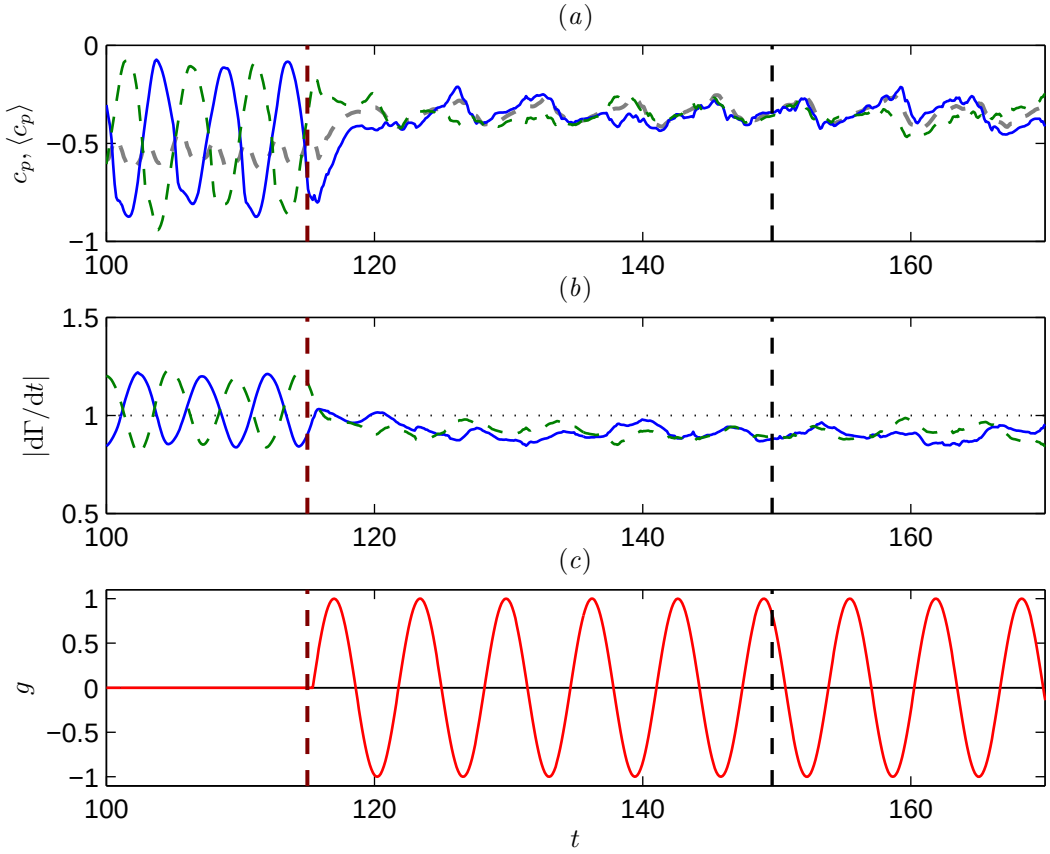


Abbildung 5.13: Wie Abbildung 5.12 (*a, b*) jedoch für den Übergang der natürlichen zur beeinflussten Strömung (Abbildung 5.11 *m–o*).

E) Erzwungene Symmetrisierung: Zum Zeitpunkt $t_a = 115$ wird an der Ober- und Unterkante des Körpers mit $f_a = 0.15$ und $g_{\max} = 1$ aktuiert. Man erkennt im Schnappschuss $t_s = 149.5$ eine deutliche Streckung der Scherschichten und der Ablöseblase und eine symmetrische Aufrollung der Nachlaufwirbel (Abbildung 5.11 *n*). Die Druckverteilung auf dem Heck ist nahezu konstant (Abbildung 5.11 *m*). Basisdruck (Abbildung 5.13 *a*) und Betrag der Zirkulationsproduktionsrate (Abbildung 5.13 *b*) zeigen nach einer Übergangsphase von etwa 20 konvektiven Zeiteinheiten phasengleiches Verhalten. Der Basisdruck steigt im zeitlichen Mittel auf $\langle \overline{c}_p \rangle = -0.33$, während die mittlere Produktionsrate auf $|\mathrm{d}\overline{\Gamma}/\mathrm{d}t| \approx 0.9$ abnimmt. Die Amplituden werden, wie bereits in Abschnitt 5.3.1 beschrieben, zu niedrig vorhergesagt. Die dominante Frequenz der Schwankungen entspricht der Aktuationsfrequenz. Die Phasenlage der Druckschwankungen bezüglich des Stellsignals g zeigt eine Phasendifferenz von etwa $\Delta\phi = 180°$ (Abbildung 5.13 *c*).

5.3.3 Physikalische Auswertung des Aktuationsmechanismus

Um eine wirkungsvollere Beeinflussung der Strömung zu erzielen, wird nun untersucht, wie die Grobstrukturen auf den Widerstand bzw. den Basisdruck wirken und wie die Aktuation die Grobstrukturen beeinflusst.

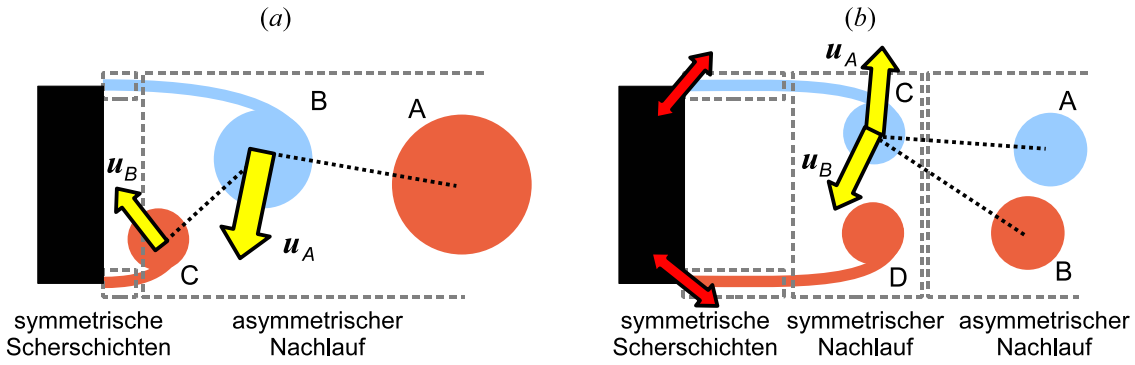


Abbildung 5.14: Prinzipskizzen der Kopplung zwischen Scherschicht- und Nachlaufwirbeln in der natürlichen Strömung (a) und der Entkopplung der Scherschicht- und Nachlaufprozesse (b) durch Aktuation.

In der natürlichen Strömung gibt es eine starke Kopplung zwischen der Scherschichtentwicklung und den Nachlaufwirbeln (Abbildung 5.14 a). Wirbel A löst durch Induktion der abwärts gerichteten Geschwindigkeit $\mathbf{u}_A$ die Aufrollung der oberen Scherschicht zu Wirbel B aus. Diese Ansammlung von Wirbelstärke (B) wiederum hat einen großen Einfluss auf die untere Scherschicht. Die Aufrollung von Wirbel C nahe der unteren Kante wird durch die von B induzierte Geschwindigkeit $\mathbf{u}_B$ angefacht.

Durch Aktuation wird der vom Nachlauf induzierte alternierende Einfluss auf die Scherschichtentwicklung durch symmetrische Störungen überdeckt. Es erfolgt eine Entkopplung der Scherschicht- und Nachlaufprozesse (Abbildung 5.14 b). Die Synchronisation der Wirbelablösung in der oberen und unteren Scherschicht hat eine Verzögerung des asymmetrischen Nachlaufs zur Folge. Die induzierten Geschwindigkeiten $\mathbf{u}_A$ und $\mathbf{u}_B$ der Wirbel A und B auf Wirbel C löschen sich nahezu aus. Das Gleiche gilt für Wirbel D. Dies behindert die Nachlaufinstabilität, so dass ihre Rückwirkung auf die Scherschichten unterdrückt wird. Im Fernfeld tritt die alternierende Wirbelfolge in abgeschwächter Form wieder auf.

Die Aktuation scheint die Strömungsprozesse von der natürlichen Strömung entlang der Transiente zurück in die Phase **B**—**C** zu führen (siehe Beschreibung der Transiente in Abschnitt 5.3.2). Augenscheinlich wird die dominante Frequenz nun vom Aktuator aufgezwungen (*frequency locking*). Die Phasenlage der Druckschwankungen wird mit einer Phasendifferenz von $\Delta\phi = 180°$ ebenfalls vom Aktuator bestimmt (*phase locking*).

Eine Bestätigung dieser physikalischen Erklärung soll nun in experimentellen Daten gesucht werden. Hierzu werden die Daten der Parameterstudie (vgl. Abbildung 5.7 a), hinsichtlich der Fähigkeit des Aktuators die dominante Frequenz und Phasenlage der Druckschwankungen zu erzwingen, untersucht.

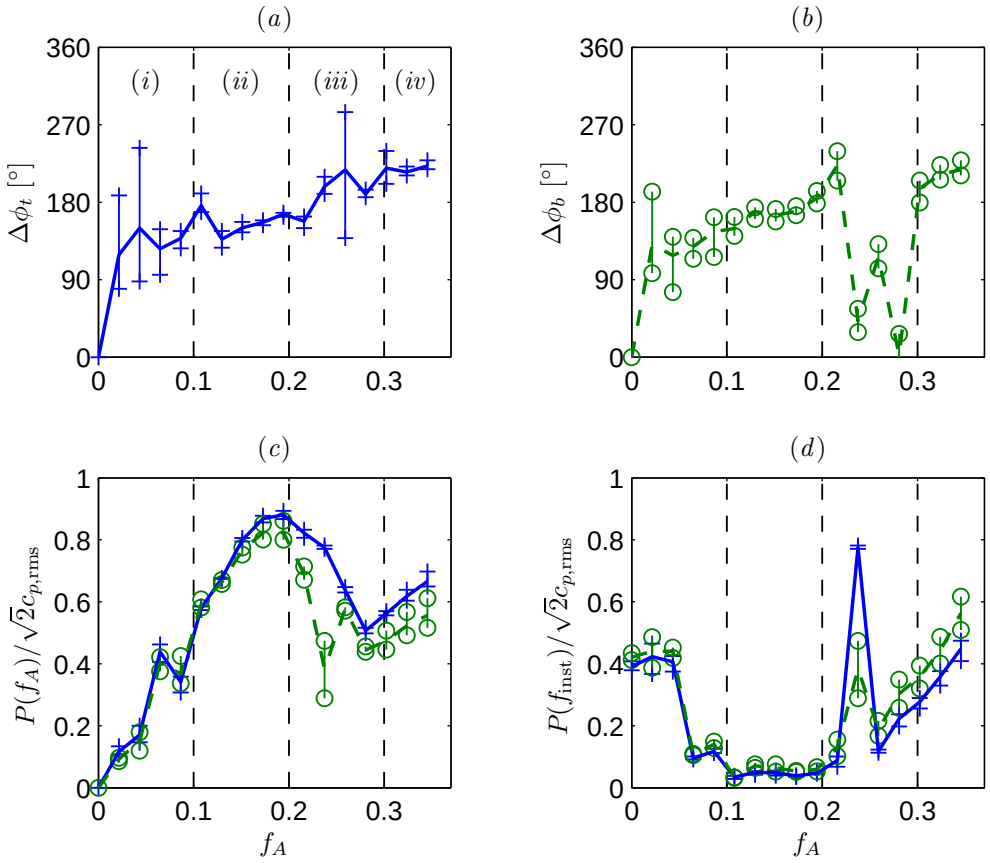


Abbildung 5.15: Phasendifferenz zwischen Aktuationssignal und Wanddruck am oberen (a) und unteren (b) Sensor und Darstellung der harmonischen Projektion des oberen (blau, durchgezogen) und unteren (grün, gestrichelt) Wanddruckverlaufs auf die Aktuationsfrequenz (c) bzw. auf die Instabilitätsfrequenz (d) (Pastoor *et al.* 2008). In allen Fällen sind die Druckdaten spannweitig gemittelt. Mit den vertikalen Linien mit (+) bzw. (∘) werden die jeweiligen Minimal- und Maximalwerte (spannweitige Variation) angezeigt.

In Abbildung 5.15 ($a,\ b$) ist der Phasenwinkel $\Delta\phi_{t,b} = \angle\{g(t), c_p(\pm 0.44, z, t)\}$ zwischen dem Aktuationssignal und den Druckverläufen an den oberen bzw. unteren Sensoren, berechnet aus den mit der Aktuationsfrequenz assoziierten Fourier-Koeffizienten, als Funktion der Aktuationsfrequenz dargestellt. Zusätzlich werden diese Drucksignale mit einer harmonischen Zerlegung analysiert. Hierbei gilt das Interesse den Amplituden

$$P(f) = \frac{2}{N_s}\left|\sum_{k=1}^{N_s} c_p(y,z,t_k)e^{\mathrm{i}\,2\pi\,f\,t_k}\right| \tag{5.8}$$

von harmonischen Oszillationen in den Drucksignalen mit der Aktuationsfrequenz $f = f_a$ bzw. mit der Frequenz der Nachlaufinstabilität $f = f_{\mathrm{inst}} = 0.24$. Dabei bezeichnet N_s die Zahl der ausgewerteten Messwerte. Die berechneten Amplituden werden mit der Standardabweichung der Druckwerte normiert und in Abbildung 5.15 ($c,\ d$) dargestellt. Im Folgenden werden vier Bereiche von Aktuationsfrequenzen (vgl. (i)–(iv) in Abbildung 5.15 a) diskutiert. Die Aktuationsamplitude ist in allen Fällen $c_\mu = 0.01$, die Reynolds-Zahl beträgt $Re_H = 46\,000$.

Frequenzbereich (*i*): Offenkundig gibt es eine Untergrenze für die Aktuationsfrequenz, ab der keine günstige Strömungsbeeinflussung möglich ist. Unterhalb von $f_a = 0.1$, nimmt die Phasenlage $\Delta\phi_t$ bzw. $\Delta\phi_b$ der ablösenden Wirbel an der Ober- und Unterkante unterschiedliche Werte an (Abbildung 5.7 *a*). Obendrein treten ausgeprägte spannweitige Variationen der Phasenwinkel auf. Darum kann keine ausreichende Synchronisation der Scherschichten erfolgen. Anscheinend sind die Scherschichten nicht empfänglich für die Anregung in diesem niedrigen Frequenzbereich. Stattdessen werden die Druckschwankungen hauptsächlich durch Oszillationen mit der Frequenz der Nachlaufinstabilität bestimmt (Abbildung 5.15 *c, d*).

Frequenzbereich (*ii*): Aktuationsfrequenzen im Bereich $0.1 \leq f_A \leq 0.2$ bewirken einen hohen Basisdruck (Abbildung 5.7 *a*). Die Wirbelablösung erfolgt simultan in der oberen und unteren Scherschicht, wie an den nahezu identischen Phasenwinkeln $\Delta\phi_t$ und $\Delta\phi_b$ in Abbildung 5.15 (*a, b*) zu erkennen ist. Die spannweitigen Variationen sind sehr gering. Alle Phasenwinkel liegen ungefähr bei 170°, also in guter Übereinstimmung mit dem vom Wirbelverfahren vorhergesagten Phasenwinkel von 180°. Die Druckschwankungen werden im Wesentlichen von Wirbeln induziert, die mit der Aktuationsfrequenz aufrollen und abschwimmen, während die Frequenz der Nachlaufinstabilität nur eine geringe Rolle spielt. Dies wird durch einen Vergleich von $P(f_a)$ und $P(f_{\text{inst}})$ (Abbildung 5.15 *c, d*) deutlich. Die Beeinflussung in diesem Frequenzbereich ist günstig, weil die Scherschichten die Frequenz und Phasenlage der Aktuation übernehmen. So werden die Scherschichten synchronisiert und die Ablöseblase im zeitlichen Mittel verlängert. Dabei steigt der Basisdruck.

Frequenzbereich (*iii*): Die in Abbildung 5.7 (*a*) vorgestellten Experimente weisen einen Einbruch des Basisdrucks auf, wenn mit der Frequenz der Nachlaufinstabilität $f_a = f_{\text{inst}}$ aktuiert wird. In diesem Frequenzbereich ist der Aktuator nicht in der Lage, an der Ober- und der Unterkante ein synchrones Abschwimmen der Wirbel zu erzwingen. Dies wird an den stark divergierenden Phasenwinkeln $\Delta\phi_t$ bzw. $\Delta\phi_b$ in Abbildung 5.15 (*a, b*) deutlich. Obwohl eine gleichphasige Aktuation am oberen und unteren Aktuator erfolgt, treten die Druckschwankungen mit einem Phasenversatz von etwa 180°, also gegenphasig auf. Offenbar lässt sich die Phasenlage der von den Nachlaufwirbeln induzierten Störungen von der Aktuation nicht ausreichend überdecken. Stattdessen werden die Störungen der oberen Scherschicht in einem Frequenzbereich erhöht, die zu einer Anfachung der Nachlaufinstabilität und somit zu einer Verstärkung der asymmetrischen Wirbelfolge führen. An der Unterkante hingegen wird ein weiter Frequenzbereich angefacht (Abbildung 5.15 *d*). In der Folge sinkt der Basisdruck um ca. 10% unter das Niveau der natürlichen Strömung. Hierbei steigt der Widerstand um 5% (Abbildung 5.7 *a, b*).

Frequenzbereich (*iv*): Aktuationsfrequenzen über $f_a = 0.3$ sind günstig für eine Anhebung des Basisdrucks, doch dieser Effekt nimmt mit zunehmender Frequenz ab (Abbildung 5.7 *a, b*). Bei diesen hohen Frequenzen kann eine synchrone Phasenlage der ablösenden Wirbel vorgegeben

werden, wie die Verläufe von $\Delta\phi_t$ bzw. $\Delta\phi_b$ in Abbildung 5.15 (*a, b*) zeigen. Der Anteil von harmonischen Oszillationen mit der Aktuationsfrequenz bzw. der Frequenz der Nachlaufinstabilität ist von nahezu gleicher Größe (Abbildung 5.15 *c, d*). Durch die hochfrequente Aktuation werden kleine Strukturen in der Nähe der Basis erzeugt. Deren weitere Aufrollung und Paarung wird von asymmetrischen Nachlaufwirbeln bestimmt. Hierdurch ergibt sich eine kürzere Ablöseblase als bei Aktuationsfrequenzen im Bereich (*ii*).

5.4 Phasenregelung im Experiment

Folgt man den Ergebnissen aus Abschnitt 5.3.3, so muss ein effizienter Strömungsregler folgende physikalischen Vorgänge erzwingen:

- Synchronisation der Wirbelablösung,
- Minimierung der Zirkulationsproduktionsrate und
- Symmetrisierung des Nahfeldes.

Die experimentellen Ergebnisse zeigen, dass dies bei der ungeregelten Beeinflussung mit Frequenzen um $f_a = 0.15$ zufällig erreicht wird, während bei anderen Frequenzen nur ein geringer oder sogar ein gegenteiliger Effekt erzielt wird. Es soll nun ein Strömungsregler vorgestellt werden, der die obigen Anforderungen aufgrund seines Entwurfs bereits explizit erzwingt, ohne die Kenntnis optimaler Aktuationsparameter vorauszusetzen.

5.4.1 Idee der Phasenregelung

Im Experiment wird die Phasenlage des unteren Wanddrucksignals mit dem EKF aus Abschnitt 4.5 geschätzt. Hierzu wird das Wanddrucksignal mit (4.31) als harmonische Oszillation um einen beliebigen Mittelwert approximiert. Die Phasenlage ϕ_f wird zur Berechnung des Stellsignals

$$g = g_{\max} \sin(\hat{\phi}_f + \Delta\phi) \tag{5.9}$$

für den oberen Aktuator verwendet (Abbildung 5.16).

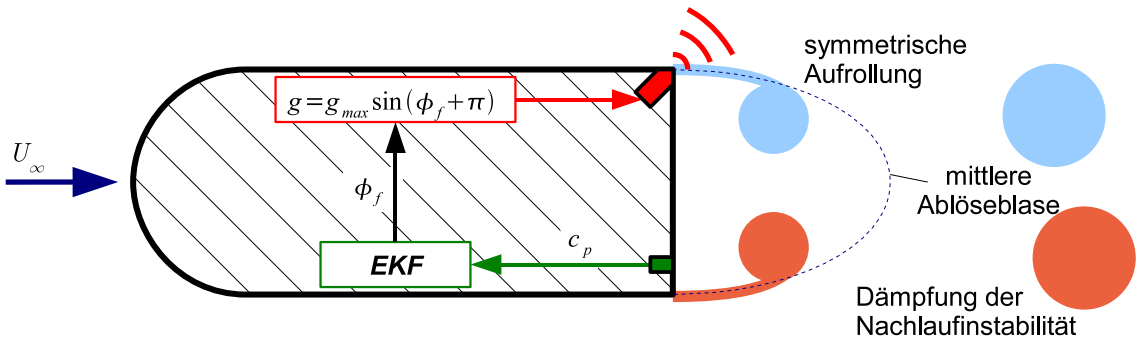


Abbildung 5.16: Prinzipskizze der Phasenregelung.

Die vom Wirbelverfahren ermittelte Phasendifferenz $\Delta\phi = 180°$ stellt dabei den gewünschten Phasenunterschied zwischen Druck- und Aktuationssignal dar. Die Amplitude wird zu $g_{\max} = 0.85$ ($c_\mu = 0.008$) gewählt. Da jedoch nur ein Aktuator verwendet wird, reduziert sich der effektiv eingebrachte Impuls auf die Hälfte, also ($c_\mu^{\text{eff}} = 0.004$).

5.4.2 Strömungsregelung durch Phasenrückkopplung

Der Phasenregler wird im Experiment bei einer Reynolds-Zahl von 46 000 und mit einer Akuationsamplitude von $g_{\max} = 0.85$[3] ($c_\mu = 0.008$) getestet (Abbildung 5.17). Die Regelung beginnt bei $t = 11.5$. Die Zeitverläufe des tatsächlichen und des geschätzten Wanddrucks weisen auf eine gute Schätzung der Amplitude und Phasenlage hin (Abbildung 5.17 a).

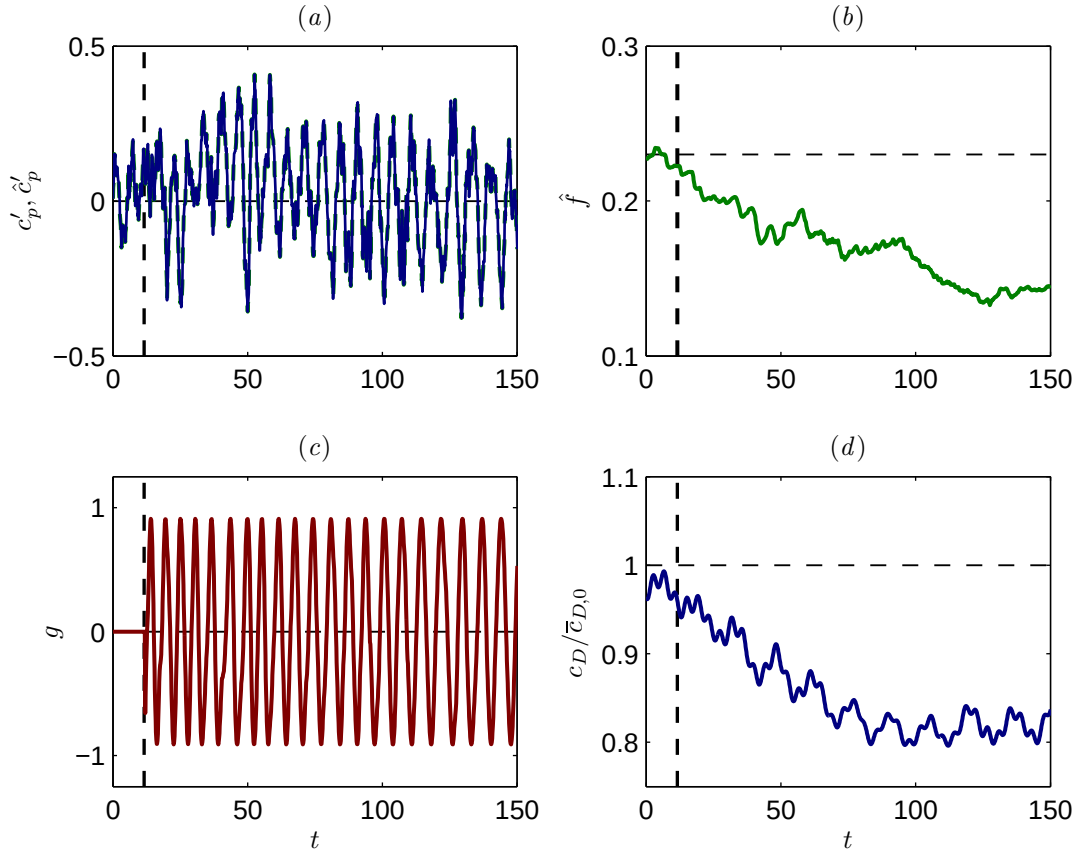


Abbildung 5.17: Phasenregelung im Experiment bei $Re_H = 46\,000$ mit $g_{\max} = 0.85$ ($c_\mu = 0.008$). Die Regelung startet bei $t = 11.5$. In (a) ist der tatsächliche (blau, durchgezogen) und der geschätzte (grün, gestrichelt) Wanddruckverlauf am unteren Sensor dargestellt. Die geschätzte Frequenz und der Stellgrößenverlauf des oberen Aktuators sind in (b) und (c) geplottet. Der Erfolg der Regelung wird in (d) anhand der Abnahme des Widerstandes um ca. 17% deutlich (Pastoor *et al.* 2008).

Die geschätzte Frequenz der dominanten harmonischen Schwingung ist in Abbildung 5.17 (b) abgebildet und liegt zunächst Nahe bei $\hat{f} = 0.23$, der natürlichen Instabilitätsfrequenz. Nach dem Einschalten der Regelung nimmt die dominante Frequenz auf etwa $\hat{f} = 0.15$ ab. Der Phasenregler berechnet auf der Basis der Phasenlage $\hat{\phi}_f$ ein nahezu harmonisches Aktuationssignal

[3]Henning, L. (2007) private Mitteilung: Die Amplitude wurde durch Probieren so eingestellt, dass sich etwa die gleiche Druckerhöhung wie bei der gesteuerten Beeinflussung ergibt

(Abbildung 5.17 *c*). Der Regler reduziert den Widerstand nach etwa zehn Wirbelablösungen um bis zu 17% (Abbildung 5.17 *d*). Damit wird ein mindestens gleich gutes Ergebnis wie durch gesteuerte Beeinflussung mit adaptiv gefundenen optimalen Aktuationsparametern ($f_a = 0.15$, $c_\mu = 0.006$) erreicht (Pastoor *et al.* 2008). Vergleicht man den effektiven Impulskoeffizienten des einen Aktuators $c_\mu^{\text{eff}} = 0.004$ der Phasenregelung mit der gesteuerten Beeinflussung mit zwei Aktuatoren, so benötigt man bei der Phasenregelung nur noch 58% der Aktuationsenergie, um die gleiche Widerstandsreduktion zu erzielen.

Die Bedeutung der Rückkopplung mit der korrekten Phasendifferenz $\Delta\phi = 180°$ wird in Abbildung 5.18 veranschaulicht. Die Regelung startet bei $t = 1000$ mit $\Delta\phi = 0°$ (Abbildung 5.18 *a*). In diesem Modus wird die alternierende Wirbelablösung angefacht, wie anhand der Zunahme des Widerstandes in Abbildung 5.18 (*d*) und der Akzentuierung der natürlichen Instabilitätsfrequenz in Abbildung 5.18 (*b*) deutlich wird. Bei $t = 2400$ wird die Phasendifferenz zwischen Aktuation und Druckschwankung auf $\Delta\phi = 180°$ erhöht. Widerstand und geschätzte Frequenz nehmen nun die gleichen Werte an, wie in Abbildung 5.17 beschrieben.

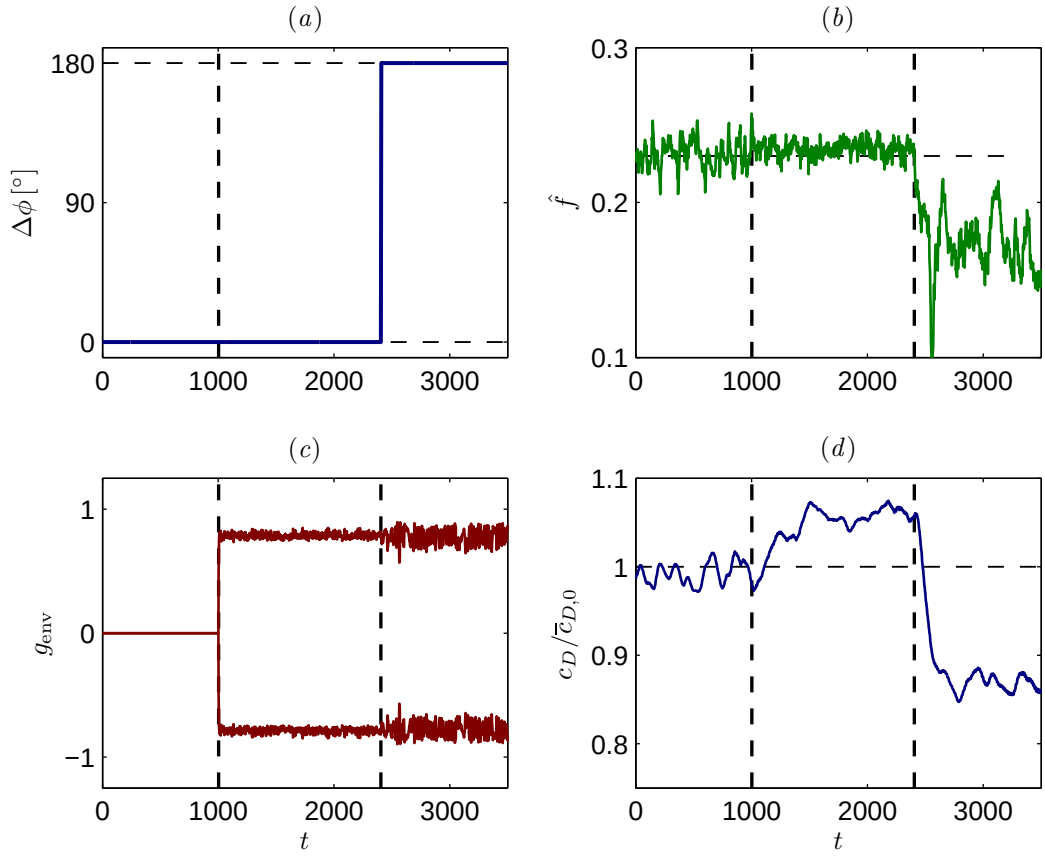


Abbildung 5.18: Phasenregelung im Experiment bei $Re_H = 46\,000$ mit $g_{\max} = 0.85$ ($c_\mu = 0.008$) in zwei Modi: Die Regelung startet bei $t = 1000$ mit $\Delta\phi = 0°$, bei $t = 2400$ springt der Phasenversatz auf $\Delta\phi = 180°$ (*a*). Die geschätzte Frequenz und die Einhüllende des Stellgrößenverlaufs des oberen Aktuators sind in (*b*) und (*c*) geplottet. Der Widerstand in (*d*) nimmt für $\Delta\phi = 0°$ zu, weil die alternierende Wirbelablösung angefacht wird, und sinkt für $\Delta\phi = 180°$, da die Wirbelablösung synchronisiert wird (Pastoor *et al.* 2008).

Die Robustheit der Phasenregelung gegenüber Änderungen der Betriebsbedingungen wird an einer Variation der Reynolds-Zahlen von 30 000 bis 70 000 demonstriert (Abbildung 5.19 a). Wie man am Zeitverlauf des Widerstandes in Abbildung 5.19 (b) erkennt, wird der mittlere Widerstand konstant um etwa 15% gegenüber dem Niveau der natürlichen Strömung reduziert.

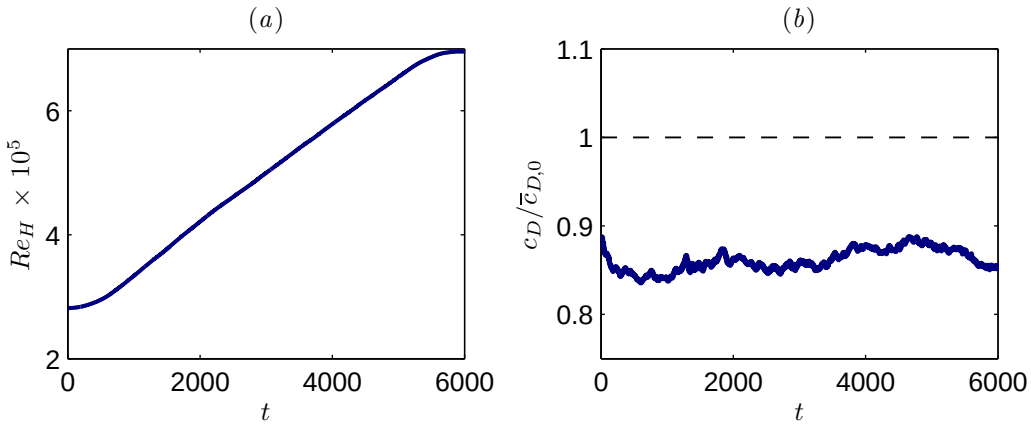


Abbildung 5.19: Phasenregelung im Experiment mit $g_{\max} = 0.85$ ($c_\mu = 0.008$) für sich ändernde Betriebsbedingungen. Während sich die Reynolds-Zahl von 30 000 auf 70 000 erhöht (a), wird der mittlere Widerstand nahezu konstant auf einem Wert 15% unter dem Niveau der natürlichen Strömung gehalten (b). Die Zeit ist in dieser Abbildung mit der Anströmgeschwindigkeit von $Re_H = 46\,000$ entdimensionalisiert (Pastoor *et al.* 2008).

In Abbildung 5.20 ist das momentane Geschwindigkeits- und Wirbelstärkefeld für einen Schnappschuss mit der PIV-Methode und der zugehörige Wanddruck am oberen und unteren Aktuator dargestellt. Die Grobstrukturen in der oberen und unteren Scherschicht werden symmetrisiert, was sich in einer Angleichung der Wanddruckfluktuationen niederschlägt.

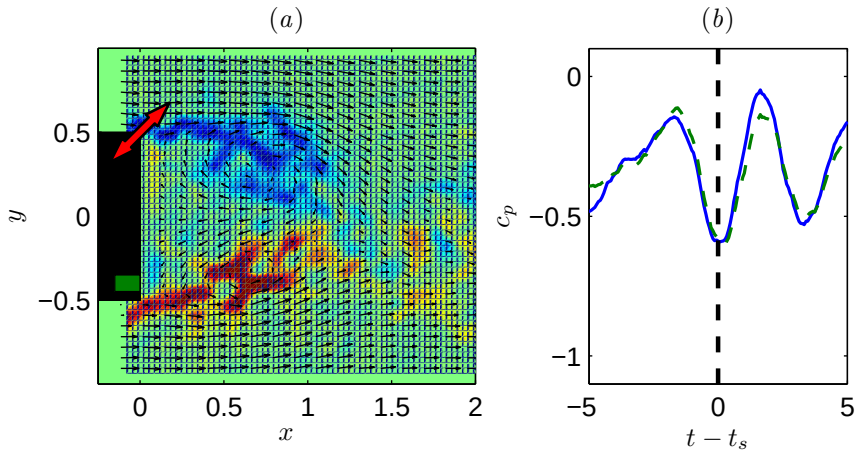


Abbildung 5.20: Wie Abbildung 5.6, jedoch für die vom Phasenregler kontrollierte Strömung. (Pastoor *et al.* 2008).

5.4.3 Bewertung der Phasenregelung

Bei der Phasenregelung stellt sich eine effektive Aktuationsfrequenz von etwa $f_a = 0.15$ an. Diese Frequenz wird jedoch nicht explizit vorgegeben, sondern ist erst ein Resultat der Phasenregelung, die die Entwicklung der oberen Scherschicht mit der der unteren koppelt. Dadurch ist der Phasenregler in der Lage, den Effekt der gesteuerten Beeinflussung mit zwei Aktuatoren zu imitieren.

Ein Vorteil der Phasenregelung gegenüber der gesteuerten Beeinflussung wurde bereits weiter oben aufgeführt: die Einsparung von Aktuationsleistung. Die elektrische Leistungsaufnahme des Aktuators im Experiment liegt bei etwa $\mathcal{P}_\mathrm{e}^* = 0.82$ W. Die durch Aktuation eingesparte Antriebsleistung wird mit $\mathcal{P}_D^* = U_{\infty,c}^* \, \Delta F_x^* = -3.67$ W abgeschätzt. Die eingesetzte Aktuationsleistung führt zu einer etwa viereinhalbfach ($|\mathcal{P}_D^*|/\mathcal{P}_\mathrm{e}^*$=4.5) höheren Senkung der Antriebsleistung.

Ein weiterer Pluspunkt, und dieser Aspekt ist aus theoretischer Sicht noch wichtiger, ist die Bestätigung des physikalischen Verständis der Strömung. Anhand eines niederdimensionalen Wirbelverfahrens kann der Mechanismus zur Widerstandsreduktion in Nachlaufströmungen erklärt werden. Obendrein lässt sich mit dem Wirbelverfahren eine physikalisch motivierte Regelungsstrategie entwickeln, die auf eine Entkopplung von Scherschicht- und Nachlaufprozessen durch Synchronisation abzielt. Dadurch kann die Effizienz der Strömungsbeeinflussung erheblich gesteigert werden. Diese Erkenntniss wird in der Zusammenfassung in Kapitel 7 nocheinmal aufgegriffen.

5.5 Modellreduktion

Wie bei der Stufenströmung wird nun eine Modellreduktion für die natürliche Strömung durchgeführt, die eine Korrektur des Wirbelverfahrens durch einen dynamischen Beobachter ermöglicht. Eine analoge Vorgehensweise ist für die beeinflusste Strömung leicht durchführbar.

Zunächst wird der Wirbelproduktionsmechanismus vereinfacht und auf im Experiment zugängliche Messwerte bezogen. Wie bei der Phasenregelung ist dies der Wanddruck an der oberen bzw. unteren Körperkante, deren Phasenlage $\phi_{f,t}$ und $\phi_{f,b}$ durch zwei separate erweiterte Kalman-Filter (4.29)–(4.31) geschätzt wird. In Abbildung 5.21 (a) ist ein Schnappschuss des Wirbelverfahrens für den Zeitpunkt, wo die Phasenlage des unteren EKF gerade $\phi_{f,b} = 270°$ durchläuft, abgebildet. Die Wirbelkonfiguration wird durch radikales Verschmelzen — alle Wirbel einer Periode werden zusammengefasst — auf wenige Punktwirbel vereinfacht. Für diese lässt sich eine zeitliche Zunahme der Zirkulation auf $|\Gamma_\mathrm{max}| = 3$ ablesen. Die tatsächlichen und geschätzten Zeitverläufe des Druckes bzw. der Zirkulationsproduktionsrate an der Unterkante sind in Abbildung 5.21 (b, c) dargestellt.

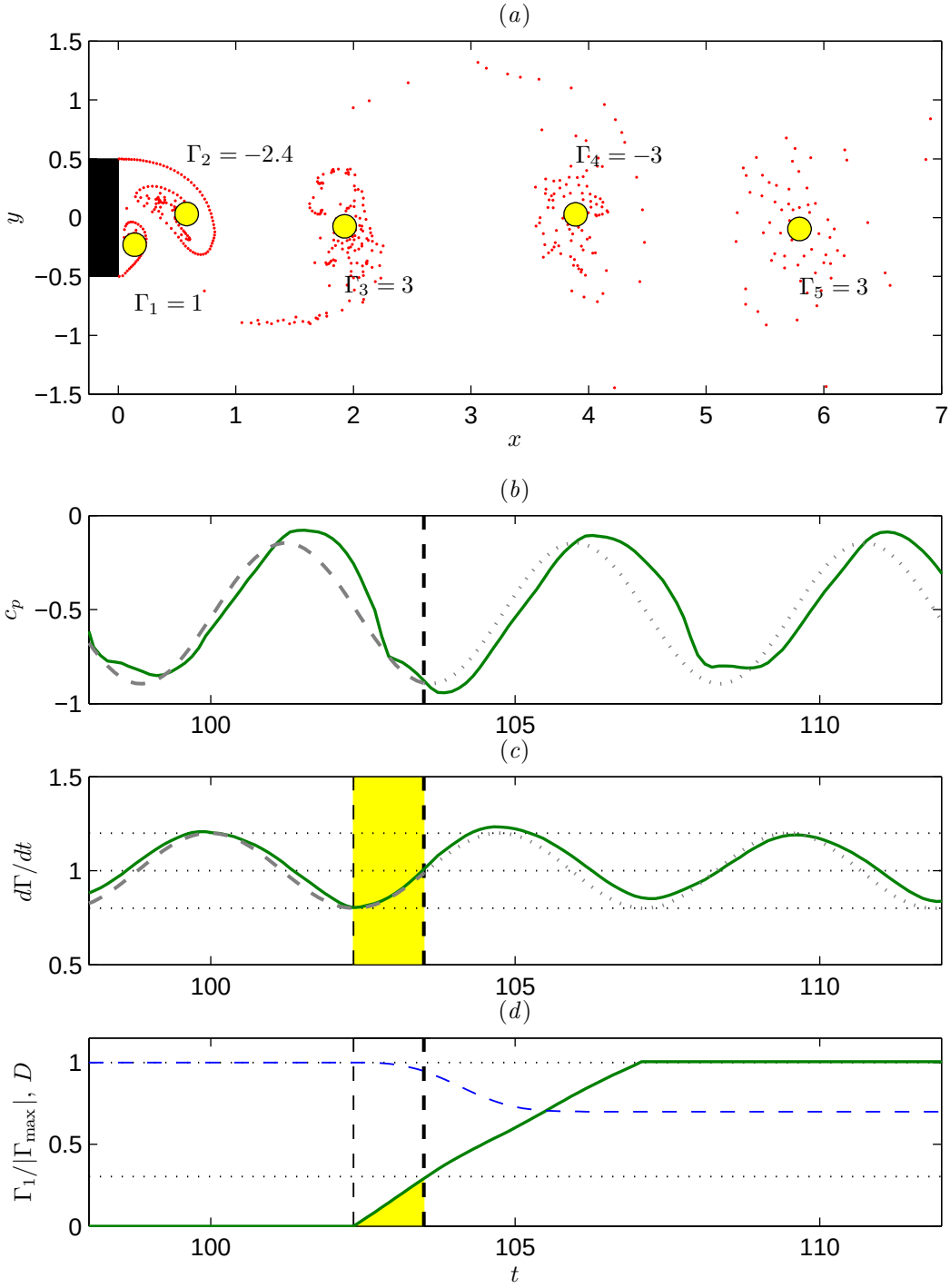


Abbildung 5.21: Modellreduktion für die natürliche Strömung um den stumpfen Körper: Schnappschuss des Wirbelverfahrens für $t_s = 103.5$ mit den aktuellen Wirbelpositionen (rot). Radikale Verschmelzung ergibt die mit gelben Kreisen markierte Wirbelfolge und Zirkulationen. Zeitverläufe des unteren (grün, durchgezogen) Wanddrucks und der Zirkulationsproduktionsrate (grün, durchgezogen) an der unteren Körperkante sind im (b) bzw. (c) widergegeben. Die dicke vertikale Line (schwarz, gestrichelt) markiert den aktuellen Zeitpunkt. Die grau gestrichelten Verläufe geben die mit dem EKF bis $t = t_s$ geschätzten Verläufe wider, die gepunkteten Verläufe sind Prädiktionswerte. Der in (c) gelb markierte Bereich zeigt die bisherige Lebensdauer des gerade an der Unterkante ablösenden Wirbels. In (d) wird dessen Zirkulationsentwicklung (grün, durchgezogen) und das abgeleitete Dissipationsmodell (blau, gestrichelt) dargestellt.

Beobachtet man über die Zeit, welcher Abschnitt der unteren Scherschicht sich in den ersten Wirbel aufrollt, so erkennt man, dass dies für den Bereich $102.5 < t < 107$ gilt. Damit liegt der zeitliche Ursprung des gerade ablösenden Wirbels bei $t_0 = 102.5$. Dies entspricht der Phasenlage $\phi_{f,b} = 180°$. Die zeitliche Integration der Zirkulationsproduktionsrate ergibt schließlich den Zuwachs der Zirkulation des Wirbels (Abbildung 5.21 *d*). Der tatsächliche Zuwachs wird durch Multiplikation der aktuellen Zirkulationsproduktionsrate mit folgendem empirischen Dissipationsmodell begrenzt:

$$D_i = 0.7 + 0.3\, e^{-\frac{(t-t_{0,i})^3}{8}}. \tag{5.10}$$

Für das reduzierte Modell werden dieselben kinematischen und dynamischen Gleichungen wie für das vollständige Wirbelverfahren verwendet. Eine Wirbelverschmelzung erfolgt nicht. Als Dissipationsmodell wird lediglich (5.10) verwendet, wobei $t_{0,i}$ den Zeitpunkt markiert, bei dem der i-te Wirbel eingesetzt wird. Das Druckfeld wird mit der Bernoulli-Gleichung (2.36) berechnet und nicht über die Auswertung der Druck-Poisson-Gleichung. Das Produktionsmodell wird durch folgende Methode vereinfacht: Ein neuer Wirbel mit der Zirkulation $\Gamma = 0$ wird nahe der Unterkante bei $(x, y) = (0.15, -0.25)$ eingesetzt, wenn $\phi_{f,b} = 180°$ erreicht wird. Der Wirbel wird festgehalten bis $\phi_{f,b} = 270°$. In dieser Zeit wächst die Zirkulation gemäß der geschätzten Zirkulationsproduktionsrate und des verwendeten Dissipationsmodells (5.10) auf $\Gamma = 1$. Der sich nun frei bewegende Wirbel wächst bis $\phi_{f,b} = 540° = 180°$, bis ein neuer Wirbel an der Unterkante eingesetzt wird. An der Oberkante wird entsprechend mit der geschätzten Phasenlage $\phi_{f,t}$ verfahren. Der neue Wirbel wird jedoch bei $(x, y) = (0.15, +0.25)$ eingesetzt, die Zirkulation erhält negatives Vorzeichen.

In Abbildung 5.22 (*a*–*e*) sind Schnappschüsse des reduzierten Modells dargestellt. Während die Dynamik der Wirbelablösung durch das reduzierte Modell

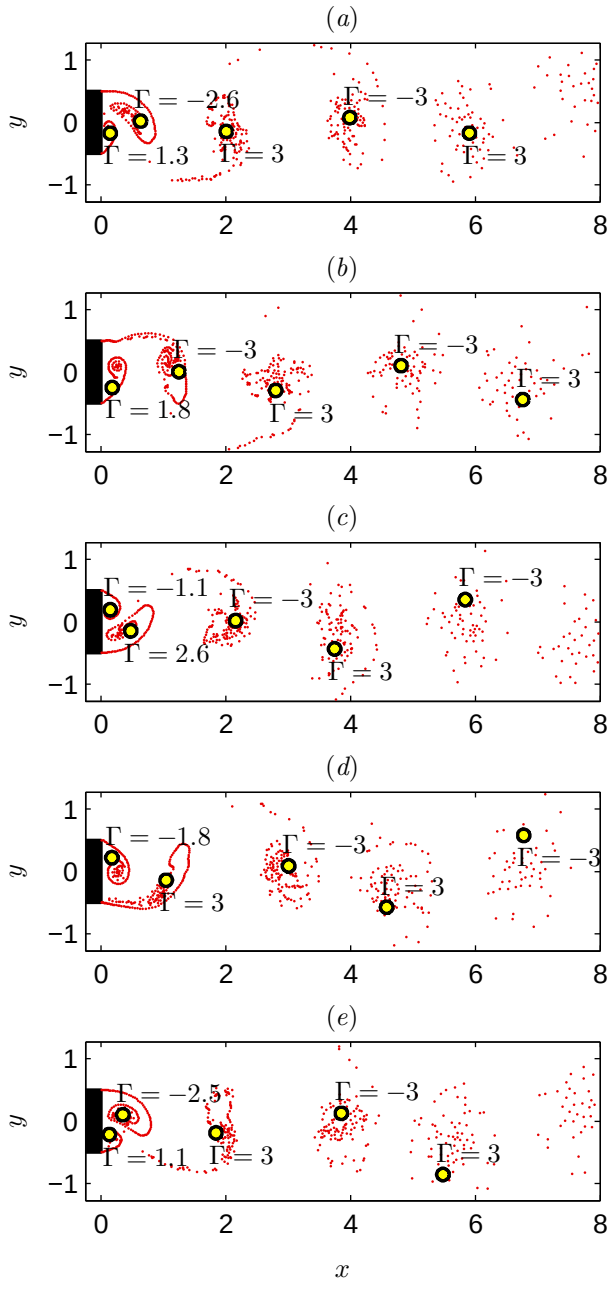


Abbildung 5.22: Grobstrukturen des reduzierten Modells für verschiedene Phasenwinkel $\phi_{f,b} = \{10, 90, 180, 270, 360\}°$ von (*a*–*e*).

mit einfachen Mitteln recht gut widergegeben wird, hat das vorgestellte Modell jedoch auch einige gravierende Nachteile, die sich aus dem Konzept der Phasenkorrektur ergeben:

- Es ist keine Korrektur bereits abgeschwommener Wirbel möglich. Das reduzierte Modell gibt nur einen Eindruck der durchschnittlichen Wirbelbewegung. Treten jedoch Schwankungen auf, wie etwa bei der sich einrollenden Scherschicht an der Unterkante in Abbildung 5.22 (b), können diese vom reduzierten Modell nicht aufgelöst werden. Weiter stromab machen sich die Vereinfachungen der Dynamik in größeren Abweichungen bemerkbar, z.B. der Wirbel bei $x \approx 4$ in Abbildung 5.22 (c). Hier wäre ein korrigierender Eingriff durch geeignete Methoden wünschenswert.
- Bei hohen Anregeamplituden oder in Aktuationsfällen, bei denen die Modellvorstellung der periodisch ablösenen Wirbel nicht mehr zutrifft, ist die Zustandsschätzung an den beiden Körperkanten problematisch.
- Es sind unterschiedliche Modelle für die natürliche und beeinflusste Strömung erforderlich, da die Aktuation und die initiale Wirbelaufrollung nicht aufgegelöst werden.

Um diesen Nachteilen zu begegnen, wird im nun folgenden Kapitel die Möglichkeit einer algorithmischen Zustandskorrektur niedrigdimensionaler Wirbelverfahren auf der Basis eines erweiterten bzw. eines Sigma-Punkt-Kalman-Filters untersucht.

Kapitel 6

Dynamischer Beobachter für eine Tandem-Konfiguration stumpfer Körper

In Kapitel 5 wird eine Regelungsstrategie zur Widerstandssenkung eines einzelnen stumpfen Körpers vorgestellt. Häufig befinden sich jedoch mehrere Körper im Strömungsfeld; es kommt zur Interaktion der Strömungsvorgänge, je nach Lage und Abstand der Körper. Mit dem Ziel einer echtzeitfähigen, wirbelbasierten Rekonstruktion des Strömungfeldes wird in diesem Kapitel die Strömung um eine Tandem-Konfiguration zweier stumpfer Körper untersucht. Hierunter versteht sich eine Anordnung zweier Körper hintereinander, d.h. der zweite Körper befindet sich in der vom ersten Körper hervorgerufenen Nachlaufströmung.

Von Hucho (2002) werden für die Tandem-Konfiguration zwei Fälle klassifiziert: Eine schwache Wechselwirkung liegt vor, wenn der Abstand beider Körper groß ist. Der zweite Körper liegt im Nachlauf des ersten Körpers und wird mit einer geringeren mittleren Geschwindigkeit angeströmt, so dass sich der Widerstand leicht reduziert. Die Rückwirkung des zweiten Körpers durch dessen Aufstau auf die Scherschichten und die Ablöseblase des ersten Körpers ist nur gering. Eine starke Wechselwirkung tritt bei geringeren Abständen auf. Die Front des zweiten Körpers rückt dabei so weit in die Ablöseblase des ersten Körpers vor, dass sich der Widerstand sowohl des zweiten Körpers als auch des ersten Körpers merklich ändert — vgl. Windschattenfahren im Radsport. Eine einfache Regel, mit der sich die Art der Wechselwirkung vorhersagen lässt, existiert nicht.

Aus Untersuchungen einer Tandemanordnung zweier Kreiszylinder von Gu (1996) bei überkritischen Reynolds-Zahlen (turbulente Grenzschichten lösen nach dem dicksten Querschnitt ab) ist Folgendes bekannt: Liegt der zweite Zylinder weniger als 0.6 Durchmesser stromab des ersten Körpers, so ist dieser vollständig in der Ablöseblase eingehüllt. Der Druck auf der Vorderseite des zweiten Körpers entspricht in guter Näherung dem Druck auf der Hinterseite des ersten Körpers, der leicht gegenüber dem Fall eines einzelnen Körpers angehoben wird. Beide Körper erfahren

dadurch einen geringeren Widerstand. Zusammen verhalten sie sich wie ein länglicher Körper. Diese Interaktion wird auch als Totwasser-Interferenz (Hucho 2002) bezeichnet. Sie dominiert das Widerstandsverhalten bis zu einem Abstand von etwa $2.0 - 2.5$ Durchmessern. Ab diesem Abstand gelangt der zweite Körper an das Ende der Ablöseblase und wird nun vom Nachlauf des ersten Körpers umströmt (Nachlauf-Interferenz). Mit zunehmendem Abstand nähert sich die Druckverteilung auf dem zweiten Körper der des ersten Körpers an.

Tandem-Konfigurationen finden sich in modifizierter Form bei einer Vielzahl technischer Problemstellungen, etwa im Kraftfahrzeugbau (hintereinander fahrende Lastwagen), der Bauwerksaerodynamik (Hochhäuser oder Schornsteine im Wind) oder der Luftfahrt (Interaktion von Strukturen). In dieser Arbeit wird eine Tandem-Konfiguration von zwei länglichen stumpfen Körpern, baugleich dem stumpfen Körper aus Kapitel 5, untersucht. Ziel der Untersuchung ist die Entwicklung eines wirbelbasierten Strömungsmodells zur Vorhersage und Rekonstruktion des Strömungsfeldes, welches in Echtzeit parallel zum Experiment läuft. Der experimentelle Aufbau wird in Abschnitt 6.1 beschrieben. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden zwei Lösungen vorgestellt. Das erste Verfahren (Modell A) in Abschnitt 6.2 stellt dabei eine Erweiterung des in Abschnitt 5.5 beschriebenen reduzierten Modells dar. Der zweite Körper wird dabei mit einem simplen Panel-Verfahren modelliert. Die Wirbelproduktion des Modells wird mit einem erweiterten Kalman-Filter auf der Basis von Messungen am ersten Körper geschätzt. Das zweite Verfahren (Modell B) in Abschnitt 6.3 beruht auf einem neuen Modell nur für den zweiten Körper. Es verwendet das Sigma-Punkt-Kalman-Filter zur Korrektur der geschätzten Zustandsgrößen anhand von Messungen am zweiten Körper. Die Einströmbedingungen der Wirbel werden wie bei Modell A durch Messungen am ersten Körper vorgegeben. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Bewertung der beiden Verfahren in Abschnitt 6.4.

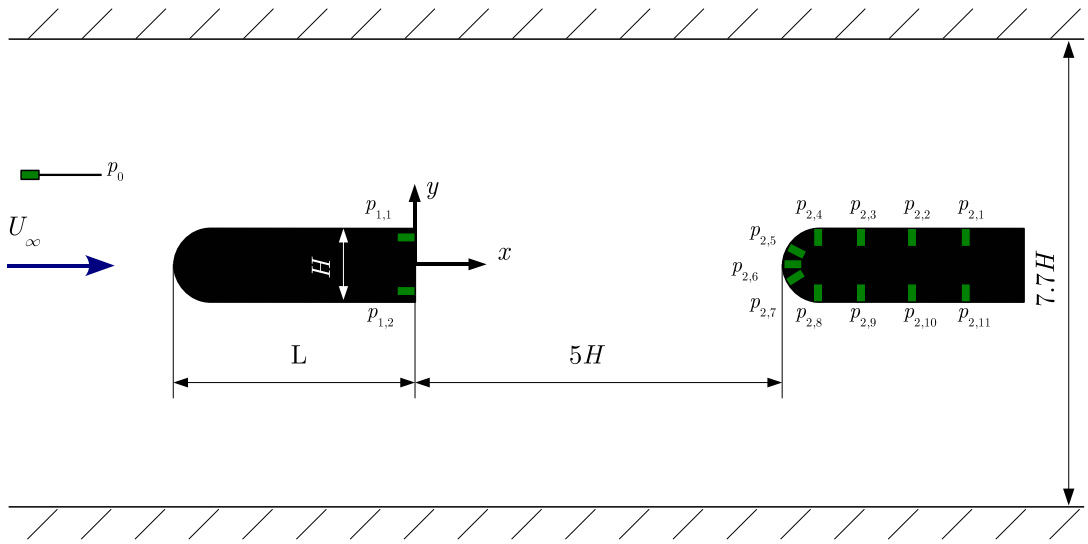


Abbildung 6.1: Skizze des experimentellen Aufbaus der Tandem-Konfiguration mit den Drucksensoren auf dem ersten ($p_{1,1}$, $p_{1,2}$) und zweiten Körper ($p_{2,1}$ bis $p_{2,11}$).

6.1 Experimenteller Aufbau

Der experimentelle Aufbau[1] entspricht dem Aufbau mit einem einzelnen Körper aus Kapitel 5, mit dem Unterschied, dass ein zweiter, baugleicher stumpfer Körper in den Nachlauf des ersten Körpers eingesetzt wird (Abbildung 6.1). Der Abstand beider Körper wird mit fünf Körperhöhen so gewählt, dass die Halbbreite $b_{1/2}$ des vom ersten Körper hervorgerufenen Windschattens wegen $b_{1/2} = 1/4\,\sqrt{x\,c_D\,H}$ (Schlichting 1930) bei $x = 5$ gerade der halben Körperhöhe entspricht. An dieser Stelle ist eine Nachlauf-Interferenz zu erwarten. Zur Vereinfachung der Untersuchung werden, analog zu Kapitel 5, dreidimensionale und Wandeffekte vernachlässigt. Die genaue Position der Drucksonden ist Tabelle 6.1 zu entnehmen.

	Körper 1		Körper 2										
Position/Sensor	#1	#2	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11
x^*	0	0	185	134	83	33	0	0	0	33	83	134	185
y^*	+32	-32	+36	+36	+36	+36	+10	0	-10	-36	-36	-36	-36

Tabelle 6.1: Sensorpositionen auf den beiden Körpern (in mm). Die x-Positionen für den zweiten Körper sind auf die Position der Körpernase bei $x^* = 360$ mm bezogen.

6.2 Modellierung A

Um eine schnelle Erprobung der Vorhersagefähigkeit eines Wirbelverfahrens zu ermöglichen, wird das in Abschnitt 5.5 vorgestellte Modell erweitert. Der zweite Körper im Nachlauf wird als sogenannter Rankine-Körper (Lugt 1996) in das Modell des Strömungsfeldes eingefügt. Ein Rankine-Körper ergibt sich durch Platzierung zweier Quellen mit betragsmäßig gleicher Quellstärke aber unterschiedlichem Vorzeichen. Quellpositionen und -stärke werden mit $z_1 = 5.2$ bzw. $z_2 = 8.4$ und $|Q| = 1.3$ so gewählt, dass bei stationärer Strömung die tatsächliche Wandkontur und wandnahe Stromlinien in guter Näherung übereinstimmen (Abbildung 6.2).

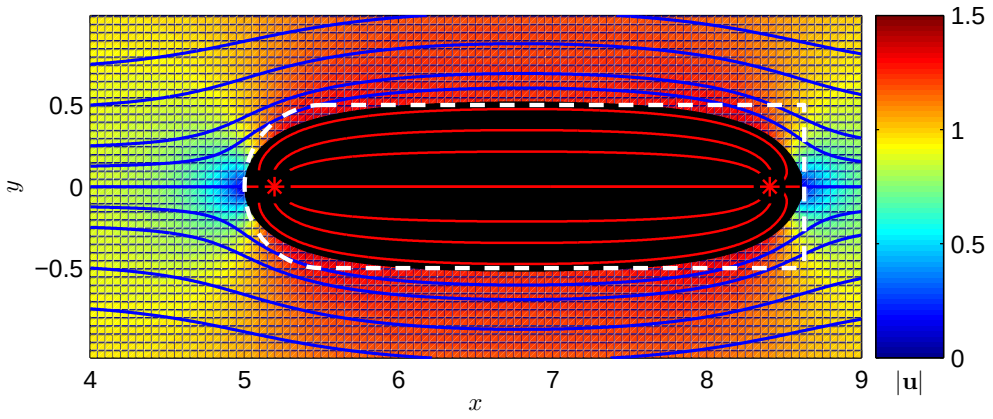


Abbildung 6.2: Skizze des Rankine-Körpers (schwarze Fläche) und tatsächliche Körperkontur (weiß, gestrichelt) mit den Stromlinien der stationären Strömung im Außenfeld (blau) und im Innenfeld (rot) des Körpers. Der Geschwindigkeitsbetrag ist farbkodiert (dunkelblau: $|\mathbf{u}| = 0$, dunkelrot: $|\mathbf{u}| = 1.5$). Die Quellpositionen sind durch rote Sterne markiert.

[1] Die Experimente wurden zusammen mit Lars Henning durchgeführt.

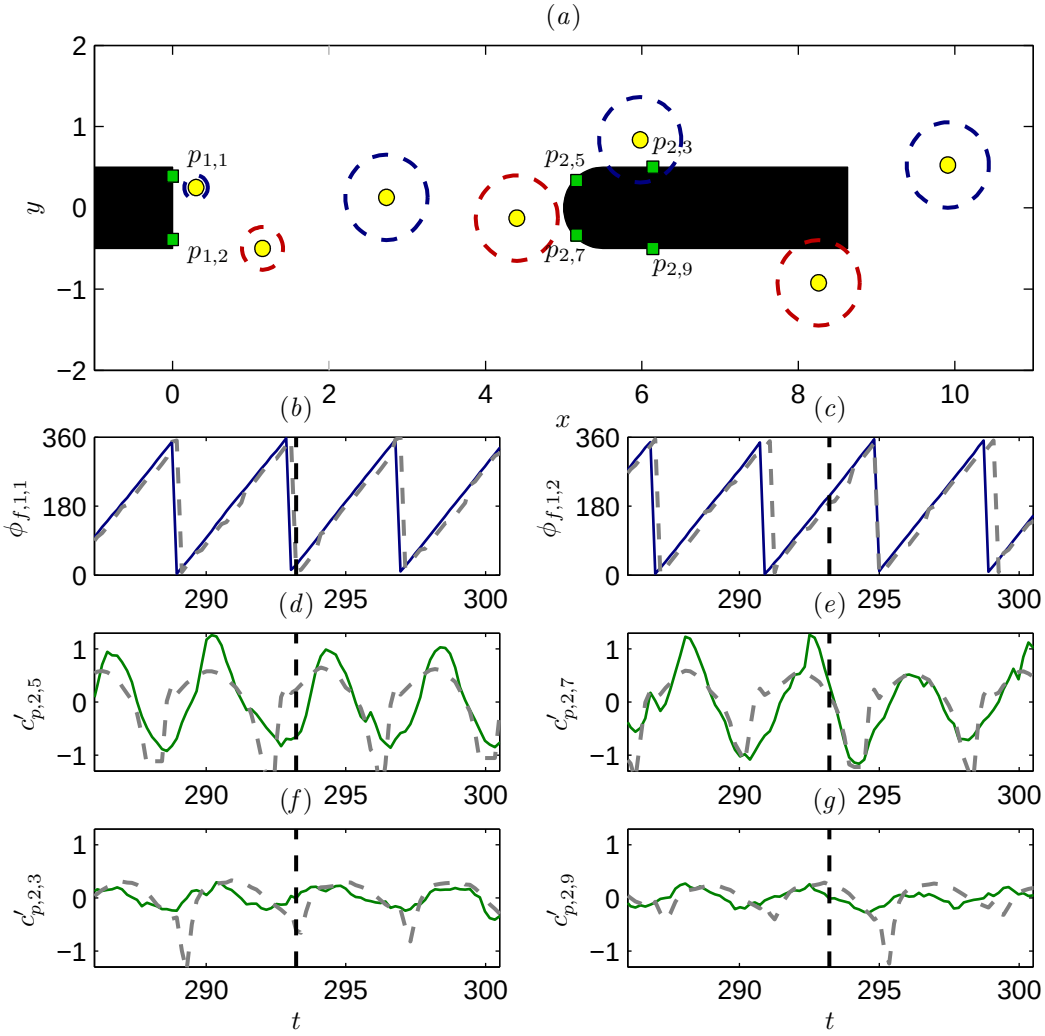


Abbildung 6.3: Rekonstruktion des Strömungsfeldes mit Modell A. In (a) werden die aktuellen Wirbelpositionen und die ausgewerteten Sensoren (Körper 1: #1, #2; Körper 2: #3, #5, #7 und #9) dargestellt. Die Sensoren #5 und #7 liegen bei diesem Aufbau bei $(x^*, y^*) = (12\text{ mm}, \pm 24\text{ mm})$. In (b) und (c) sind die gemessene (blau, durchgezogen) und die geschätzte (grau, gestrichelt) Strömungsphase an der oberen (Sensor #1) bzw. unteren Kante (Sensor #2) des ersten Körpers dargestellt. Der momentane Zeitpunkt wird durch die vertikale Linie (schwarz, gestrichelt) markiert. Gemessene (grün, durchgezogen) und geschätzte (grau, gestrichelt) Druckverläufe für die übrigen Sensoren sind in (d)–(g) geplottet.

Die Wirbelproduktion wird, wie in Abschnitt 5.5 beschrieben, durch Druckmessungen an der Ober- und Unterkante des ersten Körpers gesteuert. Die Berechnung des Druckfeldes erfolgt durch Auswertung der Bernoulli-Gleichung (2.36). Das modellgestützte Messverfahren wird auf dem DSP implementiert. Hierdurch können die Routinen in Echtzeit neben dem Experiment gerechnet werden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.3 $(a$–$g)$ zusammengefasst.

Das Modell benötigt etwa zehn Perioden (ca. 40 konvektive Zeiteinheiten) bis es eingeschwungen ist. Zum Zeitpunkt $t = 293$ ergibt sich die in Abbildung 6.3 (a) dargestellte Wirbelkonfiguration. An der aktuellen Schätzung der Strömungsphase an der Unterkante (siehe $\hat{\phi}_{f,1,2} \approx 178°$ in Abbildung 6.3 c) erkennt man, dass in Kürze (bei $\hat{\phi}_{f,1,2} = 180°$) an der Unterkante ein neuer Wir-

bel eingesetzt wird. Der nahe der Oberkante liegende Wirbel befindet sich schon seit etwa einer halben Periode im Strömungsfeld (siehe $\hat{\phi}_{f,1,1} \approx 360°$ in Abbildung 6.3 *b*). Betrachtet man die Druckschwankungen an den Sensoren #5 und #7 auf dem zweiten Körper (Abbildung 6.3 *d, e*), so ist eine gute Übereinstimmung der Amplituden und Phasenlage von experimentellen und berechneten Drücken zu erkennen. Bei den weiter stromab liegenden Sensoren #3 und #9 (Abbildung 6.3 *f, g*) nimmt die Vorhersagefähigkeit des Modells ab. Während die Druckmaxima noch gut geschätzt werden können, werden die Druckmimima deutlich überschätzt. Aus dem Zeitversatz der Druckminima, z.B. $t_{7,\min} = 294$ und $t_{9,\min} = 294.5$ bei Sensor #7 bzw. #9, geht zudem hervor, dass die Konvektionsgeschwindigkeit der Wirbel in diesem Bereich zu gering vorhergesagt wird.

Die Untersuchung von Modell A ist insofern ermutigend, als dass sich mit der einfachen Modellerweiterung bereits eine grobe Rekonstruktion des Strömungsfeldes realisieren und eine gute Vorhersage der Druckschwankungen in Frontbereich des zweiten Körpers treffen lässt. Da die Korrektur des Modells nur durch Messungen am Einströmrand (Hinterkante des ersten Körpers) erfolgt, können Modellfehler und weiter stromab eingreifende Störungen nicht korrigiert werden. Die weiter oben problematisierte Überschätzung der Druckminima kann auf eine zu hoch angenommene Zirkulation oder eine zu körpernahe Position des gerade vorbeilaufenden Wirbels zurückgeführt werden. In der weiteren Untersuchung soll daher ein neues Modell, Modell B, entwickelt werden, welches eine Korrektur der Wirbelpositionen und der Zirkulation durch Sensoren von Körper 2 ermöglicht. Zudem sollen beim neuen Modell die Randbedingungen auch von der instationären Strömung erfüllt werden.

6.3 Modellierung B

Im Folgenden wird die Entwicklung eines Verfahrens vorgestellt, welches die oben genannten Anforderung erfüllt. In diesem Wirbelverfahren rückt der zweite Körper in den Vordergrund der Modellierung. Der zweite Körper wird als Joukowski-Profil modelliert und das Strömungsproblem über eine konforme Abbildung auf eine Zylinderumströmung transformiert. Der erste Körper taucht in diesem Wirbelverfahren nicht mehr explizit auf, sondern stellt lediglich die Ursache für die Wirbelentstehung dar.

Translation, konforme Abbildung und Kinematik: Durch eine einfache Translation

$$z = x - \left(5 + \frac{L}{2}\right) + \mathrm{i}\, y \tag{6.1}$$

werden die Koordinaten des physikalischen Problems auf die Mittelpunktskoordinaten des zweiten Körpers transformiert. Für diese verschobenen Koordinaten wird dann eine Joukowski-Abbildung

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_3}{\zeta^3} \tag{6.2}$$

gesucht, die mit $c_1 = 0.82$ und $c_3 = -0.18$ den Kreis mit Radius $R = 1.25$ im Ursprung des Bildbereichs auf einen elliptischen Körper abbildet, dessen Frontbereich gut mit dem stumpfen Körper des Experiments übereinstimmt (vgl. Abbildung 2.3). Zur numerischen Bestimmung der Umkehrfunktion $\zeta(z)$ wird wiederum das Newton–Raphson-Verfahren eingesetzt. Hierzu wird die Ableitung

$$z' := \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = 1 - \frac{c_1}{\zeta^2} - 3\,\frac{c_3}{\zeta^4} \tag{6.3}$$

benötigt.

Die komplexe Geschwindigkeit ergibt sich im Bildbereich durch Addition einer Parallel- (2.17) und Dipolströmung (2.21) mit der Anströmgeschwindigkeit $U_\infty = 1$ und dem Dipolmoment $M = 2\pi\, U_\infty\, R^2$. Hierauf werden die induzierten Geschwindigkeiten der realen und Bildwirbel (2.23) addiert, wobei für die Position $\tilde{\zeta}$ und Zirkulation $\tilde{\Gamma}$ eines Bildwirbels (2.28) zu berücksichtigen ist:

$$w(\zeta) = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{\zeta^2}\right) - \left(\mathrm{i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{\zeta - \zeta_j} + \mathrm{i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\tilde{\Gamma}_j}{2\pi} \frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}_j}\right). \tag{6.4}$$

Die Zirkulation der Wirbel wird mit (2.57)–(2.60) regularisiert, wobei als Kernradius $R_b = 0.4$ angenommen wird. Zur Umrechnung der Geschwindigkeiten in den physikalischen Bereich wird die Ableitung

$$\zeta' := \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\zeta^4}{\zeta^4 - c_1\,\zeta^2 - 3\,c_3} \tag{6.5}$$

benötigt. Damit ergibt sich für die induzierten Geschwindigkeiten am Punkt ζ.

$$w^z = w(\zeta)\ \left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_\zeta . \tag{6.6}$$

Dynamik: Um eine schnelle Berechnung des Modells zu ermöglichen, soll auf die Rücktransformation der Wirbelpositionen in den physikalischen Bereich verzichtet werden. Die gesamte Berechnung der Dynamik und auch der Sensorik (siehe unten) wird daher im Bildbereich vollzogen. Nur für die Bestimmung der Anfangsbedingungen (initiale Wirbelpositionen) und für die Visualisierung ist die Rücktansformation erforderlich. Die Rückrechnung der Geschwindigkeit aus dem physkalischen Bereich liefert nach einigen Zwischenschritten

$$w^\zeta = \left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_\zeta^2 w(\zeta)\,. \tag{6.7}$$

Wegen der konformen Abbildung ist für die Wirbelbewegung eine Routh-Korrektur erforderlich. Sie lautet:

$$\mathcal{R}(\zeta) := \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{c_1\,\zeta^5 + 2\,c_3\,\zeta^3}{(\zeta^4 - c_1\,\zeta^2 - 3\,c_3)^2}\,. \tag{6.8}$$

Auch sie kann mit einigen Zwischenschritten in den Bildbereich übertragen werden. Für die Dynamik des n-ten Wirbels folgt damit

$$w_n^\zeta = \left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}^2 w(\zeta_n) - \mathrm{i}\ \overline{\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}}\ \frac{\Gamma}{4\pi}\,\mathcal{R}(\zeta_n)\,. \tag{6.9}$$

Sensorik: Das Druckfeld ergibt sich durch Auswertung der Bernoulli-Gleichung (2.36). Zur Berechnung der Zeitableitung des Geschwindigkeitspotentials muss für die realen Wirbel (2.38), für Bildwirbel (2.43) ausgewertet werden.

$$c_p(\zeta,t) = \frac{1}{2}\left(1 - |\mathbf{u}(\zeta,t)|^2\right) - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_j(\zeta,t)}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\Phi}_j(\zeta,t)}{\partial t}\right) \tag{6.10}$$

Produktionsmodell: Es wird dasselbe Produktionsmodell wie bei Modell A angesetzt. Neue Wirbel werden bei den Strömungsphasen $\phi_{f,1,1} = 180°$ bzw. $\phi_{f,1,2} = 180°$ an der Stelle $(\xi,\eta) = (-6.54, \pm 0.255)$ in das Strömungsfeld eingesetzt. Die Strömungsphasen werden anhand von erweiterten Kalman-Filtern aus den Druckdaten der Sensoren #1 bzw. #2 vom ersten Körper geschätzt.

Dissipationsmodell: Die am weitesten stromab liegenden Wirbel werden durch ein Dissipationsmodell ausgeblendet. Wenn nahe der Oberkante bei $\phi_{f,1,1} = 180°$ ein neuer Wirbel entsteht und über eine Periode wächst, nimmt die Zirkulation des ältesten Wirbels mit demselben Ursprung entsprechend ab. Hierdurch werden Sprünge in der Berechnung des Geschwindigkeits- und Druckfeldes verhindert.

Kontrolle der vertikalen Position: Wirbel mit positiver Zirkulation halten sich unterhalb der ξ-Achse, solche mit negativer Zirkulation oberhalb der ξ-Achse auf. Diese empirische Beobachtung wird im hier verwendeten Verfahren durch eine Kontrolle und Korrektur der η-Position erzwungen, falls ein Wirbel die Abszisse überquert. Ohne diese Maßnahme könnte es in der Anlaufphase zu unphysikalischen Zuständen kommen.

Grenzschicht-Kontrolle: Gelangen die Wirbel sehr dicht an die Kontur des Körpers, werden von den Bildwirbeln sehr hohe und unphysikalische Geschwindigkeiten induziert. Um dies zu verhindern, wir eine 'Grenzschicht' mit einer Dicke von 0.1 um den Körper herum angenommen. Wirbel, die in diese Schicht eintreten, werden an den Rand der Grenzschicht verschoben.

6.3.1 Zustandsschätzung mit dem Sigma-Punkt-Kalman-Filter

In Kapitel 3 ist bereits deutlich hervorgehoben worden, dass die Lineasierung einer nichtlinearen Systemgleichung bereits bei einem 1-Wirbelverfahren für einen Eckenwirbel sehr aufwändig ist. Für Mehrwirbelverfahren, insbesondere bei Verwendung einer konformen Abbildung und physikalischer Zusatzmodelle, ist eine analytische Formulierung nicht mehr gangbar. Aus diesem Grunde wird zur Schätzung der Zustandgrößen des Wirbelverfahrens das Sigma-Punkt-Kalman-Filter (SPKF) eingesetzt. Hierfür muss das Wirbelverfahren in ein Zustandsraummodell übertragen werden. Das Wirbelverfahren wird für $N = 10$ Wirbel angesetzt, hierbei ist jedoch Folgendes zu beachten:

1. Die beiden am weitesten stromauf liegenden Wirbel $n = \{1, 2\}$ werden durch das Produktionsmodell und damit durch die EKF gesteuert. Sie müssen daher *nicht* vom SPKF korrigiert werden.
2. Die beiden am weitesten stromab liegenden Wirbel $n = \{N-1, N\}$ werden vom Dissipationsmodell gesteuert. Auch sie müssen daher nicht vom SPKF korrigiert werden.

Zustandsraummodell der Strömung: Der Zustandsvektor wird aus den Positionen ξ und η sowie den Zirkulationen Γ des dritten bis $(N-2)$-ten Wirbels zusammengesetzt und hat demzufolge $L_{\mathbf{a}} = 6 \times 3 = 18$ Zustände. Entsprechend wird die initiale Kovarianzmatrix des Schätzfehlers als Diagonalmatrix mit den geschätzten Kovarianzen $e_\xi^2 = 0.05^2$, $e_\eta^2 = 0.10^2$ und $e_\Gamma^2 = 0.15^2$ angenommen:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \xi_{N-2} \\ \eta_{N-2} \\ \Gamma_{N-2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{a},0} = \begin{pmatrix} e_\xi^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_\eta^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_\Gamma^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_\Gamma^2 \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Die Koordinaten und Zirkulationen der verbliebenen Wirbel $n = \{1, 2, N-1, N\}$ werden in den Vektoren $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{N-1}, \zeta_N]^T$ bzw. $\boldsymbol{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{N-1}, \Gamma_N]^T$ zusammengefasst. Um die Dynamik der Wirbel (6.9) als Modellgleichung für den Zustandvektor zu erhalten, wird zunächst (6.4) umgeschrieben. Dabei wird angenommen, dass die Anströmgeschwindigkeit U_∞ von einem mittelwertfreien, normalverteilten Rauschen $\dot{w}$ mit der Kovarianz $e_w^2 = 0.1^2$ ($L_{\mathbf{w}} = 1$) überlagert wird:

$$\begin{aligned} w_n(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) &= U_\infty (1 + \dot{w}) \left(1 - \frac{R^2}{\zeta_n^2}\right) - \\ &- \sum_{j=1}^{N} \left(w_v(\zeta_n, \Gamma_j, \zeta_j) + w_v(\zeta_n, \tilde{\Gamma}_j, \tilde{\zeta}_j) \right), \\ \text{mit} \quad & \zeta_i = \hat{a}_{3\,(i-1)+1} + \mathrm{i}\, \hat{a}_{3\,(i-1)+2} \\ \text{und} \quad & \Gamma_i = \hat{a}_{3\,(i-1)+3} \quad \text{wenn } 3 \le i \le N-2 \\ \text{bzw. mit} \quad & \zeta_i = \boldsymbol{\zeta}_{[i]},\ \Gamma_i = \boldsymbol{\Gamma}_{[i]} \quad \text{wenn } i < 3 \\ \text{und} \quad & \zeta_i = \boldsymbol{\zeta}_{[i-N+4]},\ \Gamma_i = \boldsymbol{\Gamma}_{[i-N+4]} \quad \text{wenn } i > N-2 \end{aligned}$$

Damit lässt sich (6.9) für $2 < n < N-1$ umschreiben zu

$$\begin{aligned} w_n^\zeta(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) &= \left| \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \right|^2_{\substack{\hat{a}_{3\,(n-1)+1} \\ \hat{a}_{3\,(n-1)+2}}} w_n(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) - \\ &- \mathrm{i} \left. \frac{\overline{\mathrm{d}\zeta}}{\mathrm{d}z} \right|_{\substack{\hat{a}_{3\,(n-1)+1} \\ \hat{a}_{3\,(n-1)+2}}} \frac{\Gamma}{4\pi}\, \mathcal{R}(\hat{a}_{3\,(n-1)+1} + \mathrm{i}\, \hat{a}_{3\,(n-1)+2}) \end{aligned}$$

und für $n = \{1, 2, N-1, N\}$ zu

$$\begin{aligned} w_n^{\zeta}(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) &= \left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}^2 w_n(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) - \\ &- \mathrm{i}\ \overline{\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_n}}\ \frac{\Gamma}{4\pi}\,\mathcal{R}(\zeta_n)\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Die Modellgleichung für die Ableitung des Zustandsvektors $\dot{\hat{\mathbf{a}}}$ lautet damit:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}\left\{w_3^{\zeta}(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma})\right\} \\ \mathfrak{Im}\left\{w_3^{\zeta}(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma})\right\} \\ 0 \\ \vdots \\ \mathfrak{Re}\left\{w_{N-2}^{\zeta}(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma})\right\} \\ \mathfrak{Im}\left\{w_{N-2}^{\zeta}(\hat{\mathbf{a}}, \dot{w}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma})\right\} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Die Berechnung des Druckes an den N_s Sensoren auf dem zweiten Körper mit den Sensorpositionen $\zeta_{s,n}$ wird entsprechend aus (6.10) abgeleitet:

$$\begin{aligned} c_{p,n}(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) &= \frac{1}{2}\left(1 - \left|w_n(\mathbf{a}, 0, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma})\ \left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{\zeta_{s,n}}\right|^2\right) - \\ &- \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi(\zeta_{s,n}, \Gamma_j, \zeta_j)}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\Phi}(\zeta_{s,n}, \Gamma_j, \zeta_j)}{\partial t}\right) + v_n\,. \end{aligned}$$

Es folgt schließlich für die Messgleichung

$$\mathbf{h}(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) = \begin{pmatrix} c_{p,1}(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) \\ \vdots \\ c_{p,N_s}(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

Implementierung des Sigma-Punkt-Kalman-Filters: Für den Prädiktionsschritt gemäß Abschnitt 2.4.2 ergibt sich der zusammengesetzte Zustandsvektor und die Kovarianzmatrix zu

$$\hat{\mathbf{a}}_k^P = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{a},k}^P = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{a},k} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{\mathbf{w}\cdot} \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

mit der Kovarianzmatrix des Messrauschens $\mathbf{C}_{\mathbf{w}} = e_w^2$. Zu Beginn des Prädiktionsschrittes werden $2\,(L_{\mathbf{a}} + L_{\mathbf{w}}) + 1 = 39$ Sigma-Punkte bestimmt und über den Prädiktionshorizont von $\Delta T = 0.18$ entwickelt. Hierzu wird (6.13) für jeden Sigma-Punkt mit dem Runge–Kutta-Verfahren 4. Ordnung (Abschnitt 2.3) mit einer festen Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.02$ integriert. Parallel hierzu werden bei der Integration eines Sigma-Punktes auch die Wirbel $n = \{1, 2, N-1, N\}$ durch Intergation von (6.12) entwickelt. Die Wirbelpositionen werden

jedoch bei der Entwicklung des nächsten Sigma-Punktes wieder auf den Anfangswert zu Beginn der Prädiktionsphase zurückgesetzt. Die neuen Positionen dieser vier Wirbel am Ende der Prädiktionsphase ergeben sich aus der Integration des Sigma-Punktes $\boldsymbol{\sigma}_{k-1}^{(0)}$. Durch Auswertung von (2.88) und (2.89) erhält man schließlich $\hat{\mathbf{a}}_k^-$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{a},k}^-$.

Die Kovarianzsmatrix des Messrauschens für die Sensoren #2, #4, #8 und #10 wird mit

$$\mathbf{C_v} = \begin{pmatrix} 0.1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1^2 \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

abgeschätzt. Der zusammengesetzte Zustandsvektor und die Kovarianzmatrix für den Korrekturschritt lautet damit:

$$\hat{\mathbf{a}}_k^K = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{\mathbf{a},k}^K = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{a},k} & 0 \\ 0 & \mathbf{C_v} \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Im Korrekturschritt werden $2\,(L_\mathbf{a} + L_\mathbf{w}) + 1 = 45$ Sigma-Punkte bestimmt. Für jeden Sigma-Punkt muss (6.14) ausgewertet werden. Durch Auswertung von (2.97) bis (2.99) erhält man schließlich $\hat{\mathbf{s}}_k^-$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{s},k}^-$, sowie $\mathbf{C}_{\mathbf{a}\,\mathbf{s},k}$.

Bei der Bestimmung der Sigma-Punkte, sowohl im Prädiktions- als auch im Korrekturschritt, wird eine Konsistenzprüfung durchgeführt. Die Kovarianzmatrizen $\mathbf{C_a}$ und $\mathbf{C_s}$ werden dazu symmetrisiert. Außerdem werden die Diagonalelemente auf Mindestwerte gesetzt, die bei einem Viertel der geschätzten Anfangswerte liegen. Hierdurch wird gewährleistet, dass sich bei der Berechnung der Sigma-Punkte aus den zusammengesetzten Kovarianzmatrizen immer reelle Matrix-Wurzeln $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}$ ergeben. Nach der Bestimmung der Sigma-Punkte findet eine Überprüfung der Schrittweite h_i statt, mit der beim i-ten Sigma-Punkt zusammen mit $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{a}^{(i)}$ eine Variation der Wirbelpositionen und Zirkulationen durchgeführt wird. Damit soll verhindert werden, dass bei einem Sigma-Punkt unphysikalische Zustände auftreten, wie etwa: Vorzeichenwechsel der Zirkulation, Überschreiten der Abszisse oder Verschiebung ins Innere des Körpers. Sollte ein solcher Zustand eintreten, wird die Schrittweite h_i für diesen Sigma-Punkt entsprechend reduziert.

Das Produktionsmodell verfolgt einen neu eingesetzten Wirbel über eine Periode. Gleichzeitig wird stromab ein Wirbel durch das Dissipationmodell ausgeblendet. Am Ende einer Periode wird der am weitesten stromab liegende Wirbel aus dem Zustandsschätzer entnommen und an das Dissipationsmodel übergeben. Gleichzeitig wird an die frei werdende Position im Zustandsschätzer der Wirbel aus dem Produktionsmodell eingefügt. Hierbei werden die zugehörigen Zeilen und Spalten von $\mathbf{C_a}$ auf null gesetzt, während die Diagonalelememte die Startwerte (siehe oben) annehmen.

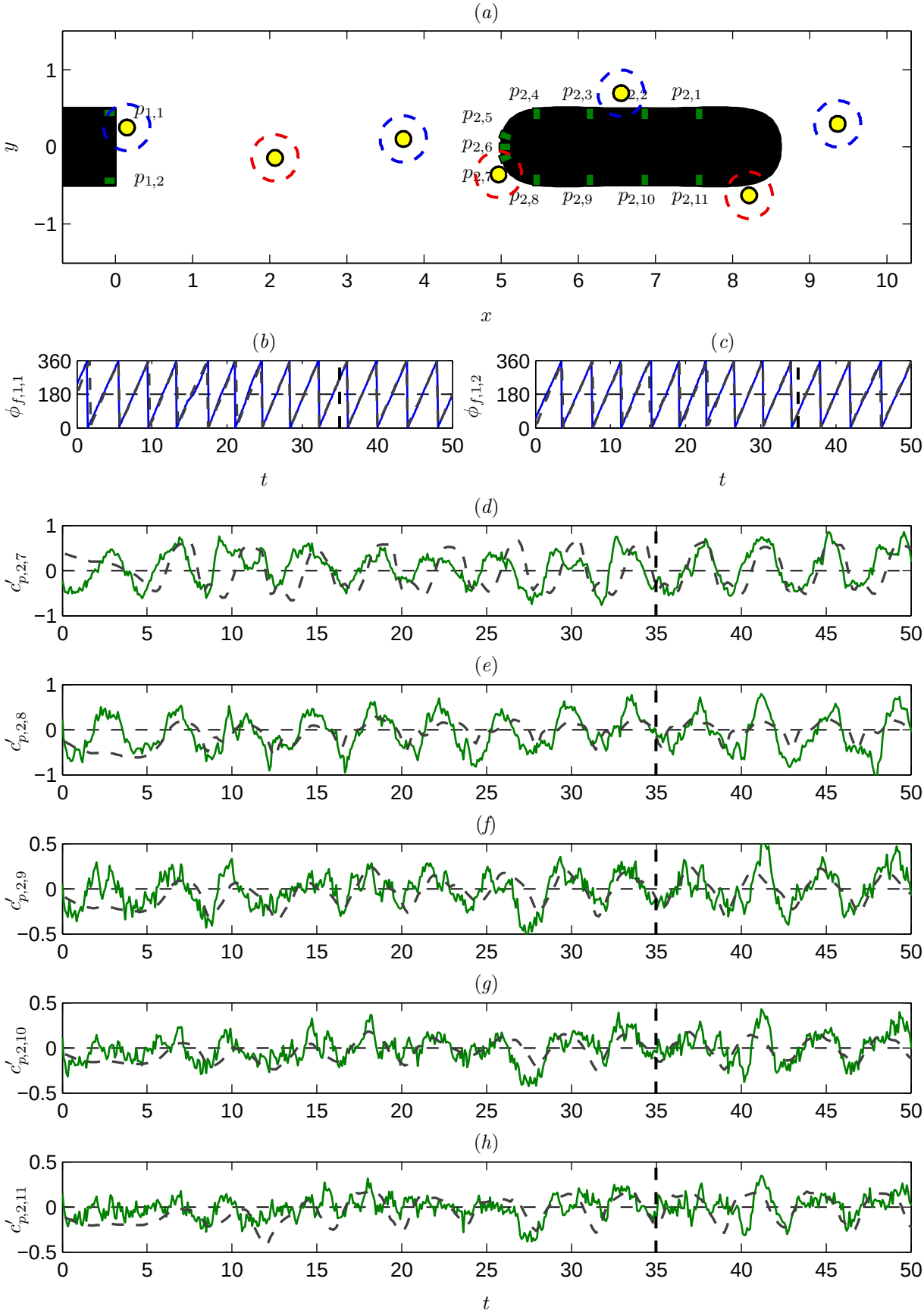


Abbildung 6.4: Wie Abbildung 6.3, jedoch für das Modell B mit Schätzung der Einströmbedingungen. Die unteren Sensoren sind hier exemplarisch gewählt. Das Modell ist nach ca. 35 Zeiteinheiten eingeschwungen.

6.3.2 Schätzung der Einströmbedingung

Zunächst wird das neue Modell B nur mit einer Schätzung der Einströmbedingungen durch die zwei EKF am ersten Körper betrieben. Die Ergebisse sind in Abbildung 6.4 (a–h) dargestellt. Es wurden hier exemplarisch die unteren Sensoren #7–#11 ausgewählt. Die Signale an den oberen Sensoren sehen, bis auf einen entsprechenden Phasenversatz, ähnlich aus. Man erkennt einen Einschwingvorgang des Modells bis $t = 35$. Anschließend werden die Druckschwankungen c'_p vom Modell an den Sensoren #9–#11 gut, bei #7–#8 qualitativ richtig vom Modell widergegeben. Der Vergleich mit Modell A (Abbildung 6.3) zeigt, dass sich die Schätzung der weiter stromab gelegenen Sensoren bei Modell B verbessert hat.

Der Rechenaufwand von Modell B (ohne Zustandskorrektur) ist gegenüber Modell A aufgrund der geschickteren Formulierung der Dynamik direkt im Bildbereich gesunken. Daher ist auch dieses Verfahren echtzeitfähig[2] und zudem in der Lage bei höheren Reynolds-Zahlen als 23 000 zu arbeiten.

6.3.3 Schätzung der Einströmbedingung und Zustandskorrektur

Für $t > 20$ wird die Zustandskorrektur der sechs körpernächsten Wirbel aktiviert (Abbildung 6.5). Das SPKF führt, basierend auf den Sensorinformationen des zweiten Körpers, eine Korrektur der Wirbelpositionen und Zirkulationen aus, so dass sich eine Verbesserung der Druckschätzung ergibt: Die Vorhersage der Druckschwankungen stimmt nun bei den Sensoren #8–#11 sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen überein. Eine Verbesserung der Schätzung von Sensor #7 ist nicht zu beobachten. Diese Messposition ist jedoch ohnehin problematisch, da die Strömungsvorgänge in der Nähe des vorderen Staupunktes empfindlich auf Fehler beim Einbau, z.B. schräge Anströmung oder asymmetrische Nasenform, reagieren.

Die Wahl der Kovarianzmatrizen $\mathbf{C}_{\mathbf{a},0}$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{v}}$ ist kritisch für den Erfolg der Schätzung: Wird das Messrauschen zu niedrig angesetzt, lassen sich die Signale der zur Korrektur eingesetzten Sensoren sehr gut nachbilden. Die Dynamik der Wirbel wird durch die harsche Korrektur jedoch so verändert, dass die Signale an anderen Sensorpositionen nicht mehr gut vorhergesagt werden können. Wird andererseits ein zu hohes Messrauschen angenommen, sind die Korrektureingriffe so gering, dass kaum ein Unterschied zu dem in Abschnitt 6.3.2 beschriebenen Versuch ohne Zustandskorrektur auftritt.

6.4 Beurteilung des Verfahrens

Mit einem wirbelbasierten Zustandsraummodell (Modell B) lässt sich eine echtzeitfähige Rekonstruktion des Strömungsfeldes um den zweiten stumpfen Körper einer Tandem-Konfigurationen aufbauen. Hierzu genügt es, die durch EKF geschätzte Phasenlage der Wirbelproduktion an-

[2] siehe hierzu: Lange, M. 2008 *Echtzeitfähige wirbelbasierte Beobachter für eine Tandem-Nachlaufströmung.* Projektarbeit, Fakultät III, Technische Universität Berlin

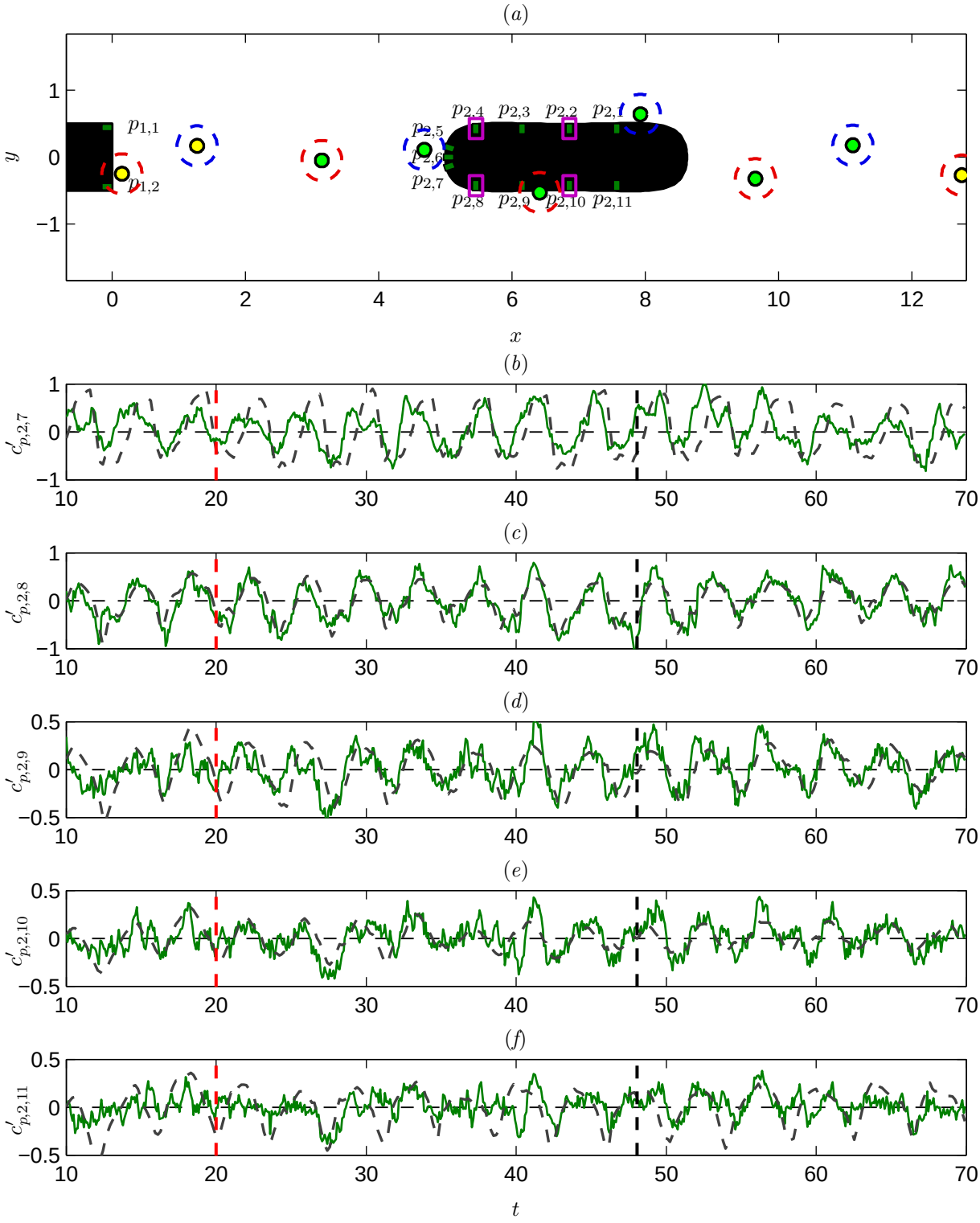


Abbildung 6.5: Wie Abbildung 6.4, jedoch für $t > 20$ (rot, gestrichelt) mit Zustandskorrektur für die grün gekennzeichneten Wirbel auf der Basis der markierten Sensoren (magenta).

hand von Druckmessungen am ersten Körper vorzugeben. Eine Verbesserung der Schätzung erfolgt, wenn Druckmessungen vom zweiten Körper mit Hilfe eines SPKF zur Korrektur der Wirbelpositionen und Zirkulationen verwendet werden. Hierdurch können die Auswirkungen von

nicht-modellierten Störungen (etwa Schwankungen in der Anströmung), ungenau geschätzten Anfangsbedingungen, Modellfehlern und weiteren stochastischen Effekten kompensiert werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden wirbelbasierte niederdimensionale Modelle für Scher- und Nachlaufströmungen vorgestellt und auf ihre Eignung für den modellbasierten Entwurf von Strömungsreglern untersucht. Zur Grobstruktur-Modellierung der Strömungen über eine rückwärts gewandte Stufe und um einen stumpfen Körper werden zweidimensionale Wirbelverfahren geringer Ordnung eingesetzt, die nur die Dynamik der Grobstrukturen und die Aktuationseffekte, nicht jedoch kleinskalige Strömungsvorgänge auflösen. Durch Analyse der mit den Wirbelverfahren berechneten Daten wird eine physikalisch motivierte Reglungstrategie zur Verbesserung der aerodynamischen Performanz entwickelt und im Experiment erprobt. Die zugrundeliegende Idee in beiden Konfigurationen ist zunächst die Definition und Bestimmung der Phasenlage der abschwimmenden Grobstrukturen und die anschließende Rückkopplung der ermittelten Phase auf das Stellsignal. Durch geeignete Wahl der Differenz zwischen Strömungs- und Aktuationsphase lässt sich im Fall der Stufenströmung eine Verbesserung der Mischungsvorgänge erreichen. Dies äußert sich in einer Verkürzung der mittleren Länge der Ablöseblase gegenüber der gesteuerten Beeinflussung um ca. 10%. Im Fall der Strömung um einen stumpfen Körper kann der druckinduzierte Widerstand um 15% gesenkt werden, wobei jedoch, verglichen mit der gesteuerten Beeinflussung, nur noch maximal 58% der Aktuationsleistung erforderlich ist. Durch Modellreduktion erhält man Wirbelverfahren, die für modellgestützte Messverfahren im Experiment geeignet sind. Mit diesen Verfahren ist eine echtzeitfähige Rekonstruktion des Strömungsfeldes (Geschwindigkeits-, Wirbelstärke- und Druckfeld) möglich.

Vorteile der physikalisch motivierten Strömungsregelung:
Die vorgestellten Phasenregler sind genau zugeschnitten auf die jeweils untersuchte Konfiguration und die zur Verfügung stehenden Aktuatoren und Sensoren. Die grundlegenden physikalischen Wirkmechanismen lassen sich aber prinzipiell auch durch gesteuerte Beeinflussung anregen. Dies erfordert jedoch eine genaue Kenntnis der für den jeweiligen Betriebspunkt optimalen Aktuationsparameter.

Bei der periodischen Beeinflussung der Strömung um den stumpfen Körper wird deutlich, dass bei ungeschickter Wahl der Aktuationsfrequenz oder -amplitude Stellenergie verschwendet wird,

weil sich nicht die optimale Widerstandsreduktion erzwingen lässt. Im schlimmsten Fall wird der Widerstand sogar noch vergrößert.

Geschlossene Regelkreise können demgegenüber eine effiziente Strömungsbeeinflussung in einem weiten Betriebsbereich einstellen. Hierfür stehen die in der Einleitung aufgeführten Regelungsstrategien zur Verfügung: Gradientenbasierte, Black-Box-basierte und physikalisch motivierte Strömungsregler. Ihre Vor- und Nachteile sind in Abbildung 7.1 zusammengefasst und werden im Folgenden anhand der Regelung der Strömung um einen stumpfen Körper diskutiert.

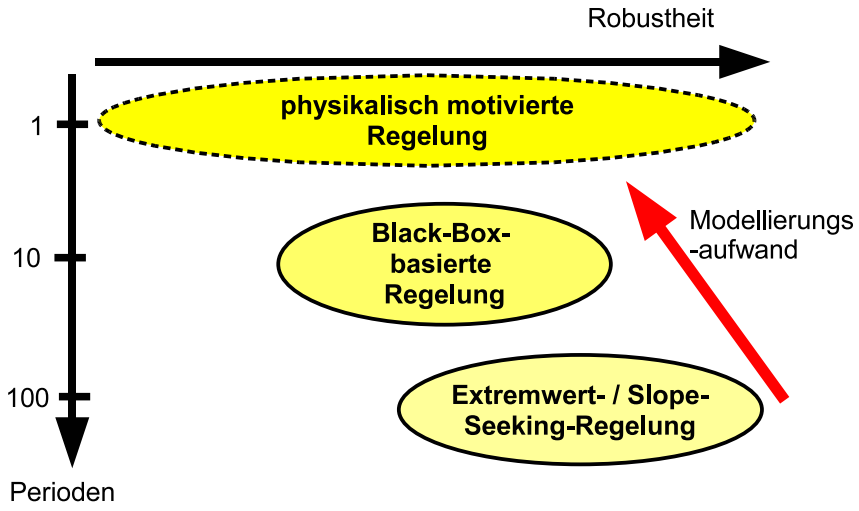


Abbildung 7.1: Robustheit und Schnelligkeit der Stellgrößenanpassung unterschiedlicher Regelungsstrategien. Die Schnelligkeit wird in Vielfachen der dominanten Zeitskala des geregelten Prozesse angegeben.

Die natürliche Strömung des stumpfen Körpers ist durch eine relativ kurze Ablöseblase und eine alternierende Wirbelfolge im nahen Nachlauf geprägt. Beide Phänomene bewirken einen geringen Druck auf dem Heck und somit einen hohen Widerstand. Bei geeigneter Aktuation wird eine Symmetrisierung der Wirbelablösung durch Entkopplung der Scherschicht- und Nachlaufprozesse erzielt. Hierdurch wird die Entstehung der alternierenden Wirbelstraße verzögert und die Nachlaufinstabilität gedämpft. Die Ablöseblase verlängert sich und der Druck auf dem Heck steigt, während gleichzeitig der Widerstand abnimmt.

Das von Pastoor *et al.* (2008) verwendete Slope-Seeking-Feedback ermöglicht eine adaptive Einstellung der optimalen Aktuationsamplitude bei sich ändernder Reynolds-Zahl. Hierbei wird ausgenutzt, dass der Zusammenhang zwischen Druckgewinn und Aktuationsamplitude für hohe Amplituden Sättigungsverhalten zeigt. Dieses Verhalten ist unabhängig vom Betriebspunkt. Der Regler arbeitet auf einer Zeitskala, die etwa zwei Größenordnungen oberhalb der Periodenlänge der Wirbelablösungen liegt. Die hohe Robustheit und die Einfachheit der Implementierung machen dieses Verfahren zu einem geeigneten Ansatz, um optimale Aktuationsparameter zu finden.

Der von Henning *et al.* (2007) untersuchte Black-Box-Regler ermöglicht die Stabilisierung eines gewünschten Widerstandes gegenüber Änderungen der Betriebsbedingungen und Störungen durch eine Anpassung der Aktuationsamplitude. Robustheit wird durch geeignete regelungstechnische Verfahren, hier ein $\mathcal{H}_\infty$-Regler, erreicht. Die Schnelligkeit des Reglers wird durch die Notwendigkeit begrenzt, auf zeitlich gemittelte Sensorgrößen zuzugreifen.

In den beiden bisher diskutierten Fällen erfolgt keine Anpassung der Aktuationssfrequenz. Sie wird beim Reglerentwurf vorgeben. Hierdurch ist auch im geschlossenen Regelkreis der Fall denkbar, dass die Nachlaufinstabilität durch Aktuation mit einer ungeeigneten Frequenz angefacht wird. Das Auffinden einer geeigneten Frequenz ließe sich durch einen zusätzlichen Extremwert-Regler realisieren.

Eine effizientere Form der Strömungsbeeinflussung ist jedoch durch den physikalisch motivierten Phasenregler möglich, der die Symmetrisierung der Scherschichten bereits entwurfsbedingt explizit erzwingt. Dieser Strömungsregler ist auf die Schlüsselprozesse des Systems zugeschnitten, die aus der Analyse der Grobstrukturmodelle abgeleitet sind. Das bringt zwei Vorteile mit sich: Das Regelungsziel lässt sich erstens mit deutlich geringerer Stellenergie erreichen. Zweitens kann der Regler sein Aussgangssignal schnell an Störungen oder sich ändernde Betriebspunkte anpassen, da er auf der Zeitskala des physikalischen Prozesses arbeitet. Die Robustheit physikalisch motivierter Regler ist durch den Gültigkeitsbereich des zugrundeliegenden Grobstrukturmodells beschränkt. Im hier diskutierten Fall ist der untersuchte Prozess der Wirbelablösung über einen weiten Bereich von Reynolds-Zahlen ähnlich, so dass die Robustheit des Verfahrens nur von der Fähigkeit des Beobachters abhängt, die Strömungsphase zu schätzen.

Strömungskontrolle durch Grobstrukturbeeinflussung:

Die Möglichkeiten der passiven und aktiven Grobstrukturbeeinflussungen bei der Körperumströmung sind vielfältig. Sie zielen allgemein auf eine Dämpfung der Nachlaufinstabilitäten und damit auf eine Unterdrückung der Wirbelstraße ab. Der Eingriff in die Strömung kann dabei direkt durch eine Manipulation der Nachlaufstrukturen oder indirekt durch eine Beeinflussung der ablösenden Scherschichten erfolgen. Eine kurze Übersicht der Beeinflussungsstrategien ist in Abbildung 7.2 zusammengestellt.

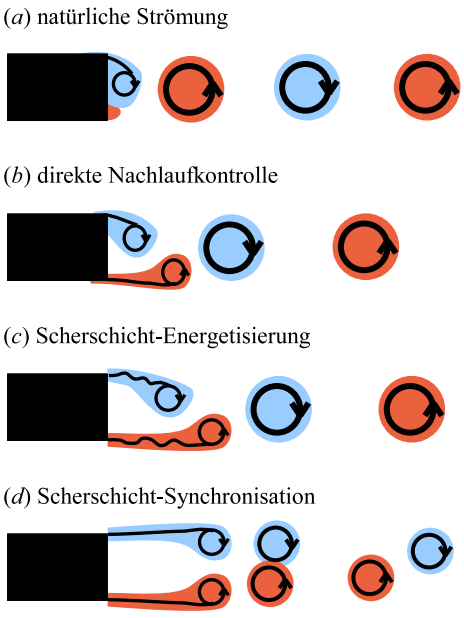


Abbildung 7.2: Übersicht der passiven und aktiven Beeinflussungstrategien für die Strömung um stumpfe Körper.

Direkte Nachlaufkontrolle: Die Entwicklung von Nachlaufstrukturen wird passiv, z.B. durch eine Splitterplatte (Bearman 1965), oder aktiv, z.B. beim Kreiszylinder durch gegenphasige Volumenkräfte (Gerhard *et al.* 2003) oder Zylinderoszillationen (Siegel *et al.* 2003), unterdrückt. Die in der Lite-

ratur vorgeschlagenen Strömungsregler sind auf das laminare Regime beschränkt. Zudem tritt bei diesen zweidimensionalen Phasenreglern, die auf eine Auslöschung der Grobstrukturen abzielen, das Problem auf, dass die Strömung in die dritte Raumrichtung ausweicht und Strukturen ausbildet, die sich dem Stelleingriff widersetzen (Seidel *et al.* 2006).

Energetisierung der Scherschichten: Die Entstehung von Strukturen, die für die Nachlaufinstabilität förderlich sind, wird unterdrückt oder durch andere Strukturen überlagert. Dies kann passiv erfolgen, z.B. durch eine spezielle Gestaltung der Abströmkante mit Leitblechen (Tanner 1972), Tabs (Tombazis & Bearman 1997) oder *vortex disruptors* (Park *et al.* 2006). Aktive Methoden bilden diese Strategien oftmals nach, etwa durch konstantes (Bearman 1967), hochfrequent-periodisches (Ben-Hamou *et al.* 2004) oder spannweitig moduliertes Einblasen (Kim *et al.* 2004). Eine Anpassung an die Betriebsbedingungen erfolgt durch adaptive Regelung (Beaudoin *et al.* 2006; Pastoor *et al.* 2008). Die hier genannten aktiven Methoden erfordern recht hohe Stellenergien.

Synchronisation der Scherschichten: Die Entstehung von Scherschichtwirbeln wird durch Phasenrückkopplung synchronisiert (siehe diese Arbeit und Pastoor *et al.* 2007). Diese Strategie markiert einen Paradigmenwechsel in der Grobstrukturbeeinflussung: Während zweidimensionale Phasenregler bisher auf eine Auslöschung der Nachlaufstrukturen durch anti-zyklische Stellkräfte (Siegel *et al.* 2003; Gerhard *et al.* 2003) abzielten, wird nun eine Strategie verfolgt, bei der die Ausbildung der Wirbelstraße durch eine Symmetrisierung der Scherschichtwirbel verzögert und nicht verhindert wird. Dieses Verfahren erfordert geringere Stelleingriffe, da lediglich eine Synchronisation der Wirbelaufrollung erzwungen werden muss, und ist obendrein auch in einem turbulenten Regime einsetzbar.

Wirbelbasierte Prädiktion:
Mit wirbelbasierten dynamischen Beobachtern lässt sich eine echtzeitfähige Rekonstruktion des Strömungsfeldes realisieren (Abbildung 7.3). Aus experimentellen Daten, hier sind dies z.B. Druckmessungen am ersten und zweiten Körper einer Tandem-Konfiguration, wird durch Zustandschätzer, in diesem Fall ein erweitertes und ein Sigma-Punkt-Kalman-Filter, der Zustand eines Wirbelverfahrens ermittelt und korrigiert. Das Modell ermöglicht eine Abschätzung von Wirbelpositionen und Feldgrößen, wie etwa Geschwindigkeit, Druck oder Wirbelstärke. Durch zeitliche Integration der Modellgleichungen erhält man, für einen gewissen Zeithorizont, eine Prädiktion der Sensordaten.

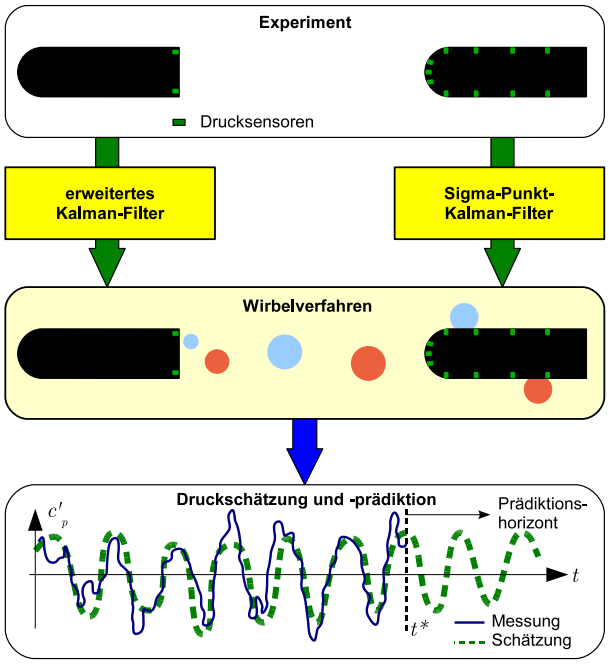


Abbildung 7.3: Rekonstruktion des Strömungsfeldes und Prädiktion von Sensordaten anhand von experimentellen Daten durch einen wirbelbasierten dynamischen Beobachter.

Wirbelbasierte Modellierung und Regelung:
Abschließend werden nun noch die einzelnen erforderlichen Schritte hin zur wirbelbasierten Modellierung und Strömungregelung resümiert: Wirbelbasierte Grobstrukturmodelle werden aus experimentellen und numerischen Daten der natürlichen und der ungeregelt beeinflussten Strömung abgeleitet (Abbildung 7.4). Aus der Analyse der Grobstrukturdynamik wird der Wirkmechanismus der Aktuation bestimmt und zur Erklärung bestehender Beeinflussungsstrategien (offener oder geschlossener Regelkreis) eingesetzt. Überdies lassen sich Konzepte für wirkungsvollere Regelungstrategien aus dem physikalischen Verständnis entwickeln. Durch eine Modellreduktion erhält man aus dem Grobstrukturmodell ein für regelungstechnische Verfahren nutzbares robustes Streckenmodell. Dieses kann dann für einen formalistischen Entwurf physikalisch motivierter Strömungregler und echtzeitfähiger Beobachter verwendet werden. Die günstigen Rechenzeiten der wirbelbasierten Grobstrukturmodellle — die Rechenzeiten lassen sich im Gegensatz zur LES in Stunden und nicht in Wochen beziffern — erlauben eine schnelle Synthese und Exploration von Strömungsreglern.

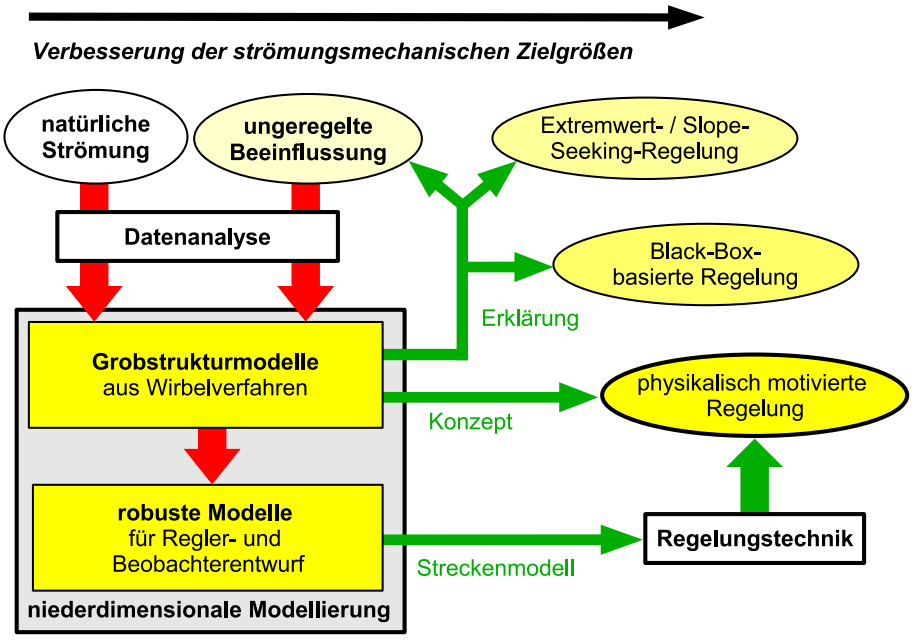


Abbildung 7.4: Einsatzmöglichkeiten von Wirbelverfahren zur Strömungsregelung.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Wirbelverfahren werden zur Beschreibung realer Strömungen genutzt, die ein ausgeprägt zweidimensionales Verhalten zeigen. Für eine industrielle Anwendung, etwa den Einsatz eines Strömungsreglers zur Widerstandssenkung an einem Kraftfahrzeug, ist diese Beschränkung natürlich nicht haltbar. Das Konzept der Phasenregelung, so wie es hier vorgeschlagen wird, ist jedoch prinzipiell auch für dreidimensionale Strömungen, etwa die Strömung um ein Fahrzeugheck oder die Kugelumströmung, vorstellbar. Mit den im Anhang vorgestellten dreidimensionalen Wirbelverfahren ist ein erster Schritt in diese Richtung getan: Am Beispiel eines runden Freistrahls und der Strömung um ein generisches Fahrzeugmodell wird

gezeigt, dass eine niederdimensionale Repräsentation der dreidimensionalen Grobstrukturdynamik und der Aktuationseffekte möglich ist. Hiermit steht ein Werkzeug zur Verfügung, welches in zukünftigen Arbeiten demonstrieren muss, dass sich mit wirbelbasierten Modellen auch in dreidimensionalen Strömungen Aktuationsmechanismen erklären und konzeptionell für den physikalisch motivierten Reglerentwurf verwenden lassen. Die Möglichkeit der raschen Exploration von Strömungsreglern ist in jedem Fall gegeben.

Anhang A

Ergänzungen zur Untersuchung der rückwärts gewandten Stufe

Zur konformen Abbildung: Ergänzende Abbildung zur konformen Abbildung des Wirbelverfahrens in Abschnitt 4.2.

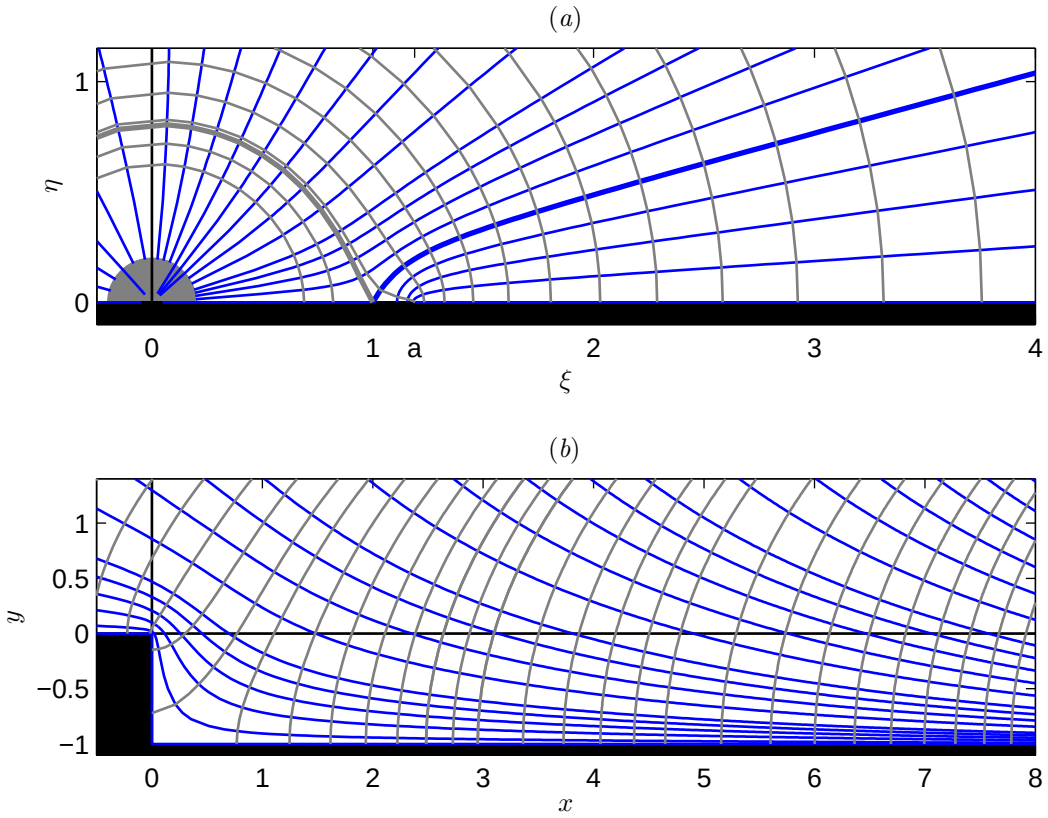


Abbildung A.1: Transformation von Isolinien mit der konformen Abbildung der rückwärts gewandten Stufe. In (a) sind die in den Bildbereich transformierten y-Isolinien (blau) und x-Isolininen (grau), in (b) dagegen die in den physikalischen Bereich transformierten η-Isolinien (blau) und ξ-Isolininen (grau) dargestellt. In (a) sind die Linien $y = 0$ bzw. $x = 0$ fett hervorgehoben. Der grau maskierte Bereich bei $\xi = 0$ deckt die Singularität der Abbildungsvorschrift ab.

Zum Kernwachstumsmodell: Ergänzende Abbildungen zur Erläuterung des Kernwachstumsmodells in Abschnitt 4.2.6 für die schwach (Abbildung A.2) und stark (Abbildung A.3) aktuierte Strömung.

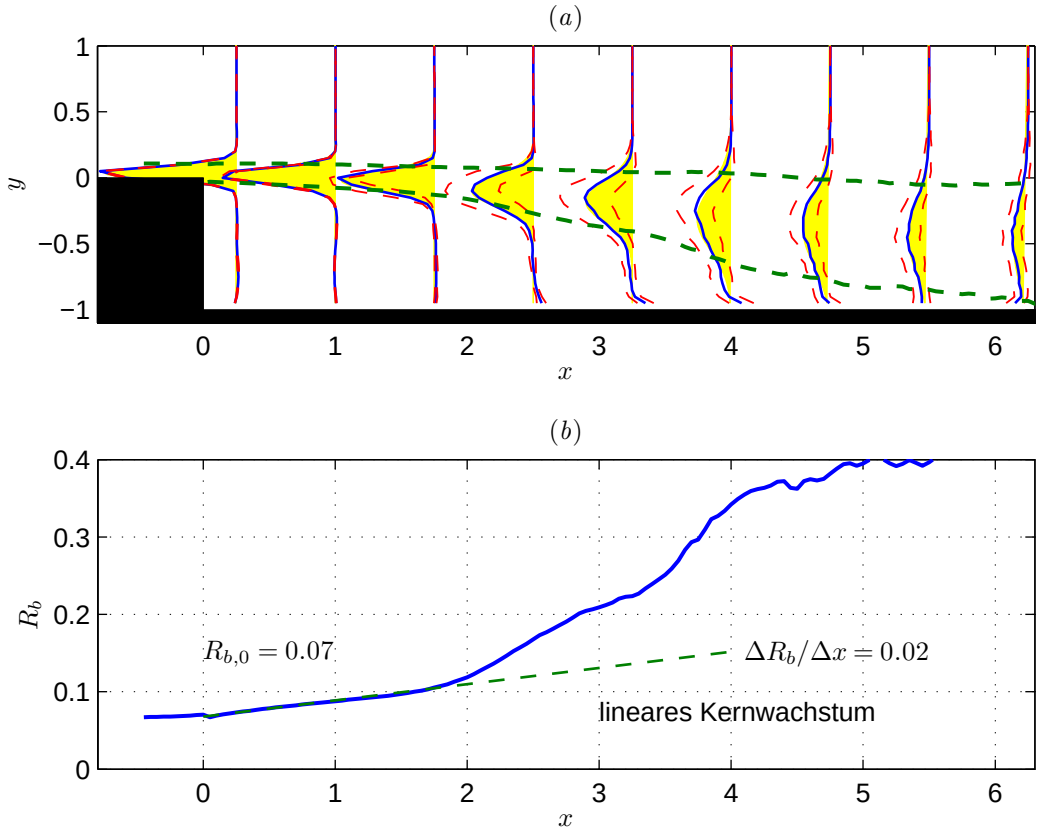


Abbildung A.2: Kalibration des Kernwachstumsmodells anhand der numerischen Daten der schwach aktuierten Strömung (wie Abbildung 4.13) mit $g_{\max} = 0.0003$ und $f_a = 0.4$. Gegenüber der natürlichen Strömung erkennt man eine Verschiebung des Bereiches exponentiellen Wachstums stromauf. Das lineare Wachstum unterscheidet sich kaum.

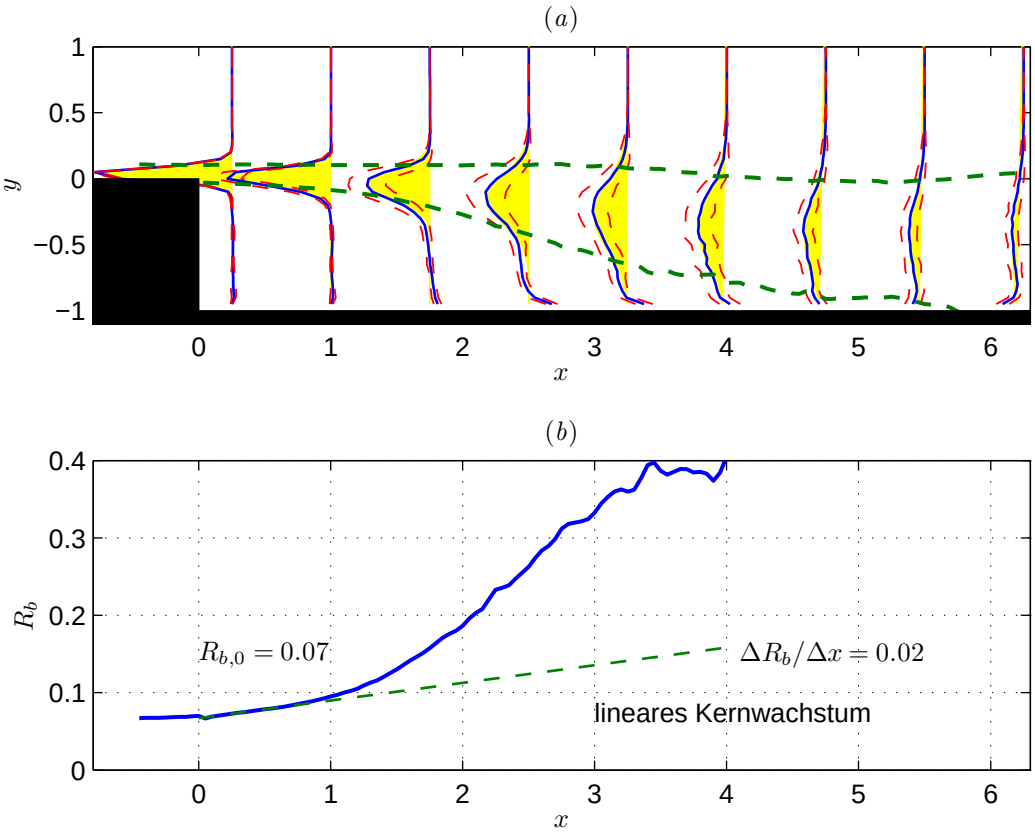


Abbildung A.3: Kalibration des Kernwachstumsmodells anhand der numerischen Daten der stark aktuierten Strömung (wie Abbildung 4.13) mit $g_{\max} = 0.04$ und $f_a = 0.4$.

Zum Dissipationsmodell: Ergänzende Abbildungen zum Dissipationsmodell des Wirbelverfahrens in Abschnitt 4.2.7 für die schwach (Abbildung A.4) und stark (Abbildung A.5) aktuierte Strömung.

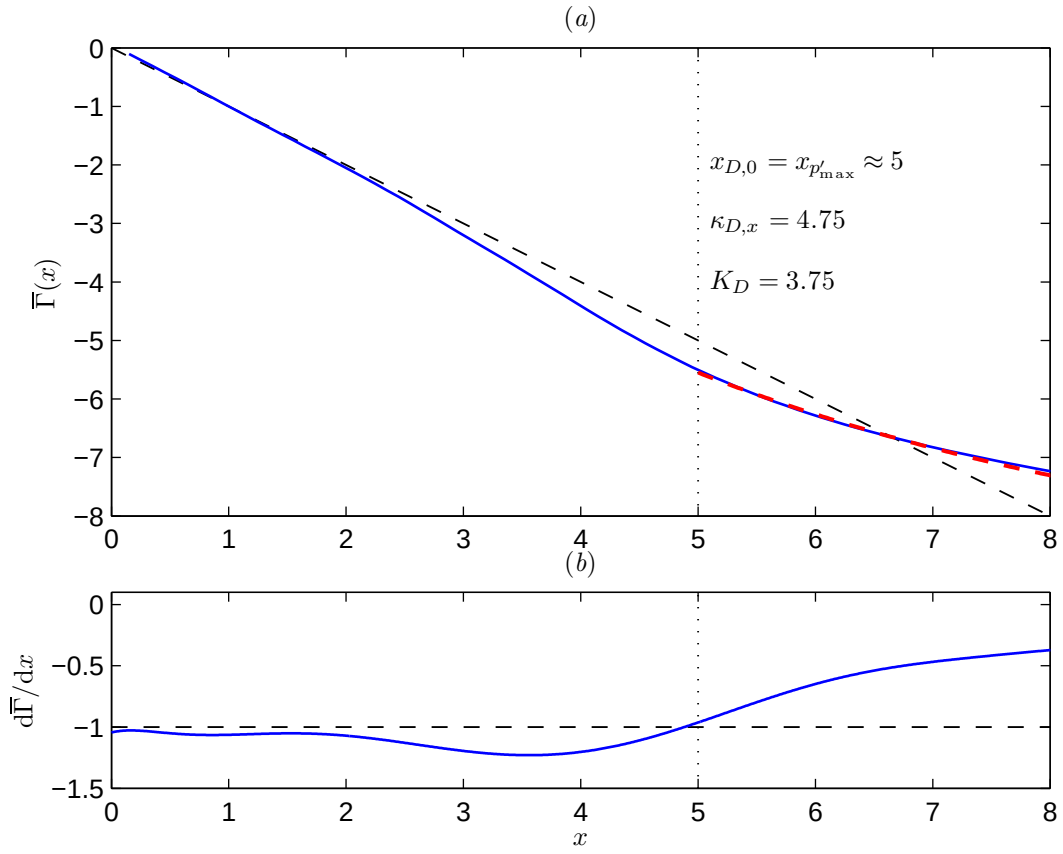


Abbildung A.4: Zeitlich gemittelter Zirkulationsgradient in Strömungsrichtung, berechnet aus der numerischen Simulation der schwach aktuierten Strömung (wie Abbildung 4.14)

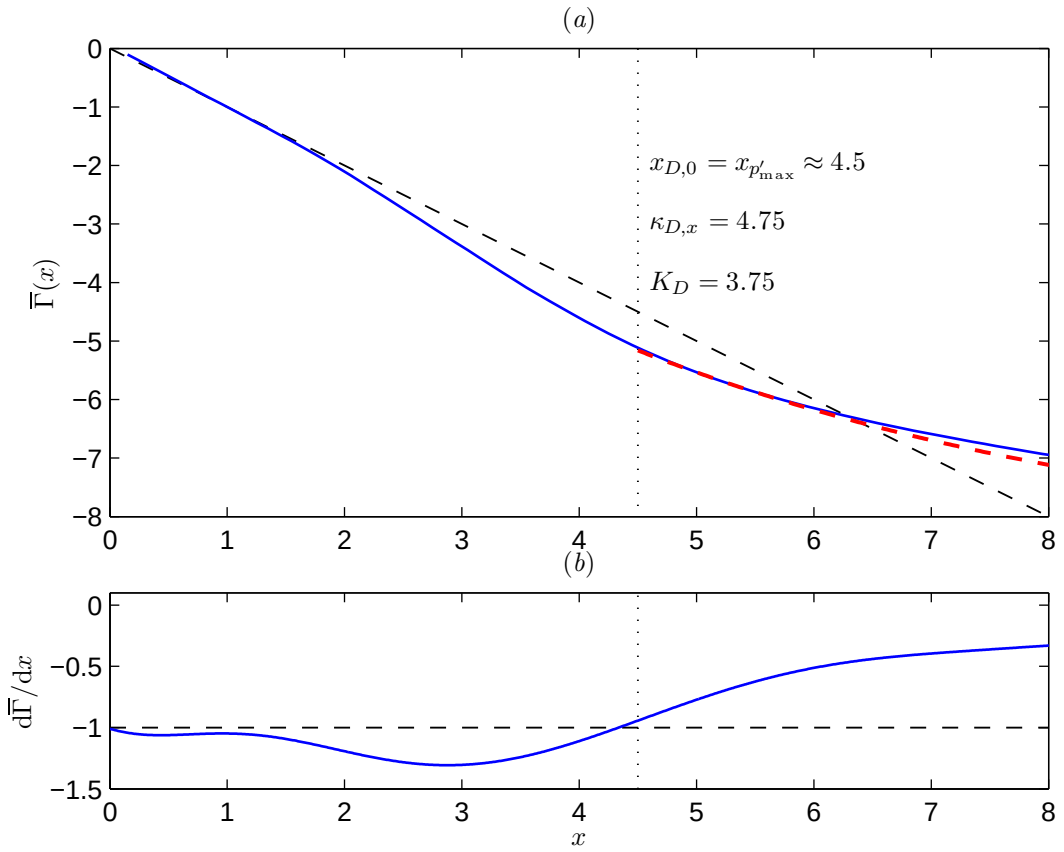


Abbildung A.5: Zeitlich gemittelte Zirkulation und zugehöriger Zirkulationsgradient in Strömungsrichtung, berechnet aus der numerischen Simulation der stark aktuierten Strömung (wie Abbildung 4.14)

Zur large-eddy simulation: Ergänzende Abbildungen zur Auswertung der LES für die natürliche (Abbildung A.6) und die stark aktuierte (Abbildung A.7) Strömung.

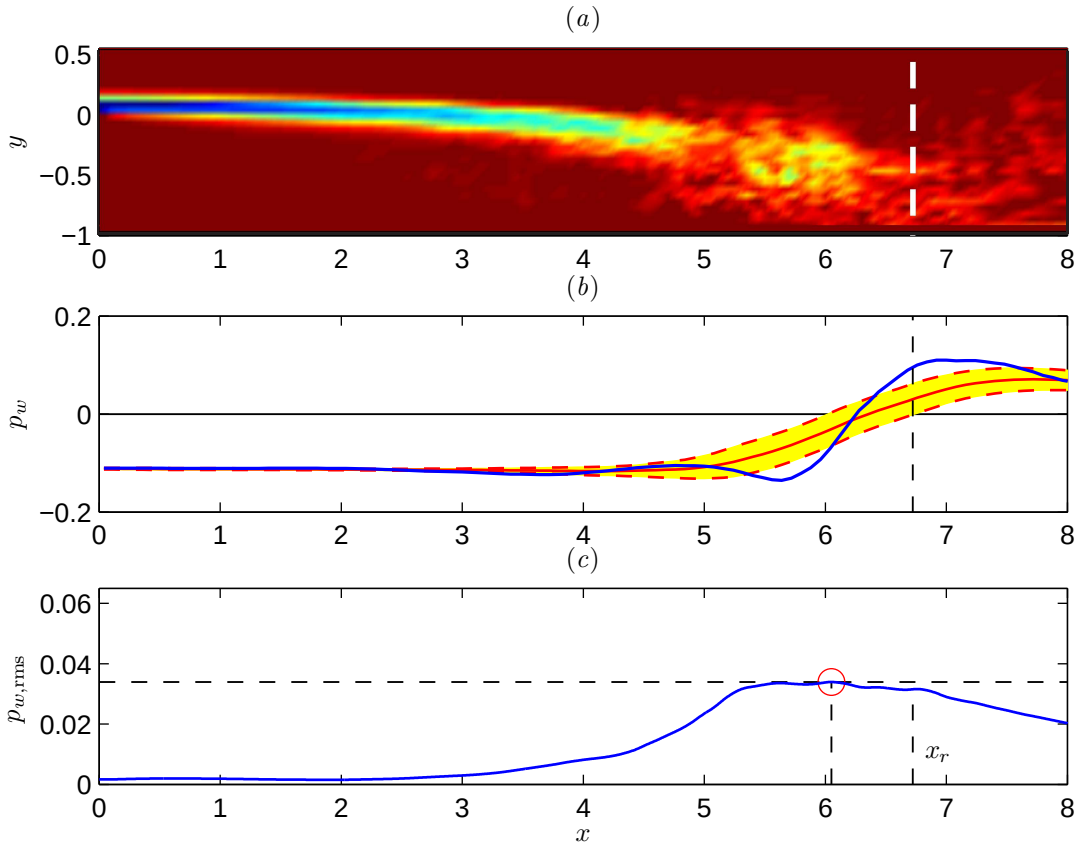


Abbildung A.6: Korrelation von Grobstrukturen und Wanddruck anhand von numerischen Daten der natürlichen Strömung (wie Abbildung 4.7).

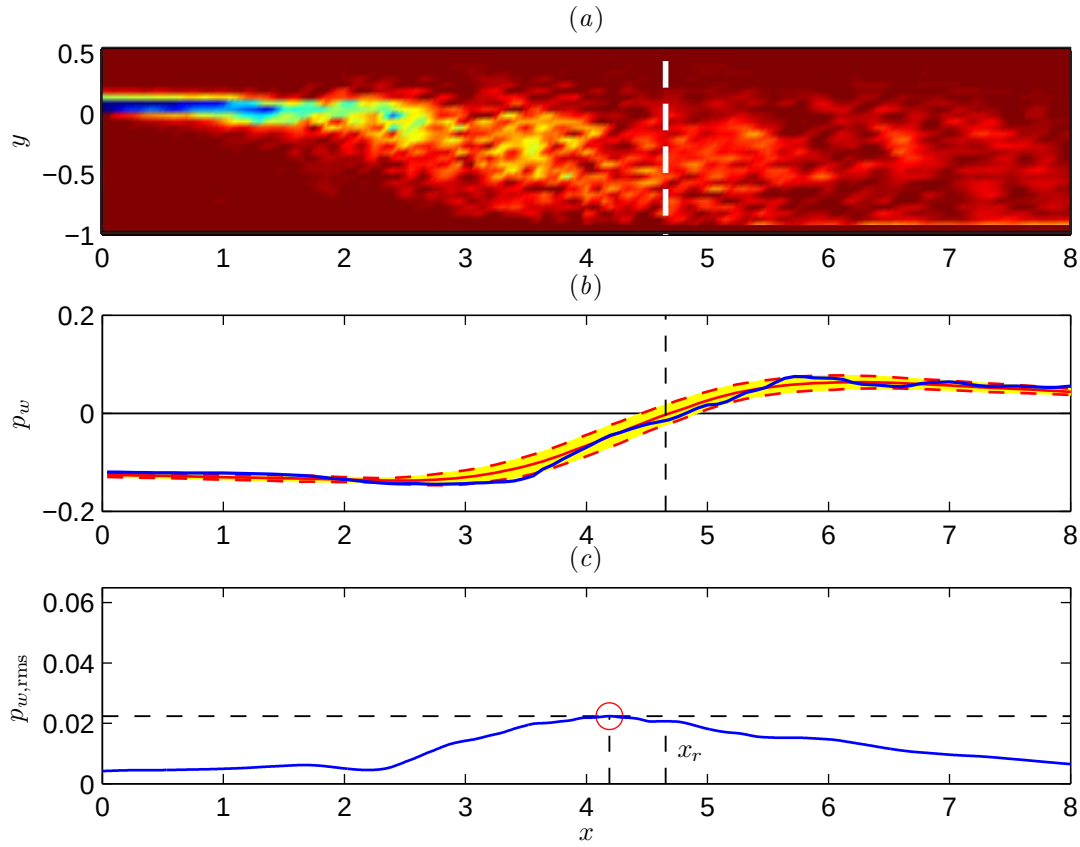
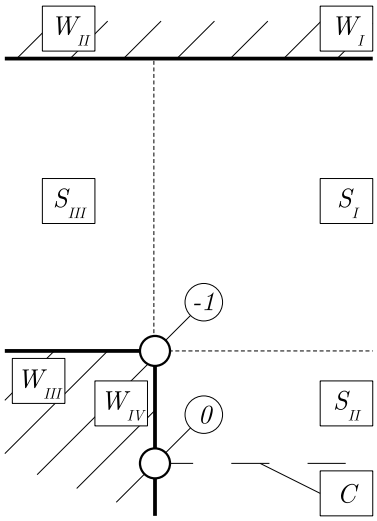


Abbildung A.7: Korrelation von Grobstrukturen und Wanddruck anhand von numerischen Daten der stark aktuierten Strömung (wie Abbildung 4.7).

Anhang B

Ergänzungen zur Untersuchung des stumpfen Körpers

Zur konformen Abbildung: Ergänzende Tabelle mit den Startwerten für das Newton–Raphson-Verfahren (Tabelle B.1) zur Invertierung der konformen Abbildung des Wirbelverfahrens in Abschnitt 5.2 und Abbildung von Isolinien (Abbildung B.1).



Bereich	x	y	ξ_0	η_0
-1	0	$+H$	-1	0
0	0	0	0	0
C	> 0	0	0	1
W_I	≥ 0	h	$-\pi$	0
W_{II}	< 0	h	$-1.1\,a$	0
W_{III}	< 0	H	$-0.8\,a$	0
W_{IV}	0	$> 0, < H$	0	0
S_I	> 0	$> H, < h$	$-\pi$	1
S_{II}	> 0	$> 0, < H$	-1	1
S_{III}	≥ 0	$> H, < h$	$-a$	0.1

Tabelle B.1: Startwerte $\zeta_0 = \xi_0 + \mathrm{i}\ \eta_0$ für das Newton–Raphson-Verfahren zur Berechnung von $\zeta(z)$ für den stumpfen Körper. Dargestellt sind die Startwerte für $y > 0$. Die Startwerte für $y < 0$ ergeben sich durch Multiplikation von ξ_0 mit -1.

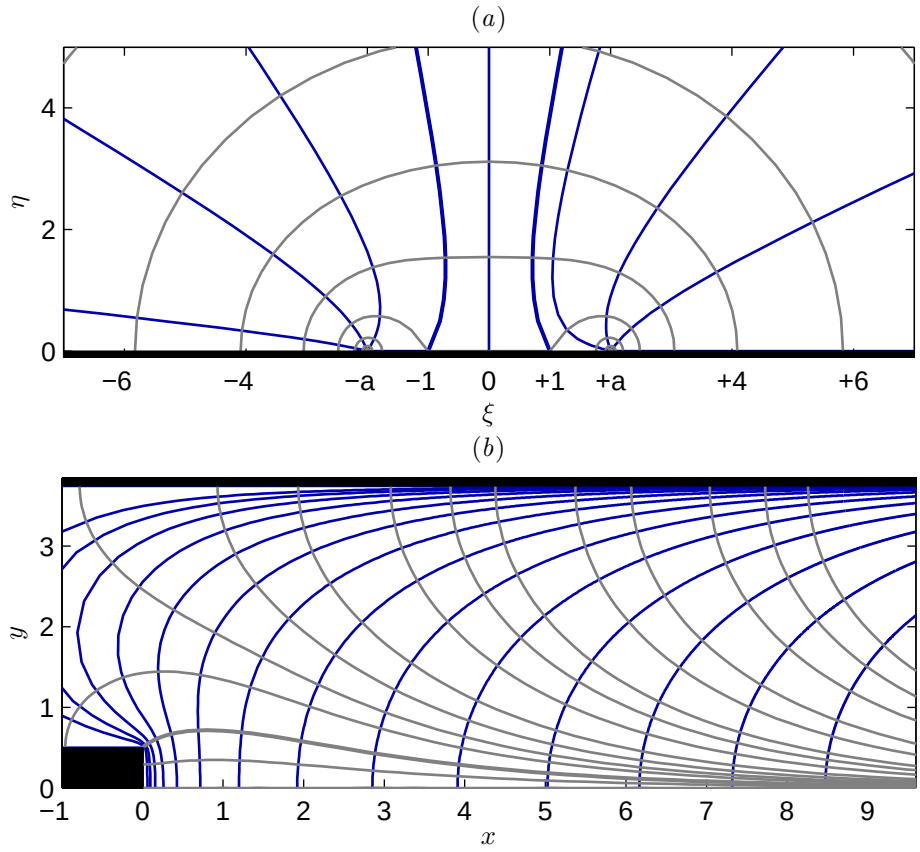


Abbildung B.1: Transformation von Isolinien mit der konformen Abbildung des stumpfen Körpers. In (a) sind die in den Bildbereich transformierten y-Isolinien (blau) und x-Isolininen (grau), in (b) dagegen die in den physikalischen Bereich transformierten η-Isolinien (blau) und ξ-Isolininen (grau) dargestellt. In (a) sind die Linien $y = \pm 1/2$ fett hervorgehoben, In (b) wird nur die obere Halbebene des physikalischen Bereichs dargestellt. Die Isolinie $\xi = -1$ ist fett hervorgehoben.

Anhang C

Dreidimensionale Wirbelverfahren

In einer von dreidimensionalen Grobstrukturen geprägten Strömungen müssen die Wirbelschichten als Fläche und nicht mehr als Linie betrachtet werden. Diese Fläche kann als eine flächenhafte Verteilung von Wirbellinien aufgefasst werden. Jeder infinitesimale Abschnitt d$\mathbf{l}$ dieser Wirbellinien bewirkt nach dem Gesetz von Biot–Savart die folgende induzierte Geschwindigkeit am Aufpunkt X

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \tag{C.1}$$

wobei $\mathbf{r}$ der Abstandsvektor zwischen dem Aufpunkt und der Position des Wirbelabschnittes darstellt (Abbildung C.2 *a*).

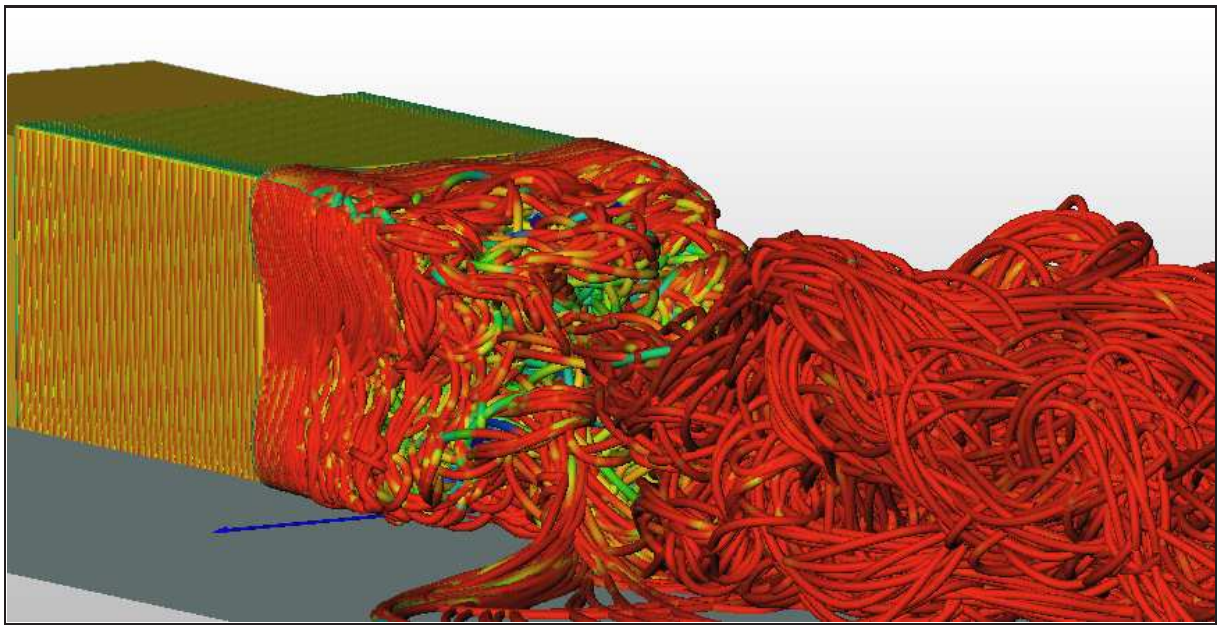


Abbildung C.1: Strömung um ein dreidimensionales generisches Fahrzeugmodell (stumpfes Heck), berechnet mit dem dreidimensionalen Wirbelverfahren. Dargestellt sind die Wirbelfilamente (farbige Linien) und die Körperkontur (Quader). Im linken Bereich erkennt man rechteckige, geschlossene Filamente, die über den Körper geschoben werden. Wenn diese das Ende des Körpers erreichen, können sie sich frei unter der Wirkung der gegenseitigen Induktion bewegen (siehe Text).

Diskretisierung: Eine Möglichkeit, eine solche Wirbelschicht zu diskretisieren, stellen Wirbelfilamente dar. Diese Wirbelfilamente fassen die Wirbellinien eines Bereiches der Wirbelschicht zu einem Wirbelfaden zusammen. Der n-te Wirbelfaden wird durch mehrere Stützstellen $\mathbf{x}_i^{(n)}$ entlang seines Verlaufes, die Zirkulation Γ_n und den lokalen Kernradius $R_{b,i}^{(n)}$ definiert. Der Verlauf des Filaments und des Kernradius zwischen den Stützstellen wird durch Interpolation mit kubischen Splines berechnet (Abbildung C.2 b). Hierzu werden die Koordinaten des Filaments stückweise für jedes Segment als Funktion der Sehne s beschrieben. Bei der Berechnung wird die Stetigkeit der ersten und zweiten Ableitung für jedes Segment erfüllt.

Integration: Die Auswertung von (C.1) erfolgt nun segmentweise, d.h. für die Abschnitte zwischen zwei Stützstellen (Abbildung C.2 c) eines Filaments. Hierzu wird der Integrand z.B. an den Stützstellen $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i+1}$ und einem interpolierten Zwischenpunkt berechnet und mit der Simpson'schen Regel (siehe Abschnitt 2.3) integriert. Zusätzlich können weitere Geschwindigkeitsanteile durch die Grundströmung, Panele, Spiegelfilamente und Aktuatoren hinzukommen. Werden die induzierten Geschwindigkeiten gerade an den Positionen aller Stützstellen berechnet, lässt sich deren zeitliche Entwicklung durch Integration, z.B. mit dem Heun-Verfahren aus Abschnitt 2.3, ermitteln.

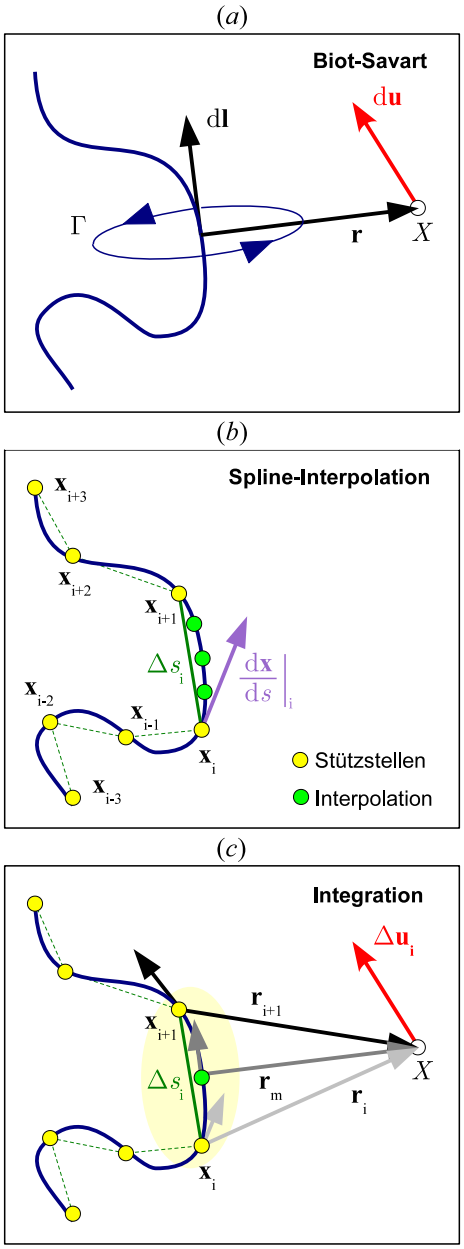


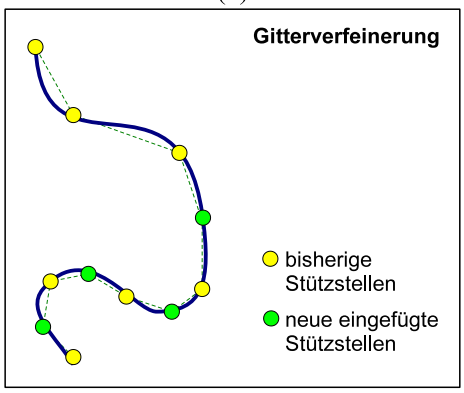
Abbildung C.2: Integration der Biot–Savart'schen Gleichung für kontinuierliche Wirbelfäden (a) durch Interpolation als kubischer Spline (b) und stückweiser Integration mit der Simpson'schen Regel.

Produktion und Dissipation: Die abschwimmenden Wirbelfilamente müssen zur Aufrecherhaltung der Wirbelschicht ersetzt werden. Der Produktionsmechanismus wird analog zu dem Verfahren für zweidimensionale Wirbelverfahren umgesetzt (siehe Abschnitt 2.2.5.2). Um eine niederdimensionale Repräsentation der Strömung zu erhalten, werden Wirbelfilamente, die sich weit aus dem interessanten Gebiet der Berechnung entfernt haben, gelöscht. Um eine sprunghafte Änderung des Geschwindigkeitsfeldes beim Löschen zu vermeiden, wird die Zirkulation dieser Filamente schon im Vorfeld ausgeblendet. Der Produktions- und Dissipationsmechanismus ist für jede Strömungskonfiguration separat zu modellieren.

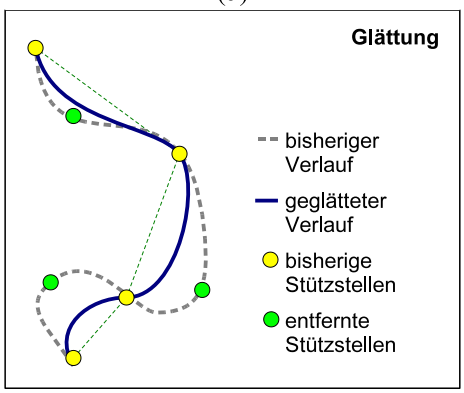
Gitterverfeinerung: Im Laufe der Rechnung verändern sich die Abstände der Stützstellen eines Filamentes. Hierdurch kann es zur lokalen Häufung oder zu einer starken lokalen Ausdünnung der Stützstellen kommen. Ersteres führt zu einer starken lokalen Deformation des Filaments (Verknotung), während letzteres eine physikalisch möglicherweise sinnvolle Deformation zu stark glättet. Aus diesem Grunde müssen die Stützstellen des Filaments neu angeordnet werden, wenn etwa der Abstand zwischen zwei Stützstellen einen geforderten Mindestabstand unterschreitet oder einen zulässigen Maximalabstand überschreitet. Der Mindestabstand sollte von der lokalen Krümmung abhängig sein: In stark gekrümmten Abschnitten sollten mehr Stützstellen zur Verfügung stehen, als auf geraden Teilstücken (Abbildung C.3 *a*). Zur Neuanordnung der Stützstellen wird das Filament erneut stückweise durch kubische Splines interpoliert. Dann werden die Stützstellen solange verschoben bzw. neue eingesetzt oder entfernt, bis alle Anforderungen an Abstand und Krümmung erfüllt sind.

Glättung: Die Gitterverfeinerung führt im Verlauf der Rechnung zu einem starken Anstieg der Zahl der Stützstellen und damit zu einem extremen Anstieg des Rechenaufwandes. Außerdem werden durch die vielen Stützstellen möglicherweise kleinskaligere Strömungsstrukturen aufgelöst, als ursprünglich erwünscht. Daher sollten Filamente geglättet werden (Abbildung C.3 *b*). Die Stärke der Glättung ist Teil der Modellierung. Der Glättungsmechanismus funktioniert folgendermaßen: Das Filament wird z.B. zweimal interpoliert, wobei im ersten Lauf nur die ungeraden, im zweiten Lauf nur die geraden Stützstellen berücksichtigt werden. Dann werden für beide Varianten die jeweils übersprungenen Stützstellen interpoliert, anschließend werden die neuen Stützstellen durch Mittlung bestimmt. Für diese neuen Stützstellen wird dann eine Gitterverfeinerung durchgeführt. Die Glättung wird noch stärker, wenn über mehr als N Läufe gemittelt wird, wobei in jedem Lauf nur jeder N-te Stützpunkt verwendet wird.

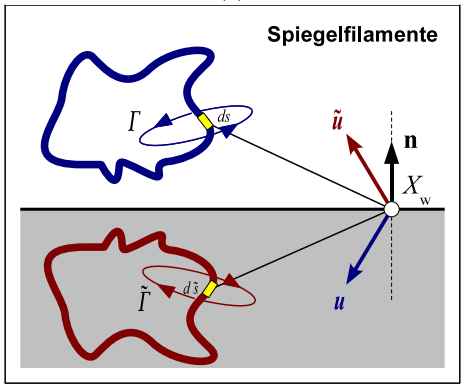
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

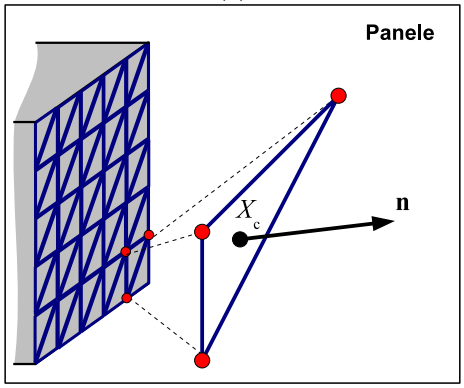


Abbildung C.3: Methodische Erweiterungen des 3D-Wirbelfilament-Verfahrens (siehe Text).

Randbedingungen: Für ebene Wände können die reibungsfreien Randbedingungen durch Spiegelfilamente realisiert werden (Abbildung C.3 *c*). Ein Spiegelfilament geht durch Spiegelung der Koordinaten eines Filaments an einer ebenen Wand hervor und hat gegensinnige Zirkulation. Durch das Spiegelfilament wird die vom realen Filament induzierte wandnormale Geschwindigkeit exakt kompensiert. Komplizierte Konturen müssen durch Panel-Verfahren, z.B. durch dreieckige Ringwirbelelemente auf der Wand, berücksichtigt werden (Abbildung C.3 *d*). In jedem Berechnungsschritt muss hierfür die Normalgeschwindigkeit am Kollokationspunkt X_c jedes Ringwirbelelements bestimmt werden. Dann wird durch Lösung eines linearen Gleichungssystems die Zirkulation aller Ringwirbelelemente so eingestellt, dass die Normalgeschwindigkeit gerade aufgehoben wird.

Konfigurationen: Ein Schnappschus des dreidimensionalen Wirbelverfahrens für den Nachlauf eines generischen Fahrzeugmodells mit stumpfen Heck unter Berücksichtigung des Wandeinflusses[1] ist in Abbildung C.1 dargestellt. Das Wirbelverfahren erlaubt eine relativ rechengünstige Vorhersage dieser komplexen Strömungskonfiguration mit einer guten qualitativen Übereinstimmung der Wirbelstrukturen und der dominanten Frequenz im Vergleich zu einer numerischen Simulation (Krajnović & Davidson 2003). Das gleiche Verfahren mit einem modifizierten Produktionsmechanismus[2] führt zu einer Grobstruktursimulation eines runden Freistrahl in ruhende Umgebung (Abbildung C.4).

Für die Strömungsberechnung mit einem dreidimensionalen Wirbelfilamentverfahren genügt ein handelsüblicher Personalcomputer. Da viele Rechenteile, etwa die Spline-Interpolation oder die diskrete Auswertung der Biot–Savart'schen Gleichung, nebenläufig erfolgen (Multithreading), kann die Rechenleistung durch mehrere Prozessoren stark gesteigert werden[3]

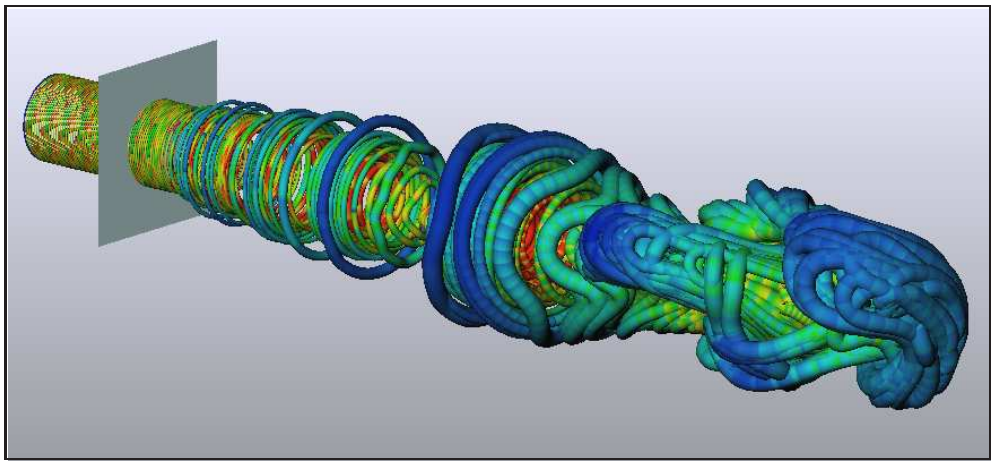


Abbildung C.4: In ruhende Luft austretender runder Freistrahl, berechnet mit dem dreidimensionalen Wirbelverfahren. Dargestellt sind die Wirbelfilamente, deren Farbe die lokale Geschwindigkeit in x-Richtung widerspiegelt.

[1] Ausführliche Darstellung in: Liu, W. 2008 *Implementation und Erprobung eines 3D-Wirbelfilament-Verfahrens für ein generisches Fahrzeugmodell.* Studienarbeit, Fakultät III, Technische Universität Berlin

[2] siehe hierzu: Heinz, N. 2007 *Niederdimensionale Modellierung und Kontrolle eines Freistrahls.* Diplomarbeit, Fakultät III, Technische Universität Berlin

[3] Parallelisierung: Liu, W. 2008 *Parallelisierung eines 3D-Wirbelfilament-Verfahrens.* Projektarbeit, Fakultät III, Technische Universität Berlin

Literaturverzeichnis

Ahmed, S. R., Ramm, G. & Faltin, G. 1984 Some salient features of the time averaged ground vehicle wake. *Soc. Automotive Eng.* Paper **840300**.

Bärwolff, G. & Jeggle, H. 1997 DNS and LES of a backward facing step flow with an upstream boundary layer control. In *Proceedings of the Int. Symposium on Computational Fluid Dynamics*. Beijing, China.

Beale, J. T. & Majda, A. 1982*a* Vortex methods I: Convergence in three dimensions. *Math. Comp.* **39**, 1–27.

Beale, J. T. & Majda, A. 1982*b* Vortex methods II: Higher order accuracy in two and three dimensions. *Math. Comp.* **39**, 29–52.

Bearman, P. W. 1965 Investigation of the flow behind a two-dimensional model with a blunt trailing edge and fitted with splitter plates. *J. Fluid Mech.* **21**, 241–255.

Bearman, P. W. 1967 The effect of base bleed on the flow behind a two-dimensional model with a blunt trailing edge. *Aeronautical Quarterly* **18**, 207–224.

Bearman, P. W. 1997 Near wake flows behind two- and three-dimensional bluff bodies. *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.* **69–71**, 33–54.

Beaudoin, J. F., Cadot, O., Aider, J.-L. & Wesfreid, J.-E. 2006 Drag reduction of a bluff body using adaptive control methods. *Phys. Fluids* **18**, 085107.

Becker, R. 2005 Robuste Eingrößenregelung von aktiv beeinflussten, abgelösten Scherströmungen auf der Basis reduzierter, empirischer Modelle. Dissertation, Fakultät III – 'Prozesswissenschaften', Technische Universität Berlin.

Becker, R., Garwon, M., Gutknecht, C., Bärwolff, G. & King, R. 2005 Robust control of separated shear flows in simulation and experiment. *J. Process Control* **15**, 691–700.

Becker, R., King, R., Petz, R. & Nitsche, W. 2006 Adaptive closed-loop separation control on a high-lift configuration using extremum seeking. In *3rd AIAA Flow Control Conference*. San Francisco, California, USA, June 5–7, 2006, Paper **2006-3493**.

Ben-Hamou, E., Arad, E. & Seifert, A. 2004 Generic transport aft-body drag reduction using active flow control. In *2nd AIAA Flow Control Conference*. Portland, Oregon, USA, June 28 – July 1, 2004, Paper **2004–2509**.

Bergmann, M., Cordier, L. & Brancher, J.-P. 2005 Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced order model. *Phys. Fluids* **17**, 097101.

Birkhoff, G. 1962 Helmholtz and Taylor instability. *Proc. Symp. Appl. Math.* **XII**, 55–76.

Birkhoff, G. & Fisher, J. 1977 Do vortex sheets roll up? *Circ. Math. Palermo Rendic.* **8**, 77–90.

Böttcher, M. 1991 Numerische Simulation von Scherschichten mit der discrete-vortex-Methode. Dissertation, Fachbereich 10 – 'Verkehrswesen und Angewandte Mechanik', Technische Universität Berlin.

Brewer, J. W. 1978 Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory. *IEEE Trans. Circuits and Systems* **25**, 772–781.

Cattafesta, L., Williams, D. R., Rowley, C. W. & Alvi, F. 2003 Review of active control of flow-induced cavity resonance. In *33rd AIAA Fluids Conference and Exhibit*. Orlando, Florida, USA, June 23–26, 2003, Paper **2003-3567**.

Chorin, A. J. & Bernard, P. S. 1973 Discretisation of a vortex sheet with an example of roll-up. *J. Comput. Phys.* **13**, 785–796.

Clements, R. R. 1973 An inviscid model of two-dimensional vortex shedding. *J. Fluid Mech.* **57**, 321–336.

Clements, R. R. & Maull, D. J. 1975 The representation of sheets of vorticity by discrete vortices. *Progr. Aeronaut. Sci.* **16**, 129–146.

Coller, B. D. & Gururaja, C. 2004 Investigation of low order models of bluff body flow. In *2nd AIAA Flow Control Conference*. Portland, Oregon, USA, June 28 – July 1, 2004, Paper **2004–2414**.

Coller, B. D., Noack, B. R., Narayanan, S., Banaszuk, A. & Khibnik, A. I. 2000 Reduced-basis model for active separation control in a planar diffuser flow. In *AIAA Fluids 2000 Conference and Exhibit*. Denver, Colorado, USA, June 19–22, 2000, Paper **2000–2563**.

Collis, S. S., Joslin, R. D., Seifert, A. & Theofili, V. 2004 Issues in active flow control: theory, control, simulation, and experiment. *Progr. Aerospace Sci.* **40**, 237–289.

Cordier, L. & Bergmann, M. 2003 *Proper Orthogonal Decomposition: An Overview*, *VKI Lecture Series 2003-04*, vol. 1. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics.

Cortelezzi, L. 1996 Nonlinear feedback control of the wake past a plate with a suction point on the downstream wall. *J. Fluid Mech.* **327**, 303–324.

Cottet, G. H. & Koumoutsakos, P. 2000 *Vortex Methods — Theory and Practice*. Cambridge University Press.

Eldredge, J. D. 2006 Numerical simulation of the fluid dynamics of 2D rigid body motion with the vortex particle method. *J. Comput. Phys.* **221**, 626–648.

Evans, R. A. & Bloor, M. I. G. 1977 The starting mechanism of wave-induced flow through a sharp-edged orifice. *J. Fluid. Mech.* **82**, 115–128.

Fiedler, H. & Fernholz, H.-H. 1990 On the management and control of turbulent shear flows. *Progr. Aeronaut. Sci.* **27**, 305–387.

Fink, P. T. & Soh, W. K. 1978 A new approach to roll-up calculations of vortex sheets. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **362**, 195–209.

Fletcher, C. 1988 *Computational Techniques for Fluid Dynamics; Volume II: Specific Techniques for Different Flow Categories*. Springer.

Föppl, L. 1913 Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder. *Tech. Rep.* 1. Sitz. d. k. Bayer. Akad. d. Wiss.

Gad-el-Hak, M., Pollard, A. & Bonnet, J.-P. 1998 *Flow Control: Fundamentals and Practices*. Springer.

Garwon, M. 2006 Vergleich und Kombination verschiedener adaptiver Regelungskonzepte zur Kontrolle abgelöster Scherströmungen. Dissertation, Fakultät III – 'Prozesswissenschaften', Technische Universität Berlin.

Garwon, M., Darmadi, L. H., Urzynicok, F., Bärwolff, G. & King, R. 2003 Adaptive control of separated flow. In *Proceedings of the European Control Conference*. University of Cambridge, UK, September 1–4, 2003, Paper **543**.

Gelb, A. 1986 *Applied Optimal Estimation*. The MIT Press.

Gerhard, J., Pastoor, M., King, R., Noack, B. R., Dillmann, A., Morzyński, M. & Tadmor, G. 2003 Model-based control of vortex shedding using low-dimensional Galerkin models. In *33rd AIAA Fluids Conference and Exhibit*. Orlando, Florida, USA, June 23–26, 2003, Paper **2003-4262**.

Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. & Cabot, W. H. 1991 A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A* **3**, 1760–1765.

Ghoniem, A. F. & Gagnon, Y. 1987 Vortex simulation of laminar recirculating flow. *J. Comput. Phys.* **68**, 346–377.

Giesing, J. P. 1969 Vorticity and Kutta condition for unsteady multi-energy flows. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **36**, 608–613.

Gröbner, W. & Hofreiter, N. 1965 *Integraltafel. Erster Teil: Unbestimmte Integrale*. Springer.

Gu, Z. 1996 On interference between two circular cylinders at supercritical Reynolds number. *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.* **62**, 175–190.

Hadamard, J. 1926 La formation des discontinuités dan les fluides. In *Proc. 2nd Intern. Congress Appl. Mech.*. Zürich, Switzerland.

Heine, T., Kawohl, M. & King, R. 2006 Ein neuer Ansatz zur robusten Trajektorienplanung und robusten nichtlinearen modellprädiktiven Regelung für Prozesse mit Parameterunsicherheiten. *at – Automatisierungstechnik* **54** (12), 614–621.

Helmholtz, H. 1858 Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Crelles J.* **55**, 25–55.

Henning, L. 2008 Regelung der aerodynamischen Strömung stumpfer Körper. Dissertation, Fakultät III – 'Prozesswissenschaften', Technische Universität Berlin.

Henning, L. & King, R. 2005 Drag reduction by closed-loop control of a separated flow over a bluff body with a blunt trailing edge. In *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005*. Seville, Spain, December 12–15, 2005, 494–499.

Henning, L. & King, R. 2007 Robust multivariable closed-loop control of a turbulent backward-facing step flow. *J. Aircraft* **40**, 201–208.

Henning, L., Pastoor, M., King, R., Noack, B. R. & Tadmor, G. 2007 Feedback control applied to bluff body wake. In *Active Flow Control* (ed. R. King), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, vol. 95. Springer.

Hucho, W.-H. 2002 *Aerodynamik der stumpfen Körper. Physikalische Grundlagen und Anwendungen in der Praxis*. Vieweg Verlag.

Hucho, W.-H. & Sovran, G. 1993 Aerodynamics of road vehicles. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **25**, 485–537.

Huerre, P. & Monkewitz, P. A. 1985 Absolute and convective instabilities in free shear layer. *J. Fluid Mech.* **159**, 151–168.

Huerre, P. & Monkewitz, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.

Huppertz, A. 2001 Aktive Beeinflussung der Strömung stromab einer rückwärtsgewandten Stufe. Dissertation, Fachbereich 10 – 'Verkehrswesen und Angewandte Mechanik', Technische Universität Berlin.

Jaroch, M. 1987 Eine kritische Betrachtung der Methode diskreter Wirbel als Modell für eine abgelöste Strömung mit geschlossener Ablöseblase auf der Basis experimenteller Erkenntnisse. Dissertation, Fachbereich 10 – 'Verkehrswesen und Angewandte Mechanik', Technische Universität Berlin.

Jones, M. A. 2003 The separated flow of an inviscid fluid around a moving plate. *J. Fluid Mech.* **496**, 405–441.

Julier, S. J. & Uhlmann, J. K. 2004 Unscented filtering and nonlinear estimation (Invited). In *Proc. of the IEEE*. **92**, 401–422.

Kaltenbach, H.-J. & Janke, G. 2000 Direct numerical simulation of flow separation behind a swept rearward-facing step at $Re_H = 3000$. *Phys. Fluids* **12**, 2320–2337.

Karamcheti, K. 1966 *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics.* Jon Wiley & Sons.

von Kármán, T. & Rubach, H. 1912 über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. *Phys. Zeitschr.* **XIII**, 49–59.

Kim, J., Hahn, S., Lee, D., Choi, J., Jeon, W.-P. & Choi, H. 2004 Active control of turbulent flow over a model vehicle for drag reduction. *J. Turb.* **5**, 1–25.

King, R., Becker, R., Garwon, M. & Henning, L. 2004 Robust and adaptive closed-loop control of separated shear flows. In *2nd AIAA Flow Control Conference*. Portland, Oregon, USA, June 28 – July 1, 2004, Paper **2004-2519**.

King, R., Seibold, M., Lehmann, O., Noack, B. R., Morzyński, M. & Tadmor, G. 2005 Nonlinear flow control based on a low dimensional model of fluid flow. In *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems, LNCIS 322* (ed. T. Meurer, K. Graichen & E. D. Gilles), pp. 369–386. Springer.

Klein, F. 1910 Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **58**, 259–262.

Krajnović, S. & Davidson, L. 2003 Numerical study of the flow around a bus-shaped body. *Trans. ASME, J. Fluids Eng.* **125**, 500–509.

Krasny, R. 1986*a* Desingularization of periodic vortex sheet roll-up. *J. Comp. Phys.* **65**, 292–313.

Krasny, R. 1986*b* On singularity formation in a vortex sheet and the point vortex approximation. *J. Fluid Mech.* **167**, 65–93.

Krasny, R. 1991 Vortex sheet computations: Roll-up, wakes, separation. *Lect. Appl. Math.* **28**, 385–401.

Lamb, S. H. 1945 *Hydrodynamics*. Dover Publications.

Leder, A. 1992 *Abgelöste Strömungen – Physikalische Grundlagen*. Vieweg Verlag.

Leonard, A. 1980 Vortex methods for flow simulation. *J. Comp. Phys.* **37**, 289–335.

Leonard, A. 1985 Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **17**, 523–559.

Lighthill, M. J. 1963 Attachment and separation in three-dimensional flow. In *Laminar boundary layers* (ed. L. Rosenhead), pp. 48–88. Oxford: Clarendon Press.

Lin, C. C. 1942*a* On the motion of vortices in two dimensions – I. Existence of the Kirchhoff-Routh function. *Proc. Nat. Acad. Sciences* **27**, 570–575.

Lin, C. C. 1942*b* On the motion of vortices in two dimensions – II. Some further investigations on the Kirchhoff-Routh function. *Proc. Nat. Acad. Sciences* **27**, 575–577.

Lo, R. K. C. & Ting, L. 1976 Studies of the merging of vortices. *Phys. Fluids* **19**, 912–913.

Lugt, H. J. 1996 *Introduction to Vortex Theory*. Vortex Flow Press.

Lumley, J. L. & Blossey, P. N. 1998 Control of turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30**, 311–327.

Mabey, J. 1972 Analysis and correlation of data on pressure fluctuations in seperated flow. *J. Aircraft* **9**, 642–645.

Manhart, M. 1996 *Umströmung einer Halbkugel in turbulenter Grenzschicht*, *Fortschritts-Berichte VDI, Reihe 7*, vol. 292. VDI-Verlag.

Meiburg, E. 1995 Three-dimensional vortex dynamics simulation. In *Fluid vortices* (ed. S. Green), pp. 651–685. Dordrecht: Kluver Academic Publishers.

Mercker, E. 1980 Eine Blockierungskorrektur für aerodynamische Messungen in offenen und geschlossenen Unterschallwindkanälen. Dissertation, Fachbereich 10 – 'Verkehrswesen und Angewandte Mechanik', Technische Universität Berlin.

van der Merwe, R. 2004 Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models. PhD thesis, OGI School of Science & Engineering at Oregon Health & Science University.

Milne-Thomson, L. M. 1968 *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan Press.

Moore, D. W. 1974 A numerical study of the roll-up of a finite vortex sheet. *J. Fluid Mech.* **63**, 225–235.

Moore, D. W. 1975 The rolling up of a semi-infinite vortex sheet. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **345**, 417–430.

Moore, D. W. 1979 The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **365**, 105–119.

Noack, B. R., Afanasiev, K., Morzyński, M., Tadmor, G. & Thiele, F. 2003 A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **497**, 335–363.

Noack, B. R., Mezić, I., Tadmor, G. & Banaszuk, A. 2004*a* Optimal mixing in recirculation zones. *Phys. Fluids* **16** (4), 867–888.

Noack, B. R., Papas, P. & Monkewitz, P. A. 2005 The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows. *J. Fluid Mech.* **523**, 339–365.

Noack, B. R., Tadmor, G. & Morzyński, M. 2004*b* Low-dimensional models for feedback flow control. Part I: Empirical Galerkin models (Invited). In *2nd AIAA Flow Control Conference*. Portland, Oregon, USA, June 28 – July 1, 2004, Paper **2004-2408**.

Novikov, E. A. 1984 Generalized dynamics of three-dimensional vortical singularities (vortons). *Sov. Phys. JETP* **84**, 975–981.

Park, H., Lee, D., Jeon, W.-P., Hahn, S., Kim, J., Kim, J., Choi, J. & Choi, H. 2006 Drag reduction in flow over a two-dimensional bluff body with a blunt trailing edge using a new passive device. *J. Fluid Mech.* **563**, 389–414.

Pastoor, M., Henning, L., Noack, B. R., King, R. & Tadmor, G. 2008 Feedback shear layer control for bluff body drag reduction. Akzeptiert zur Veröffentlichung im *J. Fluid Mech.*

Pastoor, M., King, R., Noack, B. R., Dillmann, A. & Tadmor, G. 2003 Model-based coherent-structure control of turbulent shear flows using low-dimensional vortex models. In *33rd AIAA Fluids Conference and Exhibit*. Orlando, Florida, USA, June 23–26, 2003, Paper **2003-4261**.

Prandtl, L. 1904 Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In *Verhandlungen des III. Internat. Math. Kongr.*, pp. 484–491. Heidelberg, Germany, 1904.

Prandtl, L. 1922 Über die Entstehung von Wirbeln in idealen Flüssigkeiten. In *Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik. Teil II* (ed. W. Tollmien, H. Schlichting & H. Görtler), p. 697. Berlin: Springer.

Prandtl, L. 1965 *Strömungslehre*. Vieweg.

Protas, B. 2004 Linear feedback stabilization of laminar vortex shedding based on a point vortex model. *Phys. Fluids* **16** (12), 4473–4488.

Pullin, D. I. 1978 The large-scale structure of unsteady self-similar rolled-up vortex sheets. *J. Fluid Mech.* **88**, 401–430.

Rosenhead, L. 1931 The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. Royal Soc.* **134**, 170–192.

Rott, N. 1956 Diffraction of a weak shock with vortex generation. *J. Fluid Mech.* **1**, 111–128.

Roussopoulos, K. 1993 Feedback control of vortex shedding at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **248**, 267–296.

Routh, E. J. 1881 Some applications of conjugate functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* **12**, 83–89.

Rowley, C. W., Williams, D. R., Colonius, T., Murray, R. M., MacMartin, D. G. & Fabris, D. 2002 Model-based control of cavity oscillations. In *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, USA, January 14–17, 2002, Paper **2002-0972**.

Samimy, M., Debiasi, M., Caraballo, E., Malone, J., Little, J., Özbay, H., Efe, M., Yan, X., Yuan, X., DeBonis, J., Myatt, J. H. & Camphouse, R. C. 2004 Strategies for closed-loop cavity flow control. In *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, USA, January 5–8, 2004, Paper **2004-0576**.

Sarpkaya, T. 1989 Computational methods with vortices. *Trans. ASME, J. Fluids Eng.* **36**, 608–613.

Sarpkaya, T. & Schoaff, R. L. 1979 Inviscid model of two-dimensional vortex shedding by a circular cylinder. *AIAA J.* **17**, 1193–1200.

Schade, H. & Kunz, E. 1989 *Strömungslehre*. Walter de Gruyter.

Schlichting, H. 1930 Über das ebene Windschattenproblem. Dissertation, Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen.

Schwarz, H. R. & Köckler, N. 1986 *Numerische Mathematik*. Teubner.

Seidel, J., Siegel, S., Cohen, K., Becker, V. & McLaughlin, T. 2006 Simulations of three dimensional feedback control of a circular cylinder wake. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, USA, January 9–12, 2006, Paper **2006-1404**.

Shannon, C. E. 1949 Communication in the presence of noise. *Proc. IRE* **37**, 10–21, reprint: *Proc. IEEE* **86**, 447–457, 1998.

Siegel, S., Aradag, S., Seidel, J., Cohen, K. & McLaughlin, T. 2007*a* Low dimensional POD based estimation of a 3D turbulent separated flow. In *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, USA, January 8–11, 2007, Paper **2007-0112**.

Siegel, S., Cohen, K. & McLaughlin, T. 2003 Feedback control of a circular cylinder wake in experiment and simulation. In *33rd AIAA Fluids Conference and Exhibit*. Orlando, Florida, USA, June 23–26, 2003, Paper **2003-3571**.

Siegel, S., Cohen, K., Seidel, J., Luchtenburg, M. & McLaughlin, T. 2007*b* Low dimensional modelling of a transient cylinder wake using double proper-orthogonal decomposition. Eingereicht zur Veröffentlichung im *J. Fluid Mech.*

Soteriou, M. 2003 Vortex element method – expansion about incompressible flow computation of noise generation by subsonic shear flows – the impact of external forcing. *J. Turb.* **4** (3), 1–9.

Spieweg, R. 2000 Strukturen in turbulenten Scherschichten mit schräger Abströmkante – Experiment und Simulation. Dissertation, Fachbereich 10 – 'Verkehrswesen und Angewandte Mechanik', Technische Universität Berlin.

Suh, Y. K. 1993 Periodic motion of a point vortex in a corner subject to a potential flow. *J. Phys. Soc. Jap.* **62**, 3441–3445.

Suzuki, T. & Colonius, T. 2003 Inverse-imaging method for detection of a vortex in a channel. *AIAA J.* **41**, 1743–1751.

Tadmor, G. & Banaszuk, A. 2002 Observation feedback control of vortex motion in a recirculation region. *IEEE Trans. Control Systems Technology* **10**, 749–755.

Tadmor, G., Noack, B. R., Morzyński, M. & Siegel, S. 2004 Low-dimensional models for feedback flow control. Part II: Controller design and dynamic estimation (Invited). In *2nd AIAA Flow Control Conference*. Portland, Oregon, USA, June 28 – July 1, 2004, Paper **2004-2409**.

Tang, S. & Aubry, N. 2000 Suppression of vortex shedding inspired by a low-dimensional model. *J. Fluids Struct.* **14**, 443–468.

Tanner, M. 1972 A method of reducing the base drag of wings with blunt trailing edges. *Aeronautical Quarterly* **23**, 15–23.

Thomson, W. 1869 On vortex motion. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* **25**, 217–260.

Tombazis, N. & Bearman, P. W. 1997 A study of three-dimensional aspects of vortex shedding from a bluff body with a mild geometric disturbance. *J. Fluid Mech.* **330**, 85–112.

Van Dyke, M. 1982 *An Album of Fluid Motion*. The Parabolic Press.

Weinkauf, T., Hege, H.-C., Noack, B. R., Schlegel, M. & Dillmann, A. 2003 Coherent structures in a transitional flow around a backward facing step. *Phys. Fluids, Special Section: Gallery of Fluid Motion* **15**, S3.

Weinkauf, T., Noack, B. R., Comte, P., Dillmann, A. & Hege, H.-C. 2004 Coherent structure skeleton of a turbulent mixing layer (poster at the Gallery of Fluid Motion). In *57th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics Meeting of the American Physical Society*. Seattle, Washington, USA, November 21–23, 2004.

Wengle, H., Huppertz, A., Bärwolff, G. & Janke, G. 2001 The manipulated transitional backward-facing step flow: An experimental and direct numerical simulation investigation. *Eur. J. Mech. Ser. B* **20**, 25–46.

Wygnanski, I. 2004 The variables affecting the control of separation by periodic excitation. In *2nd AIAA Flow Control Conference*. Portland, Oregon, USA, June 28 – July 1, 2004, Paper **2004-2505**.