

**Turbulenzmodellierung  
für stabil dichtegeschichtete Strömungen  
bei der Simulation des  
Transports von kohäsiven Sedimenten in Ästuaren**

von  
Dipl.-Ing Jens WYRWA  
aus Hameln

Von der Fakultät V, Verkehrs- und Maschinensysteme,  
der Technischen Universität Berlin  
zur Verleihung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
genehmigte Dissertation

Berlin 2003

D83

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. P. GUMMERT

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. E. SIEKMANN

Gutachter: o. Prof. Dr.-Ing. habil. R. SCHILLING

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. habil. A. DILLMANN

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 28. März 2003

# Vorwort

Besonderen Dank schulde ich Herrn Dipl.-Ing. Müller vom Wasser- und Schifffahrtsamt Bremerhaven, der sich zwei Tage Zeit genommen hat, um mich in die Besonderheiten der Verschlickung im Weser-Ästuar einzuführen. Er hat mir auch die Möglichkeit vermittelt, an Bord des Hopperbaggers „Heinrich Hirdes“ den Baggerbetrieb live zu erleben und an Bord des gewässerkundlichen Messschiffs „Tide“ bei der Gewinnung von Messdaten dabei zu sein. Den Besatzungen der beiden Schiffe danke ich für die freundliche Aufnahme an Bord und die vielen Einblicke in die Praxis. Kapitän Hüttenmeister danke ich dafür, dass er mir an Bord seiner „Wega II“ die Verschlickung des Fedderwader Priels im Detail gezeigt hat.

Prof. Schatzmann vom Meteorologischen Institut der Universität Hamburg und Dr. Raasch vom Institut für Meteorologie der Universität Hannover danke ich für ihre Einschätzungen und Hinweise.

Meinem Betreuer Prof. Siekmann danke ich für die wirklich väterliche Anteilnahme an meinem wissenschaftlichen Schaffen sowie für die Genauigkeit, mit der er die Entstehung aller Teile dieser Arbeit begleitet hat. Prof. Schilling und Prof. Dillmann danke ich für die Übernahme der Koreferate und für das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse. Es freut mich besonders, dass Prof. Gummert den Vorsitz der Prüfungskommission übernommen hat.

Für das Korrekturlesen dieser Arbeit bin ich Bernadette Neuhaus, Irmgard Wyrwa und Sabine Lobenstein zu Dank verpflichtet. Bei Christof Krause muss ich mich für die Geduld bedanken, mit der er mein Ringen mit der Materie in seiner Wohnung ertragen hat. Bei meiner Frau, Bernadette Neuhaus, möchte ich mich ganz herzlich dafür bedanken, dass sie die Bedeutung erkannte, die diese Arbeit für mich gehabt hat. Last but not least bedanke ich mich bei meinen Eltern, deren finanzielle Unterstützung die Ruhe und Unabhängigkeit mit ermöglicht hat, in der diese Arbeit entstehen konnte.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	5
1.2	Ziel der Arbeit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Transport kohäsiver Sedimente</b>	<b>9</b>
2.1	Vorgehensweisen in der Praxis . . . . .	9
2.2	Mischungswegmodell . . . . .	12
2.2.1	Turbulenter Impulsaustausch . . . . .	12
2.2.2	Turbulenter Massenaustausch . . . . .	16
2.2.3	Suspendierte Sedimente . . . . .	17
2.2.4	Dichteschichtung . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Turbulenzkollaps</b>	<b>20</b>
3.1	Aussagen von WINTERWERP . . . . .	20
3.2	Skepsis . . . . .	22
3.3	Fazit . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Trübungszone</b>	<b>25</b>
4.1	Entstehung . . . . .	25
4.1.1	Beobachtungen . . . . .	25
4.1.2	Residuelle Zirkulation . . . . .	26
4.1.3	Asymmetrie der Tide . . . . .	27
4.2	Dynamik . . . . .	27
4.3	Sedimentbilanz . . . . .	28
4.4	Trübungszone und numerische Berechnung . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Eigenschaften kohäsiver Sedimente</b>	<b>31</b>
5.1	Material und Partikelgröße . . . . .	31
5.2	Flockenbildung und Sinkgeschwindigkeit . . . . .	33
5.3	Rheologie . . . . .	35
5.4	Erosion, Deposition und Konsolidierung . . . . .	37

5.5	Konsequenzen aus der Abkehr vom Wasser-Boden-Dualismus .	40
5.6	Unsicherheiten bei der Massenstromberechnung . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Turbulenz in stabil dichtegeschichteten Suspensionen</b>	<b>44</b>
6.1	Grundgleichungen . . . . .	44
6.2	Interne Wellen . . . . .	48
6.3	Instabilität . . . . .	49
6.4	REYNOLDS-Mittelung der Grundgleichungen . . . . .	51
6.5	REYNOLDS-Spannungen . . . . .	54
6.6	Dimensionslose Kennzahlen . . . . .	57
6.7	Längenmaße . . . . .	61
6.8	MONIN-OBUKHOV-Ähnlichkeit . . . . .	64
6.9	Relativbewegung zwischen Feststoff und Fluid . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Turbulenzmodell</b>	<b>74</b>
7.1	Grundgleichungen . . . . .	74
7.2	Staupunkt-Anomalie . . . . .	76
7.3	Stabilitätsfunktion . . . . .	79
<b>8</b>	<b>Numerischer Algorithmus</b>	<b>81</b>
8.1	Überblick . . . . .	81
8.2	Verfahren nach CASULLI . . . . .	83
8.2.1	2D-Basis-Algorithmus . . . . .	83
8.2.2	Konvektion . . . . .	85
8.2.3	3D-Erweiterung . . . . .	88
8.2.4	Horizontale Impulsdiffusion und numerische Stabilität .	91
8.3	Verfahrenserweiterung . . . . .	93
8.3.1	Unstrukturierte Netze . . . . .	93
8.3.2	Stofftransport und Turbulenzmodell . . . . .	94
8.4	Entwicklungsmöglichkeiten . . . . .	96
<b>9</b>	<b>Testrechnungen</b>	<b>98</b>
9.1	Idee und Überblick . . . . .	98
9.2	Basismodell . . . . .	101
9.2.1	Gerader Kanal . . . . .	101
9.2.2	Tide in einer Bucht . . . . .	103
9.2.3	Potential-Staupunktströmung . . . . .	105
9.2.4	Laminare Grenzschicht . . . . .	106
9.2.5	Diffusion von Konzentrationen . . . . .	108
9.2.6	Starrkörperrotation . . . . .	109
9.2.7	Konvektiver Transport . . . . .	111

9.3	Turbulenzmodell . . . . .	113
9.3.1	Abklingende isotrope Turbulenz . . . . .	113
9.3.2	Oscillating-Grid-Tank . . . . .	116
9.3.3	Logarithmisches Wandgesetz . . . . .	118
9.3.4	Ebene Scherschicht . . . . .	121
9.3.5	Zwischenfazit . . . . .	126
9.4	Stabile Dichteschichtung . . . . .	129
9.4.1	Abklingende isotrope Turbulenz . . . . .	129
9.4.2	Ebene Scherschicht . . . . .	131
9.4.3	Wandgrenzschicht . . . . .	133
9.5	Suspendierte Sedimente . . . . .	137
9.5.1	Diffusion und Sinken . . . . .	137
9.5.2	Erosion . . . . .	138
9.5.3	Deposition . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Auswertung</b>	<b>142</b>
10.1	Methoden und Kriterien . . . . .	142
10.2	Schlussfolgerungen . . . . .	144
10.3	Ausblick . . . . .	146
<b>11</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>148</b>
<b>12</b>	<b>Anhang</b>	<b>151</b>
12.1	Konzentrationsmaße . . . . .	151
12.2	Sohlschubspannung und Reibungsbeiwerte . . . . .	153
<b>13</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>154</b>
<b>14</b>	<b>Bildteil</b>	<b>176</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung

In vielen Ästuaren<sup>1</sup> bilden sich Trübungszone<sup>2</sup> aus, in denen große Mengen kohäsiver Sedimente<sup>3</sup> bewegt werden. Die Vorhersage dieser Transportprozesse ist bisher noch nicht mit technisch brauchbarer Genauigkeit möglich.

Kohäsive Sedimente können zur Verschlickung von Fahrrinnen und Häfen führen. Baggerungen sind relativ teuer, weswegen man sich von verbesserten Einblicken in den Transportprozess erhofft, Maßnahmen ableiten zu können, die die Unterhaltungskosten von Häfen und Fahrrinnen senken. Darüberhinaus können sämtliche anthropogenen<sup>4</sup> Eingriffe in die Strömung im Ästuar Auswirkungen auf den Transport von kohäsiven Sedimenten haben. Deshalb wird es grundsätzlich angestrebt, die Folgen von wasserbaulichen Eingriffen ins Ästuar vorhersagen zu können und sie nicht nur nachträglich zu beobachten. Die Morphodynamik<sup>5</sup> eines Ästuars ist von Natur aus nicht statisch,

---

<sup>1</sup>Als Ästuar wird der Teil der Flussmündung bezeichnet, in dem der Einfluss des Meeres spürbar ist: zum einen durch die Tidebewegung (Ebbe und Flut), zum anderen durch das Eindringen von Salzwasser.

<sup>2</sup>In tidebeeinflussten Ästuaren treten Trübungszone auf (wie z.B. in den Mündungen von Elbe, Weser und Ems). Dies sind Abschnitte, die meist in der Nähe der Brackwasserzone (wo sich Salz- und Süßwasser mischen) liegen. In der Trübungszone ist bei laufendem Tidestrom das Wasser deutlich trüber als weiter see- oder landeinwärts.

<sup>3</sup>Kohäsive Sedimente sind Feinstpartikel mit Durchmessern unter 0.06 mm, die in Suspension im Wasser als Trübung erscheinen und nach dem Absinken gemeinhin als Schlick bezeichnet werden. Die Kohäsion bewirkt, dass sich vor allem Tonpartikel im Wasser zu Flocken zusammenballen können. Dies ist für die Transportmodellierung ein wesentlicher Faktor, weil Flocken schneller sinken als Einzelpartikel. Siehe dazu Abschnitt 5.1.

<sup>4</sup>durch menschliches Handeln hervorgerufen

<sup>5</sup>Zeitliche Änderungen der Gewässersohle

sondern unterliegt einem stetigen Wandel. Viele Ästuare werden intensiv als Häfen genutzt, in deren unmittelbarer Nähe große Siedlungen gewachsen sind. Es ist daher für den Menschen wertvoll, sich rechtzeitig auf diese langfristigen Änderungen einstellen zu können.

In dem Gesamtzusammenhang der Transportberechnung stellt die Modellierung des turbulenten Massenaustauschs ein Teilproblem dar. Neben den allgemeinen Schwierigkeiten der Turbulenzmodellierung muss beim Transport kohäsiver Sedimente zusätzlich die Turbulenzdämpfung infolge von stabilen Dichteschichtungen berücksichtigt werden. Dichtegradienten bilden sich zum einen durch das Absinken der suspendierten Sedimente aus, zum anderen sind im Ästuar die Dichteunterschiede zwischen Süß- und Salzwasser vorhanden. Während Dichtegradienten, die vom Salzgehalt verursacht werden, in allen Wassertiefen vorkommen können, treten Dichtegradienten, die von unterschiedlichen Schwebstoffgehalten herrühren, vorzugsweise in Sohlhöhe auf. So kommt es zu einer Interaktion der Turbulenzdämpfung mit der Sohlengrenzschicht, was zu einer Widerstandsverminderung führt.

Messungen sind im Ästuar nur punktuell und mit großem Aufwand möglich. Gründe dafür sind:

- die Größe (z. B. ist das Weser-Ästuar 120 km lang),
- die schwierige Zugänglichkeit (zum einen sind Flachwasserbereiche auch vom Schiff aus nur schwer erreichbar, zum anderen kann in den Fahrrinnen der Schiffsverkehr nicht für Messungen unterbrochen werden),
- die Trübung des Wassers erschwert den Einsatz vieler Messtechniken.

Bei der Modellierung des Transports kohäsiver Sedimente spielen folgende empirische Annahmen eine Rolle:

**Turbulenzmodell:** Es verknüpft den turbulenten Impuls- und Massentransport mit dem Feld der zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten; siehe Kapitel 7.

**Flocculationsmodell:** Es beschreibt die Größe der Flocken und deren Sinkgeschwindigkeit; siehe Abschnitt 5.2.

**Erosions-Depositions-Modell:** Dies sind Annahmen darüber, unter welchen Bedingungen der Übergang zwischen liegendem Boden und fließender Suspension stattfindet. Wichtigster Parameter ist die Sohlspannung; siehe Abschnitt 5.4.

**Konsolidierungsmodell:** Es beschreibt die allmähliche Verfestigung des ruhenden Sediments; siehe Abschnitt 5.4.

Es besteht also das Problem, dass das Turbulenzmodell im Rahmen der Simulation des Transports kohäsiver Sedimente nicht so weitgehend beherrscht wird, dass sein Anteil an den Abweichungen des Gesamtmodells klar quantifizierbar wäre. Die Motive, an der Überwindung dieses Problems zu arbeiten, ergeben sich zum einen aus der Berechnungspraxis, in der ein zweckgerichteter Einsatz von Turbulenzmodellen wünschenswert ist, zum anderen aus der Forschung zum Transport kohäsiver Sedimente, in der die klare Abgrenzung eines empirischen Teilmodells einen Beitrag zur Erforschung der anderen Teilmodelle liefern kann.

## 1.2 Ziel der Arbeit

Hauptziel dieser Arbeit ist es zu quantifizieren, in welchem Umfang das Turbulenzmodell an den Abweichungen des Gesamtmodells zum Transport kohäsiver Sedimente in Ästuaren beteiligt ist. Dazu werden bestehende Vorschläge zur Turbulenzmodellierung auf stabil dichteschichtete Strömungen angewendet und mit veröffentlichten experimentellen Ergebnissen verglichen. Dieser Vergleich soll im Rahmen von numerischen Programmen stattfinden, die für die praktische 3D-Simulation von flachen Gewässern mit freier Oberfläche geeignet sind. Es soll versucht werden, die Ergebnisse so allgemeingültig darzustellen, dass sie auch auf andere Bereiche, in denen Turbulenzdämpfung infolge von Dichtegradienten und Suspensionstransport eine Rolle spielt, anwendbar sind. Dies sind z.B. die Meteorologie und die Verfahrenstechnik.

Dabei werden folgende Teilziele verfolgt:

- Implementierung und Überprüfung eines numerischen Verfahrens zur 3D-Berechnung von flachen Gewässern mit freier Oberfläche.
- Untersuchung der numerischen Implementierung eines Turbulenzmodells exemplarisch anhand des  $k$ - $\epsilon$ -Modells.
- Bestimmung der Begrenzungen des  $k$ - $\epsilon$ -Turbulenzmodells bei der Anwendung in Ästuaren.
- Untersuchung der Modellierbarkeit von Turbulenzdämpfung, die von stabiler Dichteschichtung hervorgerufen wird.
- Vergleich der Ungenauigkeiten, die von den verschiedenen empirischen Modellen verursacht werden.

# Kapitel 2

## Transport kohäsiver Sedimente

### 2.1 Vorgehensweisen in der Praxis

Numerische Simulationen des Transports kohäsiver Sedimente werden bisher in der Planungspraxis im Tidebereich kaum eingesetzt. Die Anwendungen numerischer Verfahren auf reale Situationen in Ästuaren haben das Forschungs- und Erprobungsniveau noch nicht überschritten. Der Bedarf, Sedimenttransportprozesse vorhersagen zu wollen, ergibt sich aus der wirtschaftlichen Anforderung, die Schiffbarkeit von Häfen und Fahrrinnen zu gewährleisten, sowie dem umweltpolitischen Ziel, die Folgen menschlicher Eingriffe in die Ökologie des Gewässers zu minimieren. OELLERICH [90] erläutert den Bedarf an numerischen Berechnungen als Grundlage von naturschutzrechtlichen Eingriffsfolgen-Abschätzungen.

Im Bereich der Binnengewässer werden Berechnungen des Transports von kohäsiven Sedimenten (Suspensionstransport) bereits kommerziell angeboten. Dieses Instrument wird bei Gutachten im Zusammenhang mit der Bewirtschaftung von Stauräumen genutzt. Dabei findet die Berechnung des Sedimenttransports meist auf der Basis von 2D-tiefengemittelten Strömungsrechnungen statt.

Auf der InterCoh'94<sup>1</sup> haben HAMM et al.[45] eine Vergleichsstudie vorgestellt, in der die Berechnungsverfahren namhafter Laboratorien auf eine vertikal voll durchmischte Versuchsströmung angewendet wurden. Dabei konnten lediglich qualitative Übereinstimmungen zwischen Rechnung und Messung erzielt werden. In dem EU-Forschungsvorhaben MAS2-CT92-0013 „Three di-

---

<sup>1</sup>International Conference on Nearshore and Estuarine Cohesive Sediment Transport. Findet i. d. R. alle zwei Jahre statt.

mensional numerical modelling of cohesive sediment transport processes in estuarine environments“[72] wurde 1994 ein relativ hoher Stand erreicht, zu dem MALCHEREK [75] wesentlich beigetragen hat. Es wurde u.a. ein Abschnitt des Weserästuars berechnet. Nach Anpassung der Randbedingungen an die Messungen gelang es, das Entstehen einer Trübungszone im numerischen Modell zu reproduzieren.

Dies bedeutet nun nicht, dass die praktisch tätigen Wasserbauingenieure den Transportprozessen von kohäsiven Feinsedimenten, die zur Umlagerung von Schlick im Ästuar führen, hilflos gegenüberstehen. So erläutert beispielsweise RODIEK [105] die Vorgehensweise beim Planfeststellungsverfahren zur Vertiefung der Außenweser. GRAVERTS [41] verweist in seinem Bericht über den Ausbau des Container-Terminals in Bremerhaven auf das Monitoring der Verklappstellen, wo die beim Hafenausbau unerwünscht, da nicht tragfähigen Feinsedimente (Klei) ins Ästuar eingebracht wurden.

Die in der Praxis zur Vorhersage des Schlicktransports angewendeten Methoden basieren auf den bisher bekannten Wirkungszusammenhängen, die in den Kapiteln 4 und 5 eingehender beschrieben werden. Dazu werden Erfahrungen, Messungen und Strömungsberechnungen genutzt. Für die Häfen und Fahrrinnen gibt es langjährige Erfahrungen aus dem Baggerbetrieb. In regelmäßigen Abständen durchgeführte Sohlpeilungen zeigen die sedimentierten bzw. erodierten Volumina. Die an einigen Stellen mittlerweile kontinuierlich durchgeführten Messungen der Schwebstoffkonzentrationen [144] geben Aufschluss über Transportvorgänge.

Aus Strömungsberechnungen kann auf Sedimenttransportprozesse rückgeschlossen werden. Dies ergibt sich aus der monotonen<sup>2</sup> Abhängigkeit der transportierten Sedimentmenge von der Strömungsgeschwindigkeit. Daraus folgt: Wo die Strömungsgeschwindigkeit sinkt, verstärkt sich die Tendenz zur Sedimentation; wo höhere Geschwindigkeiten entstehen, verstärkt sich die Tendenz zur Erosion. Diese Überlegung ist im Binnenbereich, wo die Strömungsrichtung der Flüsse weitgehend gleich bleibt, sehr hilfreich. Eingriffe können dann so gestaltet werden, dass z.B. dort, wo Erosionen bereits zu Problemen führen, keine Erhöhungen der Strömungsgeschwindigkeiten zugelassen werden. Die Strömung im Tidebereich ändert sich im Verlauf der Tidephasen (Ebbe und Flut), und jede Tide ist ein individuelles Ereignis. Daher führt die Monotonieüberlegung oft nicht zum Ziel, weil sich nicht in

---

<sup>2</sup>Je schneller das Wasser fließt, umso mehr Sediment kann es transportieren.

allen Tidephasen die gleiche Tendenz<sup>3</sup> der Strömung ergibt. In solchen Fällen ist der genaue funktionale Zusammenhang zwischen Sedimenttransport und Strömung erforderlich. Um die langfristigen Veränderungen, denen das Hauptinteresse der Praxis gilt, prognostizieren zu können, muss darüberhinaus eine geeignete Mittelung über eine repräsentative Anzahl von Strömungen durchgeführt werden.

Bis vor wenigen Jahren waren 3D-Strömungsberechnungen in Ästuaren aufgrund fehlender Rechnerkapazitäten noch gar nicht möglich. Wie später noch zu zeigen sein wird, ist die Auflösung in der Vertikalen für Simulationen des Suspensionstransports im Tidebereich notwendig.

Nur hinreichend verifizierte Berechnungsverfahren, d. h. mit der Natur ausreichend verglichene Ergebnisse, sind in der Praxis nützlich. Das heißt, es müssen sichere Aussagen über die Abweichungen zwischen Simulation und Realität machbar sein. Dem steht neben den Schwierigkeiten bei der Modellierung der physikalischen Prozesse im Ästuar auch der Fakt entgegen, dass Messwerte in der für die Modellverifikation nötigen zeitlichen und räumlichen Dichte nur mit sehr erheblichem Aufwand beschaffbar sind.

Von der numerischen Simulation des Transports kohäsiver Sedimente erwartet man sich in der Praxis nicht nur genaue quantitative Aussagen über Erosions- oder Depositionsvolumina, sondern auch Hilfe bei der Aufklärung von bisher noch unverstandenen Wirkmechanismen und Unterstützung bei der Entwicklung neuer Technologien. So werden in Emden neue Baggerstrategien [79] [145] und andere Verfahren zur Festlegung der nautischen Tiefe [5] erprobt. In Bremerhaven versucht man, den Hafenbecken möglichst schwebstoffarmes Wasser zuzufießen zu lassen [144], und in Hamburg wurden Hafeneinfahrten geometrisch umgestaltet, um den Sedimenteintrag zu vermindern [26].

---

<sup>3</sup>Z. B. wenn ein Eingriff dazu führt, dass sich die Strömungsgeschwindigkeit an einer Stelle in manchen Tiden erhöht, in anderen aber verringert.

## 2.2 Mischungswegmodell

### 2.2.1 Turbulenter Impulsaustausch

Für die herausgehobene Darstellung des Mischungswegmodells nach [75] spricht, dass es in der Forschung zum Transport kohäsiver Sedimente eingehender erprobt und häufiger angewendet wurde [128] [151] als andere Turbulenzmodelle.

Dieses Kapitel führt nicht nur das PRANDTLsche Mischungswegmodell und die MUNK-ANDERSON-Dämpfungsfunktion [85] ein, sondern stellt dabei auch den Grenzschichtcharakter von Flachwasserströmungen und die RICHARDSON-Zahl als Kennzahl für Dichteschichtungen vor.

Dieser Abschnitt beschränkt sich darauf, die wesentlichen Eckpunkte des Mischungswegmodells darzustellen. Die gesamte Breite der physikalischen Phänomene, die in der Erforschung des Transports kohäsiver Sedimente abgedeckt werden muss, wird erst im Kapitel 5 sichtbar. Die vollständigen Formeln der grundlegenden Bilanzgleichungen befinden sich im Kapitel 6. Die hier angegebenen Formeln beziehen sich allein auf den vertikalen Impuls- und Massenaustausch. **Bild 2** zeigt das verwendete Koordinatensystem.

Es ist wichtig, sich vor Augen zu führen, dass Oberflächengewässer in aller Regel sehr flach sind. So kommen z. B. im Weser-Ästuar Wassertiefen von über 20 Meter kaum vor. Bevor der Mensch begann, die Fahrrinne auszubaggern, war das Ästuar über weite Strecken wesentlich flacher als heute. Die Fahrrinnenbreite in der Weser beträgt ca. 200 Meter, das ganze Gewässer ist, gerade im Außenbereich, noch wesentlich breiter. In Längsrichtung erstreckt es sich von dem den Tidebereich abgrenzenden Wehr 5 km südlich von Bremen über eine Länge von ca. 120 km. Seeseitig ist der Übergang kontinuierlich und wird in etwa dort angesetzt, wo die Tiderinne der Weser (die auch als Fahrrinne markiert und unterhalten wird) im Boden der Nordsee nicht mehr erkennbar ist. Diese Stelle befindet sich nördlich der von den Ostfriesischen Inseln gebildeten Linie. D. h., in Ästuaren ist die Tiefe mehr als eine Zehnerpotenz kleiner als die Breite und mehr als drei Zehnerpotenzen kleiner als die Länge. Die Strömung hat somit Grenzschichtcharakter und wird hauptsächlich von der Reibung an der Gewässersohle geprägt.

Die grundlegenden Erkenntnisse zu dieser Art von Strömungen sind bei SCHLICHTING [111] dargelegt. Die Besonderheiten der Gerinneströmung lassen sich kompakt und durch Messungen untermauert bei NEZU und NAKAGAWA [89] nach-

lesen.

Charakteristisch für turbulente Grenzschichtströmungen bei Gleichdruck ist ein Abschnitt im Geschwindigkeitsprofil, der sich durch folgende logarithmische Funktion beschreiben lässt (logarithmisches Wandgesetz):

$$\frac{\bar{v}}{v_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_{ref}} \right) + C \quad (2.1)$$

mit

- $\bar{v}$  zeitlich gemittelte Geschwindigkeit in Längsrichtung ,
- $v_\tau$  Schubspannungsgeschwindigkeit  $\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}$  ,
- $\tau_b$  Wandschubspannung ,
- $\rho$  Dichte ,
- $\kappa$  KARMAN-Konstante ,
- $z$  Wandabstand (von der Sohle aufwärts) ,
- $z_{ref}$  Referenzabstand, s.u. und
- $C$  Konstante .

Für Strömungen in offenen Kanälen geben NEZU und NAKAGAWA [89]  $\kappa=0,412$  an.

Im Fall von **hydraulisch rauen Wänden** steht der Referenzabstand für:

$$z_{ref} = k_s \quad (2.2)$$

mit

- $k_s$  äquivalente Sandrauheit nach NIKURADSE.

Die Konstante C hat in diesem Fall den Wert 8,5. Hydraulisch vollkommen rau sind Wände, wenn

$$\frac{k_s \cdot v_\tau}{\nu} > 70 \quad (2.3)$$

ist.

Im Fall von **hydraulisch glatten Wänden** steht der Referenzabstand für:

$$z_{ref} = \frac{\nu}{v_\tau} \quad (2.4)$$

mit

- $\nu$  kinematische Viskosität.

Die Konstante  $C$  hat dann den Wert 5,29. Hydraulisch glatt sind Wände, wenn

$$\frac{k_s \cdot v_\tau}{\nu} < 5 \quad (2.5)$$

ist. Zwischen hydraulisch glatt und vollkommen rau ergibt sich ein Übergangsbereich (siehe [111]).

Die Messungen von NEZU und NAKAGAWA [89] besagen, dass sich der logarithmische Bereich des Geschwindigkeitsprofils in Gerinneströmungen von  $z > 30 \frac{\nu}{v_\tau}$  bis  $z < 0,2 \cdot h$  erstreckt.

Die Grundlagen des Mischungswegmodells wurden, wie SCHLICHTING [111] angibt, von PRANDTL 1925 gelegt. Es ermöglicht einerseits eine zutreffende mathematische Berechnung des logarithmischen Bereichs im Geschwindigkeitsprofil. Andererseits wird durch das Konzept der Mischungsweglänge der Strömungsforschung auch eine Idee zum Verständnis turbulenter Grenzschichtströmungen an die Hand gegeben.

Das Mischungswegmodell gehört zur Gruppe der Wirbelviskositätsmodelle (BOUSSINESQ-Ansatz). Dabei wird der Impulsaustausch, der von den turbulenten Schwankungsbewegungen hervorgerufen wird, dito die turbulente Schubspannung, als Produkt einer skalarwertigen Funktion mit dem Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten wie folgt angesetzt:

$$\tau_t = \nu_t \cdot \rho \cdot \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

mit  
 $\tau_t$  Turbulente Schubspannung und  
 $\nu_t$  Wirbelviskosität .

Die Mischungsweglänge ist im Mischungswegmodell mit der Wirbelviskosität wie folgt verknüpft (ohne Einfluss der Dichteschichtung):

$$\nu_t = l^2 \cdot \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \quad (2.7)$$

mit  
 $l$  Mischungsweglänge .

Neben dem BOUSSINESQ-Ansatz benötigt das Mischungswegmodell nun eine weitere Annahme, nämlich einen Ansatz für die Größe der Mischungs-

weglänge. Für sie setzt [75] folgende Rampenfunktion an:

$$l = \begin{cases} \kappa \cdot z & 0 \leq z \leq 0,2 \cdot h \\ \kappa \cdot 0,2 \cdot h & 0,2 \cdot h < z \leq h \end{cases} \quad (2.8)$$

mit  
 $h$  Wassertiefe

Die von [89] vorgeschlagene Rampenfunktion knickt bei  $z = 0,29 \cdot h$ .

Mathematisch herleiten lässt sich eine logarithmische Geschwindigkeitsverteilung aus einem linearen Verlauf der Mischungsweglänge nur dann, wenn die Schubspannung als konstant angenommen wird. Im Rohr und im Gerinne ist der Schubspannungsverlauf aber linear<sup>4</sup>. Wenn Schubspannungsverlauf und Geschwindigkeitsverteilung bekannt sind, lässt sich die Verteilung der Mischungsweglänge berechnen. Diese bereits von NIKURADSE [88] 1933 vorgenommene und von SCHLICHTING [111] wiedergegebene Auswertung zeigt eine Kurve, die sich in Wandnähe an eine Gerade, die die KARMAN-Konstante als Steigung hat, anschmiegt.

Der konstante Verlauf der Mischungsweglänge im oberen Teil des Wasservolumens wird durch Messungen gestützt; siehe z.B. [89]. In diesem wandfernen Bereich weicht das Geschwindigkeitsprofil vom logarithmischen Verlauf ab. Warum die Diskussion der oberen 80% des vertikalen Geschwindigkeitsprofils im Ästuar wenig Erkenntniswert hat, wird in Abschnitt 6.8 erläutert.

Die hinter dem Mischungswegmodell stehende Vorstellung ist folgende: Die Distanz, die ein „Fluidballen“ zurücklegt, bis er seinen Impuls an das umgebende Fluid abgegeben hat, ist proportional zum Wandabstand. Dem Ansatz liegt also eine Idee von der Größe der turbulenten Strukturen zugrunde.

Unterhalb des logarithmischen Bereichs befindet sich eine verschwindend dünne Unterschicht, in der die Geschwindigkeit entweder von der Viskosität (hydraulisch glatte Wände) oder von den Rauheitselementen (hydraulisch raue Wände) bestimmt wird. Wie allgemein üblich, plaziert [75] daher den sohnächsten Punkt des Diskretisierungsgebiets nicht unmittelbar auf der Sohle, sondern der Punkt wird gedanklich ein wenig von der Wand entfernt, so dass er sich bereits im logarithmischen Bereich befindet. Die Verbindung zur Wand wird durch Wandfunktionen hergestellt. Als Randbedingung wird

---

<sup>4</sup>lineare Abnahme mit zunehmendem Wandabstand, beginnend bei der Wandschubspannung und endend bei Null auf der Rohrachse, respektive an der Oberfläche.

dann nicht die Wandhaftung angesetzt, sondern es wird eine Schubspannung als Randbedingung verwendet, die sich aus der Geschwindigkeit an diesem Punkt und einem Reibungsbeiwert ([75] verwendet den CHEZY-Koeffizienten mit einem empirisch bestimmten Wert von 29,4) wie folgt berechnet:

$$\tau_b = \nu_t \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right|_{z=z_b} = \frac{\bar{v}(z_b)^2}{Ch \cdot h^2} \quad (2.9)$$

mit  
 $z_b$  Wandabstand des sohnächsten Diskretisierungspunkts und  
 $Ch$  CHEZY-Koeffizient .

Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass dadurch ein Rauheitsparameter in das Berechnungsverfahren eingeführt werden kann. Aber auch bei glatten Wänden erleichtern Wandfunktionen die numerische Berechnung erheblich. Die Diskretisierung des wandnächsten Bereichs, der aufgrund der hohen Geschwindigkeitsgradienten eine sehr feine Diskretisierung erfordern würde, entfällt. Außerdem muss das Turbulenzmodell nicht erweitert werden, um den Übergang zur viskosen Unterschicht zu erfassen. Diese Erleichterung hat allerdings zur Folge, dass der Reibungsbeiwert empirisch bestimmt werden muss und Grenzschicht-Ablösung und -Umschlag nur mit weiteren Modellannahmen simuliert werden können.

## 2.2.2 Turbulenter Massenaustausch

Die Massen, deren turbulente Vermischung hier modelliert werden muss, sind die Masse des im Wasser suspendierten Sediments und die des gelösten Salzes. Dazu wird ebenfalls ein BOUSSINESQ-Ansatz verwendet, in dem ein skalarer Diffusionsparameter den turbulenten Massenaustausch mit dem Konzentrationsgradienten verknüpft. Dieser Diffusionsparameter wird der Wirbelviskosität gleichgesetzt. Diese Annahme ist gleichbedeutend damit, dass die SCHMIDT-Zahl<sup>5</sup> für den turbulenten Massenaustausch

$$Sc_t = \frac{\nu_t}{D_t} \quad (2.10)$$

mit  
 $D_t$  turbulenter Massendiffusionsparameter mit dem Wert 1.0 angesetzt wird.

Analog zu den Wandfunktionen muss in der Stofftransportberechnung eine

---

<sup>5</sup>Wenn nicht Stoff sondern Wärme transportiert wird, heißt das Verhältnis der Diffusionsparameter PRANDTL-Zahl.

Konzentration oder ein Massenstrom an der Sohle als Randbedingung vorgegeben werden. Diese wird von [75] mit den gängigen Formeln 5.2 errechnet, welche die kritischen Sohlschubspannungen und die Erodibilitätskonstante als empirische, materialspezifische Beiwerte verwenden.

### 2.2.3 Suspensierte Sedimente

Das Gleichgewichts-Konzentrations-Profil nach ROUSE ist in den Lehrbüchern zum Thema Sedimenttransport [99] [134] [147] ausführlich dargestellt worden. Es ergibt sich aus dem hier angesetzten Massendiffusionsparameter und dem im vorangegangenen Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Mischungswegmodell unter Voraussetzung von horizontaler Gleichförmigkeit. Weiterhin wird zur Herleitung des Gleichgewichts-Konzentrationsprofils angenommen, dass sich an jedem Punkt der abwärts gerichtete Massenstrom infolge des Sinkens der Sedimentpartikel und der aufwärts gerichtete Massenstrom infolge turbulenter Mischung im Gleichgewicht befinden. Daraus lässt sich dann die folgende Konzentrationsverteilung herleiten [30]:

$$\frac{c(z)}{c(z=a)} = \left( \frac{h-z}{z} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^{\frac{w_s \cdot S_{ct}}{\kappa \cdot v_\tau}} \quad (2.11)$$

mit

- $c(z)$  vertikales Konzentrationsprofil,
- $z$  Wandabstand von der Sohle an aufwärts gerichtet,
- $a$  Referenzabstand,
- $v_\tau$  Schubspannungsgeschwindigkeit  $\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}$ ,
- $h$  Wassertiefe,
- $\kappa$  KARMAN-Konstante,
- $S_{ct}$  turbulente SCHMIDT-Zahl und
- $w_s$  Sinkgeschwindigkeit des Sediments, relativ zum umgebenden Wasser.

Der Referenzabstand beschreibt eine Stelle nahe der Wand, für die eine Referenzkonzentration angegeben werden kann. Dieses Vorgehen ist nötig, da das ROUSE-Profil bei  $z=0$  den Wert Unendlich berechnet.

Enthält nun die Strömung mehr Sedimente, als sie im Gleichgewicht tragen kann, beispielsweise wenn die Geschwindigkeit zurückgeht, fällt soviel Sediment aus, bis sich ein neues Gleichgewicht einstellt. Grobkörnige Sedimente, z.B. Sand, fallen gemäß der gängigen Vorstellung zu Boden und werden dort

ein Teil der Sohle<sup>6</sup>. Die Berechnung der Sinkgeschwindigkeit erfolgt mittels folgender Formel, als deren Herkunft [110] eine Veröffentlichung von STOKES aus dem Jahre 1851 angibt:

$$w_s = \frac{(\rho_s - \rho_w) \cdot g \cdot d^2}{18 \cdot \mu} \quad (2.12)$$

mit  
 $\rho_s$  Dichte der Sediment-Partikel,  
 $\rho_w$  Dichte des Wassers,  
 $g$  Fallbeschleunigung,  
 $d$  Durchmesser des Sediment-Partikels und  
 $\mu$  dynamische Viskosität.

Gültig ist diese Formel, wenn die REYNOLDS-Zahl des sinkenden Partikels unter 1 liegt [110]. Bei einer Sedimentdichte von  $\rho_s = 2650 \frac{kg}{m^3}$  und der Viskosität von Wasser  $\mu = 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$  bei 20°C gilt die STOKES-Formel bis zu einem Partikeldurchmesser von  $104 \mu m$ . Partikel mit diesem Durchmesser sinken mit einer Geschwindigkeit von  $w_s = 9,7 mm/s$ .

## 2.2.4 Dichteschichtung

Bei der turbulenten Vermischung von einem untenliegenden schwereren Fluid mit einem obenliegenden leichteren Fluid (stabile Dichteschichtung) muss Arbeit gegen die Schwerkraft verrichtet werden, d. h. ein Teil der kinetischen Energie der turbulenten Fluktuationen wird in potenzielle Energie umgewandelt. Es wird der turbulenten Schwankungsbewegung Energie entzogen. Die Turbulenz wird durch den Mischungsvorgang gedämpft.

Als Kennzahl zur Beschreibung des Einflusses, den die Dichteschichtung auf die Turbulenz ausübt, wird die RICHARDSON-Zahl

$$Ri = \frac{-g}{\rho_{avg}} \frac{\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2} \quad (2.13)$$

mit  
 $g$  Fallbeschleunigung ,  
 $\bar{p}$  zeitlich gemittelte Dichte,  
 $\rho_{avg}$  räumlich gemittelte Dichte und  
 $\bar{v}$  zeitlich gemittelter Geschwindigkeit

---

<sup>6</sup>Auch bei grobkörnigen Sedimenten erleichtert die Vorstellung eines sprunghaften Übergangs zwischen Suspension und Sohle das Verständnis des Prozesses nicht.

verwendet. Die RICHARDSON-Zahl setzt den die Turbulenz dämpfenden Dichtegradienten zu dem die Turbulenz anfachenden Geschwindigkeitsgradienten ins Verhältnis und beschreibt somit die Stärke der Dichteschichtung. Wie in Abschnitt 6.3 noch näher erläutert wird, resultiert die RICHARDSON-Zahl aus Stabilitätsberechnungen. Wenn sie einen kritischen Wert überschreitet, ist ein Umschlag laminar-turbulent gar nicht mehr möglich.

Zur Berücksichtigung der Dichteschichtung im Mischungswegmodell verwendet [75] die MUNK-ANDERSON-Dämpfungsfunktion nach [85]. Ein Vorgehen, das [128] als „klassisch“ bezeichnet. Die Dämpfungsfunktion lautet:

$$f(Ri) = (1 + bRi)^{-n}. \quad (2.14)$$

Sie enthält die RICHARDSON-Zahl als Variable sowie die zwei empirischen Parameter  $b$  und  $n$ . Diese MUNK-ANDERSON-Dämpfungsfunktion wird mit der ungeschichteten Wirbelviskosität multipliziert und ergibt den folgenden Ansatz für die dichtegeschichtete Wirbelviskosität:

$$\nu_{t,g} = f(Ri) \cdot \nu_t = f(Ri) \cdot l^2 \cdot \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \quad (2.15)$$

mit

$\nu_{t,g}$  Wirbelviskosität im dichtegeschichteten Fluid.

Auf die Einschränkungen, die aus dem hier vorgetragenen Mischungswegmodell resultieren, wird in Abschnitt 3.3 zurückgekommen. Vorher sollen in Abschnitt 3.1 die Thesen von WINTERWERP [142] erläutert werden. Danach ist es dann einfacher, das in dieser Arbeit verwendete Turbulenzmodell zum Mischungswegmodell ins Verhältnis zu setzen.

# Kapitel 3

## Turbulenzkollaps

### 3.1 Aussagen von WINTERWERP

Die Idee, dass in einer Strömung, die Schwebstoffe transportiert, die Turbulenz vollständig kollabieren kann, wird von WINTERWERP [142] ausgeführt. Er prognostiziert einen vollständigen Turbulenzkollaps, wenn eine Schwebstoff-Sättigungskonzentration überschritten wird. Dieses Konzept einer Sättigungskonzentration unterscheidet sich von der Gleichgewichts-Überlegung, die zum Konzentrations-Profil (2.11) nach ROUSE führte.

Die Sinkgeschwindigkeit von kohäsiven Feinsedimenten ist in Suspensionen mit hohen Konzentrationen geringer, als wenn die gleichen Partikel sich in einer geringeren Konzentration im Wasser befänden. Es haben sich in solchen hochkonzentrierten Suspensionen bereits große Flocken gebildet, welche den Austausch behindern, d.h. das Wasser entweicht schlechter aus der dichten Suspension. Dieser Effekt wird als „hindered settling“ bezeichnet. Bevor diese HCMS (High Concentrated Mud Suspensions), wie WINTERWERP sohlnahe Schichten mit hohen Sedimentkonzentrationen nennt, zur Gewässersohle werden, an der sich Schubspannungen abstützen können, vergeht Zeit in der Größenordnung einer Tideperiode. D.h. zuerst einmal sinken kohäsive Sedimente in eine weiterhin fließfähige HCMS-Schicht ein - sie sind nicht schlagartig Teil einer festen Wand.

An der Grenze zwischen HCMS-Schicht und dem darüberliegenden Wasser mit geringer Konzentration ergibt sich ein starker Dichtegradient. Es werden nahezu sprunghafte Veränderungen der Dichte beobachtet, die als Lutocli-

nen<sup>1</sup> bezeichnet werden. Dieser Dichtegradient dämpft die Turbulenz. Das verringert nun wiederum die Fähigkeit, Sediment in der darüberliegenden Wassersäule in Suspension zu halten. Dies ermöglicht folgenden sich selbst verstärkenden Prozess: Je mehr Sediment heruntersinkt, umso größer wird der Dichtegradient. Je größer der Dichtegradient wird, umso stärker wird die Turbulenz bedämpft und je stärker die Turbulenz bedämpft wird, umso mehr Sediment sinkt herab. WINTERWERP geht in [142] nun so weit, zu prognostizieren, dass dadurch die Turbulenz vollständig kollabieren kann. Der Sedimentgehalt in der Wassersäule, ab dem dieser vollständige Kollaps auftritt, wird von ihm als Sättigungskonzentration bezeichnet.

Der Autor untermauert seine These durch Berechnungen mit einem 1DV-Modell. Dies ist ein numerisches Modell, das als einzige Dimension die Vertikale diskretisiert. In den horizontalen Dimensionen wird Gleichförmigkeit vorausgesetzt. Angetrieben wird die Strömung von einem Wasserspiegelgefälle. Er rechnet mit einer konstanten Sinkgeschwindigkeit von 0,5 mm/s (also ohne hindered settling), 16 m Wassertiefe und 0,2 m/s Fließgeschwindigkeit. Als Turbulenzmodell verwendet er ein  $k - \epsilon$ -Modell, das die Turbulenzdämpfung infolge Dichteschichtung berücksichtigt und eine SCHMIDT-Zahl von 0,7. Startbedingung ist eine gleichmäßig über die Tiefe verteilte Konzentration. WINTERWERP zeigt nun, dass sich bei einer Startkonzentration von 0,023 g/l ein ROUSE-Profil ausbildet. Die Erhöhung der Startkonzentration auf 0,024 g/l überschreitet die Sättigungskonzentration und führt zum Kollaps.

Für die Anschauung ist es wichtig zu erwähnen, dass der in [142] prognostizierte Kollaps nicht plötzlich eintritt, sondern eine relativ zur Tideperiode lange Zeit braucht. Er berechnet Zeiten von mehr als 1000 Minuten im übersättigten Fall, bis das Sediment komplett in Sohlhöhe zusammengefallen ist. Noch länger dauert es im andern Fall, bis sich das Gleichgewichtsprofil vollständig ausgeformt hat. Das Sinken des Sediments von der Wasseroberfläche bis zum Boden im stillstehenden Wasser würde bei der angesetzten Wassertiefe und Sinkgeschwindigkeit 533 Minuten dauern. Die von WINTERWERP angesetzten Zahlenwerte liegen im Rahmen dessen, was in realen Ästuaren anzutreffen ist. In einem weiteren numerischen Beispiel setzt WINTERWERP eine zeitliche Verteilung der Geschwindigkeit an, so wie sie in der Tide vorkommt. Auch in diesem Fall beobachtet er oberhalb einer Sätti-

---

<sup>1</sup>Begriff, der in dem kleinen Kreis von Forschenden, die sich mit Schwebstoffsuspensionen beschäftigen, verwendet wird. Siehe z.B. [136]. Leitet sich ab von „lutum“ lat. Lehm, Ton, vgl. Thermocline für die Temperatursprungfläche.

gungskonzentration einen Kollaps. Dieser Zusammenbruch verteilt sich über drei Tideperioden.

Ein weiterer neuartiger Gedankengang aus der Arbeit von WINTERWERP betrifft die Vorstellung, wie das Wiedereinmischen von HCMS-Schichten in den Wasserkörper vor sich geht, wenn die Strömung schneller wird. Er zeigt, dass die Vorstellung, dass das Sediment vom darüberfließenden Wasser aufgewirbelt wird, im Fall eines Zweischichtensystems mit einer unten liegenden fließfähigen HCMS-Schicht unzutreffend ist. Der von der Tide hervorgerufene Wasserspiegelgradient treibt beide Schichten in gleicher Weise vorwärts. Nur die HCMS-Schicht reibt an der Sohle und wird turbulent. In Folge des Dichtegradienten zwischen dem „klaren“ Wasser und der HCMS-Schicht wird die Bewegung des klaren Wassers zwar schneller, aber nicht turbulent. Die Vermischung geht dann von der Turbulenz in der HCMS-Schicht aus und nicht umgekehrt.

## 3.2 Skepsis

Skepsis ist angebracht, ob die Turbulenz im realen Ästuar tatsächlich vollständig kollabieren kann. Diese Skepsis fußt auf folgenden Überlegungen:

Turbulenz geht im Gewässer mit einer charakteristischen, gut sichtbaren Kräuselung der Oberfläche einher. So, wie WINTERWERP [142] den Turbulenzzusammenbruch vorhersagt, hat die Strömung eine deutlich erkennbare Geschwindigkeit<sup>2</sup>, die durch den Wegfall der turbulenten Reibung noch ansteigen müsste. Die Wasseroberfläche im Ästuar wird von den seefahrenden Berufsgruppen seit Jahrhunderten täglich aufmerksam beobachtet. Wenn es im Ästuar Stellen gäbe, wo eine schnelle Strömung mit einer eigentümlich glatten Wasseroberfläche zusammenfiel, wäre es wahrscheinlich, dass dies von seefahrenden Menschen schon einmal beobachtet und beschrieben worden wäre. Voraussetzung für die Sichtbarkeit des Turbulenzkollapses an der Wasseroberfläche ist aber Windstille.

ETLING [33] weist aufgrund von theoretischen Überlegungen und Laborexperimenten darauf hin, dass auch in der stabil geschichteten Atmosphäre ein Turbulenzkollaps existieren müsste. Entsprechende Messungen in der Natur, die solche kollabierende Turbulenz zweifelsfrei beweisen, sind bisher nicht bekannt geworden. Sowohl ETLING [33] als auch WINTERWERP [142] beziehen sich bei den angeführten Naturmessungen auf Vertikalprofile. Deshalb

---

<sup>2</sup>in seinem Beispiel 0,2 m/s

können andere Ursachen als ein Turbulenzkollaps für die Messwerte nicht ausgeschlossen werden.

Desweiteren begründet sich die Skepsis aus den von [142] verwendeten Modellannahmen:

- Die im vertikalen 1D-Modell angesetzte Gleichförmigkeit tritt im Ästuar nicht auf. In dem von WINTERWERP vorgestellten Fall benötigt der Zusammenbruch länger als 1000 Minuten. Dabei hat das Wasser eine Strecke von mehr als 12 Kilometern zurückgelegt. Die Geometrie realer Ästuarer ist entlang einer derart langen Strecke nicht gleichförmig.
- Das verwendete  $k - \epsilon$ -Turbulenzmodell ist nur für turbulente REYNOLDS-Zahlen größer als 60 gültig. In Situationen, in denen die Turbulenz so weit zurückgeht, dass die turbulente Viskosität kaum größer als die molekulare Viskosität ist, verliert das Modell seine Gültigkeit. Das Problem wird in [142] beschrieben.
- Es ist die Frage zu stellen, ob das numerische Verfahren mit der Extremsituation einer zusammengefallenen Konzentrationsverteilung nicht überfordert ist. Da WINTERWERP eine konstante Sinkgeschwindigkeit verwendet, sammelt sich das gesamte Sediment im Fall des berechneten Zusammenbruchs in der untersten Zelle, ohne die Lutocline darstellen zu können.

Darüber hinaus geht WINTERWERP davon aus, dass das  $k-\epsilon$ -Turbulenzmodell den turbulenten Impulsaustausch unterschätzt. Er stützt diese Vermutung auf die Untersuchung von SIMONIN et al. [120], bei der Experimente an einer stabil dichteschichteten ebenen Scherschicht mit numerischen Berechnungen verglichen wurden. Hierbei ist die Frage zu stellen, ob eine freie Scherschicht eine geeignete Vergleichssituation für den in Sohlhöhe und daher vermutlich von der Wand beeinflussten Turbulenzkollaps ist. Der Vergleich zwischen Messung und Berechnung [120] zeigt zudem, dass der rigid-lid Ansatz des Berechnungsverfahrens das im Experiment auftretende Wasserspiegelgefälle nicht erfassen kann. der Versenkung verschwunden.

### 3.3 Fazit

Um realistische Schwebstofftransport-Simulationen ausführen zu können, ist es erforderlich, den Mechanismus, der zum Turbulenzkollaps führt, hinreichend genau erfassen zu können. Grund ist der Einfluss, den der Turbulenzkollaps auf die von einer Strömung transportierte Sedimentmenge hat. Das

wäre auch dann notwendig, wenn die turbulente Schwankungsbewegung nicht völlig zu Null wird, sondern nur stark abnimmt.

Das Mischungsweg-Turbulenzmodell, wie es in Abschnitt 2.2 vorgestellt wurde, kann einen solchen Kollaps-Mechanismus nicht erfassen. In dessen Herleitung wurde angesetzt, dass die Strömung über die ganze Wassertiefe Grenzschichtcharakter hat und die Dämpfung nicht auf die Verteilung der Mischungsweglänge zurückwirkt. Das Modell ist dadurch nur auf Fälle anwendbar, in denen der Einfluss der Dichteschichtung auf das Turbulenzgeschehen klein bleibt. Erst Turbulenzmodelle, in denen zwei Transportgleichungen gelöst werden, wie dem  $k-\epsilon$ -Modell, sind frei von Annahmen über die räumliche Verteilung der Turbulenzgrößen. Daher finden dieses Modell in dieser Arbeit Verwendung.

Folgende Annahmen in dieser Arbeit stehen im Zusammenhang mit dem Kollaps-Mechanismus:

Es werden 3D-Modelle verwendet. Eine der stark einschränkenden Voraussetzungen für die Berechnungen, die WINTERWERP [142] anstellte, um den Kollaps zu bestätigen, war horizontale Gleichförmigkeit. Der Einfluss horizontaler Scherung auf den vertikalen Massenaustausch wird daher hier auch im Hinblick darauf betrachtet, wie er mit dem Kollaps-Mechanismus interagiert.

Nur wenn Turbulenzmodelle auch bei kleinen turbulenten REYNOLDS-Zahlen unter 60 zuverlässig arbeiten, können Aussagen über Strömungen in dem Bereich zwischen stark gedämpfter und völlig kollabierter Turbulenz gemacht werden.

Wie genau das numerische Verfahren starke Dichtegradienten abbilden kann, wird auch deswegen geprüft, weil diese Dichtegradienten ein Baustein des Kollaps-Mechanismus sind.

# Kapitel 4

## Trübungszone

### 4.1 Entstehung

#### 4.1.1 Beobachtungen

Trübungszone werden in Ästuaren beobachtet, in denen die Tidenströmung stark genug ist, um feine, kohäsive Sedimente aufzuwirbeln. In Deutschland werden Trübungszone in den Nordsee-Ästuaren der Elbe, der Weser und der Ems beobachtet. In den Ostsee-Ästuaren wird eine Trübungszone aufgrund des geringeren Tidenhubes nicht beobachtet.

In den Trübungszone ist das Wasser infolge eines höheren Gehalts an suspendierten Sedimenten deutlich trüber als das ins Ästuar einfließende Flusswasser und auch als das Seewasser. Daher sind diese Zonen vom Ufer, aus der Luft und sogar im Satellitenbild erkennbar. Zwar variiert die Lage der Zone, aber als ungefähre Anhaltspunkte lassen sich die Ortschaften Nordenham an der Weser, Terborg an der Ems und Brunsbüttel an der Elbe nennen.

Zusammenfassende Darstellungen und Auswertungen der bisher durchgeführten Messungen wurden veröffentlicht von GRABEMANN [39] und RIETHMÜLLER [101] für die Weser, von SPINGAT [123] für die Ems und von ZIENERT [151] für die Elbe.

Der Süßwasserzufluss des in das Ästuar mündenden Flusses bewirkt, dass das Wasser seewärts fließt. Dies erklärt, warum Feinsedimente, die der Fluss mitbringt, ins Ästuar gelangen. Die Existenz einer Trübungszone wirft aber die Frage auf, warum diese Sedimente nicht vom Wasser weiter ins Meer hinausgespült werden, sondern sich in der Trübungszone sammeln. Es muss also offensichtlich Mechanismen geben, die einen Transport von suspendier-

ten Feinsedimenten entgegen dem mittleren Wasserabfluss bewirken.

Für die Entstehung und Dynamik dieser Zonen kommt eine ganze Reihe von Ursachen in Betracht, die u. a. DYER [30] diskutiert. Hier werden nur die residuelle Zirkulation und die Asymmetrie der Tide gesondert betrachtet, zwei Phänomene, die besondere Anforderungen an die numerische Simulation der Strömung stellen.

### 4.1.2 Residuelle Zirkulation

Der Dichteunterschied zwischen See- und Süßwasser führt im Ästuar dazu, dass der oszillierenden Tidebewegung eine Zirkulation überlagert wird. Bei laufender Tide führt die turbulente Vermischung zu einem Massenaustausch, so dass Salzgehaltsunterschiede (Salinitätsgradient) über die kurzen vertikalen Entfernungen ausgeglichen werden. Entlang der sehr großen Erstreckung in Längsrichtung verbleibt aber ein Gradient des Salzgehaltes im Ästuar. Dieser führt dazu, dass in den Kenterphasen<sup>1</sup> das schwerere Salzwasser am Boden landeinwärts fließt. Leichteres Wasser mit geringeren Salzkonzentrationen wird verdrängt und strömt an der Oberfläche in Richtung See. Es entsteht ein vertikaler Dichtegradient, der durch die folgende Tide- oder Ebbströmung wieder ausgeglichen wird.

Wie auch Messungen von [101] belegen, existiert in der Brackwasserzone<sup>2</sup> ein Bereich in Bodennähe, wo die residuelle Strömung<sup>3</sup> landeinwärts gerichtet ist. Oberflächennah ist diese seewärts gerichtet und im Mittel über einen gesamten Querschnitt muss sie den Süßwasserabfluss des Flusses in dem zur Mittelung benutzten Zeitraum ergeben.

In der Brackwasserzone findet infolge der residuellen Zirkulation netto<sup>4</sup> ein Transport von Schwebstoff landeinwärts statt, weil die Konzentration des Schwebstoffs in Bodennähe größer ist als an der Oberfläche. Dies geschieht, obwohl der Volumenstrom des Wassers netto seewärts gerichtet ist.

---

<sup>1</sup>Mit dem Begriff Kenterung wird der Moment bezeichnet, in dem das Wasser im Ästuar stillsteht. Dabei wird dann der höchste oder niedrigste Wasserstand erreicht. Dementsprechend wird zwischen Flut- und Ebbkenterung unterschieden.

<sup>2</sup>Der Abschnitt des Ästuars, in dem der größte Längsgradient der Salinität anzutreffen ist.

<sup>3</sup>Residuell bezeichnet hier eine volumetrische Mittelung der Geschwindigkeit über mehrere Tideperioden.

<sup>4</sup>Mit netto sei hier die zweifache Mittelung zeitlich über mehrere Tideperioden und räumlich über einen Querschnitt bezeichnet.

Damit wird auch erklärbar, warum in der Jade keine Trübungszone existiert. Diese Nordseebucht hat keinen nennenswerten Süßwasserzufluss. Die residuelle Zirkulation, die von Salzgradienten angetrieben wird, fehlt. Somit sammelt sich das auch am Grund der Jade vorhandene Feinsediment nicht in einer Trübungszone.

### 4.1.3 Asymmetrie der Tide

Beim Einlaufen ins Ästuar wird die Tidewelle auf verschiedene Arten deformiert. Auf Grund von Reflektion an den Ufern und infolge von Resonanz variiert der Tidenhub an verschiedenen Stellen im Ästuar und kann sogar größer sein als auf offener See. Weiterhin tragen zur Deformation der Tidewelle die wasserstandsabhängige Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit und das Trockenfallen von Wattflächen bei. Für die Asymmetrie zwischen Ebbe und Flut ist aber vor allem die wasserstandsabhängige Sohlreibung verantwortlich [30].

SPINGAT [123] beobachtet folgendes: Der Anstieg des Wassers bei Flut geschieht in kürzerer Zeit als das Absinken bei Ebbe und ist daher mit größeren Fließgeschwindigkeiten verbunden. Bei der Flutkenterung steht das Wasser länger still als bei Ebbkenterung.

Da nun der Sedimenttransport überproportional mit der Geschwindigkeit ansteigt [30], kann die kurze aber heftigere Flutströmung mehr Sediment transportieren als die langanhaltende Ebbströmung, in der ein größeres Wasservolumen abfließt. Durch die schnelle Ebbkenterung sinkt weniger suspendiertes Sediment bis zum Boden als bei der Flutkenterung. D. h. bei der oszillierenden Bewegung, die die suspendierten Sedimente in der Tide ausführen, können sie sich am landseitigen Endpunkt ihrer Bewegung besser absetzen als am seeseitigen.

## 4.2 Dynamik

Neben dem halbtäglichen Wechsel von Ebbe und Flut ist die Trübungszone Störungen und Veränderungen unterworfen, die eine Dynamik in längeren Zeiträumen bewirken.

Der halbmonatliche Wechsel von Spring- und Nipptide beeinflusst auch die Trübungszone. Die Messungen von GRABEMANN [39] im Zentrum der Trübungszone der Weser zeigen, dass der maximale Schwebstoffgehalt der Trü-

bungszone bei Springtide um den Faktor 2 größer ist als bei Nipptide.

Stürme über der angrenzenden See und Hochwasser im Fluss führen zu unregelmäßigen Veränderungen der Hydrodynamik des Ästuars und damit des Sedimenttransportvorgangs in der Trübungszone. Wiederkehrintervalle dieser Ereignisse liegen in der Größenordnung von Jahren, bis zu Jahrzehnten bei Extremereignissen.

Stürme, bei denen der Windstau das Seewasser ins Ästuar hineindrückt, verkleinern den Tidenhub während ein bis zwei Tiden. D. h. der Windstau erhöht den Ebbwasserstand stärker als den Flutwasserstand. Die Tidenströmung wird kleiner, die Schwebstoffkonzentration nimmt ab [40]. Die Wiederentstehung der Trübungszone benötigt wenige Tage.

Bei Hochwasserereignissen wird die Trübungszone und die Brackwasserzone vom starken Süßwasserzufluß in Richtung See verdrängt. Wie GRABEMANN und KRAUSE [40] berichten, kehrt die Brackwasserzone verzögerungsfrei an ihren ursprünglichen Ort zurück, wenn der Süßwasserzufluss zurückgeht. Das Wiederentstehen der Trübungszone bis zur ursprünglichen Stärke kann bis zu sechs Monaten in Anspruch nehmen. In [40] wird betont, dass es aufgrund der durchgeführten Messungen nicht entscheidbar ist, ob das alte Sediment aus dem äußeren Ästuar zurückkehrt oder ob sich die Trübungszone aus neuem Sediment bildet.

Diese Unsicherheit über den Verbleib großer Sedimentmengen wird gestützt von einer Untersuchung [35], bei welcher der Eintrag von Schlick in eine ins Ästuar hineingebaggerte Testgrube beobachtet wurde. In unregelmäßiger Folge traten dabei kurze Zeiträume mit starkem Schlickfall auf. Die Vermutung wird geäußert, dass es sich um Sedimente handelt, die von Stürmen drei bis vier Wochen vorher auf den Wattflächen des äußeren Ästuars mobilisiert worden sind.

### 4.3 Sedimentbilanz

Wenn die Sedimentmasse bestimmt werden soll, die in einem Gewässerabschnitt sedimentiert oder erodiert wird, wäre es auch möglich, die Stoffströme über die Ränder des Gewässerabschnitts und die Veränderung der Sedimentkonzentration im Wasser zu bilanzieren. Versuche solcher Sedimentbilanzen werden von SPINGAT [123] und DYER [30] durchgeführt und kritisch diskutiert. Die im Folgenden angegebene Überlegung am Beispiel der Weser dient

lediglich dazu, einen Eindruck der Größenordnungen zu vermitteln.

Im Weser-Ästuar werden pro Jahr ungefähr  $10^6 m^3$  Schlick gebaggert [76]. Nimmt man nun an, dass dies dem sedimentierten Gesamtvolumen entspricht, dass der gebaggerte Schlick eine Dichte von 1,2 kg/l hat und das trockene Sediment eine Dichte von 2,5 kg/l besitzt<sup>5</sup>, dann ergibt sich ein jährlicher Zufluss von Sediment von 333.000 Tonnen. Das Gezeitenprisma<sup>6</sup> der Weser bei km 70 gibt GRABEMANN [39] mit  $1,75 \cdot 10^8 m^3$  an. Während einer halben Tideperiode liefert der mittlere Süßwasserzufluss der Weser  $7 \cdot 10^6 m^3$ . Im Jahr summiert sich das Gezeitenprisma zu einem Volumen von  $1,2775 \cdot 10^{11} m^3$ . Teilt man nun die gebaggerte Sedimentmasse durch dieses Volumen, ergibt sich als Konzentrationsdifferenz, die zwischen Ebbe- und Flutstrom existieren muss, um die gebaggerte Sedimentmenge von See ins Ästuar einzutragen, 2,6 mg/l. An der Messstelle in Blexen bei km 62,5 im Zentrum der Trübungszone beobachtet [39] Konzentrationen um 200 mg/l. Stationäre Dauermessungen werden mit optischen Trübungssensoren durchgeführt, deren Genauigkeit [39] mit  $\pm 12\%$  angibt. Bei einer Konzentration von 200 mg/l ergibt diese Genauigkeit einen möglichen Fehler von 24 mg/l. Es bleibt also festzustellen, dass die zur Sedimentation notwendige Konzentration von 2,6 mg/l um ca. eine Zehnerpotenz kleiner ist als die Messgenauigkeit der Konzentrationsmessgeräte. Auch wenn die Zahlen in obiger Abschätzung mit großer Vorsicht zu betrachten sind, wird dennoch Folgendes deutlich: Die Sedimentströme, die zur Verschlickung führen, liegen gemessen an den insgesamt in der Trübungszone auftretenden Sedimentströmen in der Größenordnung weniger Prozente. Die Genauigkeit bisheriger Konzentrationsmessungen lässt Rückschlüsse auf Sedimentations- oder Erosionsraten nicht zu.

## 4.4 Trübungszone und numerische Berechnung

Ein Simulationsprogramm, mit dem ein Einblick in den Vorgang des Transports kohäsiver Sedimente im Ästuar gewonnen werden soll, muss auch den Prozess der Trübungszoneentstehung nachvollziehen können, allein schon aufgrund der Menge der in dieser Zone transportierten Sedimente. Im Einzelnen folgt daraus für die Erprobung numerischer Verfahren Folgendes:

- Dichtegetriebene Strömungen müssen so präzise simulierbar sein, dass

---

<sup>5</sup>Der gebaggerte Schlick enthält also 13 Vol. % Sediment und 87 Vol. % Wasser. Damit enthält ein Liter Schlick 333 g Sediment.

<sup>6</sup>Das Volumen, das sich zwischen der Wasserspiegellage bei Flutkenterung und der bei Ebbkenterung befindet. Dies ist die Wassermenge, die in einer Tide hin und her bewegt wird.

die residuelle Zirkulation erfasst wird.

- Um die Tideasymmetrie simulieren zu können, ist numerisch zu erproben, ob die Ausbreitung der Tidewellen realistisch wiedergegeben wird.
- Die Sohlreibung und ihre Wasserstandsabhängigkeit muss im numerischen Verfahren geeignet implementiert sein<sup>7</sup>.

Wie in Abschnitt 4.3 dargelegt, sind Genauigkeiten von wenigen Prozent in der Sedimentkonzentration erforderlich, wenn morphodynamische<sup>8</sup> Veränderungen d. h. Sedimentations- oder Erosionsraten bestimmt werden sollen. Da bereits die Messungen, die zur Verifikation, Kalibrierung und Bestimmung der Randbedingungen für das numerische Modell benötigt werden, diese Genauigkeiten nicht erreichen, stellt sich hier die Frage nach dem Sinn numerischer Berechnungen. Der Sinn numerischer Berechnung liegt zum einen in der Eingriffsfolgen-Abschätzung, z. B. der Frage, wie die Trübungszone auf geometrische Veränderungen der Fahrrinne reagiert, und zum anderen in der Prozessaufklärung, z. B. der Frage, wo die Sedimente verbleiben, die bei einem Flusshochwasser ins äußere Ästuar hinausgeschoben werden.

---

<sup>7</sup>Bei der Sohlreibung stellt das Kalibrieren des passenden Reibungsbeiwertes für den einzelnen Gewässerabschnitt das Hauptproblem dar.

<sup>8</sup>Veränderungen der Gewässersohle im Zeitraum von Jahren

# Kapitel 5

## Eigenschaften kohäsiver Sedimente

### 5.1 Material und Partikelgröße

Zur Klassifizierung der Partikelgrößen von Sedimenten wird von [30] und [75] die UDDEN-WENTWORTH-Skala verwendet. Diese basiert auf dem Logarithmus zur Basis 2 des Partikeldurchmessers in mm. Die UDDEN-WENTWORTH-Skala definiert die Grenze zwischen Kies und Sand bei  $2^1 mm$ , die Grenze zwischen Sand und Schluff bei  $2^{-4} mm = 62,5 \mu m$  und die Grenze zwischen Schluff und Ton bei  $2^{-8} mm = 3,9 \mu m$ .

Der Partikeldurchmesser von Sand lässt sich durch Siebung bestimmen. Enthält das Sediment Anteile von Schluff und Ton, muss nass gesiebt werden [30]. Natürliche Sedimentpartikel sind nicht kugelförmig. Werden Durchmesser mittels Siebung ermittelt, bezieht sich die Angabe auf die Siebweite. Es ist möglich, wenn auch sehr aufwendig, die Partikelgrößen von Schluff und Ton unter dem Mikroskop zu bestimmen. In der Praxis wird zur Ermittlung der Partikelgrößen die Sinkgeschwindigkeit im Wasser bestimmt, d. h. die Angabe von Partikeldurchmessern bezieht sich auf eine Kugel, die bei gleicher Dichte dieselbe Sinkgeschwindigkeit im Wasser erreichen würde. Wie in Abschnitt 5.2 noch näher erläutert wird, neigen kohäsive Sedimente dazu, Flocken zu bilden, deren Sinkgeschwindigkeit sich von der des einzelnen Partikels stark unterscheidet. Bei der Korngrößenbestimmung werden chemische Zusätze verwendet, die die Flockung unterdrücken.

Natürlich vorkommende Sedimente sind in aller Regel Mischungen aus Partikeln unterschiedlicher Größen. VAN RIJN[102] gibt an, dass Sedimentgem-

sche, die mehr als 10% Ton enthalten, kohäsive Eigenschaften aufweisen.

Die Eigenschaft der Kohäsion erlangen die in [30] [102] genannten Tonminerale Kaolinit, Montmorillonit, Illit und Chlorit durch die elektrostatische Ladung auf der Oberfläche der plättchenförmigen Partikel. Die Partikelkanten tragen positive und die Partikelflächen negative Ladung. Geraten zwei Partikel in geeigneter Orientierung nahe genug zusammen, bleiben sie aneinander haften. Die ebenfalls elektrisch geladenen Salzkationen fördern den Flockungsprozess.

Es existieren somit zwei Definitionen von Ton. Zum einen die mineralogische, die Ton anhand der chemischen Zusammensetzung definiert, und die Definition anhand der Partikelgröße, die Ton als Partikel definiert, die langsamer sinken als Kugeln gleicher Dichte mit Durchmessern unter  $3,9 \mu\text{m}$ . Diesem Widerspruch ist PULS [97] in seiner Untersuchung von Schlick aus fünf verschiedenen Ästuaren nachgegangen und hat festgestellt, dass die Untersuchung der Partikelgröße immer einen kleineren Tonanteil ergibt, als die mineralogische Untersuchung.

KOLBE[61] hat Sedimentproben aus dem Weserästuar untersucht, die an den bei Ebbe zugänglichen Wattflächen von 1975 bis 1994 entnommen wurden. Drei Probennahmestellen liegen im Lune-Watt, das der von GRABEMANN [39] ausgewerteten Messstelle im Belxer Bogen (Unterweser km 62,5) ungefähr gegenüberliegt. Siehe **Bild 3**. Der Tonanteil in diesen Proben liegt bei 20% und schwankt mit den Jahren zwischen 10% und 30%. Der Sandanteil in den Proben liegt in allen Jahren unter 20%. Der Anteil an organischen Substanzen kann anhand des Gewichtsverlustes der trockenen Sedimente beim Glühen bestimmt werden. In [61] sind die Sedimentproben eine Stunde lang bei  $1000^\circ\text{C}$  geglüht worden. Zudem ist der Kalkgehalt der Proben ermittelt worden, weil auch dieses Mineral beim Glühen Gewicht verliert. Der Gehalt an organischer Substanz ist dann rechnerisch aus Glühverlust und Kalkgehalt bestimmt worden. In den Proben aus dem Lune-Watt liegt der Gewichtsanteil der organischen Substanzen im trockenen Sediment bei 10%. Der organischen Substanz kommt beim Transport kohäsiver Sedimente eine Bedeutung zu, weil sie zu einer Verfestigung von Flocken und Boden ganz erheblich beiträgt [30] [124].

## 5.2 Flockenbildung und Sinkgeschwindigkeit

Wie aus den Gln. 2.11 und 2.12 im Abschnitt 2.2.3 ersichtlich wird, ist es notwendig, Dichte und Sinkgeschwindigkeit der Sedimentpartikel zu kennen, um ihre Verteilung im Wasser berechnen zu können. Da die Kohäsion dazu führt, dass sich Flocken bilden, sind diese Flocken die Partikel, deren Dichte und Sinkgeschwindigkeit (oder Durchmesser) es zu bestimmen gilt. Eine relevante Übersicht über dieses Thema gibt VAN LEUSSEN [68].

Größe und Sinkgeschwindigkeit der Flocken sind nicht konstant, sondern von verschiedenen Einflüssen abhängig, die sich in der Strömung verändern. Als wichtigste sind die Konzentration an suspendiertem Sediment und die Turbulenz zu nennen. Des Weiteren haben der zeitliche Verlauf und der Salzgehalt des Wassers einen Einfluss auf den Flockungsvorgang. Bekannt sind Einflüsse durch biologische Aktivität und mineralogische Zusammensetzung.

Den Zusammenhang zwischen Flockengröße und Flockendichte stellt VAN RIJN [102] grafisch als ein Band mit einer Zehnerpotenz Breite und abfallender Tendenz dar. Große Durchmesser gehen demnach mit kleiner Dichte einher. DYER [30] gibt einen Bereich von 1060 - 1800 g/l für die Dichte von Flocken an. Eine Flocke von 1150 g/l enthält 91 Vol.% Wasser. WINTERWERP [142] führt eine fraktale Dimension ein, um den Zusammenhang zwischen Flockengröße und Sinkgeschwindigkeit zu beschreiben. Die Sinkgeschwindigkeiten der von ihm untersuchten Sedimente ergeben ein Band von einer Zehnerpotenz Breite. Die Sinkgeschwindigkeit steigt mit zunehmender Flockengröße an. Große Flocken von 1000  $\mu\text{m}$  Durchmesser sinken demnach mit Geschwindigkeiten zwischen 1 mm/s und 10 mm/s. Ein einzelnes Ton-Partikel mit 3.9  $\mu\text{m}$  Durchmesser sinkt mit 13,7  $\mu\text{m/s}$ .

Mit zunehmender Konzentration steigt die Sinkgeschwindigkeit der Flocken zuerst an [30] [102]. Dies lässt sich damit erklären, dass in Suspensionen mit geringer Konzentration, nachdem sich Flocken von einer bestimmten Größe gebildet haben, kein weiteres Sediment mehr zur Verfügung steht. Bei Konzentrationen von ca. 10 g/l erreicht die Sinkgeschwindigkeit ein Maximum. Bei noch größeren Konzentrationen nimmt sie wieder ab. Dies wird als „hindered settling“ bezeichnet und rührt daher, dass in sehr dichten Suspensionen die Flocken einen so großen Anteil an Volumen einnehmen, dass das verbleibende Wasser zwischen diesen nur noch langsam entweichen kann. Ist schließlich das gesamte Volumen der Suspension „verflockt“, beginnt der Schlick zu Boden zu werden, der Schubspannungen aufnehmen kann und aus dem das Porenwasser zunehmend langsamer entweicht.

Die Turbulenz im Wasser hat zwei Wirkungen auf den Flockungsvorgang: zum einen bewirkt sie, dass Partikel zusammengebracht werden, zum anderen erzeugt sie Schubspannungen, die zum Zerschneiden von Flocken führen. In die von [141] und [75] verwendeten Flocculations-Modelle geht ein aus Dissipationsrate und Viskosität gebildeter Geschwindigkeitsgradient ein. Diese Größen lassen sich in anderer Potenz zur KOLMOGOROV-Länge kombinieren und [75] weist bereits darauf hin, dass der von ihm verwendete Modellansatz darauf hinausläuft, dass die Flockengröße durch die KOLMOGOROV-Länge begrenzt wird. Die KOLMOGOROV-Länge ist diejenige turbulente Längenskala, die das turbulente Spektrum nach unten begrenzt. Ein weiterer Zerfall turbulenter Strukturen ist nicht möglich, da diese von der Viskosität dissipiert werden, siehe dazu auch die Abschnitte 6.7 und 6.9.

Auf die Zeitabhängigkeit des Flocculationsvorgangs geht MALCHEREK [75] ein. Er verwendet die Zeitdauer von 15 min als typische Kenterungsdauer, um die Relevanz der verschiedenen Flocculationsmechanismen für die verschiedenen Partikeldurchmesser zu bemessen. Das von ihm verwendete Flocculationsmodell ist aber nicht zeitabhängig definiert. Das von MC ANALLY [77] ausgearbeitete Modell erlaubt auch Vorhersagen über den zeitlichen Verlauf der Flockengröße in einer Suspension. In den von [77] als Vergleich herangezogenen Experimenten von BURBAN [11], bei denen Suspensionen einer bestimmten Konzentration einem konstanten Geschwindigkeitsgradienten in einer laminaren COUETTE-Strömung unterworfen wurden, vergehen bis zu zwei Stunden, bis sich ein stationärer Zustand einstellt.

Mit steigendem Salzgehalt nimmt wegen der höheren Flockungsneigung die Sinkgeschwindigkeit der Flocken zu. Die von [30] und [102] angeführten Experimente zeigen, dass beim Durchlaufen der Brackwasserzone zu erwarten ist, dass sich die Sinkgeschwindigkeit um einen Faktor 2 bis 5 verändert.

Mit der Besiedelung von mineralischen Flocken durch biologische Organismen erreicht die Flocke eine höhere Festigkeit. Wie Versuche von [124] nahelegen, ist dieser Umstand für die Festigkeit des Sediments signifikant.

Die mineralogische Zusammensetzung und die Korngrößenverteilung hat erheblichen Einfluß auf die Sedimenteigenschaften. Dies zeigen die Vergleiche von kohäsiven Sedimenten unterschiedlicher geographischer Herkunft [97] [102]. Die Sinkgeschwindigkeit kann unter sonst gleichen Bedingungen Unterschiede von mehr als einer Zehnerpotenz aufweisen. Dies wird gestützt durch die in [30] zitierten Versuche an technischen Mischungen aus Kaolinit

und Quarz, die in Abhängigkeit der Zusammensetzung sehr unterschiedliches rheologisches Verhalten zeigen.

In numerischen Berechnungen sind als Einflüsse auf die Sinkgeschwindigkeit kohäsiver Sedimente bisher nur die Konzentration und die Turbulenz berücksichtigt worden. Die anderen Einflüsse ließen sich durch Kalibrierung erfassen, wenn sie im gesamten Berechnungsgebiet gleichmäßig wären. Dies ist bei Simulationen der Trübungszone für den Salzgehalt jedenfalls nicht der Fall.

Über die im Elbe- und Weser-Ästuar messbaren Sinkgeschwindigkeiten geben PULS et al. [98] Auskunft. **Bild 4** zeigt die Auftragung der Sinkgeschwindigkeiten über der Konzentration. Für die weiterführenden Überlegungen in dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass Sinkgeschwindigkeiten zwischen 0,1 und 1,0 mm/s bei Konzentrationen zwischen 0,1 bis 1,0 g/l den maßgeblichen Bereich für die Sedimente in der Trübungszone der Weser darstellen.

Beim Verrühren von Ton in Wasser fällt auf, dass bei einfachem Rühren Krümel in der Größenordnung von wenigen mm übrig bleiben. Diese lassen sich zwar zwischen den Fingern leicht zerdrücken, eine vollständige Homogenisierung der Suspension gelingt aber erst mit einem Pürierstab. Diese Beobachtung gibt Anlass zu der Vermutung, dass auch im Ästuar ein Geschiebetransport von größeren Agglomeraten kohäsiver Sedimente auftreten könnte.

### 5.3 Rheologie

Diese Arbeit basiert auf der Kontinuumsmechanik. Die Kontinuumsmechanik erzwingt die Verwendung von Materialgleichungen<sup>1</sup>. In den NAVIER-STOKES-Gleichungen ist die Materialgleichung für NEWTON-Fluide enthalten. Suspensionen mit einer hohen Konzentration an kohäsiven Sedimenten sind mit der Materialgleichung für NEWTON-Fluide nicht mehr hinreichend genau beschreibbar.

KOMATINA und JOVANOVIĆ [62] haben Untersuchungen an Suspensionen aus Wasser und Kaolinit vorgenommen. Mit zunehmendem Gehalt an Sediment erhöht sich zuerst die Viskosität der Suspension. Ab einem Sedi-

---

<sup>1</sup>[2] und [100] sprechen auch von konstitutiven Gleichungen. [100]: „Bei rein mechanischer Materialbeschreibung ... führen diese, das jeweilige Material konstituierenden Beziehungen, die sechs noch verbleibenden Spannungen auf die Bewegung des Körpers zurück“

mentgehalt von mehr als 1200 g/l verlassen die von [62] untersuchten Suspensionen das NEWTON-Materialgesetz. Diese Abweichung vom NEWTON-Verhalten äußert sich hauptsächlich darin, dass die Suspension erst, nachdem eine Grenzscherubspannung überschritten wird, zu fließen beginnt. Zur mathematischen Beschreibung des Materialverhaltens wird von [62], [137] [49] u.a. das BINGHAM-Materialgesetz,

$$\tau \begin{cases} \leq \tau_y : & \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \\ > \tau_y : & \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{1}{\mu} (\tau - \tau_y) \end{cases} \quad (5.1)$$

mit  
 $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  Geschwindigkeitsgradient, Scherrate,  
 $\mu$  dynamische Viskosität,  
 $\tau$  im Fluid vorhandene Schubspannung und  
 $\tau_y$  Grenzscherubspannung (yield stress),

verwendet. Das HERSHEY-BULKEY-Materialgesetz, welches das BINGHAM-Modell als Sonderfall enthält, erlaubt eine genauere Beschreibung des Materialverhaltens [50].

WINTERWERP [142] schlägt vor, diesen Übergang in der Materialeigenschaft für eine begriffliche Trennung zwischen „HCMS“<sup>2</sup> mit noch NEWTON-Verhalten und „Fluid Mud“ mit bereits nicht-NEWTON-Verhalten zu verwenden. Die von ihm zitierten Messungen geben diesen Übergang<sup>3</sup> bei Suspensionsdichten von 1050 bis 1130 g/l an.

ASTER [5] bringt den Übergang zum nicht-NEWTON-Materialverhalten daher auch in Zusammenhang mit der Schiffbarkeit<sup>4</sup> von Schlick. Seine Untersuchungen in der Ems ergeben, dass für den Übergang keine einheitliche Grenzdichte angegeben werden kann, sondern dass diese zwischen 1030 und 1390 g/l in Abhängigkeit vom Sandanteil der Suspension<sup>5</sup> schwankt.

Thixotropie und Rheopexie, also die Veränderung des Materialverhaltens aufgrund der Verformungsgeschichte werden u.a. von [59] und [137] untersucht. Thixotropie bezeichnet das Zurückgehen der Schubspannung infolge

---

<sup>2</sup>High Concentrated Mud Suspensions, siehe Abschnitt 3.1

<sup>3</sup>Dieser wird auch als „gelling point“ bezeichnet. (to gel, engl., gelieren)

<sup>4</sup>Seine Überlegungen beziehen sich dabei auf Massengutfrachter und tiefgehende Autotransporter, die den Hafen Emden anlaufen. Im Emder Fahrwasser ist es üblich, dass diese Schiffe durch weichen Schlick hindurchfahren. Der Hintergrund der Untersuchungen ist die Verkehrssicherungspflicht des Wasser- und Schifffahrtsamtes Emden.

<sup>5</sup>Suspensionen mit großem Sandanteil sind nach ASTER [5] auch bei höherer Dichte noch „schiffbar“.

von Scherung, das Material wird durch Rühren fließfähiger. Rheopexie oder Antithixotropie bezeichnet die Eigenschaft, dass das Material infolge von Scherung zu höheren Schubspannungen gelangt. In den o. g. Untersuchungen wird sowohl Thixotropie als auch Rheopexie von erheblichem Ausmaß in Suspensionen aus kohäsiven Sedimenten gefunden.

Im Rahmen dieser Arbeit ist das nicht-NEWTON-Materialverhalten von Suspensionen mit hohem Sedimentanteil insofern von Belang, als hier der Versuch unternommen werden soll, die Ungenauigkeit, die durch die Turbulenzmodellierung in die Simulation des Transports kohäsiver Sedimente eingebracht wird, im Rahmen der insgesamt erreichbaren Genauigkeit abzuschätzen. Der dazu in Abschnitt 5.6 und Kapitel 10 verwendete integrale Parameter ist die Transportrate, also die insgesamt von einer Strömung transportierte Menge an Sediment. Bewegungen von Fluid Mud und HCMS verursachen auch bei kleinen Geschwindigkeiten aufgrund des hohen Sedimentanteils beträchtliche Transportraten.

Um für die Genauigkeitsüberlegung in Kapitel 10 zu einem handhabbaren Vorgehen zu gelangen, wird angenommen, dass die Suspension bei einer gegebenen Sohlschubspannung nach Überschreiten einer Grenzdichte komplett stillsteht. Die Abschätzung in Abschnitt 5.6 liefert als maximale Sohlschubspannung in der Weser  $1,152 \frac{N}{m^2}$ . Diese Grenzsuhspannung erreichen die von KOMATINA und JOVANOVIĆ [62] untersuchten Suspensionen bei einer Dichte von 1300 g/l. Nicht-NEWTON-Materialverhalten wird schon ab 1200 g/l festgestellt. Hindered Settling und damit die Ausbildung von HCMS beginnt bei 1017 g/l (siehe Abschnitt 5.2). Für die hier detailliert zu untersuchende Turbulenzdämpfung ist der Dichteunterschied zwischen HCMS und dem darüberliegenden Wasser entscheidend. Auf die Fehlerspanne der Transportrate nimmt dann die Genauigkeit, mit der die Grenzdichte bestimmbar ist, Einfluss.

## 5.4 Erosion, Deposition und Konsolidierung

Die Vorgänge Deposition und Erosion lassen sich in Abhängigkeit von der Sohlschubspannung beschreiben. Innerhalb dieses Gedankenmodells tritt Deposition dann auf, wenn die Sohlschubspannung eine kritische Depositionsspannung unterschreitet. Erosion tritt auf, wenn eine kritische Erosionsspannung überschritten wird. Wie DYER [30] angibt, übertrifft bei allen bis dato bekannt gewordenen Messungen die kritische Erosionsspannung die kritische Depositionsspannung.

Diese Vorgehensweise lehnt sich an die Beschreibung von Transportvorgängen nichtkohäsiver Sedimente an, welche auf SHIELDS [116] zurückgeht. Er hat diese, aufbauend auf seinen Versuchen in der Preußischen Versuchsanstalt für Wasser- und Schiffbau Berlin, 1936 in seiner Doktorarbeit veröffentlicht. Die Fortschritte der Strömungslehre durch NIKURADSE [88] erlaubten es SHIELDS, die Wandschubspannung in turbulenten Strömungen über rauen Sohlen mathematisch zu beschreiben und mit dem in seinen Experimenten beobachteten Bewegungsbeginn zu verknüpfen. Ausgangspunkt seiner Überlegung ist dabei, dass ein Sedimentpartikel zu rollen beginnt, wenn eine kritische Erosionsspannung überschritten wird. Die von SHIELDS gefundenen dimensionslosen Kennzahlen ermöglichen es, Laborversuche und Naturmessungen miteinander zu vergleichen. Der Bewegungsbeginn kann im SHIELDS-Diagramm auf einer Kurve dargestellt werden. Dichte und Durchmesser genügen zur Beschreibung nichtkohäsiver Sedimente.

Die Kohäsion zwischen den Partikeln bindiger Böden<sup>6</sup> führt nun dazu, dass das einzelne Partikel nicht nur aufgrund seines Eigengewichtes am Boden liegen bleibt, wie die Annahme von SHIELDS voraussetzt, sondern hauptsächlich von den Kohäsionskräften am Boden gehalten wird. Die kritischen Erosions- und Depositionsspannungen liegen also viel höher, als aufgrund von Durchmesser und Dichte der Ursprungspartikel zu erwarten wäre.

Wie auch schon in Abschnitten 5.2 und 5.3 beschrieben, findet der Übergang von der fließfähigen Suspension zur Schlickschicht mit geringer Festigkeit und weiter zum bindigen Boden allmählich durch Entwässerung und Auflast statt. Der Fluid-Boden-Dualismus hat sich bei den nichtkohäsiven Sedimenten praktisch bewährt. Um kohäsive Sedimente in dieses gedankliche Schema einzufügen, ist ein Konsolidierungsmodell notwendig. Dieses beschreibt die kritische Erosionsspannung in Abhängigkeit der Vorgeschichte des Bodens, insbesondere von der Tiefe und der Ruhezeit.

Erosionsversuche an bindigen Böden werden im Labor so durchgeführt, dass der Boden auf dem Grund einer Wasserrinne eingebaut wird, oder dass er sich aus einer Suspension heraus absetzen kann. Danach wird das Wasser in Bewegung gesetzt. Die Konzentration im Wasser wird gemessen und erlaubt einen Rückschluss auf die erodierte Sedimentmenge. Nach einer gewissen Zeit kommt die Erosion zum Stehen, die Konzentration im Wasser, das im Kreis geführt wird, steigt nicht weiter, weil die nun freiliegenden, ursprüng-

---

<sup>6</sup>Bezeichnung für Böden, die aus kohäsiven Sedimenten bestehen

lich tieferliegenden Bodenschichten eine höhere kritische Erosionsspannung aufweisen. PULS [97] untersucht kohäsive Sedimente aus fünf Ästuaren rund um den Globus. Er stellt bei allen qualitativ den oben beschriebenen Vorgang fest. Beim Vergleich der verschiedenen Sedimente miteinander ergibt sich, dass die kritische Schubspannung Unterschiede von einer Zehnerpotenz und die Erosionsrate Unterschiede von zwei Zehnerpotenzen aufweist. SPORK [124] hat Versuche an mit Algen biologisch besiedelten Sedimenten durchgeführt und die Erhöhung der kritischen Erosionsspannung bis zum zweifachen Wert ermittelt. KRANENBURG und WINTERWERP [65] schlagen aufbauend auf ihren Messungen mit einem Entrainment-Modell eine verbesserte mathematische Beschreibung des Erosionsvorgangs vor.

Aufgrund der Vielzahl von im Labor schwer wiederholbaren Einflussfaktoren existieren eine Reihe von Versuchen, kritische Erosionsspannungen in-situ zu ermitteln. [114] und [48] berichten über den Einsatz selbstentwickelter Messgeräte. Numerische Simulationen, bei denen die empirischen Parameter des Erosionsmodells auf solchen Messungen abgestützt werden, sind bisher nicht bekannt geworden.

DYER [30] zitiert Versuche, bei denen Suspensionen aus kohäsiven Sedimenten im Kreis geführt werden. Bei Verlangsamung der Geschwindigkeit nimmt die Konzentration im Wasser ab. Daraus wird auf eine Depositionsrate<sup>7</sup> geschlossen und eine kritische Depositionsschubspannung ermittelt. Bereits DYER geht davon aus, dass sich in diesen Versuchen auf dem Boden der Rinne eine weiterhin fließfähige Schicht hoher Konzentration gebildet hat, was auch aus den Überlegungen von WINTERWERP (siehe Abschnitt 3.1) zu folgern wäre. D. h. die Vorstellung, dass das aus den höheren Wasserschichten absinkende Sediment sofort zu Boden wird, ist fragwürdig.

Herkömmliche Stofftransport-Berechnungen [45] gehen von einer dualistischen Vorstellung aus. Es wird angenommen, dass das Sediment entweder im Wasser suspendiert fließt, oder am Boden liegend ruht. Das Berechnungsgebiet für die Strömungssimulation endet über dem Boden. Erosion und Deposition sind dann Massenströme über den unteren Rand des Berechnungsgebiets. Konsolidierung muss in einem separaten zweiten Berechnungsgebiet modelliert werden. Zur Ermittlung des ins Berechnungsgebiet über den unteren Rand eintretenden Massenstroms verwendet MALCHEREK [75] die

---

<sup>7</sup>Massenstrom des Übertritts von der Suspension zum „festen“ Boden

folgenden Beziehungen:

$$\tau_b \begin{cases} < \tau_d : & m = w_s \cdot c_b \cdot \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_d}\right) \\ > \tau_d, < \tau_e : & m = 0 \\ > \tau_e : & m = e \cdot \left(\frac{\tau_b}{\tau_e} - 1\right) \end{cases} \quad (5.2)$$

mit

- $m$  Massenstrom bezogen auf die Sohlfläche,
- $w_s$  Sinkgeschwindigkeit der Sedimente,
- $c_b$  Sedimentkonzentration an der Sohle (bottom),
- $\tau_b$  vorhandene Sohlschubspannung,
- $\tau_d$  kritische Depositionsspannung,
- $e$  Erodibilitätskonstante und
- $\tau_e$  kritische Erosionsspannung.

HAMM et al. [45] haben mehrere numerische Modelle zur Simulation des Transports kohäsiver Sedimente miteinander verglichen. Die untersuchten Modelle basieren auf Gl. (5.2) oder vergleichbaren Ansätzen, die dahingehend übereinstimmen, dass zur Beschreibung drei (oder mehr) empirische Parameter benötigt werden: die kritische Erosionsspannung  $\tau_e$ , die kritische Depositionsspannung  $\tau_d$  und eine Erodibilitätskonstante  $e$ .

Das Konzept einer kritischen Depositionsspannung ist, wie oben bereits beschrieben, fragwürdig. Das Konzept einer kritischen Erosionsspannung steht im Widerspruch zum Sättigungskonzept, Kap. 3. Gemäß Gl. (5.2) würde beim Überschreiten der Erosionsschubspannung auch dann noch ein Massenstrom ins Wasser hineingegeben, wenn dieses seine Sättigungskonzentration längst erreicht hätte.

## 5.5 Konsequenzen aus der Abkehr vom Wasser-Boden-Dualismus

Wenn nun das Konzept einer kritischen Depositionsspannung aufgrund der in Abschnitt 5.4 vorgetragenen Bedenken verworfen wird, dann ist es folgerichtig, sich auch vom Konzept einer kritischen Erosionsspannung zu lösen. Das mit dieser Abkehr einhergehende erste Problem rührt daher, dass sich dann nicht mehr eine Gebietsgrenze zwischen Fluid und Boden definieren lässt, an der Randbedingungen formulierbar sind. Es wird ein Modellierungsansatz erforderlich, der sich vom Wasser durch die Schlickschichten bis in den festen Boden hinein erstreckt. Es wird notwendig, eine Konzentrations- und zeitabhängige Materialgleichung zu benutzen. Es ist auch erforderlich, ein

numerisches Modell zu benutzen, das große Gradienten der Dichte und des Materialverhaltens erfassen kann, und es ist die Frage zu klären, in welcher Bodentiefe das Berechnungsgebiet aufhören kann.

Zur Berechnung von Strömungen wird die EULER-Betrachtungsweise<sup>8</sup> verwendet. Damit lassen sich Deformationsgradienten in elastischen Materialien, die üblicherweise in der LAGRANGE-Betrachtungsweise<sup>9</sup> formuliert werden, nur sehr umständlich darstellen. Da es in dem hier zu betrachtenden Fall um Sedimenttransportberechnungen und nicht um Bodenmechanik geht, wäre eine vereinfachte Darstellung der Deformation von Schlickschichten, die den gelling-point<sup>10</sup> überschritten haben, denkbar.

Das zweite Problem ergibt sich dann, wenn die Erosion einer stark konsolidierten Bodenschicht dargestellt werden soll, die bei der Einmischung nicht selbst in Bewegung gerät. Als Extrembeispiel stelle man sich das Abspülen eines Tonklumpen unter klarem Wasser vor. Dessen Oberfläche wird schleimig und gibt langsam Sediment ans Wasser ab. Die Frage, ob die Massendiffusivität für diesen Vorgang allein verantwortlich ist, wäre zu klären.

## 5.6 Unsicherheiten bei der Massenstromberechnung

In den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels wurden die Eigenschaften kohäsiver Sedimente behandelt, um die Notwendigkeit der Verwendung von empirischen Modellen<sup>11</sup> und deren Problematik in der Schwebstofftransportberechnung zu verdeutlichen. Die Untersuchung dieser Modelle ist nicht das direkte Ziel dieser Arbeit, deren Schwerpunkt auf der Turbulenzmodellierung liegt. Um zu praktisch brauchbaren Aussagen über die Berechenbarkeit von Transportvorgängen zu kommen, müssen aber die Berechnungsunsicherheiten aller empirischen Modelle mit berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck sollen in diesem Abschnitt zwei anschauliche Anhaltspunkte geschaffen werden: Zum einen die im Gleichgewicht transportierbare Sedimentmasse in Abhängigkeit von der Sinkgeschwindigkeit, zum anderen die Sedimentmasse, die in einem Tidezyklus erodiert wird in Abhängigkeit von der kritischen Sohl-

---

<sup>8</sup>Zur Beschreibung der Bewegung von Materie wird die Geschwindigkeit an einem raumfesten Punkt angegeben.

<sup>9</sup>Zur Beschreibung der Bewegung von Materie wird die Lage im Raum eines durch seine Ausgangslage markierten Materie-Punktes angegeben.

<sup>10</sup>siehe Abschnitt 5.3

<sup>11</sup>Flocculation, Erosion-Deposition, Konsolidierung

schubspannung und der Erodibilitätskonstanten.

Das **Flocculations-Modell** dient dazu, die Sinkgeschwindigkeit des Sediments zu ermitteln. Es wird vereinfachend die von der Konzentrationsverteilung unabhängige Geschwindigkeitsverteilung nach Gl.(2.1) angesetzt. Als Sohlschubspannungsgeschwindigkeit wird 0,034 m/s angesetzt<sup>12</sup>. Dies entspricht einem mit maximaler Geschwindigkeit laufenden Tidestrom. Aus dem Spektrum der im Tidegeschehen auftretenden Geschwindigkeiten ist das Maximum hier der relevante Zustand, weil dabei die größten Transportraten erreicht werden. Das Konzentrationsprofil wird nach Gl. (2.11) berechnet. Die Wassertiefe beträgt 10 m. Als Referenzabstand zur Sohle wird 0,1 m angenommen. Da die Sohlkonzentration linear eingeht, wird sie hier als 1,0 g/l angesetzt. Die SCHMIDT-Zahl wird mit 1,0 angesetzt. In **Bild 5** sind für zwei Sinkgeschwindigkeiten jeweils drei Kurven über die Vertikale dargestellt: Geschwindigkeit, Sedimentkonzentration und Transportrate, das Produkt aus Geschwindigkeit und Konzentration. Integriert man nun die Transportrate über die Wassertiefe, so erhält man den horizontalen Massenstrom je Meter Gewässerbreite. Daraus ergibt sich ein horizontaler Massenstrom je Meter Gewässerbreite von  $8,32 \frac{kg}{m \cdot s}$  bei einer Sinkgeschwindigkeit von 1,0 mm/s und ein entsprechender Wert von  $11,3 \frac{kg}{m \cdot s}$  bei einer Sinkgeschwindigkeit von 0,1 mm/s. Der Grund dafür, dass der Unterschied der Massenströme klein gegenüber dem Unterschied der Sinkgeschwindigkeiten ausfällt, ist in **Bild 5** ersichtlich. Beide Konzentrationsprofile zeigen einen fast vollständig durchmischten Wasserkörper.

Das **Erosion-Depositions-Modell** dient dazu, den Massenstrom über die Boden-Wasser-Gebietsgrenze zu bestimmen. Das Konsolidierungs-Modell dient dazu, die Erodierbarkeit der aktuell anstehenden Bodenoberfläche zu ermitteln. Wird das Gesamtmodell wie von MALCHEREK [75] formuliert, so ist das Konsolidierungs-Modell dafür zuständig, die Parameter Erodibilitätskonstante und kritische Sohlschubspannung zu ermitteln. Diese werden dann vom Erosions-Modell zur Berechnung des erodierten Massenstroms verwendet. Hier wird nun der Verlauf der Geschwindigkeiten im Tidezyklus vereinfachend als sinusförmig angenommen. Gestützt auf die Messungen von [39] wird die maximale Geschwindigkeit mit 0.8 m/s angenommen. Unter Hinzunahme des von [133] gemessenen Reibungsbeiwertes ergibt sich der in

---

<sup>12</sup>Gestützt auf die Messungen von [39] wird die maximale Geschwindigkeit in 1,0 m Wassertiefe mit 0,8 m/s angenommen. Unter Hinzunahme des von [133] gemessenen Reibungsbeiwertes von  $C_d=0,0018$  ergibt sich dann die angegebene Sohlschubspannungsgeschwindigkeit.

**Bild 6a** dargestellte Verlauf der Schubspannungen mit einem Maximum von  $1,152 \frac{N}{m^2}$ . VAN DER HAM [133] zitiert In-Situ Messungen an Wattflächen im Dollart, die kritische Erosionsspannungen von 0,1 bis  $0,5 \frac{N}{m^2}$  ergeben haben. Er führt diese starke Variabilität allein auf jahreszeitlich bedingte biologische Vorgänge zurück. Die Labormessungen von PULS [97] ergeben eine ähnliche Spanne an kritischen Schubspannungen in der obersten Lage des Bodens. Darunter liegende Bodenschichten haben z.T. höhere kritische Schubspannungen. Zur Berechnung der Erosionsrate wird nun die Gl. (5.2) verwendet<sup>13</sup>. MALCHEREK [75] setzt in seinen Berechnungen eine konstante kritische Schubspannung von  $0,144 \frac{N}{m^2}$  an. Er verwendet eine ebenfalls konstante Erodibilitätskonstante von  $0,735 \frac{g}{m^2 \cdot s}$ . Mit dieser ergibt sich der zeitliche Verlauf der Erosionsrate, der in **Bild 6b** zum einen für eine kritische Sohlschubspannung von  $0,1 \frac{N}{m^2}$  und zum anderen für eine kritische Sohlschubspannung von  $0,5 \frac{N}{m^2}$  dargestellt ist. Nach Integration über die Zeit erhält man die Sedimentmasse, die in einer Flut oder einer Ebbe abgetragen wird. Bei Annahme von  $0,1 \frac{N}{m^2}$  als kritischer Sohlschubspannung sind dies  $79,2 \frac{kg}{m^2}$  und bei  $0,5 \frac{N}{m^2}$  als kritischer Sohlschubspannung sind dies  $7,226 \frac{kg}{m^2}$ . Die Abschätzung des Einflusses der Erodibilitätskonstante ist einfacher, da die erodierte Sedimentmasse linear von ihr abhängt. PULS [97] hat in seinen Laborversuchen Erodibilitätskonstanten zwischen 0,46 und  $1,1 \frac{g}{m^2 \cdot s}$  gefunden.

Bezüglich der Interpretation der hier durchgeführten Abschätzungen wird auf Kapitel 10 verwiesen.

---

<sup>13</sup>Die Messungen von [97] belegen, dass andere Gleichungen die Erosionsrate genauer berechnen können.

# Kapitel 6

## Turbulenz in stabil dichtegeschichteten Suspensionen

### 6.1 Grundgleichungen

Auf die aus [110] und [111] bekannten Grundgleichungen der Strömungsmechanik soll hier nur insofern eingegangen werden, als sich durch die Anwesenheit eines absinkenden Sediments Besonderheiten ergeben. Diese Beziehungen gelten dann auch für die Salzkonzentration, wenn die Sinkgeschwindigkeit zu Null gesetzt wird.

Die **Kontinuitätsgleichung**, mit der die Massenerhaltung formuliert wird, muss hier erweitert werden, da sich Massenströme auch infolge von Diffusion und Absinken ergeben. Bereits zu Beginn dieser Herleitungen wird vorausgesetzt, dass das suspendierte Sediment der Strömung bis auf ein langsames Sinken schlupffrei folgt. Sinkt nun z. B. ein Sedimentpartikel über eine Grenze in ein Kontrollvolumen hinein, tauscht sozusagen mit dem dort bisher vorhandenen Wasser seinen Platz, dann steigt die Gesamtmasse im Kontrollvolumen aufgrund der Dichtedifferenz zwischen Sediment und Wasser. Die Kontinuitätsgleichung lautet dann:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_1 + \underbrace{\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i}}_2 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial c (\rho_s - \rho_w)}{\partial x_i} \right)}_3 + \underbrace{w_{s,i} \frac{\partial c (\rho_s - \rho_w)}{\partial x_i}}_4 = 0 \quad (6.1)$$

mit  
 $t$  Zeit,  
 $i$  Index, der die 3 Komponenten eines orthonormalen Koordinatensystems  $x_i$  bezeichnet (EINSTEIN-Summations-Konvention) ,  
 $\rho$  Dichte der Suspension,  
 $\rho_s$  Dichte des Sediments,  
 $\rho_w$  Dichte des Wassers,  
 $v$  momentane Geschwindigkeit der Suspension,  
 $w_s$  Sinkgeschwindigkeit des Sediments,  
 $c$  Konzentration als Volumenanteil des Sediments und  
 $D$  Diffusivität.

Die Terme 1 bis 4 stellen folgende Phänomene dar:

- 1 lokale Änderung der Dichte,
- 2 konvektive Änderung der Dichte,
- 3 Dichteänderung infolge Diffusion und
- 4 Dichteänderung infolge Sinken.

Setzt man nun den folgenden Zusammenhang zwischen Suspensionsdichte  $\rho$  und Konzentration  $c$

$$\rho = \rho_w + c(\rho_s - \rho_w) \quad (6.2)$$

in Gl. (6.1) ein, erhält man nach Umformung folgende Beziehung:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + (\rho_s - \rho_w) \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} + v_i \frac{\partial c}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} D \frac{\partial c}{\partial x_i} + w_{s,i} \frac{\partial c}{\partial x_i} \right\} = 0 \quad (6.3)$$

Der Ausdruck in den geschweiften Klammern von Gl. (6.3) stellt nun die Erhaltungsgleichung für die Sedimentfraktion dar.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_i \frac{\partial c}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} D \frac{\partial c}{\partial x_i} + w_{s,i} \frac{\partial c}{\partial x_i} = 0 \quad (6.4)$$

Somit ergibt sich auch in inkompressiblen Suspensionen aus der Massenerhaltung die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.5)$$

Die **Impulsgleichungen** müssen um je einen Term erweitert werden, der die Impulsübertragung infolge Absinkens darstellt. Wenn z. B. ein Sedimentpartikel aus einer Wasserschicht mit höherer Geschwindigkeit in eine Schicht mit niedrigerer Geschwindigkeit absinkt, dann nimmt es dabei seinen Impuls

mit, genauso wie das Wasservolumen, mit dem es seinen Platz tauscht. Derselbe Mechanismus findet statt, wenn der Massenaustausch durch Diffusion hervorgerufen wird. Diese ist aber so klein, dass ihr Einfluss auf den Impulsaustausch bereits vorab vernachlässigt wird. Die Impulsgleichungen lassen sich dann wie folgt darstellen:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial(v_i w_{s,j} c)}{\partial x_j} (\rho_s - \rho_w) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (6.6)$$

mit  
 $i, j$  Indizes der drei Raumrichtungen  
 $g_i$  Fallbeschleunigung (Vektorkomponenten),  
 $p$  Druck,  
 $\mu$  dynamische Viskosität,

In dieser Gl. sind die Größen  $v$ ,  $p$ ,  $c$ ,  $\rho$  und  $\mu$  orts- und zeitabhängig, während  $g_i$  und  $w_s$  als konstant angesetzt werden. Durch Einsetzen der Stofftransportgleichung (6.4) ergibt sich nach Umformung:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_w} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\rho}{\rho_w} \left( v_j - c w_{s,j} \frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \\ g_i + g_i c \frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w} - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Die **BOUSSINESQ-Approximation** [42] führt dazu, den Einfluss der Konzentration in den Impulsgleichungen auf den mit der Fallbeschleunigung verknüpften Term (engl. buoyancy) zu beschränken. Die dazu notwendigen Annahmen lassen sich aus obiger Gl. ersehen: Das Verhältnis von Suspensionsdichte zu Wasserdichte  $\frac{\rho}{\rho_w}$  muss näherungsweise 1 ergeben, die Viskosität  $\mu$  muss unabhängig von der Konzentration sein und das Produkt aus Sinkgeschwindigkeit und Konzentration  $c w_s$  muss klein gegenüber den vertikalen Geschwindigkeiten sein.

Für die im Wasser auftretenden Konzentrationen von 200 mg/l beträgt  $\frac{\rho}{\rho_w} = 1,00012$ , siehe Abschnitt 4.3. Mit einer Sinkgeschwindigkeit von 1 mm/s ergibt sich  $c w_s = 7,5 \cdot 10^{-8} \frac{m}{s}$ . Die BOUSSINESQ-Approximation ist also in guter Näherung erfüllt. Bei HCMS-Schichten, siehe Abschnitt 5.3, ist infolge der vergrößerten Trägheit,  $\frac{\rho}{\rho_w} = 1,1$ , bereits ein signifikanter Einfluss zu erwarten. Das laminare Fließen von Fluid-Mud  $\frac{\rho}{\rho_w} = 1,2$  kann ohne Berücksichtigung der konzentrationsabhängigen Viskosität  $\frac{\mu}{\mu_w} = 6,9$  [62] nicht mehr realistisch vorhergesagt werden.

Eine Abschätzung des Gültigkeitsbereichs der BOUSSINESQ-Approximation liefert [42], der sich aber nur auf die Temperatur als Ursache für Dichteänderungen in Luft und Wasser beschränkt.

## 6.2 Interne Wellen

In stabil dichtegeschichteten Fluiden sind interne Wellen<sup>1</sup> möglich. Dazu sei die Überlegung von [131] erwähnt, der davon ausgeht, dass ein Fluidballen in einem stabil geschichteten Fluid aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird. Die Rückstellkräfte aus der stabilen Dichteschichtung zusammen mit der Massenträgheit ergeben eine Schwingung. Die Frequenz dieser Schwingung ist die BRUNT-VÄISÄLÄ-Frequenz [131]:

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}} \quad (6.8)$$

Die Geschwindigkeit der internen Wellen ist aber in Ästuaren viel kleiner als die der Oberflächenwellen. [64] gibt als Beispiel ein Gewässer von 10 m Tiefe und einem Dichtegradienten von  $0,5 \text{ g}/(l \cdot m)$  an. Die Oberflächenwelle läuft mit 9,9 m/s, die interne Welle mit  $0,22 \text{ m/s}^2$ .

[75] diskutiert das Phänomen unter dem Stichwort „interne Grenzflächenwellen“. Er berechnet analytisch und numerisch die Auslenkung der Grenzfläche zwischen zwei Fluidschichten mit unterschiedlicher, aber jeweils konstanter Dichte. Die Struktur der Formeln für die Wellengeschwindigkeit ist mit denen für die kontinuierliche Schichtung vergleichbar. Die Geschwindigkeit einer Welle auf einer Salzwasser-Süßwasser Grenzfläche, die in der Mitte eines 10 m tiefen Wasserkörpers liegt, ergibt sich zu  $0,74 \text{ m/s}$  [75].

Nicht brechende interne Wellen führen zu keiner Vermischung. Bei im Wasser messbaren Schwankungen (Geschwindigkeit, Konzentration) muss daher zwischen Turbulenz, die zu Vermischung führt, und nicht mischenden internen Wellen unterschieden werden.

---

<sup>1</sup>auch seiches (franz.) genannt

<sup>2</sup>beide Angaben für Wellen mit sehr großer Wellenlänge

## 6.3 Instabilität

Eine stabile Dichteschichtung behindert den laminar-turbulenten Umschlag. Hier werden nur kurz die Erkenntnisse über die Stabilität der freien Scherschicht und der Wandgrenzschicht mitgeteilt.

Eine **freie Scherschicht** bildet sich dort, wo zwei Ströme mit unterschiedlicher Geschwindigkeit in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung fließen. Aus der ORR-SOMMERFELD-Gleichung [111] lässt sich unter Vernachlässigung der Viskosität das Wendepunktskriterium ableiten. Es besagt, dass Geschwindigkeitsprofile mit einem Wendepunkt zur Anfachung von Störungen, also Instabilitäten, führen. Freie Scherschichten besitzen nun genau solch einen Wendepunkt. Diese Instabilität wird auch KEVIN-HELMHOLTZ-Instabilität genannt [135]. Die Wellenlänge der am meisten angefachten Störungen beträgt laut [135] das ca. 7,5 fache der Scherschichtdicke, d.h., sehr scharfe Übergänge führen auch zu sehr kleinen Störungen. Die stabilisierende Wirkung der Dichteschichtung ist nun in der Lage, das Anwachsen von Störungen völlig zu unterbinden, wenn die Gradient-RICHARDSON-Zahl

$$Ri_g = \frac{-g}{\rho} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \quad (6.9)$$

mit

$z$  Koordinate entgegen der Fallbeschleunigung

größer als  $1/4$   $Ri_g > 0,25$  ist [28].

Die Instabilität von **Wandgrenzschichten** tritt auch im ungeschichteten Fall nur infolge von Viskosität auf [111]. Daher muss bei den Stabilitätsüberlegungen zur Wandgrenzschicht immer auch die REYNOLDS-Zahl mit betrachtet werden. STREHLE [126] berechnet die Stabilität laminarer Wandgrenzschichten in Anwesenheit von Dichteschichtungen<sup>3</sup> analytisch. Als Resultat gibt er an, wie sich die kritische REYNOLDS-Zahl der Wandgrenzschicht in Abhängigkeit von der bulk-RICHARDSON-Zahl,

$$Ri_b = \frac{g \cdot \beta \cdot \delta \cdot (T_\infty - T_w)}{v_\infty^2} \quad (6.10)$$

---

<sup>3</sup>STREHLE geht davon aus, dass die Dichteunterschiede von der Temperatur verursacht werden.

mit  
 $\beta$  Volumenausdehnungskoeffizient,  
 $\delta$  Grenzschichtdicke,  
 $T_\infty$  Temperatur der Aussenströmung,  
 $T_w$  Temperatur an der Wand und  
 $v_\infty$  Geschwindigkeit der Aussenströmung,

(die er ARCHIMEDES-Zahl nennt) vergrößert. Demnach hat sich bei  $Ri_b=0,06$  die kritische REYNOLDS-Zahl der Wandgrenzschicht vervierfacht. Bei SCHLICHTING [111] findet sich die Angabe, dass Wandgrenzschichten mit Gradient-RICHARDSON-Zahlen  $Ri_g > 0,0417$  bedingungslos stabil sind. Zu dem Unterschied sei angeführt, dass STREHLE und SCHLICHTING unterschiedliche Dichteverteilungen in der laminaren Grenzschicht ansetzen. Die von SCHLICHTING zur Stützung seiner Theorie angegebenen Messungen falsifizieren demnach die Theorie von STREHLE in keinster Weise. Es gilt zu berücksichtigen, dass Stabilitätsberechnungen immer nur Aussagen über das Anwachsen oder Abklingen von infinitesimal kleinen Störungen in Bezug auf das konkret untersuchte Geschwindigkeits- und Dichteprofil machen. Die in Abschnitt 6.8 noch zu besprechenden Messungen zeigen, dass turbulente Wandgrenzschichten, die auch in ihrem weiteren Verlauf turbulent bleiben, Bereiche aufweisen können, in denen die Gradient-RICHARDSON-Zahl den Wert von 0,0417 deutlich überschreitet.

## 6.4 REYNOLDS-Mittelung der Grundgleichungen

Hier folgt nun die Aufspaltung der Strömungsgrößen in einen mittleren und einen infolge Turbulenz schwankenden Anteil. Details dieses Mittelungsvorgangs werden von ROTTA [106] dargestellt. Wegen der hier notwendigen zeitlichen Mittelung gelten die Gleichungen in diesem Abschnitt streng genommen nur noch für stationäre Strömungen, sind aber in guter Näherung noch auf Strömungen anwendbar, in denen sich die mittleren Strömungsgrößen langsam ändern verglichen mit den turbulenten Schwankungen. Die Mittelung der Impulsgleichungen Gl.(6.6) führt zu den sogenannten REYNOLDS-Gleichungen. Die genaue Herleitung ist von [106], [110], [111] und [143] dargestellt worden. Hier liegt der Schwerpunkt bei dem Einfluss der variablen Dichte infolge Suspensions-Konzentration. Für alle Darstellungen in diesem Absatz gilt die BOUSSINESQ-Approximation (siehe Abschnitt 6.1). Die REYNOLDS-Gleichungen lauten dann wie folgt:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = +g_i + g_i \bar{c} \frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w} - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \overline{v'_i v'_j} \right) \quad (6.11)$$

mit  
 $\nu$  kinematische Viskosität ( $\nu = \frac{\mu}{\rho_w}$ ) und  
 $-\overline{v'_i v'_j}$  REYNOLDS-Spannungstensor.

Die REYNOLDS-gemittelte Stofftransportgleichung ergibt sich wie folgt:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} - \overline{c' v'_i} \right) + w_{s,i} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = 0 \quad (6.12)$$

mit  
 $D$  Diffusivität und  
 $\overline{c' v'_i}$  turbulenter Stoffstrom.

Die von WILCOX [143] dargestellte Methodik wird hier angewendet, um die Transportgleichung für den REYNOLDS-Spannungstensor unter Berücksichtigung einer schwankenden Konzentration herzuleiten. Es ergibt sich<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial t}}_1 + \underbrace{\overline{v_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k}}_2 = \\
& \underbrace{-\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} - \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k}}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} - \overline{v'_i v'_j v'_k} - \frac{1}{\rho_w} \overline{v'_i p'} \delta_{jk} - \frac{1}{\rho_w} \overline{v'_j p'} \delta_{ik} \right)}_4 - \\
& \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k}}_5 + \underbrace{\frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w} (g_i \overline{v'_j c'} + g_j \overline{v'_i c'})}_6 + \underbrace{\frac{\overline{p'}}{\rho_w} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\overline{p'}}{\rho_w} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_i}}_7
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Die Terme 1 bis 7 stellen folgende Phänomene dar:

- 1 lokale Änderung,
- 2 Konvektion,
- 3 Produktion  $P_{ij}$ ,
- 4 Diffusion  $d_{ij}$ ,
- 5 Dissipation  $\epsilon_{ij}$ .
- 6 Buoyancy  $B_{ij}$  und
- 7 Druck-Scher-Korrelation  $\Phi_{ij}$ .

---

<sup>4</sup>Die hier gezeigte Form der Gleichung gilt wieder nur unter Anwendung der BOUSSINESQ-Approximation.

Aus der Spur des REYNOLDS-Spannungstensors berechnet sich die spezifische kinetische Energie  $k$  der turbulenten Schwankungsbewegung:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad (6.14)$$

Bildet man die Spur von Gl. (6.13), erhält man die Transportgleichung der kinetischen Energie  $k$  der turbulenten Schwankungsbewegung:

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_1 + \underbrace{\bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_2 =$$

$$- \underbrace{\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \frac{k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i v'_j} - \frac{1}{\rho_w} \overline{p' v'_j} \right]}_4 - \underbrace{\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}}_5 + \underbrace{\frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w} g_i \overline{v'_i c'_i}}_6 \quad (6.15)$$

Die Terme 1 bis 5 stellen folgende Phänomene dar:

- 1 lokale Änderung,
- 2 Konvektion,
- 3 Produktion  $P$ ,
- 4 Diffusion  $d$ ,
- 5 Dissipation  $\epsilon$  und
- 6 Buoyancy  $B$ .

## 6.5 REYNOLDS-Spannungen

Einen ersten Einblick in die Wirkungsweise der Dichteschichtung im Strömungsgeschehen erlauben die Gleichungen des vorangegangenen Abschnitts 6.4. In der REYNOLDS-Gl. (6.11) taucht die Konzentration nur im Term  $g_i \bar{c} \left( \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)$  auf. Nur die mittlere Konzentration hat auf die Impulsbilanz der mittleren Bewegung einen Einfluss. Dieser Term stellt den einfachen Zusammenhang her, dass Bereiche des Fluids mit höherer mittlerer Konzentration schwerer sind und zum Absinken neigen. Der Impulsaustausch infolge der REYNOLDS-Spannungen  $-\overline{v'_i v'_j}$ , s. Gl. (6.11), ist hier nicht mit der Konzentration verknüpft.

Der Einfluss der Dichteschichtung auf die Turbulenz wird aus der Gl. (6.15) ersichtlich. Dort tritt im Buoyancy-Term der turbulente Stoffstrom  $\overline{v'_j c'}$  auf. Bekanntlich hat die Turbulenz vermischende Wirkung. D. h., dass die Turbulenz einen Ausgleich von Konzentrationsunterschieden bewirkt. Um diese ausgleichende Wirkung entfalten zu können, muss der turbulente Stoffstrom von Orten hoher mittlerer Konzentration hin zu Orten geringer mittlerer Konzentration gerichtet sein. D. h. der turbulente Stoffstrom ist dem Gradienten der mittleren Konzentration entgegengesetzt. Aufbauend auf diesem Zusammenhang lässt sich nun der Buoyancy-Term  $\frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w} g_i \overline{v'_i c'}$  in Gl. (6.15) interpretieren. Eine Anfachung der kinetischen Energie  $k$  ergibt sich dann, wenn Stoffstrom und Fallbeschleunigung gleichgerichtet sind, der Konzentrationsgradient also entgegen der Fallbeschleunigung zeigt, die Konzentration mit zunehmender Tiefe abnimmt (instabile Schichtung). Die stabile Schichtung geht einher mit einer Zunahme der Konzentration mit der Tiefe und einem aufwärts gerichteten Massenstrom. Dies führt zu einer Verminderung der kinetischen Energie  $k$ . Ein Teil der kinetischen Energie der Turbulenz wird in potentielle Energie der suspendierten Sedimentmasse umgewandelt.

Zur Interpretation des Buoyancy-Terms in Gl. (6.13) sei zuerst einmal auf das in **Bild 2** gezeigte Koordinatensystem verwiesen, das die  $X_1$ - und die  $X_2$ -Richtung für die horizontalen Raumrichtungen vorsieht, im Folgenden kurz 1- und 2-Richtung genannt, und die 3-Richtung entgegen der Fallbeschleunigung  $g$  ansetzt. Der Fallbeschleunigungsvektor hat dann die Form  $(0,0,-g)$ , ist also nur in der 3-Komponente besetzt. In flachen Oberflächengewässern sind die REYNOLDS-Spannungen  $-\overline{v'_1 v'_3}$  und  $-\overline{v'_2 v'_3}$  für die wichtige Impulsübertragung zwischen Sohlschubspannungen und horizontalen Geschwindigkeiten verantwortlich. Diese REYNOLDS-Spannungen sind in ihrem jeweiligen Buoyancy-Term aber mit den horizontalen Konzentrationsflüssen  $\overline{v'_1 c'}$  und  $\overline{v'_2 c'}$  verbunden. Denkt man nun z.B. an eine vertikale Schichtung der

Suspensionskonzentration, die sich infolge Sinkens ausbildet, sind keine horizontalen Konzentrationsgradienten vorhanden, die horizontale Konzentrationsflüsse ermöglichen würden. Falls horizontale Gradienten z. B. bei der Salzverteilung auftreten, löst der Konzentrations-Term in Gl. (6.11) dichtegetriebene Ausgleichsströmungen aus, die viel schneller als die turbulenten Konzentrationsflüsse sind und die horizontalen Dichteunterschiede in eine vertikale stabile Schichtung überführen.

Die vertikalen Dichtegradienten und die mit ihnen verbundenen vertikalen turbulenten Konzentrationsflüsse wirken unmittelbar nur auf die vertikale Normal-Spannung  $-\overline{v'_3 v'_3}$ . Daher verringert eine stabile vertikale Dichteschichtung die Isotropie<sup>5</sup> der Turbulenz. Auf die Reibung des fließenden Wassers an der Gewässersohle als auch auf die horizontale 1-2-Schubspannung  $-\overline{v'_1 v'_2}$ , die den horizontalen Impulsaustausch bewerkstelligt, haben vertikale Dichteschichtungen nur mittelbar Einfluss.

Die Dämpfung der **1-3-Schubspannungen**<sup>6</sup> durch eine vertikale, stabile Dichteschichtung erschließt sich bei der Betrachtung des Produktionsterms aus Gl. (6.13): Nimmt man an, dass in flachen Oberflächengewässern die vertikalen Geschwindigkeiten vernachlässigbar sind und die horizontalen Geschwindigkeiten große Gradienten nur in vertikaler Richtung aufweisen, bleibt von dem zu  $\overline{v'_1 v'_3}$  gehörenden Produktionsterm nur der Anteil  $\overline{v'_3 v'_3} \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_3}$  übrig. D. h., die Verminderung der horizontalen 3-3-Normalspannung durch die Dichteschichtung bewirkt eine Verringerung/Dämpfung der Produktion der 1-3-Schubspannung und dadurch eine Verringerung der Sohlreibung.

Für die Betrachtung des zur **1-2-Schubspannung** gehörenden Produktionsterms stelle man sich eine Scherschicht vor, wie sie z. B. an einer Hafeneinfahrt entsteht. Durch geeignete Drehung des Koordinatensystems um die vertikale 3-Achse treten in der Scherzone nur Geschwindigkeiten in 1-Richtung auf, die Gradienten in 2-(horizontaler)-Richtung und 3-(vertikaler)-Richtung aufweisen. Im Produktionsterm von  $\overline{v'_1 v'_2}$  bleiben dann die Anteile  $\overline{v'_2 v'_2} \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_2}$  und  $\overline{v'_2 v'_3} \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_3}$  übrig. Da keine mittlere Geschwindigkeit in 2-Richtung vorliegt, tritt auch keine Sohl Schubspannung in dieser Richtung auf, so dass auch die diese Reibung übertragende Schubspannung  $-\overline{v'_2 v'_3}$  verschwinden muss. Resultat der Überlegung ist, dass für die Produktion der 1-2-Schubspannung die 2-2-Normalspannung maßgeblich ist. Die Kopplung zwischen der Dichteschichtung und der Dämpfung der 1-2-Schubspannung geschieht also nicht

<sup>5</sup>In isotroper Turbulenz sind alle drei Normalspannungen von gleicher Größe.

<sup>6</sup>Für die 2-3-Schubspannung gilt diese Überlegung in gleicher Weise.

aufgrund des Produktionsterms. Der Term 4, die sogenannte Druck-Scher-Korrelation in Gl. (6.13), ist für die Umverteilung zwischen den Komponenten des REYNOLDS-Spannungstensors verantwortlich und hat das Bestreben, die Turbulenz zur Isotropie zurückzuführen [67]. Der Druck-Scher-Korrelation fällt daher die Rolle zu, den Einfluss der Dichteschichtung auf die horizontalen 1-2-Schubspannungen zu übertragen<sup>7</sup>. Die Modellierung der Druck-Scher-Korrelation im Rahmen von REYNOLDS-Spannungs-Modellen bereitet aber größere Probleme als die Modellierung der Produktion [67]

Diese Interaktion zwischen horizontaler Scherung  $\frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_2}$  bzw.  $\frac{\partial \overline{v_2}}{\partial x_1}$  und vertikalem Dichtegradienten  $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_3}$  ist bisher wenig erforscht worden. JAKOBITZ und SARKAR [54] bekommen aus ihren Untersuchungen mittels DNS<sup>8</sup> Hinweise, dass die Dichteschichtung die Turbulenz, die durch horizontale Scherung verursacht wird, weniger bedämpft als die Turbulenz, die von vertikaler Scherung verursacht wird. Auch JAKOBITZ und SARKAR müssen feststellen, dass Experimente, in denen horizontale Scherung und vertikaler Dichtegradient zusammentreffen, z. B. Nachläufe in dichtegeschichteten Fluiden, bisher nicht gezielt unter der Fragestellung vermessen und ausgewertet worden sind, wie die Dichteschichtung die horizontalen turbulenten Schubspannungen beeinflusst. Die wasserbauliche Planungspraxis steht nun aber häufig vor dem Problem, die Auswirkungen von menschlichen Eingriffen<sup>9</sup> prognostizieren und beurteilen zu müssen, welche die horizontale Scherung über das natürlich im Ästuar vorhandene Maß hinaus erhöhen.

---

<sup>7</sup>Dissipation und Diffusion bewirken keine Interaktion zwischen den sechs verschiedenen Komponenten des REYNOLDS-Spannungstensors [67].

<sup>8</sup>Direkte Numerische Simulation

<sup>9</sup>Häfen, Buhnen, Pfähle, Fahrrinnen

## 6.6 Dimensionslose Kennzahlen

Im vorangegangenen Abschnitt 6.5 wurde der Einfluss der Dichteschichtung auf die Turbulenz anhand einer qualitativen Diskussion der Gl. (6.13) und der Gl. (6.15) beschrieben. Durch Einführung der Flux-RICHARDSON-Zahl und der turbulenten FROUDE-Zahl soll hier nun versucht werden, diesen Einfluss zu quantifizieren. Desweiteren wird hier die turbulente REYNOLDS-Zahl als Maß für die ungeschichtete Turbulenz eingeführt.

ABRAHAM [1] diskutiert dazu eine Strömung in flachen Oberflächengewässern<sup>10</sup>, die sich in einem lokalen Gleichgewicht<sup>11</sup> befindet. Es ergibt sich aus der Bilanz der turbulenten Energie Gl. (6.15), dass die Menge an turbulenter Energie, welche die mittlere Scherung produziert, von der Dissipation und der Dichteschichtung verbraucht wird. Die von ABRAHAM wiedergegebene Überlegung besagt nun: Wenn der Verbrauch von turbulenter Energie infolge Dichteschichtung größer als die Produktion ist, kann Turbulenz nicht mehr existieren. Daher bildet [1] folgende Flux-RICHARDSON-Zahl

$$Ri_f = \frac{g \overline{v_3' c'}}{\rho \overline{v_1' v_3'} (\partial \overline{v_1} / \partial x_3)} \quad , \quad (6.16)$$

die den Energieverbrauch durch Dichteschichtung zur Produktionsrate ins Verhältnis setzt. Das von [1] angegebene Existenzkriterium besagt, dass

$$Ri_f < 1 \quad (6.17)$$

sein muss.

Es läßt sich nun ein Zusammenhang zur Gradient-RICHARDSON-Zahl  $Ri_g$ , Gl. (6.9), herstellen. Im vorangegangenen Abschnitt 6.5 wurde erläutert, warum es plausibel ist, anzunehmen, dass der turbulente Konzentrationsfluss<sup>12</sup> dem Gradienten der mittleren Konzentrationsverteilung entgegengesetzt ist. Als erste Näherung wird daher eine Proportionalität angenommen. Solche Wirbelviskositätsmodelle sind in Gl. (2.6) und in Gl. (2.10) bereits erwähnt worden und werden in Kapitel 7 noch eingehender besprochen. Damit

---

<sup>10</sup>Annahmen wie in Abschnitt 6.5, mittlere Geschwindigkeit nur in 1-Richtung, Gradienten nur in 3-Richtung

<sup>11</sup>Stationäre Strömung, in der der konvektive und diffusive Transport keine Rolle spielt. Diese Annahme liegt auch dem logarithmischen Wandgesetz Gl.(2.1) zugrunde.

<sup>12</sup>Für den Impulsstrom, d.h. REYNOLDS-Spannung, gilt die Überlegung entsprechend.

werden nun folgende Ersetzungen möglich:

$$-\overline{v_3'c'} (\rho_s - \rho_w) = D_t (\partial\bar{\rho}/\partial x_3)$$

und

$$-\overline{v_1'v_3'} = \nu_t (\partial\bar{v}_1/\partial x_3) \quad .$$

Nach Einsetzen ergibt sich:

$$Ri_f = \frac{D_t}{\nu_t} \cdot \frac{-g}{\rho} \cdot \frac{\partial\bar{\rho}/\partial x_3}{(\partial\bar{v}_1/\partial x_3)^2} \quad .$$

Verkürzt kann geschrieben werden:

$$Ri_f = \frac{1}{Sc_t} \cdot Ri_g \tag{6.18}$$

mit  
 $D_t$  turbulenter Massendiffusionsparameter,  
 $\nu_t$  Wirbelviskosität und  
 $Sc_t$  turbulente SCHMIDT-Zahl.

Messungen von  $Sc_t$  ergeben Werte zwischen 0,7 und 1,0 [1]. In der Natur beobachtbare Werte von  $Ri_f$  liegen unter 0,3 [1], [9] und [53]. Somit ist die Grenze von  $Ri_g = 0,25$  nicht nur ein Stabilitätskriterium (siehe Abschnitt 6.3), sondern stellt auch einen Anhaltspunkt dafür dar, unter welchen Bedingungen die Turbulenz wieder abklingt.

Warum realistische Werte von  $Ri_f$  unter 0.3 liegen und das theoretische Maximum von 1,0 nie erreicht wird, lässt sich damit erklären, dass die Dissipation in einer turbulenten Strömung nie zum Erliegen kommt und immer mehr Energie verbraucht als die Dichteschichtung. Die Flux-RICHARDSON-Zahl ist nämlich auch als Mischungseffizienz deutbar und wird daher von IVEY und IMBERGER [53] als Verhältnis von Energieverbrauch infolge Dichteschichtung zum gesamten Energieverbrauch durch Dichteschichtung plus Dissipation angeschrieben<sup>13</sup>:

$$Ri_f = \frac{B}{B + \epsilon} \tag{6.19}$$

mit  
 $B$  Energieverbrauch durch Dichteschichtung (Buoyancy) und  
 $\epsilon$  Dissipation.

Es bleibt festzuhalten, dass nie mehr als 30% der turbulenten kinetischen

---

<sup>13</sup>Im lokalen Gleichgewicht ergibt das genau die von ABRAHAM verwendete Gl.(6.16).

Energie durch Massentransport in potentielle Energie umgewandelt wird. Der Rest wird von der Dissipation in Wärme umgesetzt.

Wann nun welche Mischungseffizienz auftritt, ist nach [9], [52] und [53] von der turbulenten FROUDE-Zahl

$$Fr_t = \frac{v_t}{N \cdot L_t} \quad (6.20)$$

mit

- $Fr_t$  turbulente FROUDE-Zahl,
- $v_t$  charakteristische Geschwindigkeit der Turbulenz,
- $L_t$  Makro-Länge,
- $N$  BRUNT-VÄISÄLÄÄ Frequenz Gl. (6.8),

abhängig.  $v_t$  berechnet sich als rms<sup>14</sup> der turbulenten Geschwindigkeits-Fluktuationen  $v_t = \sqrt{v_i'^2}$  und steht dadurch im engen Bezug zur turbulenten kinetischen Energie, s. Gl. (7.6). Die Herleitung der Makro-Länge  $L_t$ , die ROTTA [106] angibt, führt durch Bildung der Raumkorrelation zweier Geschwindigkeitsfluktuationen auf einen Tensor dritter Stufe. Die Verwendung einer skalaren Größe für die Abmessung der großen Wirbel stellt somit eine einschränkende Annahme dar. IVEY und IMBERGER [53] benutzen ein Verfahren, die Makro-Länge aus dem Vertikalprofil der Dichteschwankungen zu ermitteln.

Das Verhältnis der Geschwindigkeit der turbulenten Schwankung zur turbulenten Längenskala ist nun auch als turbulente Frequenz

$$\omega_t = \frac{v_t}{L_t} \quad (6.21)$$

deutbar und repräsentiert die Drehzahl der die Mischung hervorrufenden großen Wirbel. Die turbulente FROUDE-Zahl ist also das Verhältnis der Frequenz der Turbulenz  $\omega_t$  zur Frequenz der Dichteschichtung, der BRUNT-VÄISÄLÄÄ-Frequenz  $N$ :

$$Fr_t = \frac{\omega_t}{N} \quad (6.22)$$

Mit zunehmendem Dichtegradienten wird die BRUNT-VÄISÄLÄÄ-Frequenz größer und damit die turbulente FROUDE-Zahl kleiner. Große turbulente FROUDE-Zahlen repräsentieren schwach geschichtete Fluide. **Bild 7** ist aus

---

<sup>14</sup>Root Mean Square (engl.): Wurzel aus der Mittelung über die Quadrate

[53] entnommen und zeigt den Verlauf von  $Rf$  über  $Fr_t$ . Bei großer  $Fr_t$  geht die Kurve asymptotisch gegen Null. D. h., bei abnehmender Dichteschichtung geht auch die Mischungseffizienz zurück. Es ist also nicht genug Stoff vorhanden, der gemischt werden könnte. Bei  $Fr_t$  ca. 1,0 erreicht die Mischungseffizienz  $Rf$  ein Maximum, um bei weiterer Abnahme steil abzufallen. Wenn also die Dichteschichtung zu stark wird, kollabiert jegliche Mischungsaktivität. BRIGGS et al. [9] skalieren beide Kennzahlen mit Maßen für die Anisotropie und finden in unterschiedlich stark anisotroper Turbulenz den Zusammenhang zwischen  $Ri_f$  und  $Fr_t$  auch quantitativ bestätigt.

Als Maß dafür, wie stark die Viskosität und damit die Dissipation auf die Turbulenz Einfluss nimmt, wird die turbulente REYNOLDS-Zahl, die von der Dichteschichtung unabhängig ist, gebildet:

$$Re_t = \frac{v_t \cdot L_t}{\nu} \quad (6.23)$$

mit  
 $\nu$  kinematische Viskosität.

## 6.7 Längenmaße

Hier wird nun der Zusammenhang zur OZMIDOV-Länge  $L_O$  als Längenskala der Dichteschichtung hergestellt [1]. Im vorangegangenen Abschnitt 6.6 wurde bereits die Makro-Länge der Turbulenz  $L_t$  erwähnt. Des Weiteren wird die KOLMOGOROV-Länge  $L_k$  als Micro-Skala der Turbulenz eingeführt. Die MONIN-OBUKHOV-Stabilitätslänge  $L_m$  wird im folgenden Abschnitt näher erläutert.

Die Proportionalität:

$$\epsilon = K \cdot \frac{v_t^3}{L_t} \quad (6.24)$$

mit

- $\epsilon$  Dissipation
- $K$  Proportionalitätskonstante,
- $v_t$  charakteristische Geschwindigkeit der Turbulenz und
- $L_t$  Makro-Länge der Turbulenz

ist von zentraler Bedeutung für das Verständnis und die Modellierung von Turbulenz. Sie setzt die Dissipation zu den makroskopischen Größen der Turbulenz ins Verhältnis. Turbulenz ist ein 3-dimensionaler Prozess, bei dem infolge von Wirbelstreckung große Wirbel, deren Größe von den äußeren Randbedingungen bestimmt wird, in immer kleinere zerfallen, bis die Zähigkeit die aller kleinsten Wirbel dissipiert und ihre Energie in Wärme umwandelt (Energie-Kaskade). Die Proportionalität (6.24) verbindet also die auf die kleinsten Wirbel wirkende Dissipation mit den Kennzahlen der großen Wirbel. RODI [104] begründet diesen Zusammenhang mit einer phänomenologischen Erklärung, die besagt: Wenn die kinetische Energie der Turbulenz nach vielfachem Wirbelzerfall bei Längenskalen angekommen ist, auf welche die Dissipation wirken kann, sind diese kleiner gewordenen Wirbel inzwischen unabhängig von den äußeren Randbedingungen. Die Dissipation kann den kleinen Wirbeln allerdings nur die Energie entziehen, die bei großen Wirbeln in die turbulente Energie-Kaskade hineingesteckt wurde<sup>15</sup>. IVEY und IMBERGER [53] rechtfertigen die Proportionalität (6.24) durch Messwerte, die auch in dichtegeschichteten Strömungen gewonnen wurden. NEZU und NAKAGAWA [89] geben, ausgehend von Annahmen über die Form der spektralen Verteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen, die Proportionalitätskonstante  $K$  aus Gl. (6.24) als Funktion der turbulenten REYNOLDS-Zahl  $Re_t$ , Gl. (6.23) an.  $K$  wird erst bei hinreichend großen Reynoldszahlen konstant. Bei kleiner werdender  $Re_t$  wird  $K$  und damit auch die Dissipation

---

<sup>15</sup>Diese Überlegung impliziert ein lokales Gleichgewicht.

immer größer. Die Dissipation verschlingt also nicht mehr nur noch Energie, die ihr auf einem langen Weg durch die Energie-Kaskade angereicht wurde, sondern zehrt bereits von den großen Wirbeln. Damit wird auch klar, warum Turbulenzmodelle, die auf der Proportionalität (6.24) basieren, nur für hinreichend große  $Re_t$ , und dies ist nach [89] erst weit über 200 der Fall, gültig sind.

Mit Gl. (6.24) läßt sich  $Fr_t$ , s. Gl. (6.20), auch als Verhältnis von OZMIDOV-Länge  $L_O$  zur Makro-Länge  $L_t$  wie folgt interpretieren:

$$Fr_t = \left( \frac{L_O}{L_t} \right)^{2/3}, \quad (6.25)$$

wobei sich die OZMIDOV-Länge wie folgt berechnet [1]:

$$L_O = \left( \frac{\epsilon}{N^3} \right)^{1/2} \quad (6.26)$$

Die im vorangegangenen Abschnitt 6.6 beschriebene Erkenntnis, dass die RICHARDSON-Zahl (Mischungseffizienz)  $Ri_f$  sich als Funktion von  $Fr_t$ , also dem Verhältnis von OZMIDOV-Länge zu Makro-Länge, auftragen lässt, führt zu dem Schluss, dass Mischung im Wesentlichen von den großen Wirbeln hervorgerufen wird. Aus dem steilen Abfall von  $Ri_f$  hin zu kleineren  $Fr_t$  lässt sich nun schlussfolgern, dass die OZMIDOV-Länge die turbulenten Längenskalen nach oben hin begrenzt.

Ebenfalls auf Gl. (6.24) basierend läßt sich nun die turbulente REYNOLDS-Zahl  $Re_t$  als Verhältnis von Makro-Länge  $L_t$  zur KOLMOGOROV-Länge  $L_k$  darstellen [53]:

$$Re_t = \left( \frac{L_t}{L_k} \right)^{4/3}. \quad (6.27)$$

Die turbulente REYNOLDS-Zahl ist somit auch ein Maß dafür, wie groß die Spanne der unterschiedlichen Längenskalen in der Turbulenz ist, wobei sich die KOLMOGOROV-Länge wie folgt berechnet [89] [106]:

$$L_k = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (6.28)$$

$L_k$  repräsentiert damit die Abmessungen der kleinsten Wirbel. Ein noch weiter gehender Wirbelzerfall wird von der Viskosität verhindert.

Den Vorgang des völligen Verlösens der Turbulenz stellt ABRAHAM [1]

dergestalt dar, dass das Absinken der OZMIDOV-Länge dazu führt, dass die großen Wirbel in interne Dichtewellen umgebildet werden. Wenn der Dichteinfluss auch die kleinsten Skalen erreicht, dann verlöscht die Turbulenz als Prozess 3-dimensionaler Wirbelstreckung völlig, und es bleiben nur nicht mischende Dichtewellen-Bewegungen übrig. ABRAHAM [1] gibt an, dass dieses völlige Verlöschen der Turbulenz dann eintritt, wenn das Verhältnis  $L_O/L_k$  einen bestimmten Wert unterschreitet. Gestützt auf unterschiedliche Experimente findet er  $L_O/L_k < 8 \dots 11$ .

## 6.8 MONIN-OBUKHOV-Ähnlichkeit

Die auf MONIN und OBUKHOV[82] zurückgehende Ähnlichkeitshypothese befasst sich mit dem wandnahen vollturbulenten Bereich von stabil dichtegeschichteten Gleichdruckgrenzschichten, also jenem Bereich, der in ungeschichteten Grenzschichten mit dem logarithmischen Wandgesetz, Gl. (2.1), beschrieben wird. Bei dieser Ähnlichkeitstheorie wird nun nicht nur die turbulente Schubspannung als konstant angesetzt, sondern auch der turbulente Konzentrationsfluss<sup>16</sup>.

Die MONIN-OBUKHOV-Stabilitätslänge berechnet sich nach TURNER [131] wie folgt:

$$L_m = \frac{v_\tau^3}{\kappa \cdot (-B)} \quad (6.29)$$

mit

- $v_\tau$  Schubspannungsgeschwindigkeit  $\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho_0}}$ ,
- $\tau_b$  Wandschubspannung (border),
- $\kappa$  KARMAN-Konstante,
- B Buoyancy-Flux  $-\frac{g}{\rho_0} \cdot \overline{\rho'v'_3}$ ,
- $g$  Fallbeschleunigung,
- $\rho_0$  mittlere Dichte des betrachteten Bereichs und
- $\overline{\rho'v'_3}$  turbulenter Massenstrom entgegen der Fallbeschleunigung.

Mit der Länge  $L_m$  ist es möglich, den Wandabstand dimensionslos zu machen. Die MONIN-OBUKHOV-Ähnlichkeitshypothese erlaubt es dann, den dimensionslos gemachten Geschwindigkeitsgradienten als Funktion dieses dimensionslosen Wandabstandes anzugeben:

$$\frac{\kappa \cdot z}{v_\tau} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \Phi_M \left( \frac{z}{L_m} \right) \quad (6.30)$$

mit

- $z$  Wandabstand entgegen der Fallbeschleunigung, entspricht  $x_3$ .

Über die Gestalt der  $\Phi_M$ -Funktion macht die MONIN-OBUKHOV-Ähnlichkeitstheorie allerdings keine Aussagen. Diese Funktionen<sup>17</sup> müssen experimentell ermittelt werden.

---

<sup>16</sup>In der unteren Atmosphäre werden Dichteunterschiede von der Temperatur hervorgerufen, so dass MONIN und OBUKHOV ursprünglich den Temperaturfluss als konstant ansetzen, der aber in dieser Arbeit dem Konzentrationsfluss entspricht.

<sup>17</sup>Außer der Funktion für den Impulsfluss  $\Phi_M$  existieren weitere, z.B. für den Konzentrationsfluss.

Laut KERRUTH [58] wird die Gültigkeit der MONIN-Obukhov-Ähnlichkeitshypothese von einer ganzen Reihe von Forschern bei Messungen im Labor und in der Natur bestätigt. Im Folgenden wird hauptsächlich auf die Messergebnisse von WIER und RÖMER [140] sowie PLATE und LIN [95] Bezug genommen.

Für ungeschichtete Strömungen geht die Stabilitätslänge  $L_m$  gegen Unendlich und der dimensionslose Wandabstand bleibt bei 0 stehen. In diesem Fall ist  $\Phi_M$  konstant 1, so dass sich durch Einsetzen in Gl. (6.30) das logarithmische Wandgesetz, s. Gl. (2.1), ergibt.

Für schwache Schichtungen lassen sich die  $\Phi$ -Funktionen als TAYLOR-Reihe entwickeln, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird:

$$\Phi_M = \left(1 + \alpha \frac{z}{L_m}\right) \quad (6.31)$$

mit  
 $\alpha$  empirische Konstante.

Die Messungen von [140] und [95] ergeben für  $\alpha$  einen Wert von 7. Wird nun Gl.(6.31) in Gl. (6.30) eingesetzt, ergibt sich das logarithmisch-lineare Geschwindigkeitsprofil:

$$\frac{v}{v_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) + \alpha \frac{z}{L_m} \quad (6.32)$$

mit  
 $z_0$  Integrationskonstante.

Die Übereinstimmungen zwischen den gemessenen Geschwindigkeiten und dem logarithmisch-linearen Geschwindigkeitsprofil wird von [140] als hervorragend bezeichnet.

Die von [140] untersuchten Grenzschichten über einer gekühlten Windkanalsole weisen Stabilitätslängen von bis zu 1,4 m auf. In ihren Messungen erreicht der dimensionslose Wandabstand  $\frac{z}{L_m}$  Werte bis zu 0,2. In den Messungen von [95] erreichen die Stabilitätslängen  $L_m$  Werte von bis zu 4,15 m, und der dimensionslose Wandabstand  $\frac{z}{L_m}$  Werte bis zu 0,3. Da die  $\Phi$ -Funktionen für die o.g. Wandgrenzschichten bekannt sind, lassen sich Geschwindigkeits- und Dichtegradienten ermitteln und daraus die Gradienten-RICHARDSON-Zahl, s. Gl. (6.9), berechnen (siehe [140]). In **Bild 8** ist die

Gradient-RICHARDSON-Zahl in Abhängigkeit von dem mit der MONIN-OBUKHOV-Stabilitätslänge  $L_m$  dimensionslos gemachten Wandabstand  $z$  aufgetragen. Daraus ist nun zweierlei ersichtlich: Einerseits nimmt der Dichteschichtungseinfluss mit zunehmendem Wandabstand zum oberen Rand der logarithmischen Schicht hin zu. Auch die Mischungsweglänge, ergo die Größe der Impuls übertragenden Wirbel, nimmt mit zunehmendem Wandabstand zu. Daran sieht man, wie auch schon im Zusammenhang mit der Diskussion der OZMIDOV-Länge im Abschnitt 6.7, dass die Dichteschichtung die großskaligen turbulenten Bewegungen stärker dämpft. Andererseits lässt sich aus **Bild 8** ablesen, dass in den o. g. Messungen die Gradient-RICHARDSON-Zahlen Werte von bis zu 0.113 ([140]) und 0.138 ([95]) erreichen.

Im Folgenden wird nun das Beispiel aus dem Abschnitt 5.6 wieder aufgegriffen, bei dem in Anlehnung an die Messungen von [39] angenommen wird, dass in der Fahrrinne eines Ästuars 10 m Wassertiefe und 0.8 m/s Fließgeschwindigkeit (1 m über Grund) eine typische Situation im voll ausgeprägten Tidestrom darstellen. Der von [133] angegebene Reibungsbeiwert führt auf Sohlschubspannungen von  $1,152 \frac{N}{m^2}$ , was einer äquivalenten Sandrauheit von 2,1 mm entspricht. Damit ist die Strömung im vollkommen rauen Bereich<sup>18</sup>. Als kritische Erosions-Schubspannung wird, basierend auf den Angaben von [133], ein Intervall zwischen 0,1 und  $0,5 \frac{N}{m^2}$  angesetzt. Mit der von [75] verwendeten Erodibilitätskonstanten von  $0,735 \frac{g}{m^2 \cdot s}$  ergeben sich aus Gl. (5.2) Massenströme von 7,732 bis  $1,693 \frac{g}{m^2 \cdot s}$ . Daraus resultieren dann gemäß Gl. (6.29) Stabilitätslängen  $L_m$  von 1,3 m bis 5,8 m. **Bild 9** stellt das logarithmische Geschwindigkeitsprofil dem logarithmisch-linearen mit  $L_m = 5,8m$  gegenüber. Es wurden beide Geschwindigkeitsprofile mit der gleichen Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_\tau$  berechnet, so dass das logarithmisch-lineare Profil größere Geschwindigkeiten als das logarithmische Geschwindigkeitsprofil ergibt. Würde hingegen der Durchfluss oder die Geschwindigkeit in einer bestimmten Tiefe konstant gehalten, führt die im logarithmisch-linearen Geschwindigkeitsprofil zum Ausdruck kommende Dichteschichtung zu einem Abfall der Sohlschubspannung.

Laut NEZU und NAKAGAWA [89] endet der logarithmische Bereich in Gerinneströmungen bei  $z \leq 0,2 \cdot h$  mit  $h$  Wassertiefe. Im o. g. Beispiel reicht der logarithmische Bereich also hinauf bis 2 m Sohlabstand. Dort ergibt sich für die kritische Erosionsspannung von  $\tau_e = 0,1 \frac{N}{m^2}$  der dimensionslose Wandabstand  $\frac{z=2m}{L_m} = 1,58$  und für die kritische Erosionsspannung von  $\tau_e = 0,5 \frac{N}{m^2}$  der dimensionslose Wandabstand  $\frac{z=2m}{L_m} = 0,347$ . Der durch die Messungen

---

<sup>18</sup>siehe Abschnitt 2.2.1

von [140] und [95] abgesicherte Gültigkeitsbereich von Gl. (6.32) wird in Strömungen, die bei der Erosion kohäsiver Sedimente in Ästuaren typisch sind, überschritten. Dies ist ein Indiz dafür, dass der in Abschnitt 3 diskutierte Turbulenzkollaps im Ästuar auftreten könnte. Im Rahmen der MONIN-OBUKHOV-Ähnlichkeitshypothese ist aber ein Turbulenzkollaps nicht darstellbar, da sich die Hypothese auf Gleichgewichts-Grenzschichten bezieht. Im Kollapsprozess ist aber sowohl die Gleichgewichtsannahme<sup>19</sup> als auch die Grenzschichtannahme<sup>20</sup> verletzt.

Von MOREL [84] wurden stabil dichtegeschichtete Gleichgewichtsgrenzschichten experimentell untersucht, bei denen der dimensionslose Wandabstand bei 20% der Grenzschichtdicke  $\frac{0,2 \cdot \delta}{L_m}$  Werte von 0,22 bis 0,43 erreicht. Leider sind die Geschwindigkeitsprofile auch nachträglich nicht in Hinblick auf Gl. (6.32) auswertbar. Die Übereinstimmung zwischen den Angaben zum Verlauf der Gradient-RICHARDSON-Zahl über dem Wandabstand und dem in **Bild 8** gezeigten Zusammenhang lassen die Anwendung der in Gl. (6.31) zum Ausdruck kommenden Näherung plausibel erscheinen. Messungen an noch stärker dichtegeschichteten Grenzschichten wurden z.B. von OHYA [91] durchgeführt. Im hiesigen Kontext ist ihre Verwendung problematisch, weil die Angabe des Verfahrens der Bestimmung der Wandschubspannung fehlt. Der dimensionslose Wandabstand bei 20% der Grenzschichtdicke liegt in den Messungen von [91] zwischen 0,36 und 12,7. Da der Veröffentlichung einzelne Messwerte der Geschwindigkeit nicht entnehmbar sind, wird auf die Angabe der Gradient-RICHARDSON-Zahl über dem Wandabstand zurückgegriffen, die bei den starken Schichtungen so signifikant von dem in **Bild 8** gezeigten Verlauf abweicht, dass klar wird, dass der Geltungsbereich von Gl. (6.31) verlassen wurde. Alle von [91] untersuchten Strömungen zeigen eindeutig eine turbulente Grenzschicht. Da aber nur entlang einer Vertikalen Messungen gemacht worden sind, ist unklar, ob es sich noch um Gleichgewichtsgrenzschichten handelt oder ob sich die Turbulenz schon im Kollaps-Vorgang befunden hat. NICHOLL [87] hat das Kollabieren von Turbulenz in Grenzschichten unter einer geheizten Windkanaldecke beobachtet. Von seinen Experimenten wird die Annahme einer Gleichgewichtsgrenzschicht eindeutig verletzt. Eine Interpretation auf der Basis der MONIN-OBUKHOV-Ähnlichkeitshypothese ist daher nicht mehr sinnvoll.

Zum Verständnis, warum hier nur die unteren 20% der Wassertiefe einer

---

<sup>19</sup>Produktion und Verbrauch (Dissipation + Verbrauch infolge Dichteschichtung) von turbulenter kinetischer Energie befinden sich im lokalen Gleichgewicht

<sup>20</sup>u.a.: Änderungen in Strömungsrichtung werden als sehr klein angenommen

eingehenden Betrachtung unterzogen werden, sei angeführt: Um überhaupt die Diskussion des 3D Geschwindigkeitsfeldes auf eine Vertikale einzuengen, muss eine horizontale Gleichförmigkeit angesetzt werden. Während sich in den sohnächsten Wasserschichten Änderungen der Wandschubspannung unmittelbar auswirken, gewinnen mit zunehmendem Sohlabstand konvektive Effekte an Bedeutung. Als Anhaltspunkt, wie weit die Strömung laufen muss, bis eine Änderung in der Sohlbeschaffenheit sich am oberen Rand der Schicht mit Gültigkeit des logarithmischen Wandgesetzes bemerkbar macht, sei auf die Lauflänge einer turbulenten Wandgrenzschicht zurückgegriffen. Dieser Rand liegt in obigem Beispiel bei 2 m Sohlabstand. Um eine Grenzschicht mit 0,8 m/s Außengeschwindigkeit auf 2 m Dicke anwachsen zu lassen, wird eine Lauflänge von 185 m benötigt<sup>21</sup>. Dies entspricht ungefähr der Fahrrinnenbreite im Weser-Ästuar. D. h. die Beschaffenheit des Ästuars ist nicht derart gleichförmig, als dass Aussagen über die Strömung, die sich aus der Diskussion von Vertikalprofilen gewinnen lassen, in Abständen von mehr als 20% der Wassertiefe noch zutreffend wären.

---

<sup>21</sup>Diese Abschätzung benutzt die Angaben von SCHLICHTING [111] für die Wachstumsrate der turbulenten Grenzschicht auf einer glatten Platte. Veränderungen der Sohlrauheit, beispielsweise, führen zur Umbildung einer bestehenden Grenzschicht. Dieser Vorgang wird auch *internal boundary layer* genannt. Die von GARRATT [37] angegebenen Wachstumsraten für *internal boundary layers* weichen nur wenig von den Wachstumsraten der turbulenten Grenzschicht ab.

## 6.9 Relativbewegung zwischen Feststoff und Fluid

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt 6.8 erkannt wurde, dass die Dichteschichtung für die Modellierung des Impuls- und Stofftransports im Ästuar wesentlich ist, stellt sich nun die Frage, welche Bedeutung der Relativbewegung der suspendierten Partikel gegenüber dem Fluid zukommt.

Als Maß für das Vermögen von Partikeln, der umgebenden Strömung zu folgen, wird hier die STOKES-Zahl verwendet. Wenn ein festes Partikel mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit in ein ruhendes Fluid entlassen wird, kommt es nach einem gewissen Bremsweg zum Stillstand. Dieser Bremsweg läßt sich unter der Annahme laminarer Umströmung<sup>22</sup> berechnen und ist proportional zur Anfangsgeschwindigkeit. Wird nun der Bremsweg durch die Anfangsgeschwindigkeit geteilt, erhält man eine Relaxationszeit:

$$t_r = \frac{\rho_s \cdot d^2}{18 \cdot \mu} \quad (6.33)$$

mit

- $t_r$  Relaxationszeit,
- $d$  Durchmesser des Sediment-Partikels,
- $\rho_s$  Dichte des Sediments und
- $\mu$  dynamische Viskosität des umgebenden Fluids.

Mit Gl. (2.12) lässt sich der Zusammenhang zur Sinkgeschwindigkeit herstellen:

$$t_r = \frac{w_s \cdot \rho_s}{g \cdot (\rho_s - \rho_w)} \quad (6.34)$$

mit

- $w_s$  Sinkgeschwindigkeit (Relativgeschwindigkeit im umgebenden Fluid),
- $\rho_w$  Dichte des Wassers und
- $g$  Fallbeschleunigung.

Die STOKES-Zahl<sup>23</sup> bildet sich nun aus dem Verhältnis von Relaxationszeit  $t_r$  des Partikels zu einem die Strömung charakterisierenden Zeitmaß  $T_c$ :

$$St = \frac{t_r}{T_c} \quad (6.35)$$

---

<sup>22</sup>Diese Annahme ist für die in Abschnitt 5.2 beschriebenen Partikel gemäß Gl. (2.12) erfüllt.

<sup>23</sup>Diese Bezeichnung ist nicht zu verwechseln mit der in der maschinenbaulichen Ingenieurwissenschaft verwendeten STOKES-Zahl  $St = \frac{\rho \cdot l}{\eta \cdot v}$ , dem Verhältnis von Druck- zu Reibungskraft [119].

mit

$T_c$  charakteristische Zeit.

Eine STOKES-Zahl größer als 1 bedeutet, dass sich die Strömung schneller ändert, als sich das suspendierte Sediment-Partikel dieser Änderung anpassen kann.

Um zu beschreiben, wie gut die Partikel der mittleren Bewegung der Strömung folgen können, wird ein charakteristisches Zeitmaß aus der tiefengemittelten Geschwindigkeit und der Wassertiefe gebildet:

$$T_c = \frac{h}{v_b} \quad (6.36)$$

mit

$h$  Wassertiefe und

$v_b$  tiefengemittelte Geschwindigkeit (bulk velocity)

Um zu beschreiben, wie gut die Partikel den kleinsten turbulenten Schwankungen folgen können, wird als Zeitmaß die KOLMOGOROV-Zeit<sup>24</sup>  $t_k$  verwendet, wie SUNDARAM [127] es vorschlägt:

$$T_c = t_k = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} \quad (6.37)$$

mit

$\epsilon$  Dissipationsrate und

$\nu$  kinematische Viskosität.

Untersuchungen zur Relativbewegung zwischen festen Partikeln und dem umgebenden Fluid wurden aus unterschiedlichen Motiven angestellt. RUCK [107] ist an der Genauigkeit der Laser-DOPPLER-Velozimetrie LDV interessiert. Bei dieser Messtechnik wird die Bewegung von Tracer-Partikeln gemessen, so dass der Rückschluss auf die Fluid-Geschwindigkeit davon abhängt, wie exakt die Partikel der Strömung folgen. RUCK fordert daher für LDV-Messungen  $St \ll 1$ . Bei der kleinsten von ihm untersuchten STOKES-Zahl von 0,4 ergeben sich in der Volumenstrombestimmung noch Fehler von mehr als 10%. LING [71] berechnet mittels DNS<sup>25</sup> die Verteilung von Partikeln in den KEVIN-HELMHOLTZ-Wirbeln, die beim Umschlag<sup>26</sup> einer Scherschicht entstehen. Die untersuchten Partikel wirken dabei nicht auf die Strömung

---

<sup>24</sup>bei der es sich im übrigen um den Kehrwert des von [75] verwendeten Geschwindigkeitsgradienten  $G$  handelt.

<sup>25</sup>Direkte Numerische Simulation

<sup>26</sup>laminar-turbulent

zurück. In Abhängigkeit von der STOKES-Zahl formen die Partikel unterschiedliche Muster. Diese Muster entstehen dadurch, dass sich die Partikel in bestimmten Bereichen der Strömung ansammeln. Am stärksten ist der Effekt bei STOKES-Zahlen zwischen 1 und 10. Bei STOKES-Zahlen unterhalb von 0,1 ist er deutlich schwächer ausgeprägt. Vergleichbar mit den Berechnungen von LING [71] sind die in **Bild 10** gezeigten turbulenten Strukturen. Sie sind durch das Rühren in vollständig durchmischten Suspensionen zustande gekommen. Bei der grau-braunen Suspension handelt es sich um Ton, der in Wasser aufgelöst wurde, also um ein kohäsives Sediment. Bei der orangenen Suspension handelt es sich um Möhrensaft. Die gezeigten Strukturen verschwinden nicht durch andauerndes Rühren, sie sind daher nicht auf die Vermischung von Konzentrationsunterschieden zurückzuführen. SUNDARAM [127] geht nun einen Schritt weiter und berechnet auch die Rückwirkung der Partikel auf die Turbulenz. Als Ausgangspunkt benutzt er die DNS-Berechnung einer abklingenden isotropen Turbulenz. Seine Berechnungen ergeben die erwartete Abnahme der kinetischen Energie der turbulenten Schwankungsbewegung und die Erhöhung der Dissipationsrate. Er untersucht Partikel mit STOKES-Zahlen zwischen 6,4 und 1,6. Je kleiner die STOKES-Zahl, umso geringer ist der Einfluss auf die Turbulenz. Insgesamt stellt [127] fest, dass in diesem STOKES-Zahlen-Bereich die Partikel turbulenzdämpfend wirken.

Für die in Abschnitt 5.2 beschriebenen Sedimente ergibt sich unter den in Abschnitt 5.6 eingeführten Ästuar-typischen Bedingungen Folgendes: Basierend auf den Angaben von [98] wird eine große Flocke mit einer Sinkgeschwindigkeit von 0,001 m/s und einer Dichte von  $1\,100 \frac{Kg}{m^3}$  sowie eine kleine Flocke mit einer Sinkgeschwindigkeit von 0,000 1 m/s und einer Dichte von  $1\,150 \frac{Kg}{m^3}$  betrachtet. Zum Vergleich wird ein Sandkorn mit einem Durchmesser von 0,000 4 m und einer Dichte von  $2\,650 \frac{Kg}{m^3}$  herangezogen. Als Relaxationszeit ergeben sich 0,000 078 2 s für die kleine Flocke, 0,001 12 s für die große Flocke und 0,023 s für das Sandkorn. Wird nun die STOKES-Zahl mit der Geschwindigkeit 0,8 m/s und der Wassertiefe 10 m gebildet, ergibt sich für die kleine Flocke  $St = 6,26 * 10^{-6}$ , für die große Flocke  $St = 8,96 * 10^{-5}$  und  $St = 1,84 * 10^{-3}$  für das Sandkorn. Wird zur Bestimmung der STOKES-Zahl hingegen die KOLMOGOROV-Zeit  $t_k$  als charakteristische Zeit verwendet, ist eine Annahme bezüglich der Dissipationsrate  $\epsilon$  erforderlich. Basierend auf den Angaben von [89] ergibt sich für  $\frac{\epsilon \cdot h}{v_r^3} = 265$  bei einem Sohlabstand von 0,01 m. An besagter Stelle und mit der kinematischen Viskosität von  $\nu = 1 * 10^{-6}$  berechnet sich die KOLMOGOROV-Zeit zu 0,031 s. Daraus resultiert  $St = 0,0025$  für die kleine Flocke,  $St = 0,036$  für die große Flocke

und  $St = 0,74$  für das Sandkorn.

In einer ganzen Reihe von Veröffentlichungen [43], [130], [147] wird darüber berichtet, dass sich die Geschwindigkeitsprofile, die in Gerinneströmungen gemessen werden, welche Sediment in Suspension transportieren, durch Absenken des Wertes für die KARMAN-Konstante mit dem logarithmischen Wandgesetz Gl. (2.1) zur Deckung bringen lassen. Daher ist in **Bild 9** auch eine Kurve mit der KARMAN-Konstanten  $\kappa = 0,3$  eingetragen. Der Vergleich mit dem logarithmisch-linearen Wandgesetz, das sich aus Gl. (6.32) ergibt, zeigt Folgendes: die Kurven erreichen bei 2 m Sohlabstand fast identische Werte, die Abweichung vom logarithmischen Wandgesetz geht in dieselbe Richtung. Wenn die Unterscheidung getroffen werden soll, ob sich ein gemessenes Geschwindigkeitsprofil besser durch Gl. (6.32) oder durch einen verminderten Wert der KARMAN-Konstanten annähern lässt, ist es notwendig, dass die Form des Geschwindigkeitsprofils in den unteren 20% der Wassertiefe detailliert bekannt ist, und dass die Wandschubspannung unabhängig vom Geschwindigkeitsprofil gemessen worden ist. Eine Nachuntersuchung der Messungen, die ein Absinken des Wertes der KARMAN-Konstanten zeigen, wurde von [78] unternommen. Bei der Frage, ob der gemessene Effekt nicht vielleicht auch auf Dichteschichtung zurückführbar sei, gelangte [78] aber nicht zu eindeutigen Aussagen.

Wenn nun aber die Beobachtungen mit der Dichteschichtung, die vom suspendierten Sediment ausgeht, nicht, oder nicht vollständig erklärt werden können, müssen noch andere Ursachen vorliegen. Das Absinken des Wertes der KARMAN-Konstanten kann mit der Relativbewegung zwischen Feststoff und Fluid widerspruchsfrei erklärt werden. U.a. ist dies durch folgende Argumentationskette möglich: Die Relativbewegung zwischen Feststoff und Fluid führt zu einer Erhöhung der Dissipationsrate. Durch den in Gl. (6.24) zum Ausdruck kommenden Zusammenhang führt dies zu einer Verringerung der Makro-Länge  $L_t$  der Turbulenz, also auch zur Verringerung der Mischungsweglänge  $l$ . Die KARMAN-Konstante  $\kappa$  ist nun aber der Proportionalitätsfaktor zwischen Wandabstand und Mischungsweglänge, s. Gl. (2.8).

Die Frage, ob die Relativbewegung zwischen Feststoff und Fluid einen nennenswerten Einfluss auf die Turbulenz ausübt, kann bei Sand in Sohlhöhe aufgrund der erreichten STOKES-Zahlen bejaht werden. Der Einfluss von kohäsiven Feinsedimenten mit STOKES-Zahlen unter 0,04 ist kleiner und wird im Folgenden vernachlässigt.

Es besteht Grund für den Zweifel, ob die Dichteschichtung und die Relativbe-

wegung die einzigen Mechanismen sind, mittels derer suspendierte Sedimente auf die Turbulenz der Strömung einwirken. GUST [44] und WANG [138] berichten über den Einfluss von suspendierten kohäsiven Sedimenten<sup>27</sup> ohne erkennbare Dichtegradienten auf die Strömung in Gerinnen. Die von [138] behauptete Verringerung des Sohlreibungs-Beiwertes kann nicht anhand der vorgelegten Messungen belegt werden, weil die Erhöhung der Viskosität in der Suspension dazu führt, dass die REYNOLDS-Zahlen der Experimente mit und ohne Sediment stark unterschiedlich sind. Die KARMAN-Konstante lässt sich aus den von [138] angegebenen Geschwindigkeitsprofilen nicht ermitteln. Die Dichte der Geschwindigkeits-Messpunkte in Wandnähe ist dafür zu gering. Auch GUST [44] berichtet 1975 über eine Verringerung des Sohlreibungs-Beiwertes. Leider ist er gezwungen, die Sohlschubspannung aus dem Geschwindigkeitsprofil zu bestimmen. Zudem hat GUST seine Experimente auf einer mit Schlick belegten Sohle durchgeführt. Dies wirft die Frage auf, wie eine weiche Wand auf die Strömung wirkt. Fernerhin sei noch darauf hingewiesen, dass sich durch geeignete Additive in Rohrleitungen erhebliche Widerstandsvermindierungen erzielen lassen [96], die im Rahmen der hier angestellten Überlegungen nicht erklärbar sind.

---

<sup>27</sup>In den untersuchten Strömungen in Laborgerinnen sind die STOKES-Zahlen der Partikel noch kleiner, weil bei gleichem Wasserspiegelgefälle im verkleinerten Laborgerinne die Wandschubspannung kleiner ist. Damit sinkt die Dissipationsrate und in deren Folge auch die STOKES-Zahl  $St$ .

# Kapitel 7

## Turbulenzmodell

### 7.1 Grundgleichungen

Das  $k$ - $\epsilon$ -Modell ist das am weitesten verbreitete 2-Gleichungs-Turbulenzmodell [89]. In diesem Abschnitt werden daher lediglich die Differentialgleichungen, aus denen das Modell besteht, angegeben. Hier wird diejenige Formulierung für dichtegeschichtete Fluide benutzt, die auch WINTERWERP [142] verwendet:

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_1 + \underbrace{v_i \frac{\partial k}{\partial x_i}}_2 = \underbrace{P}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i}}_4 - \underbrace{\epsilon}_5 - \underbrace{\frac{g_i \nu_t}{\rho S c_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_6 \quad (7.1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \epsilon}{\partial t}}_1 + \underbrace{v_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}}_2 = \underbrace{c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}}_4 - \underbrace{c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}}_5 - \underbrace{(1 - c_{\epsilon 3}) \frac{\epsilon g_i \nu_t}{k \rho S c_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_6 \quad (7.2)$$

mit

$P$  Produktion von  $k$ , im Weiteren näher beschrieben,  
 $\sigma_k, \sigma_\epsilon, c_{\epsilon 1}, c_{\epsilon 2}$  Modellkonstanten, siehe Abschnitt 9.3.5 und  
 $S c_t$  turbulente SCHMIDT-Zahl, siehe Gl. (2.10),  
ebenfalls Modellkonstante.

Die Terme 1 bis 6 stellen dar:

- 1 lokale Änderung,
- 2 Konvektion,
- 3 Produktion,
- 4 Diffusion,
- 5 Dissipation und
- 6 Buoyancy.

In stabil dichtegeschichteten Fluiden ist der Wert  $c_{\epsilon 3}=1$  zutreffend [104], [142]. Damit entfällt der Buoyancy-Term in der  $\epsilon$ -Gleichung (Term 6 in Gl. (7.2)).

Zur Schließung der in Gl.(6.11) auftretenden REYNOLDS-Spannungen wird beim k- $\epsilon$ -Modell bekanntlich [104] der folgende BOUSSINESQ-Ansatz<sup>1</sup> vorgenommen:

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (7.3)$$

wobei sich die Wirbelviskosität  $\nu_t$  wie folgt berechnet:

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (7.4)$$

mit

$c_\mu$  Modellkonstante, siehe Abschnitt 9.3.5.

Wird dieser Ansatz in den Produktionsterm (Term 3) von Gl. (6.15) eingesetzt, ergibt sich für die Produktion:

$$P = \nu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (7.5)$$

Dies ist der Ansatz des Standard-k- $\epsilon$ -Modells für die Produktion. Auf die Problematik dieses Ansatzes wird in Abschnitt 7.2 näher eingegangen. Dort ist auch der modifizierte Ansatz nach KATO und LAUNDER [57], den das Programm „casu“ verwendet, beschrieben.

Auf der Basis des k- $\epsilon$ -Modells lassen sich die folgenden charakteristischen Größen der Turbulenz berechnen:

Die turbulente Geschwindigkeit [89]

$$v_t = \sqrt{2k} \quad , \quad (7.6)$$

die Makrolänge der Turbulenz [143], siehe auch Gl. (6.24),

$$L_t = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \cdot c_\mu \quad (7.7)$$

---

<sup>1</sup>nicht zu verwechseln mit der in Abschnitt 6.1 beschriebenen BOUSSINESQ-Approximation

und der Turbulenzgrad [110]:

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k}}{\bar{v}} \quad (7.8)$$

mit

$\bar{v}$  Betrag der mittleren Geschwindigkeit.

Aus den obigen Größen lassen sich die folgenden ableiten:

Die turbulente Zeitskala

$$t_t = \frac{L_t}{v_t} = \frac{k}{\epsilon} \cdot \frac{c_\mu}{\sqrt{2}} \quad (7.9)$$

und die turbulente REYNOLDS-Zahl, siehe Gl. (6.23),

$$Re_t = \frac{L_t \cdot v_t}{\nu} = \frac{\nu_t}{\nu} \cdot \sqrt{2} \quad . \quad (7.10)$$

Bezüglich der funktionalen Abhängigkeit der obigen Größen von  $k$  und  $\epsilon$  herrscht Einigkeit. In Hinsicht auf die verwendeten Konstanten finden sich unterschiedliche Formulierungen in der Literatur [38], [51] und [143].

## 7.2 Staupunkt-Anomalie

Das Phänomen, dass bei Berechnungen mit dem  $k$ - $\epsilon$ -Modell in Staupunkten unnatürlich hohe Werte der kinetischen Energie  $k$  der Turbulenz auftreten, wird von KATO und LAUNDER [57] beschrieben. Selbige Autoren schlagen an gleicher Stelle eine Modifikation des Produktionsterms in Gl.(7.1) vor. Die Ursache des Phänomens lässt sich folgendermaßen beschreiben: Im Vorgriff auf das in Abschnitt 9.2.3 angegebene Geschwindigkeitsfeld ergibt sich für eine Potential-Staupunktströmung Gl.(9.3) folgender Geschwindigkeitsgradienten-Tensor:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

mit

a Konstante.

Der REYNOLDS-Spannungstensor ergibt sich daraus gemäß Gl. (7.3) wie folgt:

$$-\overline{v'_i v'_j} = \begin{pmatrix} 2a\nu_t - \frac{2}{3}k & 0 & 0 \\ 0 & -2a\nu_t - \frac{2}{3}k & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}k \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Damit ergibt sich für die Produktion, s. Term 3 in Gl. (6.15):

$$P = 4a^2\nu_t \quad (7.13)$$

Mit dem Ansatz für die Wirbelviskosität  $\nu_t$ , s. Gl. (7.4), wird daraus:

$$P = 4a^2 c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (7.14)$$

Die Produktion steigt also mit zunehmendem  $k$  quadratisch. Dies erklärt den rapiden Anstieg der kinetischen Energie  $k$  der Turbulenz, der entgegen experimenteller Erkenntnis [57] vom  $k$ - $\epsilon$ -Modell erzeugt wird. Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass im Spannungstensor Gl. (7.12) die Normalspannungen ungleich groß (anisotrop) sind und dass bei genügend großem  $a$  die 11-Normalspannung auch positiv werden kann (Zug statt Druck). Widersprüchlich ist daran, dass die Korrelation  $\overline{v'_1 v'_1}$  niemals kleiner als Null werden kann. Unplausibel ist, dass das  $k$ - $\epsilon$ -Modell, das zur Schließung drei skalare Größen  $k$ ,  $\epsilon$  und  $\nu_t$  verwendet, brauchbare Informationen über die Anisotropie der Normalspannungen liefern könnte.

Der Ansatz für die REYNOLDS-Spannungen Gl. (7.3) entspricht dem Materialgesetz für inkompressible NEWTON-Fluide [110]. Dabei entspricht  $\frac{2}{3}k$  dem Druck  $p$  und die Wirbelviskosität  $\nu_t$  der molekularen Viskosität  $\nu$ . Die Anisotropie der Normalspannungen taucht demnach auch in laminaren Strömungen viskoser NEWTON-Fluide auf. In den NAVIER-STOKES-Gleichungen für inkompressible NEWTON-Fluide üben die Diagonalkomponenten des Geschwindigkeitsgradienten, welche die Normalkomponenten im Spannungstensor hervorrufen, keine Wirkung aus, da sich der Zähigkeitsterm  $\nu \cdot \Delta \underline{v}$  nach [110] in  $\nu \cdot \text{rot}(\text{rot} \underline{v})$  umformen lässt. Die Frage, ob eine Anisotropie der Normalspannungen in inkompressiblen NEWTON-Fluiden auftritt, ist somit irrelevant. Erst der Produktionsterm in der Gleichung für die kinetische Energie

k der Turbulenz (Gl. (6.15)) in Verbindung mit dem Wirbelviskositätsansatz nach Gl. (7.3) zwingt zur Beschäftigung mit dieser Frage.

Wenn das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsfeld einer Strömung rotationsfrei ist, dann ist der Gradiententensor von diesem Geschwindigkeitsfeld symmetrisch. Ein solcher Geschwindigkeitsgradienten-Tensor lässt sich auf orthogonale Hauptachsen transformieren, so dass der Tensor im transformierten Koordinatensystem nur noch auf der Diagonalen besetzt ist. Man muss nun annehmen, dass in diesem transformierten Hauptachsensystem die Diagonalkomponenten des REYNOLDS-Spannungstensors  $-\overline{v'_i v'_i}$  gleich groß (isotrop) sind, damit in inkompressiblen Fluiden die Produktion von k verschwindet. Ohne Produktion klingt die Turbulenz ab.

KATO und LAUNDER [57] modifizieren den Ansatz für den Produktionsterm, s. Term 3 in Gl. (6.15). Zunächst einmal lässt sich der Geschwindigkeitsgradient in einen symmetrischen  $S_{ij}$  und einen antisymmetrischen Teil  $\Omega_{ij}$  aufspalten:

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} = S_{ij} + \Omega_{ij} \quad (7.15)$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.16)$$

und

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.17)$$

KATO und LAUNDER [57] machen den folgenden Ansatz für die Produktion:

$$P = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} 2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (7.18)$$

In einer rotationsfreien Strömung sind alle Komponenten von  $\Omega_{ij} = 0$ . Die KATO-LAUNDER-Modifikation führt also dazu, dass in Potentialströmungen die Produktion in jedem Fall verschwindet und nicht nur dann, wenn die o.g. Isotropie im transformierten Hauptachsensystem gegeben ist.

Wenn das Fluid sich im zeitlichen Mittel wie ein starrer Körper bewegt, die Geschwindigkeiten also als Kombination einer Translation und einer Rotation darstellbar sind, findet sowohl bei der KATO-LAUNDER-Modifikation

als auch im Standard-Modell keine Produktion von Turbulenz statt.

Desweiteren ergibt sich in beiden Formulierungen dieselbe Produktion, wenn nur eine Nebendiagonalkomponente des Geschwindigkeitsgradienten auftritt, wie dies z. B. in den Testrechnungen von Abschnitt 9.3.3 und 9.3.4 der Fall ist.

## 7.3 Stabilitätsfunktion

Wie in Abschnitt 6.5 erläutert, hat die stabile Dichteschichtung nur auf die vertikale turbulente Normalspannung einen unmittelbaren Einfluss. Im  $k$ - $\epsilon$ -Turbulenzmodell sind aber alle turbulenten Normalspannungen zur kinetischen Energie  $k$  der Turbulenz aufsummiert. Das Modell kann also die Richtungsabhängigkeit der Dämpfung nicht erfassen und überschätzt somit den vertikalen Impuls- und Massenaustausch. Daher werden bei der Anwendung von 2-Gleichungs-Modellen in der Ozeanographie und in der Meteorologie Stabilitätsfunktionen verwendet [12] [56] [80]. UMLAUF [132] leitet ab, dass sich Stabilitätsfunktionen auch als Vereinfachungen von Algebraic-Stress-Modellen (ASM) auf Situationen, in denen lediglich vertikale Geschwindigkeits- und Dichtegradienten auftreten, begreifen lassen.

BURCHARD und PETERSEN [12] verwenden die Stabilitätsfunktion nach GALPERIN [36], zu deren Darstellung sie eine Größe  $\alpha$  verwenden, die sich als Funktion der turbulenten FROUDE-Zahl, s. Gl. (6.20), schreiben lässt:

$$\alpha = \frac{1}{Fr_t^2} \sqrt{\frac{2}{c_\mu}} \quad (7.19)$$

Die Stabilitätsfunktion formuliert nun den vormals konstanten Wert von  $c_\mu$  als Funktion von  $\alpha$  [12]:

$$c_\mu = c_{\mu,k} \cdot \frac{1 + 3,923 \cdot \alpha}{1 + 20,40 \cdot \alpha + 53,12 \cdot \alpha^2} \quad (7.20)$$

mit

$c_{\mu,k}$  konstanter Wert von  $c_\mu$  ohne Dichteschichtung.

Der vertikale Massenaustausch<sup>2</sup> wird nicht in gleicher Weise wie der vertikale Impulsaustausch gedämpft, so dass hierfür eine gesonderte Funktion

---

<sup>2</sup>BURCHARD und PETERSEN [12] beschäftigen sich mit dem Wärmeaustausch. Die Dichteänderungen werden von der Temperatur hervorgerufen. Für die Zwecke dieser Ar-

angesetzt wird, die hier in folgende von der Dichteschichtung abhängige turbulente SCHMIDT-Zahl umgerechnet worden ist:

$$Sc_t = \frac{(1 + 3,923 \cdot \alpha) \cdot (1 + 17,34 \cdot \alpha)}{1,256 \cdot (1 + 20,40 \cdot \alpha + 53,12 \cdot \alpha^2)} \quad (7.21)$$

Wie die Testrechnungen von BURCHARD und PETERSEN [12] für eine Reihe von Beispielen zeigen, lassen sich mit dieser Stabilitätsfunktion vertikale Austauschprozesse in Grenzschichtströmungen in guter Übereinstimmung mit Meßergebnissen modellieren. Es ist nicht zu erwarten, dass horizontale Mischungsvorgänge besser erfassbar sind.

---

beit wird aber davon ausgegangen, dass sich der turbulente Transport von suspendierter Sedimentmasse und Wärme gleichartig verhält.

# Kapitel 8

## Numerischer Algorithmus

### 8.1 Überblick

Der in dieser Arbeit codierte Algorithmus basiert auf den Vorschlägen aus der Literatur, die vor allem mit dem Namen Vincenzo CASULLI verbunden sind. Die ersten Ideen werden von CASULLI zusammen mit BULGARELLI [10] und GREENSPAN [23] 1984 veröffentlicht. Der Zweck des in [10] und [23] entwickelten Verfahrens besteht in der Berechnung von 3D-Strömungen kompressibler Fluide. In der Veröffentlichung [22] von 1987 analysiert er die EULER-LAGRANGE-Methode (ELM) zur Berechnung der Konvektion. Die Anwendung der o. g. numerischen Verfahren auf 2D-Flachwassergleichungen folgt 1990 in seiner Veröffentlichung [21]. 1993 publiziert er zusammen mit CHENG und GARTNER eine Studie, in der die Strömung in der Bucht von San Francisco untersucht wird [24]. Die Software besitzt den Namen TRIM-2D (**T**idal **R**esidual **I**ntertidal **M**udflats). In der Veröffentlichung [20] von 1992 erweitern CASULLI und CHENG das Verfahren, so dass 3D-hydrostatische Berechnungen mit mehreren horizontalen Schichten möglich werden. Die Anwendung dieses Programms, TRIM-3D, auf Strömungen in der Lagune von Venedig wird in [20] vorgestellt. Die in dieser Arbeit codierte Software hat ihren Ausgangspunkt bei dem in [20] dokumentierten numerischen Algorithmus.

Die Bundesanstalt für Wasserbau - Aussenstelle Küste (BAW-AK) in Hamburg führt das hydronumerische Verfahren TRIM-2D im Rahmen einer Kooperation mit CASULLI und CHENG 1994 in ihren Routinebetrieb ein. 1998 berichtet die BAW-AK über den intensiven und erfolgreichen Einsatz des Verfahrens in einer Reihe von Untersuchungen an den deutschen Küsten [14]. Zusammen mit CATTANI analysiert CASULLI in [19] Stabilität

und Genauigkeit des Verfahrens. Es wird ein mathematischer Beweis dafür angegeben, warum einzig die „horizontale Viskosität“<sup>1</sup> die Zeitschrittweite eingrenzt. Desweiteren zeigt [19] auf, dass durch eine semi-implizite Diskretisierung des räumlichen Wasserspiegelgradienten in der Impulsbilanz die numerische Dämpfung von Oberflächenwellen vermieden werden kann. Der Berechnung von stabil dichtegeschichteten Gewässern widmet sich CASULLI in einer Veröffentlichung von 1997 [17]. Dabei wird vorgeschlagen, die Isopyknien<sup>2</sup> analog zum Wasserspiegel zu diskretisieren. Damit werden stabile Berechnungen von internen Grenzflächenwellen (Seichen) möglich. Vertikale Mischungsvorgänge sind in dem Verfahren aber nicht vorgesehen. Ein sogenanntes quasi-hydrostatisches 3D-Verfahren wird von CASULLI zusammen mit STELLING 1998 veröffentlicht [16]. Der bisher vernachlässigte hydrodynamische Druck wird mit Hilfe eines nachgeschalteten Korrekturschritts in die Berechnung einbezogen. 1998 wird von CASULLI und ZANOLLI ein Vorschlag veröffentlicht [15], das bisher nur für Rechteckgitter formulierte Verfahren TRIM-3D auf orthogonale, unstrukturierte Berechnungsnetze zu erweitern.

Die im Rahmen dieser Arbeit erstellte Software „casu“ ist im Internet unter der Adresse <http://www.wyrwa.de/casu/> verfügbar. Dort sind auch die Eingabedatensätze für die hier besprochenen Testfälle erhältlich. Die Software wurde in der Programmiersprache C++ codiert. Details der Implementierung können daher im Zweifelsfall im Programmcode selbst nachgelesen werden. Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen bedient sich „casu“ des „AZTEC“ Programmpakets der Sandia Laboratories in Albuquerque, das via Internet von der Adresse <http://www.cs.sandia.gov/CRF/aztec1.html> bezogen werden kann. Für das Postprocessing sind die Programme „mouse“ <http://www.vug.uni-duisburg.de/MOUSE/> und „gnuplot“ <http://www.gnuplot.info/> eingesetzt worden.

Da der numerische Algorithmus in der Literatur [20] bereits vollständig und ausführlich beschrieben worden ist, stellt der Abschnitt 8.2 lediglich eine Einführung dar, die sich auf die für die vorliegende Untersuchung wichtigen Aspekte beschränkt. Die beiden Erweiterungen, die hier vorgenommen werden, beschreibt der Abschnitt 8.3. Es wird die Möglichkeit geschaffen, auch auf der Basis völlig beliebiger Drei- und Vierecksnetze zu rechnen (Abschnitt 8.3.1). Über die Implementierung eines  $k$ - $\epsilon$ -Turbulenz-Modells berichtet der Abschnitt 8.3.2.

---

<sup>1</sup>siehe Abschnitt 8.2.4

<sup>2</sup>Flächen gleicher Dichte, von griech. *pyknos* dicht

## 8.2 Verfahren nach CASULLI

### 8.2.1 2D-Basis-Algorithmus

Die Darstellungen in **Bild 11**, **Bild 12** und **Bild 13** dienen dem Zweck, den Kern des CASULLI-Verfahrens zu vermitteln.

**Bild 11**, erläutert die Begriffe „Element“, „Knoten“, „Kante“ und „Zelle“. Desweiteren zeigt das Bild die versetzte Diskretisierung von Wasserspiegelhöhe (an den Knoten) und Geschwindigkeit (jeweils auf der Kantenmitte zwischen zwei Knoten). Auf die Besonderheiten des im Bild darüber hinaus noch dargestellten Übergangs vom Rechtecknetz zum Netz aus beliebigen drei- und viereckigen Elementen wird in Abschnitt 8.3.1 eingegangen.

Der CASULLI-Algorithmus macht es sich zunutze, dass die wichtigsten Anteile der Kraftbilanz am Fluidpartikel bei flachen Oberflächengewässern<sup>3</sup> das Wasserspiegelgefälle und die Sohlreibung sind. Alle anderen Anteile, also auch die Konvektion und die horizontale Reibung, werden zunächst erst einmal außer Acht gelassen. **Bild 12** zeigt die daraus entstehende Gleichung:

$$\frac{v_{p,k} - v_{p,k-1}}{\Delta t} = -g \frac{z_{s,k,e} - z_{s,k,a}}{\Delta s} - \frac{\lambda_{k-1} \cdot v_{p,k} \cdot |\underline{v}_{k-1}|}{8 \cdot h_{k-1}} \quad (8.1)$$

mit

$\underline{v}$	Geschwindigkeitsvektor 2D horizontal, tiefengemittelt,
$\Delta t$	Zeitschrittweite,
$g$	Fallbeschleunigung,
$z$	geodätische Höhe,
$\Delta s$	Kantenlänge, Ortsschrittweite,
$\lambda$	Reibungsbeiwert,
$h$	Wassertiefe,
Indizes	
$k, k-1$	aktueller Zeitschritt, vorangegangener Zeitschritt,
$a, e$	Knoten am Anfang und am Ende der Kante,
$p, n$	Geschwindigkeitskomponente parallel und normal zur Kantenrichtung und
$s$	Wasserspiegelhöhe, s surface.

CASULLI bezeichnet sein Verfahren als semi-implizite Finite-Differenzen-Methode [20]. Die Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung lässt sich aber auch im Sinne der Finite-Volumen-Methode als Bilanz der Volumenflüsse

---

<sup>3</sup>Siehe Abschnitt 2.2.1.

über den Rand einer Zelle verstehen, in deren Mitte sich ein Knoten befindet und deren Ränder die Kanten mittig schneiden (also an den Stellen, an denen die Geschwindigkeiten diskretisiert sind). **Bild 13** zeigt die daraus entstehende Kontinuitätsgleichung für die Zelle:

$$A \frac{z_{s,k} - z_{s,k-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N v_{p,k,i} \cdot d_i \cdot h_{k-1,i} = 0 \quad (8.2)$$

mit

- A Zellfläche, umrandet von  $d_1 \dots d_N$ ,
- N Anzahl der mit dem Knoten verbundenen Kanten, der Zellrandabschnitte,
- d Länge des Zellrandabschnitts,
- Indizes
- i Nummer der Kante, des Zellrandabschnitts.

Gl. (8.1) wird nach der aktuellen Geschwindigkeit  $v_{p,k}$  aufgelöst und in Gl. (8.2) eingesetzt. Dadurch entsteht ein Gleichungssystem, in dem die Wasserspiegelhöhe im aktuellen Zeitschritt an einem Knoten nur abhängt von den aktuellen Wasserspiegelhöhen an den benachbarten Knoten, über die selbiger Knoten mit Kanten verbunden ist, und von Größen aus dem zuvor berechneten Zeitschritt  $k-1$ . Dies ist der Kern des Verfahrens. Er besteht darin, in jedem Zeitschritt lediglich die Lage des Wasserspiegels zu berechnen. Der herausragende Vorteil liegt darin, dass zur Berechnung dieses Wasserspiegels lediglich ein Gleichungssystem mit den folgenden Eigenschaften gelöst werden muss [20]:

- symmetrisch,
- schwach besetzt,
- streng diagonal-dominant,
- positiv definit und
- nur ca. die Hälfte der Freiheitsgrade enthaltend.

Es handelt sich also um ein Gleichungssystem, für das sehr effiziente Lösungsverfahren existieren. Sämtliche Erweiterungen des Basis-Algorithmus, auch die in dieser Arbeit neu hinzukommenden, sind so angelegt, dass der Kern des Verfahrens bewahrt wird. Das Verfahren ist streng massenerhaltend, weil das Gleichungssystem für den Wasserspiegel durch Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung erzeugt wird.

Die Berechnung der Geschwindigkeiten erfolgt, nachdem der Wasserspiegel berechnet worden ist, aus der Impulsaussage Gl. (8.1) für jede Kante einzeln mit vergleichbar geringem numerischen Aufwand.

### 8.2.2 Konvektion

CASULLI [20] verwendet zur Darstellung der Konvektion eine EULER-LAGRANGE-Methode (ELM)<sup>4</sup>. Die Geschwindigkeitsänderung, der ein Partikel während eines Zeitschritts unterworfen ist, wird dabei wie folgt ermittelt: Von der Geschwindigkeit desjenigen Fluidpartikels, das sich zum aktuellen Zeitpunkt am Diskretisierungspunkt (Kantenmitte) aufhält<sup>5</sup>, wird diejenige Geschwindigkeit abgezogen, die dasselbe Partikel zum vorangegangenen Zeitpunkt gehabt hat<sup>6</sup>. Zum vorangegangenen Zeitpunkt hat sich das Teilchen aber noch an einem anderen Ort befunden. Um diesen Ort auffinden zu können, muss daher die Bahnlinie des Teilchen zurückverfolgt werden. D. h., in Gl. (8.1) wird für die Geschwindigkeit des vergangenen Zeitpunkts die Geschwindigkeit eingesetzt, die am Ursprung der Bahnlinie geherrscht hat. **Bild 14** veranschaulicht diesen Sachverhalt.

Klassische Finite-Differenzen-Verfahren sind aus Stabilitätsgründen darauf angewiesen, dass die COURANT-Zahl,

$$Cr = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \quad (8.3)$$

mit  
 $v$  Geschwindigkeit,  
 $\Delta t$  Zeitschrittweite und  
 $\Delta x$  Maschenweite des Netzes,

kleiner als Eins,  $Cr < 1$ , bleibt [75]. Die COURANT-Zahl gibt für eine als konstant angenommene Strömungsgeschwindigkeit an, wie viele Netzmaschen ein Fluidpartikel in einem Zeitschritt durchläuft. Bei der ELM, die eine Bahnlinienrückverfolgung beinhaltet, ist  $Cr < 1$  kein notwendiges Kriterium. Für die praktische Berechnungsdurchführung im Ästuar würde  $Cr < 1$  bei Geschwindigkeiten bis ca. 1 m/s und Maschenweiten von ca. 10 m bedeuten, dass die Zeitschrittweite unter 10 s liegen müsste. Um die Instationarität von Tidewellen zu erfassen, sind aber Zeitschritte von einer Viertelstunde (900 s) meist völlig ausreichend, d. h.,  $Cr < 1$  würde den Rechenaufwand um den

---

<sup>4</sup>Dieses Verfahren wird von MALCHEREK [75] unter dem Stichwort Charakteristikenverfahren eingehend behandelt.

<sup>5</sup>EULER-Betrachtungsweise

<sup>6</sup>LAGRANGE-Betrachtungsweise

Faktor 90 erhöhen.

Der Vorteil des geringeren Rechenaufwandes bei der ELM wird auch von CROUCHER und O'SULLIVAN [27] beschrieben, die für Stofftransportberechnungen in Ästuaren eine ELM für die Berechnung der Konvektion mit einem Finite-Elemente-Verfahren für die Berechnung der Diffusion koppeln.

Im Zusammenhang mit der Berechnung der Konvektion mittels der ELM ergeben sich zwei Probleme.

Erstes Problem:

Um Bahnlinien berechnen zu können, ist es erforderlich, im numerischen Verfahren eine Möglichkeit zu schaffen, an jedem beliebigen Punkt des Berechnungsgebiets einen Geschwindigkeitsvektor bestimmen zu können. Dazu ist eine Interpolation erforderlich. In dem hier implementierten Verfahren wird zuerst der Geschwindigkeitsvektor an jedem Knoten bestimmt (s. **Bild 13**). Dazu werden alle Kanten, die an dem Knoten zusammenlaufen, verwendet. Hat der Knoten mehr als zwei Kanten, wird gewichtet interpoliert. Die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle in einem Element berechnet sich dann als lineare (Dreieck) oder bilineare (Viereck) Interpolation aus den Knotengeschwindigkeiten. Bei der Verwendung von linearen Interpolationen kommt es stets zu einer Verflachung von Gradienten der Strömungsgrößen. Knicke oder Unstetigkeiten in den Verteilungen werden ausgerundet. Die Wirkung der Interpolation ist also der einer Diffusivität ähnlich, weswegen hier von numerischer Diffusivität gesprochen wird, die sich als ein Problem herausstellt. Im hier implementierten Verfahren sinkt die numerische Diffusivität, wie bereits von CASULLI [20] beschrieben, mit zunehmender COURANT-Zahl<sup>7</sup>, d.h., je weniger Interpolationen vorgenommen werden müssen, umso genauer ist das Ergebnis. Zur numerischen Diffusivität siehe auch die Testrechnung in Abschnitt 9.2.7. Mit Interpolationsfunktionen höherer Ordnung ist es möglich, die numerische Diffusivität zu verringern; man läuft aber Gefahr, unnatürliche Oszillationen zu erhalten.

Zweites Problem:

Der im Programm „casu“ implementierte numerische Algorithmus ist nicht drallerhaltend. Dieser Sachverhalt sei am Beispiel einer kreisförmigen Stromlinie erläutert: Bei Wirbelströmungen, wie sie z. B. in Form des Potentialwirbels sogar reibungsfrei möglich sind, verlaufen Stromlinien in geschlossenen

---

<sup>7</sup>Wenn ein gegebener Zeitraum mit weniger Zeitschritten diskretisiert wird, sinkt die COURANT-Zahl.

Kreisen. Der Impuls des Fluidpartikels bleibt dabei konstant. Die beständige Impulsänderung (Richtungsänderung) auf der Kreisbahn wird von zentripetal wirkenden Druckkräften hervorgerufen<sup>8</sup>. Als Ursache für die numerisch bedingte Impulsabnahme auf gekrümmten Bahnlinien lässt sich der Umstand angeben, dass der Druckgradient<sup>9</sup> entlang der Bahnlinie im Verfahren nicht erfasst wird. Die Impulsabnahme beim Durchlaufen eines Vollkreises berechnet sich wie folgt:

$$\frac{I_n}{I_u} = (\cos \alpha)^{\frac{2\pi}{\alpha}} \quad (8.4)$$

mit

- $I_n$  Impuls nach Durchlaufen eines Vollkreises,
- $I_u$  ursprünglicher Impuls und
- $\alpha$  Bahnlinienwinkel je Schritt.

Wird ein Vollkreis in Segmenten von  $\alpha=10$  Grad berechnet, ist nach einer Umdrehung nur noch 58% des ursprünglichen Impulses  $I_u$  übrig. Erst bei einem Bahnlinienwinkel  $\alpha$  unter einem Grad bleibt mehr als 95% des ursprünglichen Impulses erhalten. Z. B. hat der Blexer Bogen im Weser-Ästuar (s. **Bild 3**) einen mittleren Radius von ca. 3000 m. Bei Strömungsgeschwindigkeiten von 1 m/s wären Zeitschritte unter 52 s nötig, um die Bahnlinienkrümmung pro Zeitschritt unter einem Grad zu halten. Der hier implementierte numerische Algorithmus erzwingt also relativ kleine Zeitschritte, wenn Kurvenströmungen genau erfasst werden sollen. Zum Impulsverlust bei gekrümmten Bahnlinien siehe auch die Testrechnung im Abschnitt 9.2.6.

In der Berechnungspraxis ergeben sich aus den beiden o. a. Problemen widerstreitende Anforderungen: Zum einen ist es günstig, einen Zeitraum mit möglichst wenigen großen Zeitschritten zu erfassen, um die numerische Diffusion klein zu halten; zum anderen sollte der Zeitschritt möglichst klein gehalten werden, um auf gekrümmten Bahnlinien die numerisch bedingte Impulsabnahme gering zu halten. Zwei Auswege aus diesem Dilemma sind möglich. Zum einen bietet es sich an, durch höhere Interpolationsfunktionen die numerische Diffusivität zu verringern, um auch mit kleinen Zeitschritten genau rechnen zu können. Zum anderen ist es denkbar, das Verfahren dergestalt zu erweitern, dass die numerische Impulsabnahme auf gekrümmten Bahnlinien verringert wird. Vorschläge zum erstgenannten Ausweg sind von [74] gemacht worden. Zur Verringerung des Berechnungsaufwandes ist der letztgenannte Ausweg vorzuziehen. Entsprechende Versuche konnten im

---

<sup>8</sup>Radiale Druckgleichung

<sup>9</sup>Wegen der hydrostatischen Druckannahme ist hier der Druckgradient durch das Wasserspiegelgefälle ersetzt worden.

Rahmen dieser Arbeit noch nicht erfolgreich abgeschlossen werden.

### 8.2.3 3D-Erweiterung

Der von CASULLI und CHENG [20] 1992 vorgenommenen Erweiterung für 3D-Strömungen in flachen Oberflächengewässern liegt die hydrostatische Druckverteilung zugrunde. Diese basiert auf der Annahme, dass der vertikale Druckverlauf allein aus dem Gewicht des Wassers herrührt. Um damit die vertikale Komponente der Impuls-Gl. (6.7) erfüllen zu können, muss angenommen werden, dass die vertikalen Geschwindigkeiten und ihre Änderungen (Beschleunigungen) hinreichend klein sind. Die hydrostatische Druckverteilung hat zur Folge, dass sich bei bekannter Lage des Wasserspiegels der Druck an einer beliebigen Stelle im Wasservolumen aus der Tiefe unter der Wasseroberfläche ergibt:  $p = p_a + \rho \cdot g (z_s - z)$  mit  $p_a$  Luftdruck an der Wasseroberfläche. Damit kann die Berechnung der Lage des Wasserspiegels als Kern des Verfahrens beibehalten werden.

Die Art der Diskretisierung und die hier verwendeten Bezeichnungen zeigt **Bild 15**. In das Fluidvolumen werden M horizontale Levels hineingelegt. Auf jedem Level werden die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten und die Konzentrationen einschließlich der Dichte diskretisiert. Eine Schicht endet in vertikaler Richtung entweder auf der Mitte zum darüber bzw. darunter liegenden Level oder am Wasserspiegel bzw. Boden. Die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten und die Turbulenzgrößen einschließlich der Wirbelviskosität sind auf den Schichträndern diskretisiert. Aus einem Knoten, in der 2D-Berechnung ein Punkt in der Ebene, wird nun eine vertikale Linie. Ebenso wird mit dem Punkt auf der Kantenmitte verfahren. Die diskretisierte Impulsbilanz in Gl. (8.1) umfasst noch die gesamte Wassertiefe und operiert mit einer tiefengemittelten Geschwindigkeit. In der 3D-Berechnung wird für jede der M Schichten eine eigene Bilanz der horizontalen Impulskomponenten wie folgt aufgestellt:

$$\frac{v_{p.k.j} - v_{p.k-1.j.u}}{\Delta t} = -g \frac{z_{s.k.e} - z_{s.k.a}}{\Delta s} + \frac{v_{j+1} \frac{v_{p.k.j+1} - v_{p.k.j}}{(\Delta z_{j+1} + \Delta z_j)/2} - v_j \frac{v_{p.k.j} - v_{p.k.j-1}}{(\Delta z_j + \Delta z_{j-1})/2}}{\Delta z_j} + f_{h.j} + b_j \quad (8.5)$$

mit	
$v$	Geschwindigkeit,
$\Delta t$	Zeitschrittweite,
$g$	Fallbeschleunigung,
$z$	geodätische Höhe,
$\Delta s$	Kantenlänge, Ortsschrittweite,
$\Delta z$	Schichtdicke,
$\nu$	Wirbelviskosität an der Unterseite der indizierten Schicht,
$f$	Reibung, $f$ friction,
$b$	Einfluss der variablen Dichte, $b$ buoyancy,
Indizes	
$p, n$	Geschwindigkeitskomponente parallel bzw. normal zur Kantenrichtung,
$k, k-1$	aktueller Zeitschritt, vorangegangener Zeitschritt,
$j$	Nummerierung der jeweiligen Schicht $1 \dots M$ ,
$u$	Größe am Ursprung der Bahnlinie,
$s$	Wasserspiegelhöhe, $s$ surface,
$a, e$	Knoten am Anfang bzw. am Ende der Kante und
$h$	horizontal.

Die explizite Diskretisierung der horizontalen Reibung  $f_h$  erläutert Abschnitt 8.2.4. Dichtegetriebene Strömungen ( $b_j$ ) werden in dieser Arbeit nicht untersucht.

Es werden nun die Geschwindigkeiten  $v_{p,k,j}$  in allen Schichten an einer Kante zu einem Vektor zusammengefasst. Die Impulsbilanzen in allen Schichten an einer Kante können nach dem Vektor der Geschwindigkeiten aufgelöst werden. Dazu muss eine Matrix invertiert werden, deren Nebendiagonalglieder aus der vertikalen Reibung resultieren, d. h. die horizontalen Geschwindigkeiten in verschiedenen Schichten sind lediglich über die Reibung miteinander verknüpft. Die vertikale Reibung wird also implizit diskretisiert. Bei der Schicht, die mit dem Boden in Berührung kommt, entfällt die Reibung mit der unter ihr liegenden Schicht, anstatt dessen wird die Sohlreibung angesetzt [20]. Entsprechend lässt sich an der Wasseroberfläche eine vom Wind induzierte Schubspannung anbringen.

Nachdem die Impulsbilanzen an allen Kanten nach den Vektoren der Geschwindigkeiten aufgelöst worden sind, können diese in die Massenbilanz der Zelle eingesetzt werden. Das führt dann wieder zu dem folgenden Gleichungs-

system für den Wasserspiegel [20]:

$$A \frac{z_{s,k} - z_{s,k-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{p,k,i,j} \cdot \Delta z_{i,j} \cdot d_i = 0 \quad (8.6)$$

mit

- A Zellfläche, umrandet von  $d_1 \dots d_N$ ,
- N Anzahl der mit dem Knoten verbundenen Kanten, der Zellrandabschnitte,
- M Anzahl der horizontalen Schichten und
- d Länge des Zellrandabschnitts (s. **Bild 13**).
- Indizes
- i Nummerierung der Kante, des Zellrandabschnitts  $1 \dots N$ .
- j Nummerierung der jeweiligen Schicht  $1 \dots M$ ,

Bei Schichten, in die der Wasserspiegel oder der Boden hineinragt, verringert sich das jeweilige  $\Delta z_j$ . Wenn die Schicht komplett über dem Wasserspiegel oder unter dem Boden liegt, wird das jeweilige  $\Delta z_j$  Null gesetzt. Damit werden „trockene“ Schichten deaktiviert. Der Watt-Algorithmus (s. Abschnitte 8.2.1 und 9.2.2) wird dadurch in der 3D-Berechnung fortgesetzt und funktioniert ebenso unproblematisch.

Zur Berechnung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $v_z$  wird ausschließlich die Massenerhaltung Gl. (6.5) verwendet. Dazu wird eine Zelle in Schichten unterteilt. Die vertikale Geschwindigkeitskomponente ist dort diskretisiert, wo die Knoten-Vertikale die Ober- und Unterseite der Schicht durchstößt. Die Vertikalgeschwindigkeit auf der Oberseite berechnet sich dann wie folgt:

$$v_{z,j+1} = v_{z,j} - \frac{1}{A} \sum_{i=0}^N v_{p,i,j} \cdot d_i \cdot \Delta z_j \quad (8.7)$$

mit

- $v_{z,j+1}$  Vertikalgeschwindigkeit auf der Oberseite von Schicht j,
- $v_{z,j}$  Vertikalgeschwindigkeit auf der Unterseite von Schicht j und
- $v_{p,i,j}$  horizontaler Abfluss aus der betrachteten Zelle in Schicht j über Zellrandabschnitt i.

Die Vertikalgeschwindigkeit unmittelbar auf dem Boden ergibt sich aus den Horizontalgeschwindigkeiten und der Annahme, dass die Geschwindigkeit parallel zum Boden verläuft. Bei waagerechtem Boden ist die Vertikalgeschwindigkeit demnach Null.

Die vertikale Geschwindigkeitskomponente ist im hier implementierten Verfahren mit keinerlei Trägheit verknüpft. Bei entsprechenden Änderungen

der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten können vertikale Bewegungen ohne Verzögerung in Gang gesetzt werden. Dies lässt sich als Ursache für Instabilitäten angeben, die in den Testrechnungen in den Abschnitten 9.3.3 und 9.3.4 auftreten. In beiden Beispielen werden Instabilitäten beobachtet, wenn das Problem 3D-diskretisiert wird. Die starken vertikalen Geschwindigkeitsgradienten führen in diesen Beispielen zu nicht mehr vernachlässigbaren vertikalen Geschwindigkeiten. Erst eine Vergleichmäßigung der Randbedingungen erlaubt konvergente Berechnungsergebnisse.

## 8.2.4 Horizontale Impulsdiffusion und numerische Stabilität

Die horizontale Reibung wird explizit diskretisiert, d. h. zur Berechnung der horizontalen Schubspannung werden die Geschwindigkeiten aus dem vorangegangenen Zeitschritt benutzt. Der in den Gln. (8.1) und (8.5) auftretende Reibungsterm  $f_h$  berechnet sich wie folgt:

$$f_h = \nu_t \cdot \frac{v_{p,k-1,l} - 2v_{p,k-1} + v_{p,k-1,r}}{(\Delta n)^2} + \nu_t \cdot \frac{v_{p,k-1,a} - 2v_{p,k-1} + v_{p,k-1,e}}{(\Delta s)^2} \quad (8.8)$$

mit

$\nu_t$	Wirbelviskosität,
$v_{p,k-1}$	Geschwindigkeit auf der Kantenmitte,
$v_{p,k-1,l}, v_{p,k-1,r}$	Geschwindigkeiten links und rechts neben der Kante,
$v_{p,k-1,a}, v_{p,k-1,e}$	Geschwindigkeiten am Anfang und am Ende der Kante,
$\Delta n$	Ortsschrittweite quer zur Kante,
$\Delta s$	Kantenlänge, Ortsschrittweite längs zur Kante,
Indizes	
p	parallel zur Kantenrichtung und
k-1	vorangegangener Zeitschritt.

Die von CASULLI und CATTANI [19] durchgeführte Stabilitätsuntersuchung ergibt, dass die horizontale Reibung die Stabilität des Verfahrens einschränkt. CASULLI und CATTANI können beweisen, dass die Zeitschrittweite  $\Delta t$  dem folgenden Stabilitätskriterium unterliegt:

$$\Delta t \leq \left[ 2\nu_t \left( \frac{1}{(\Delta n)^2} + \frac{1}{(\Delta s)^2} \right) \right]^{-1} \quad (8.9)$$

Zur Erläuterung sei das erste STOKES-Problem [111] bemüht: Dabei setzt sich in einem ruhenden Fluid eine unendlich lange Wand plötzlich mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v_{Wand}$  in Wandlängsrichtung in Bewegung.

Die Geschwindigkeit der Wand überträgt sich auf das Fluid ausschließlich durch Viskosität. Je größer die Viskosität, desto schneller breitet sich die Bewegung ins ruhende Fluid hinein aus. Die Dicke der von der Wandreibung mitgezogenen Fluidschicht berechnet sich zu [111]:

$$\delta_{0,01} = 3,6 \cdot \sqrt{\nu t} \quad (8.10)$$

mit  
 $\delta_{0,01}$  Dicke der mitgezogenen Fluidschicht,  
d. h. Wandabstand bei dem  $v = 0,01v_{Wand}$ ,  
 $\nu$  Viskosität und  
 $t$  Zeitdauer seit Beginn der Wandbewegung.

Bei einer expliziten Diskretisierung kann diese viskose Übertragung des Impuls in horizontaler Richtung in einem Zeitschritt jeweils nur eine Elementreihe voranschreiten. Ist die Ausbreitung schneller als es die Diskretisierung erlaubt, so tritt Instabilität auf.

Bei den Testrechnungen, die im Rahmen dieser Arbeit ausgeführt worden sind, hat sich die Gültigkeit des Stabilitätskriterium Gl. (8.9) bestätigt. Dieses hat sich zudem als sehr trennscharf herausgestellt. Der Zeitschritt lässt sich bis zum Erreichen der nach Gl. (8.9) maximal erlaubten Größe problemlos erhöhen, nach Überschreiten der Grenze tritt sofort Instabilität auf.

Wenn man nun mit einem Zeitschritt rechnen möchte, der größer ist als das Stabilitätskriterium Gl. (8.9) erlaubt, besteht entweder die Möglichkeit, die räumliche Diskretisierung zu vergrößern oder die horizontale Wirbelviskosität künstlich herabzusetzen. Beide Möglichkeiten können die Genauigkeit der Berechnungsergebnisse erheblich beeinträchtigen.

Wie restriktiv sich das Stabilitätskriterium Gl. (8.9) in der Berechnungspraxis auswirkt, wird an folgender Überschlagsrechnung ersichtlich: Wie bereits in Abschnitt 5.6 erläutert, stellt 0,034 m/s einen realistischen Wert für die Sohlschubspannungsgeschwindigkeit dar. Beim Mischungswegmodell Gl.(2.8) ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen Mischungsweglänge und Wirbelviskosität, Gl.(2.7), durch Einsetzen des logarithmischen Geschwindigkeitsprofils, Gl.(2.1), für eine Wassertiefe von 10 m eine maximale Wirbelviskosität von 0,0279  $m^2/s$ . Soll nun mit einem Zeitschritt von  $\Delta t = 900s$ , d. h. von einer Viertelstunde, gerechnet werden, ist die minimal mögliche Ortschrittweite  $\Delta n = \Delta s = 10$  m. Das Stabilitätskriterium Gl. (8.9) schränkt die Zeitschrittweite in Situationen, die für ein Ästuar typisch sind, erst dann nennenswert ein, wenn mit relativ feinen horizontalen Auflösungen gerechnet wird.

## 8.3 Verfahrenserweiterung

### 8.3.1 Unstrukturierte Netze

Von CASULLI und ZANOLLI [15] wurde 1998 ein Vorschlag veröffentlicht, das CASULLI-Verfahren, das bis dato nur für strukturierte, orthogonale Netze formuliert worden war, auf unstrukturierte Netze zu erweitern. Dabei haben CASULLI und ZANOLLI den Weg unstrukturierter, orthogonaler Netze eingeschlagen. In der Betrachtungsweise der vorliegenden Arbeit lassen sich derartige Netze folgendermaßen beschreiben: Die Zellränder schneiden die Elementränder immer orthogonal, aber nicht mehr notwendigerweise mittig. Das **Bild 16** ist [15] entnommen und zeigt ein derartiges unstrukturiert orthogonales Netz. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass die Massenerhaltung weiterhin exakt erfüllt werden kann. Der hier wichtige Nachteil besteht darin, dass sich damit nicht ein beliebig geformtes Elementnetz berechnen lässt.

Daher ist in der vorliegenden Arbeit ein anderer Weg beschritten worden: Eine Verletzung der Massenerhaltung wird zugelassen, um beliebig geformte Drei- und Vierecksnetze zu ermöglichen. Der Fehler in der Massenerhaltung, der durch die dabei auftretenden nichtorthogonalen Schnitte zwischen Zell- und Element-Rändern zustande kommt, wird durch einen explizit formulierten Korrektur-Algorithmus kompensiert. Das zufriedenstellende Funktionieren dieser Korrektur wird im Abschnitt 9.2.1 demonstriert.

Der Sinn dieser Vorgehensweise sei am Beispiel von Dreiecksnetzen erläutert: Solange ein Netz aus Dreiecken besteht, deren Innenwinkel  $< 90^0$  sind, kann das Zentrum des Elementes, d. h. die Ecke der Zelle, auf den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gelegt werden. Damit ist ein unstrukturiertes, orthogonales Netz erzeugt worden, bei dem zudem noch die Kanten mittig geschnitten werden. Wenn im Netz Dreiecke mit stumpfen Ecken  $> 90^0$  auftreten, ist die Konstruktion von orthogonalen Zellrand-Elementrand-Schnitten nicht mehr möglich. Solche Elemente versucht man bei der Netzgenerierung ohnehin zu vermeiden, weil sich die zu berechnenden Strömungsformen darin schlecht darstellen lassen. D. h., wenn ein Netz erzeugt wird, bei dem aus anderweitigen Gründen Kompromisse bei der Netzgüte gemacht worden sind, ist es unpassend, vom Berechnungsverfahren zu verlangen, besonders genaue Resultate zu liefern. In der Planungspraxis kann eine Strömungsberechnung eine durchaus sinnvolle Dienstleistung sein, selbst wenn infolge des verringerten Netzerstellungsaufwands eine in Teilbereichen nur eingeschränkte Berechnungsgenauigkeit erzielbar ist. Einem Dienstleister, der Strömungsbe-

rechnungen erst dann anbieten kann, wenn sein hoher Netzerstellungsaufwand bezahlbar wird, bleibt ein Teil des Marktes verschlossen.

### 8.3.2 Stofftransport und Turbulenzmodell

CASULLI [17] erwähnt die Hinzunahme der Dichte in sein Verfahren und zeigt auch Berechnungsergebnisse. Jedoch fehlen Angaben zu den Details des implementierten Algorithmus.

Im Programm „casu“ werden die Konzentrationen und die Turbulenzgrößen in ähnlicher Weise behandelt, weshalb der vorliegende Abschnitt sowohl den numerischen Algorithmus für die Lösung der Stofftransportgleichungen als auch denjenigen zur Berechnung der Turbulenzgrößen des  $k$ - $\epsilon$ -Modells beschreibt. Die Berechnung erfolgt im jeweiligen Zeitschritt, nachdem das Strömungsfeld (Lage des Wasserspiegels und mittlere Geschwindigkeiten) berechnet worden ist.

Alle Konzentrationen und die aus ihnen resultierende Dichte werden an den Schnittpunkten der Knoten-Vertikalen mit den horizontalen Levels diskretisiert. Die Turbulenzgrößen werden auf den Schnittpunkten der Kantenmitten-Vertikalen mit den horizontalen Rändern der Schichten diskretisiert (s. **Bild 15**).

Die einzelnen Terme der Stofftransport-Gl. (6.4) werden folgendermaßen diskretisiert: Die Konvektion wird mit der ELM erfasst. Die vertikale Diffusion wird analog zur Impulsdiffusion (Reibung) implizit diskretisiert. Die horizontale Diffusion wird dementsprechend explizit angesetzt. Der Term, der das Absinken des Sediments beschreibt, wird implizit diskretisiert. Der darin vorkommende vertikale Konzentrationsgradient wird mit dem darüber liegenden Konzentrationswert gebildet. Es ist im Programm „casu“ die Möglichkeit geschaffen worden, eine konstante Quelle für jede Konzentration vorzugeben. Die diskretisierte Form der Stofftransport-Gl. (6.4) lautet dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{c_{k,j} - c_{k-1,j,u}}{\Delta t} = \\
 & D_{k-1} \frac{c_{k,j+1} - 2c_{k,j} + c_{k,j-1}}{(\Delta z)^2} \\
 & + D_{k-1} \frac{c_{k-1,j,l} - 2c_{k-1,j} + c_{k-1,j,r}}{(\Delta n)^2} + D_{k-1} \frac{c_{k-1,j,a} - 2c_{k-1,j} + c_{k-1,j,e}}{(\Delta s)^2} \\
 & + w_s \frac{c_{k,j+1} - c_{k,j}}{\Delta z} + Q
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

mit den Indizes wie in Gl. (8.5).

Für die Berechnung der Konzentrationsverteilung im aktuellen Zeitschritt muss demnach an jeder Knoten-Vertikalen ein lineares Gleichungssystem gelöst werden.

Beim Turbulenzmodell, siehe Abschnitt 7.1, sind drei Feldgrößen miteinander verwoben:  $k$ ,  $\epsilon$  und  $\nu_t$ . Für die Berechnung dieser gekoppelten Differentialgleichungen wird in dieser Arbeit auf einen Vorschlag von ILINCA [51] zurückgegriffen. Die Lösung der beiden Differential-Gln. (7.1) und (7.2) erfolgt dabei nacheinander. Die nichtlineare Kopplung wird durch folgendes iteratives Vorgehen berücksichtigt: Ausgehend von einer bekannten Verteilung von  $\nu_t$  wird die Differential-Gl. (7.1) für  $k$  gelöst<sup>10</sup>. Die darin auftretende Dissipationsrate wird mit Hilfe der Beziehung Gl. (7.4) ersetzt. Danach kann dann die Differential-Gl. (7.2) für  $\epsilon$  gelöst werden. Damit sind  $k$  und  $\epsilon$  bekannt. Die Beziehung Gl. (7.4) erlaubt es nun,  $\nu_t$  erneut zu berechnen. Werden dabei relativ große Änderungen festgestellt, so beginnt die Iteration von neuem mit der Berechnung von  $k$ . Eine Rückkopplung des veränderten  $\nu_t$  mit dem Geschwindigkeitsfeld, wie sie ILINCA [51] vorschlägt, ist in dieser Arbeit nicht realisiert worden, weil in den Testberechnungen Konvergenz auch ohne eine Rückkopplung erzielt werden konnte. Die getrennte Berechnung des Strömungsfeldes und der Turbulenzgrößen sowie die Unterrelaxation der Veränderung der Turbulenzgrößen wird auch von FERZIGER und PERIC [34] als notwendig zur Erzielung von Konvergenz angesehen.

Es muss verhindert werden, dass die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  negativ werden<sup>11</sup>. Dazu wird das Unterschreiten eines Grenzwertes im Programm abgefragt. Falls eine Unterschreitung vorliegt, wird der Wert der Turbulenzgröße dem Grenzwert gleichgesetzt (clipping). Zur Vermeidung negativer Werte schlägt ILINCA [51] die Verwendung der Logarithmen der Turbulenzgrößen vor. Diese Möglichkeit konnte im Rahmen dieser Arbeit leider nicht bis zum Ende verfolgt werden.

Bei der o. g. numerischen Lösung der Turbulenz-Differential-Gln. (7.1) und (7.2) wird analog zur Berechnung einer Stofftransportgleichung verfahren. Die einzelnen Terme werden folgendermaßen diskretisiert: Die ELM dient zur Erfassung der Konvektion. Die vertikale Diffusion wird implizit, die ho-

---

<sup>10</sup>Bei Beginn der Iteration wird für  $\nu_t$  der Wert aus dem vorangegangenen Zeitschritt verwendet.

<sup>11</sup>Diese Bedingung wird von [51] als „realizability“ und von [34] als „boundedness“ bezeichnet.

horizontale Diffusion hingegen explizit angesetzt. Die implizite Berechnung der Dissipation lässt die diskretisierten Gleichungen nichtlinear werden. Diese Nichtlinearität wird in dieser Arbeit mittels einer Newton Iteration gelöst. Die Berechnung des Produktionsterms verwendet die für den aktuellen Zeitschritt bereits bekannten Geschwindigkeiten und die Turbulenzgrößen aus dem vorangegangenen Zeitschritt, ist also explizit. Der Buoyancyterm wird ebenfalls explizit diskretisiert, d. h., dass der Dichtegradient des vorangegangenen Zeitschritts benutzt wird. Die Verwendung der ELM für die Konvektion und die explizite Diskretisierung der horizontalen Diffusion führen dazu, dass implizit nur die Größen in einer Vertikalen miteinander verbunden sind. Somit können bei der Berechnung der Turbulenzgrößen alle Kantenmitten-Vertikalen einzeln nacheinander abgearbeitet werden.

Auf die Beschäftigung mit viskosen Unterschichten ist in dieser Arbeit auch aufgrund der in Abschnitt 5.5 aufgeworfenen Fragen verzichtet worden. Wo erforderlich werden die Beziehungen Gl. (9.23) und Gl. (9.24) als Sohrlrandbedingungen für die Turbulenzgrößen verwendet.

## 8.4 Entwicklungsmöglichkeiten

Die hier codierte Software „casu“ ist für die wissenschaftlichen Zwecke dieser Arbeit geschaffen worden und soll den Ausgangspunkt für ein „Open-Source“ Projekt bilden. Von kommerziell einsetzbarer Software unterscheidet sie sich hauptsächlich durch fehlende Pre- und Postprocessing-Werkzeuge. Aber auch das Berechnungsprogramm selbst bietet eine Reihe von Ansatzpunkten für Verbesserungen und Erweiterungen:

Die horizontale Stoffdiffusion ist hier nicht getestet und auch nicht implementiert worden.

Die Implementierung des Buoyancy-Terms in der Bilanz der horizontalen Impulskomponenten Gl. (8.5) zur Erfassung dichtegetriebener Strömungen steht noch aus.

Die Formulierung der Turbulenzgrößen nach ILINCA [51] konnte nicht zu Ende geführt werden.

Die in Abschnitt 9.2.7 sichtbar gewordene numerische Diffusivität infolge der linearen Interpolationsansätze legt die Verwendung von höheren Polynomen nahe.

Die semi-implizite Diskretisierung des räumlichen Wasserspiegelgradienten [19] ist zwar realisiert aber nicht weiter verwendet oder getestet worden. In den Testfällen dieser Arbeit erleichtert die numerische Dämpfung von Oberflächenwellen die Berechnungsdurchführung.

Zudem bieten sich eine Reihe von Möglichkeiten zur Beschleunigung des Berechnungsablaufes u.a. durch Entfernung der nicht mehr benötigten Kontrollmöglichkeiten. Um stabile Lösungen der Turbulenzgleichungen zu erzielen, werden Relaxationsfaktoren benutzt. In den einfachen Testfällen dieser Arbeit können für diese Faktoren relativ kleine Werte verwendet werden. Eine Optimierung bezüglich der Berechnungsgeschwindigkeit ist weiterführenden Arbeiten vorbehalten.

# Kapitel 9

## Testrechnungen

### 9.1 Idee und Überblick

In der numerischen Strömungsberechnung sind folgende drei Stufen auf dem Weg zum Berechnungsergebnis zu überwinden:

1. Die mathematische Modellierung der physikalischen Vorgänge in Form partieller Differentialgleichungen,
2. der numerische Algorithmus zur näherungsweise Lösung dieser partiellen Differentialgleichungen und
3. die datentechnische Realisierung der Näherungslösung in Form von Software.

Für die Verifikation von Berechnungsprogrammen ergeben sich damit auch drei Gruppen von Fehlerquellen, die sich wechselseitig beeinflussen. Diese Arbeit befasst sich mit der Begrenzung eines Teils der mathematischen Modellierung, dem Turbulenzmodell, das zur Stufe 1 gehört. Um aber aus den Differenzen zwischen Messwerten und Berechnungsergebnissen Schlüsse ableiten zu können, werden auch die Stufen 2 und 3 in dieser Arbeit einer eingehenden Überprüfung unterzogen.

Bei der Überprüfung der datentechnischen Realisierung (Stufe 3) stellt sich die Frage, ob alle Komponenten<sup>1</sup> richtig implementiert wurden. Da sich Beispiele nicht dergestalt konstruieren lassen, dass jeweils nur eine Komponente isoliert geprüft wird, wurde folgender Weg beschritten:

---

<sup>1</sup>Lokale Änderung, Konvektion, Druckgradient (hier Wasserspiegelgefälle), Sohlreibung, vertikale Viskosität, horizontale Viskosität

In zwei verschiedenen Beispielen leistet eine Komponente einmal einen Beitrag zum Ergebnis, im anderen Beispiel ist sie nicht aktiv. Daraus, dass beide numerischen Berechnungen mit den Erwartungen<sup>2</sup> an den Algorithmus übereinstimmen, wird dann geschlossen, dass diese Komponente korrekt implementiert wurde. Würde die Funktion der Software nur an einem Beispiel getestet, bestünden die Möglichkeiten, dass sich zwei Fehler aus unterschiedlichen Quellen gegenseitig aufheben, dass fehlerhafte Teile der Software in dem Beispiel gar nicht aktiv werden und dass sich Abweichungen von den Erwartungen nicht einzelnen Komponenten zuordnen lassen.

Hier soll nicht der Eindruck erweckt werden, dass ein Weg gefunden worden wäre, die Fehlerfreiheit von Software mathematisch exakt nachzuweisen. Auch gelingt damit kein Nachweis völliger Lückenlosigkeit des Testschemas. Das Vorgehen der Isolation einer Komponente mittels zweier Beispiele hat sich aber in der Fehlerdetektierung bei der Programmentwicklung bewährt. Der Umfang des Testprogramms und die Unterschiedlichkeit der Beispiele schränken die datentechnischen Fehlermöglichkeiten weitgehend ein. Die Eingabedatensätze für die Testfälle sowie das Berechnungsprogramm sind über <http://www.wyrwa.de> verfügbar.

Im Überblick stellen sich die Testrechnungen wie folgt dar: Die numerischen Eigenschaften des in dieser Arbeit codierten Basis-Algorithmus, siehe Kapitel 8, sind aus der Literatur weitgehend bekannt und im wesentlichen vorhersagbar (Stufe 2). Die Testrechnungen des Abschnitts 9.2 dienen daher zur Illustration dieser Eigenschaften und zeigen Stärken und Schwächen des Verfahrens auf.

In dieser Arbeit ist der aus der Literatur u.a. [19] bekannte Basis-Algorithmus um ein Turbulenzmodell erweitert worden. In den partiellen Differentialgleichungen, die ein Turbulenzmodell ausmachen, siehe Kapitel 7, treten Terme auf, welche die lokale Änderung, Konvektion und Diffusion der Turbulenzquantitäten beschreiben. Die numerische Behandlung dieser Terme geschieht mittels des Basis-Algorithmus, dessen Eigenschaften bekannt sind. Die im Turbulenzmodell auftretenden nichtlinearen Quellen- und Senken-Terme zwingen zu einer Erweiterung des numerische Algorithmus, wie in Kapitel 8 beschrieben. Der Vergleich der Testrechnungen des Abschnitts 9.3 mit analytischen Lösungen dient zum einen dazu, die Genauigkeit des numerischen Algorithmus (Stufe 2) herauszuarbeiten, zum anderen gilt es, die

---

<sup>2</sup>Die Herkunft dieser Erwartungen wird in den Abschnitten 9.2 . . . 9.5 beschrieben, die sich mit den einzelnen Beispielen befassen.

korrekte datentechnische Realisierung (Stufe 3) zu belegen. Desweiteren sind die Testfälle des Abschnitts 9.3 so ausgewählt worden, dass Vergleiche mit Messungen möglich sind, die bereits Aufschlüsse über die Vorhersagemöglichkeiten des Turbulenzmodells zulassen.

Die Testrechnungen des Abschnitts 9.4 dienen der zentralen Fragestellung dieser Arbeit, nämlich der Erkundung des Verhaltens des Turbulenzmodells in stabil dichtegeschichteten Strömungen. In den Testfällen des Abschnitts 9.5 werden die Transportraten suspendierter Sedimente berechnet, die zum Vergleich der Genauigkeit der verschiedenen empirischen Modelle benötigt werden.

## 9.2 Basismodell

### 9.2.1 Gerader Kanal

Als erstes einfaches Beispiel wird die Strömung in einem geraden Kanal von rechteckigem Querschnitt berechnet. Es wurde ein Sohlgefälle von  $I = 0,17$  % diskretisiert. Bei gleichbleibender Wassertiefe  $h$  sind Wasserspiegelgefälle und Sohlgefälle identisch. Die Sohlschubspannung ergibt sich dann [113] aus dem einfachen Zusammenhang:

$$\tau_b = \rho \cdot g \cdot h \cdot I \quad (9.1)$$

mit

- $\tau_b$  Sohlschubspannung (bottom),
- $\rho$  Dichte,
- $g$  Fallbeschleunigung,
- $h$  Wassertiefe und
- $I$  Gefälle.

Der hier diskretisierte Reibungsansatz, siehe Anhang 12.2, lautet:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\lambda}{8} \cdot v^2 \quad (9.2)$$

mit

- $\lambda$  Sohlreibungsbeiwert und
- $v$  tiefengemittelte 2D-Geschwindigkeit.

Damit gehört zu dem angesetzten Gefälle  $I = 0,17$  % unter der Annahme von  $v = 2,0$  m/s und  $h = 2,0$  m ein Reibungsbeiwert von  $\lambda = 0,066708$ .

In diesem Testfall werden zwei Berechnungen mit unterschiedlichen Netzen durchgeführt. In **Bild 17a** ist das aus Rechtecken bestehende ebenmäßige Netz zu sehen. **Bild 17b** zeigt ein verzerrtes Netz, das erst durch die hier vorgenommene Erweiterung (siehe Kapitel 8) berechenbar wird. In beiden Darstellungen ist neben dem Netz auch der Wasserstand eingezeichnet. Bei der exakten Lösung fallen die dargestellten Isohypsen mit den Netzlinien zusammen. Beim ebenmäßigen Netz sind keine Abweichungen von der exakten Lösung erkennbar. Die minimalen Abweichungen zwischen numerischem Ergebnis und exakter Lösung, die beim verzerrten Netz auftreten, sind in **Bild 17b** nicht mehr erkennbar. In beiden Fällen entspricht nach Erreichen eines stationären Zustands der ausfließende Volumenstrom dem als Randbedingung angesetzten Zufluss.

Dieser Testfall hat die Kennung „kanal“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

## 9.2.2 Tide in einer Bucht

Um die Massenerhaltung und den Watt-Algorithmus zu demonstrieren, ist ein Testfall konstruiert worden, in dem das Wasser durch einen engen Kanal in eine relativ große Bucht einströmen kann. **Bild 18** zeigt das verwendete Netz und die diskretisierte Topographie. An dem linken Rand, der Symmetrielinie, wird eine reibungsfreie Wand angesetzt, so dass das Beispiel auch als Berechnung eines doppelt so großen symmetrischen Gebiets angesehen werden kann. Die Abmessungen sind dann mit denen des Jadebusens vergleichbar. In der Mitte befindet sich eine recht breite und tiefe Rinne, seitlich daran anschließend liegen flach ansteigende ausgedehnte Wattflächen. Ein- und Ausströmung finden nur über den oberen Rand des „Flaschenhalses“ statt. Das diskretisierte (Halb)-Gebiet hat eine Fläche von  $114,7 \text{ km}^2$ .

Mit diesem Modell sind zwei Tests unternommen worden: Als erster Test wird die Bucht mit einem konstanten Zustrom beaufschlagt. Bei einem Zustrom von  $1800 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  ergibt sich nach 12,5 Stunden der in **Bild 19** gezeigte Strömungszustand. Der Anfangswasserstand war 12 m und die Zeitschrittweite betrug 450 s. Die Volumenzunahme im Gebiet entspricht genau dem zugeflossenen Volumen.

Als zweiter Test wird eine sinusförmige Tide als Wasserstandsganglinie vorgegeben (s. **Bild 20a**). Die Periodendauer beträgt  $45000 \text{ s} = 12,5 \text{ Stunden}$ . Der Wasserstand pendelt zwischen 10 und 12 m. Die Sohlhöhe der Rinne liegt bei 0 m, die Wattflächen befinden sich zwischen 10,0 und 11,5 m, wie aus **Bild 18** ersichtlich. Als Zeitschritt werden 450 s verwendet. **Bild 20a** zeigt die Wasserstandsganglinien am Zufluss, am unteren Ende der Rinne (Knoten 11) und in der rechten unteren Ecke der Wattfläche (Knoten 97). **Bild 20b** und **c** zeigen jeweils einen Strömungszustand bei auslaufender Ebbe 36,25 h nach Berechnungsbeginn und bei einlaufender Flut 42,5 h nach Berechnungsbeginn.

**Bild 20d** zeigt einen Querschnitt durch das Berechnungsgebiet. Es sind die Wasserstände für die o. g. Strömungszustände und die Sohlhöhe aufgetragen. Am trocken gefallenem rechten Rand unterschreiten die Wasserstände die Sohlhöhe. Dieser Effekt tritt auf, weil in „casu“ die Zelle, in deren Mitte jeder Knoten liegt, so lange geleert wird, bis der Wasserstand unter die Sohlhöhe der am tiefsten liegenden Kantenmitte, d.h. Zellgrenze, gefallen ist (siehe Kapitel 8).

Die hier durchgeführten Tests zeigen, dass die programmierte Software die

genaue Massenerhaltung des numerischen Algorithmus erreicht. Desweiteren ist erkennbar, dass der verwendete Watt-Algorithmus zu keinerlei Instabilitäten oder Oszillationen führt und physikalisch plausible Resultate liefert.

Dieser Testfall hat die Kennung „bucht“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

### 9.2.3 Potential-Staupunktströmung

Für die Strömung in der Nähe eines Staupunkts lässt sich die folgende einfache Potentialströmung [119] angeben:

$$\begin{aligned}v_1 &= a \cdot x_1 \\v_2 &= -a \cdot x_2 \\ \Phi &= \frac{a}{2} \cdot (x_1^2 - x_2^2) \\ \Psi &= a \cdot x_1 \cdot x_2 \\ z_s &= z_0 - \frac{a^2}{2g} \cdot (x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}\tag{9.3}$$

mit

$v_1, v_2$	horizontale Komponenten des Geschwindigkeitsvektors,
$x_1, x_2$	horizontale Komponenten des Ortsvektors,
$a$	Konstante,
$\Phi$	Potentialfunktion,
$\Psi$	Stromfunktion,
$z_s$	Wasserspiegellage,
$z_0$	Wasserstand an der Stelle $x_1 = 0, x_2 = 0$ ,
$g$	Fallbeschleunigung.

Die Stromlinien sind also Hyperbeln, der Staupunkt liegt bei  $x_1 = 0, x_2 = 0$ .

Als Strömungsgebiet wird ein Quadrat mit 100 m Kantenlänge gewählt. Der Koordinatenursprung liegt in der linken unteren Ecke. Am linken und am unteren Rand wird, wie von der Potentialtheorie gefordert, eine reibungsfreie Wand vorgegeben. Am oberen Rand wird eine Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (9.3) eingesetzt, am rechten Rand wird der Wasserstand gemäß Gl. (9.3) als Randbedingung vorgegeben. Anfangsbedingung ist die Teichlösung. Die Gitterweite beträgt 2,5 m. Als Zeitschrittweite wurde 2,5 s verwendet. Die in **Bild 21** gezeigte Strömung stellt sich nach 800 s Rechenzeit ein.

Die analytische Lösung gemäß Gl. (9.3) ließe erwarten, dass die Isotachen in **Bild 21b** exakt mit den Gitterlinien zusammenfallen. Es zeigt sich, dass „casu“ diese Strömung recht gut reproduzieren kann. Die einzigen geringen Abweichungen treten in der linken unteren Ecke auf. Sie sind auf das in Abschnitt 9.2.6 näher untersuchte Phänomen des Impulsverlustes infolge Stromlinienkrümmung zurückzuführen.

Dieser Testfall hat die Kennung „staup“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

## 9.2.4 Laminare Grenzschicht

In diesem Testfall wird das Anwachsen einer laminaren Grenzschicht bei Gleichdruck auf einer ebenen Platte berechnet. Mit diesem Testfall kann das Zusammenspiel von Impuls-Konvektion und Impuls-Diffusion getestet werden. Die Diffusion vergrößert die Grenzschichtdicke, die Konvektion verkleinert sie. Dieser Testfall dient im Rahmen dieser Arbeit der Überprüfung der datentechnischen Implementierung. Da im Programm „casu“ die vertikale Impuls-Diffusion implizit und die horizontale Impuls-Diffusion explizit berechnet werden, also unterschiedliche Programmbausteine für die beiden Raumrichtungen der Impuls-Diffusion existieren, sind auch zwei verschiedene Berechnungen für diesen Testfall angefertigt worden.

SCHLICHTING [111] berichtet wie folgt: Das Problem der laminaren Gleichdruck-Grenzschicht wurde bereits 1908 von BLASIUS auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt, für die schon vor der Einführung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen numerische Näherungslösungen in tabellierter Form veröffentlicht wurden. Diese Näherungslösung stimmt mit Messungen überein. Die Grenzschichtdicke berechnet sich wie folgt:

$$\delta_{99} = 5,0 \sqrt{\frac{\nu x}{v_{\infty}}} \quad (9.4)$$

Bei der Plattengrenzschicht wird davon ausgegangen, dass die Strömung weit entfernt von der Platte bis ins Unendliche die konstante Geschwindigkeit  $v_{\infty}$  besitzt, die hier mit  $v_{\infty}=1,0$  m/s angesetzt wird. Dies ist bei der numerischen Simulation mit Berechnungsgebieten endlicher Abmessungen nur näherungsweise erreichbar. Bei der vertikalen Grenzschicht ist mit einer Wassertiefe von 22 m gerechnet worden. Bei der horizontalen Grenzschicht beträgt die Breite des Diskretisierungsgebiets 20 m. Das Diskretisierungsgebiet hat in beiden Fällen eine Länge von 200 m. Der Wert der konstanten Viskosität beträgt  $0,02$   $m^2/s$ . Diese, gemessen an der Viskosität von Wasser, relativ große Viskosität ist erforderlich, damit die Strömung in der Rechnung in jedem Fall laminar bleibt.

Bei den Berechnungen für die Grenzschicht mit vertikaler Impuls-Diffusion treten Instabilitäten auf, die auf die fehlende Trägheit der vertikalen Geschwindigkeiten zurückzuführen sind, siehe Abschnitt 8.2.3. Daher ist es notwendig, bei dieser Grenzschicht ein Geschwindigkeitsprofil am Einlauf vorzugeben, das einer laminaren Grenzschicht entspricht, die bereits eine relativ

große Lauflänge (hier 12,5 m) hinter sich hat.

**Bild 22** zeigt Geschwindigkeitsprofile am Austritt aus dem Berechnungsgebiet. Daran kann man erkennen, dass die Außenströmung beschleunigt ist. Dies ist aufgrund des seitlich begrenzten Berechnungsgebiets zur Erfüllung der Kontinuität notwendig. Es tritt ein negativer Druckgradient (Wasserspiegelgefälle) in Strömungsrichtung auf. Die Annahme einer Gleichdruck-Grenzschicht, auf der die BLASIUS-Lösung basiert, wird also geringfügig verletzt. Dazu passt es, dass die Geschwindigkeitsprofile etwas völliger sind.

Es bleibt also eine geringfügige Unsicherheit zurück, ob dieses Ergebnis die Implementierung der Impuls-Diffusion hinreichend genau überprüft. Daher ist im Testfall Logarithmisches Wandgesetz in Abschnitt 9.3.3 auch mit einer konstanten Wirbelviskosität gerechnet worden. In Folge der konstanten Schubspannung muss sich dort eine lineare Geschwindigkeitsverteilung ergeben. Diese wird von Programm „casu“ genau wiedergegeben. Dies verifiziert die Implementierung der Impuls-Diffusion .

In diesem Testfall laminare Grenzschicht hat die Überprüfung der vertikalen Impuls-Diffusion die Kennung „wandver“, die Überprüfung der horizontalen Impuls-Diffusion die Kennung „wandh“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

## 9.2.5 Diffusion von Konzentrationen

Dieser Testfall ist konstruiert worden, um die Diffusion von Konzentrationen zu testen. Dazu wird für eine numerische Konzentration eine konstante Quelle angesetzt. Die Bodenkonzentration wird zu Null gesetzt. Der Testfall ist stationär. Die Diffusion befördert sämtliche im Fluidvolumen erzeugte Konzentration zum Boden hin. An der Wasseroberfläche verschwindet der diffusive Fluss der Konzentration. Das Fluid selbst befindet sich in Ruhe. Die in Gl. (6.4) enthaltene Sinkgeschwindigkeit  $w_s$  wird hier Null gesetzt. Der Diffusionsparameter  $D$  wird als konstant angenommen. Die Stofftransportgleichung<sup>3</sup> Gl. (6.4) reduziert sich daher wie folgt:

$$-D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = Q \quad (9.5)$$

mit  
 $c$  numerische Konzentration,  
 $D$  Diffusionsparameter,  
 $z$  Sohlabstand und  
 $Q$  Quellstärke.

Als Verteilungsfunktion für die Konzentration  $c$  berechnet sich analytisch eine Parabel:

$$c(z) = \frac{Q}{D} \cdot \left( h - \frac{z}{2} \right) \cdot z \quad (9.6)$$

mit  
 $h$  Wassertiefe.

Wie **Bild 23** zeigt, kann die parabolische Konzentrationsverteilung vom Programm „casu“ bereits mit fünf Punkten auf der  $Z$ -Achse ausreichend genau wiedergegeben werden.

Dieser Testfall hat die Kennung „qd“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

---

<sup>3</sup>Sie ist in der Formulierung für die Sedimentkonzentration natürlich ohne Quellterm angeschrieben worden.

## 9.2.6 Starrkörperrotation

Bei einer Starrkörperrotation, wie sie z. B. im Kernbereich eines RANKIN-Wirbels [119] auftritt, bewegen sich einzelne Fluidpartikel nicht relativ zueinander, sondern wie ein starrer Körper relativ zur Umgebung. Für den Fall, dass eine rotationssymmetrische Geometrie vorliegt sowie Wand- und Sohlreibung abgeschaltet sind, müsste eine solche Bewegung, nachdem sie als Anfangsbedingung vorgegeben wurde, zeitlich unbegrenzt weiterdrehen. In diesem Beispiel wird der radiale Druckgradient so gewählt, dass er gerade für die nötige Zentripetalbeschleunigung sorgt. D. h. in der numerischen Berechnung sind nur Konvektion und Wasserspiegelgefälle aktiv. Das Geschwindigkeitsfeld und der Wasserspiegel ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}v_1 &= -2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot x_2 \\v_2 &= 2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot x_1 \\z_s &= z_0 + \frac{2}{g} \cdot \pi^2 \cdot \omega^2 \cdot (x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}\tag{9.7}$$

mit

- $v_1, v_2$  horizontale Komponenten des Geschwindigkeitsvektors,
- $x_1, x_2$  horizontale Komponenten des Ortsvektors,
- $z_s$  Wasserspiegellage,
- $z_0$  Wasserspiegellage an der Stelle  $x_1 = 0, x_2 = 0$ ,
- $g$  Fallbeschleunigung und
- $\omega$  Kreisfrequenz der Starrkörperrotation

Im **Bild 24a** und **b** sind die Anfangsbedingungen für diesen Testfall visualisiert. Der diskretisierte Ringraum hat einen Innendurchmesser von 0,2 m und einen Aussendurchmesser von 0,6 m. Die Kreisfrequenz wurde so gewählt, dass sich das Fluid genau einmal in der Sekunde um seine eigene Achse dreht, d.h.  $\omega = 1,0s^{-1}$ . Der Wasserstand wurde so gewählt, dass sich am Innendurchmesser gerade ein Wasserstand von 0,2 m ergibt, d.h.,  $z_0 = 0.17987848$  m.

Im **Bild 24c** und **d** ist die Verteilung von  $v_2$  nach 3 s Rechenzeit zu sehen, also nachdem sich das Fluid drei Mal um die eigene Achse gedreht haben müsste. Deutlich erkennbar ist die starke numerisch bedingte Abnahme der Geschwindigkeit, die sich in den beiden verwendeten Netzen nahezu identisch ergibt.

In **Bild 25** ist zum Zweck einer Parameterstudie der Verlauf von  $v_2$  am Knoten 252 im regelmäßigen Vierecksnetz, dessen Lage in **Bild 24b** erkennbar ist, aufgetragen. Es wird ersichtlich, dass der Effekt der Verlangsamung der Rotationsbewegung nur von der Zeitschrittweite  $dt$  abhängt. Die Feinheit bei

der Stromlinienberechnung hat einen vernachlässigbar kleinen Einfluss. Auch eine Netzverfeinerung auf die halbe Gitterweite (Vierecksnetz) hat keinen erwähnenswerten Einfluss. Die numerische Berechnung bestätigt somit die in Kapitel 8 gemachte Vorhersage, dass mit zunehmender Stromlinienkrümmung je Zeitschritt ein immer größer werdender Impulsverlust auftritt.

Dieser Testfall hat die Kennung „rr“ für die Berechnungen mit dem regelmäßigen Netz und „ru“ für die Berechnungen mit dem unregelmäßigen Netz in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

## 9.2.7 Konvektiver Transport

Abschnitt 8.2.2 erläutert das Phänomen der numerischen Diffusivität. Diese Testrechnung ist durchgeführt worden, um Eigenschaft und Stärke der numerischen Diffusivität zu demonstrieren. In einem 400 m langen, geraden, rechteckigen und ebenen Kanal wird eine Strömung in Gang gesetzt, bis eine konstante Geschwindigkeit von 1,0 m/s erreicht ist. Die Berechnung wird zunächst fortgesetzt bis die Strömung stationär geworden ist. Dann wird am Einlauf von einem Zeitschritt auf den anderen der Wert einer zufließenden numerischen Konzentration<sup>4</sup> von Null auf Eins gesetzt. Die Diffusivität wird mit Null angesetzt. Als exakte Lösung wäre nun zu erwarten, dass dieser scharfe Konzentrationssprung von der mittleren Geschwindigkeit gleichmäßig durch das Gebiet konvektiert wird. Aber die in **Bild 26** gezeigte numerische Lösung gibt ein anderes Bild wieder.

**Bild 26a** zeigt das Längsprofil der numerischen Konzentration für verschiedene COURANT-Zahlen  $Cr$ , siehe Gl. (8.3). Dabei ist der von CASULLI [22] bereits beschriebene Effekt zu sehen, dass die numerische Diffusivität mit größer werdender COURANT-Zahl abnimmt. Bei der COURANT-Zahl  $Cr=0,1$  wird im Vergleich zur Berechnung mit  $Cr=2,5$  ein um den Faktor 25 kleinerer Zeitschritt verwendet. Bei der Berechnung mit  $Cr=0,1$  wird somit die 25-fache Anzahl an Zeitschritten verwendet. Dementsprechend mehr Interpolationen wurden ausgeführt, auf welche die in **Bild 26a** sichtbar höhere numerische Diffusivität zurückzuführen ist.

Die verschiedenen physikalischen Größen sind im Programm „casu“ an unterschiedlichen Stellen diskretisiert, siehe **Bild 15**. Die bei der ELM notwendige Bestimmung einer Feldgröße am Ursprung einer Bahnlinie erfordert eine Interpolation. Diese erste Interpolation wird im Programm „casu“ auf der Basis der Elemente durchgeführt, an deren Ecken sich Knoten befinden. Wie in Abschnitt 8.2.2 bereits erläutert, werden die Größen Geschwindigkeit und Turbulenz, die auf der Kantenmitte diskretisiert sind, zuerst am Knoten interpoliert. Diese zweite Interpolation erzeugt zusätzliche numerische Diffusion. Um deren Effekt herauszuarbeiten, wurde die Testrechnung, die im vorangegangenen Absatz für eine Konzentration beschrieben worden ist, mit einer Turbulenzgröße wiederholt. Dazu mussten im Quellcode vom Programm „casu“ die Terme Produktion, Dissipation, Diffusion und Buoyancy ausgeschaltet werden. Das **Bild 26b** vergleicht die Ergebnisse der Konzentrationsberechnung mit denen der Turbulenzgrößenberechnung. Es zeigt sich,

---

<sup>4</sup>Bei dieser Konzentration handelt es sich lediglich um einen numerischen Wert, mit dem nicht notwendigerweise die Vorstellung eines realen Stoffes verbunden sein muss.

dass die zweite Interpolation bei der Turbulenzgröße erheblich zur numerischen Diffusion beiträgt.

Es ist bei dieser Testrechnung folgender Sonderfall beobachtet worden, der nur in akademischen Testfällen auftritt: Wenn die COURANT-Zahl  $Cr$  im gesamten Gebiet ganzzahlig ist, dann verschwindet die numerische Diffusivität. Dies hängt damit zusammen, dass in diesem Sonderfall die numerische Konzentrationsverteilung in jedem Zeitschritt um eine ganzzahlige Menge von Netzebenen versetzt wird.

Dieser Testfall hat die Kennung „rinnkon“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

## 9.3 Turbulenzmodell

### 9.3.1 Abklingende isotrope Turbulenz

Für den Fall abklingender isotroper Turbulenz lassen sich die partiellen Differentialgleichungen, die das Turbulenzmodell ausmachen, auf die Terme der zeitlichen Änderung und Dissipation reduzieren.

Beim  $k$ - $\epsilon$ -Modell Gln. (7.1) und (7.2) führt dies zu:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\epsilon \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (9.9)$$

mit  
 $k$  Kinetische Energie der Turbulenz,  
 $\epsilon$  Dissipationsrate,  
 $t$  Zeit und  
 $c_{\epsilon 2}$  Modellkonstante.

Für dieses reduzierte Gleichungssystem lässt sich analytisch eine Lösung ermitteln [104]:

$$k(t) = k_0 \cdot \left( \frac{t_g}{t + t_g} \right)^{\frac{1}{c_{\epsilon 2} - 1}} \quad (9.10)$$

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cdot \left( \frac{t_g}{t + t_g} \right)^{\frac{c_{\epsilon 2}}{c_{\epsilon 2} - 1}} \quad (9.11)$$

$$t_g = \frac{k_0}{\epsilon_0 \cdot (c_{\epsilon 2} - 1)} \quad (9.12)$$

mit  
 $k_0$  Anfangswert von  $k$ ,  
 $\epsilon_0$  Anfangswert von  $\epsilon$  und  
 $t_g$  Zeitmaß.

Experimentell entspricht dieser Fall einer gleichförmigen Strömung hinter einem Gitter. Ein feines Gitter erzeugt nahezu isotrope Turbulenz. Das Abklingen geschieht entlang der Strecke, über welche die Turbulenz konvektiv transportiert wird. Das Turbulenzfeld ist bei diesem Experiment räumlich nicht mehr völlig homogen. Wenn die Geschwindigkeit der mittleren gleichförmigen Bewegung groß genug ist, kann die Diffusion vernachlässigt werden [104]. Somit kann der Wert für die Modellkonstante  $c_{\epsilon 2}$  aus dem Experiment

ermittelt werden. Wie RODI [104] angibt, liegen die experimentellen Befunde für  $c_{\epsilon 2}$  in einem Bereich zwischen 1,8 und 2,0. Im  $k$ - $\epsilon$ -Modell wird mit einem Wert von 1,92 für  $c_{\epsilon 2}$  gerechnet. In der 1996 veröffentlichten Untersuchung weisen MYDLARSKI und WAHRHAFT [86] darauf hin, dass in den bis dato durchgeführten Experimenten mit gittergenerierter Turbulenz die REYNOLDS-Zahlen zu klein waren, um wirklich lokal-isotrope<sup>5</sup> Turbulenz zu erhalten.

Für die datentechnische Erprobung ist der Fall insofern von Interesse, als sich hieran der Dissipationsterm isoliert testen lässt. **Bild 27** zeigt die Abklingraten für verschiedenen Zeitschrittweiten. Die zunehmend besser werdende Erfüllung der Vorhersage gemäß Gln. (9.10) bis (9.12) bei zunehmend kleiner werdenden Zeitschritten entspricht den Erwartungen an den numerischen Näherungsalgorithmus und belegt die korrekte datentechnische Realisierung. In diesem Beispiel wurden die Startwerte für  $k$  und  $\epsilon$  der Einfachheit halber im ganzen Gebiet 1 gesetzt.

**Bild 27** zeigt, dass sich bei einer Zeitschrittweite von 4.0 s bereits deutliche Unterschiede zur analytischen Lösung ergeben. Gemessen an der Tidedauer von ca. 12 Stunden ist dies relativ kurz. Es lässt sich aus Gln. (9.10) bis (9.12) ableiten, wie lange es dauert  $t_{0,5}$ , bis sich die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  halbiert:

$$t_{0,5} = \frac{k_0}{\epsilon_0} \cdot 0,97 \quad (9.13)$$

mit

$t_{0,5}$  Zeit nach der sich  $k$  halbiert hat und  
 0,97 Faktor basierend auf der Annahme  $c_{\epsilon 2} = 1,92$ .

Hieran bestätigt sich der Effekt, der sich auch nach dem Umrühren in der Teetasse beobachten lässt: Die Dissipation von Turbulenz ist ein relativ schneller Vorgang; wenn keine kinetische Energie aus der mittleren Bewegung nachgeliefert wird, verebbt die Turbulenz rasch und lediglich die mittlere Bewegung bleibt übrig. Der Tee in der Tasse dreht sich gleichmäßig im Kreis, kurz nachdem man den Löffel aus der Tasse gezogen hat.

Für die Berechnung im Ästuar ist also jeweils zu prüfen, inwieweit es erforderlich ist, die Dissipation der Turbulenz in ihrem zeitlich Verlauf zu erfassen.

Dieser Testfall hat die Kennung „iso“ in der bereits angegebenen Quelle

---

<sup>5</sup>Lokale Isotropie ist eine Voraussetzung für die Gültigkeit der Proportionalität Gl. (6.24) in Abschnitt 6.7.

<http://www.wyrwa.de/casu/test>.

Darüber hinaus ist eine weitere Berechnung angefertigt worden, welche die Kennung „isocon“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test> trägt. In dieser findet nicht wie bei „iso“ ein zeitliches Abklingen der Turbulenz statt, sondern es werden die o. a. Experimente numerisch nachgebildet, bei denen die Turbulenz entlang einer Strecke abklingt, über die sie von einer gleichförmigen mittleren Strömung konvektiert wird. In dem Testfall „isocon“ ist neben der Dissipation auch die Konvektion aktiv. Warum die Überprüfung des Konvektionsterms nicht wie ursprünglich geplant anhand der ebenen Scherschicht vorgenommen werden kann, wird in Abschnitt 9.3.4 diskutiert. **Bild 28** zeigt, dass bei entsprechend feiner Diskretisierung die numerische Lösung gegen die analytische konvergiert.

### 9.3.2 Oscillating-Grid-Tank

Wird in einem Fluid eine Quelle isotroper Turbulenz angeordnet, die dem Fluid keine mittlere Bewegung aufprägt, dann stellt sich im Fluid nach einiger Zeit ein stationärer Zustand ein, bei dem sich die Diffusion und die Dissipation der Turbulenz die Waage halten. Die an einer Stelle im Raum in einer gewissen Entfernung von der Quelle durch Dissipation vernichtete turbulente kinetische Energie  $k$  muss vorher durch die turbulente Diffusion der Turbulenz zu dieser Stelle hin transportiert worden sein. Ein oszillierendes Gitter, das den Querschnitt eines zylindrischen Tanks vollständig ausfüllt, stellt eine experimentelle Näherung an diese Situation dar.

Das  $k$ - $\epsilon$ -Modell Gln. (7.1) und (7.2) reduziert sich in diesem Fall wie folgt:

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( \frac{c_\mu \cdot k^2}{\sigma_k \cdot \epsilon} \cdot \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \epsilon \quad (9.14)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( \frac{c_\mu \cdot k^2}{\sigma_\epsilon \cdot \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (9.15)$$

mit  
 $z$             Koordinate des Abstands von der Turbulenzquelle,  
 $k$             kinetische Energie der Turbulenz,  
 $\epsilon$             Dissopationsrate und  
 $c_\mu, \sigma_k, \sigma_\epsilon, c_{\epsilon 2}$     Modellkonstanten.

Die Gln. (9.14) und (9.15) lassen sich mit Hilfe des folgenden Ansatzes lösen [122]:

$$\frac{k}{k_0} = \left( \frac{z}{z_0} \right)^n \quad (9.16)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \left( \frac{z}{z_0} \right)^m \quad (9.17)$$

mit  
 $z_0$     Ort des Berechnungsbeginns,  
 $k_0$      $k$  an der Stelle  $z_0$ ,  
 $\epsilon_0$      $\epsilon$  an der Stelle  $z_0$  und  
 $n, m$     reele Exponenten.

Durch Einsetzen in die Gln. (9.14) und (9.15) ergibt sich:

$$\frac{c_{\epsilon 2} \cdot \sigma_\epsilon}{\sigma_k} = \frac{(2n - 1) \cdot (3n - 2)}{3 \cdot n^2} \quad (9.18)$$

$$m = \frac{3}{2} \cdot n - 1 \quad (9.19)$$

Wenn die Standardwerte für die empirischen Parameter ( $c_{\epsilon 2} = 1,92$ ,  $\sigma_{\epsilon} = 1,3$  und  $\sigma_k = 1,0$ ) verwendet werden, erhält man:  $n = -4,97$  und  $m = -8,46$ .

In **Bild 29** sind die berechneten Verläufe von  $k$  und  $\epsilon$  den o.g. analytisch gewonnenen Vorhersagen gegenübergestellt. Mit zunehmend kleiner werdenden räumlichen Schrittweiten des Berechnungsnetzes nähert sich die numerische Lösung der Vorhersage immer genauer an. Die gute Übereinstimmung lässt auf die korrekte Realisierung der vertikalen Diffusion der Turbulenzgrößen schließen, weil die Dissipation bereits im Abschnitt 9.3.1 überprüft worden ist.

SONIN [122] stellt fest, dass die Experimente von [47] und [129] für den Exponenten  $n$  Werte von  $-2$  und  $-3$  nahelegen und weist darauf hin, dass dies nur erreichbar wäre, wenn der Wert für die Modellkonstante<sup>6</sup>  $\sigma_k$  auf Werte von  $0,74$  und  $0,87$  abgesenkt würde. Um zu illustrieren, welche erheblichen Unterschiede sich daraus ergeben, ist der Verlauf von  $k$  in **Bild 29** auch für den Exponent  $n = -2$  aufgetragen.

In diesem Zusammenhang sei auch die Überlegung von LELE [66] mitgeteilt: Beim instationären Oszillating-Grid-Tank Experiment müssen an der Front der sich in das ruhende Fluid ausbreitenden Turbulenz alle Turbulenzgrößen die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben. Die daraus ableitbare Konsistenzbedingung ergibt für das  $k$ - $\epsilon$ -Modell die Forderung:

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_{\epsilon}} = 0,7692 \quad (9.20)$$

Dieser Testfall hat die Kennung „oszi“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

---

<sup>6</sup>unter Beibehaltung der Werte für  $c_{\epsilon 2} = 1,92$  und  $\sigma_{\epsilon} = 1,3$

### 9.3.3 Logarithmisches Wandgesetz

In diesem Testfall wird die Schicht, in der das logarithmische Wandgesetz gilt, isoliert betrachtet. Das logarithmische Wandgesetz wurde in Abschnitt 2.2.1 eingeführt. In diesem Zusammenhang sei auch auf die Ausführungen im letzten Absatz von Abschnitt 6.8 verwiesen. Ein wesentlicher Zweck von Turbulenzmodellierung ist die Berechnung von Wandreibung. Daher macht es Sinn, für alle Turbulenzmodelle zu untersuchen, wie genau sie Wandgrenzschichten mit den darin vorkommenden Bereichen logarithmischer Geschwindigkeitsverteilung erfassen können. WILCOX [143] zeigt für 2-Gleichungs-Modelle, inwieweit diese Untersuchungen auf analytischem Wege möglich sind. Mit der Grenzschichtannahme und der Annahme einer konstanten Schubspannung<sup>7</sup> lässt sich das k- $\epsilon$ -Modell Gln. (7.1) und (7.2) wie folgt reduzieren [143]:

$$0 = c_\mu \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( \frac{c_\mu \cdot k^2}{\sigma_k \cdot \epsilon} \cdot \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \epsilon \quad (9.21)$$

$$0 = c_\mu \cdot c_{1\epsilon} \cdot k \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( \frac{c_\mu \cdot k^2}{\sigma_\epsilon \cdot \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (9.22)$$

Es bleiben also die Produktions-, Diffusions- und Dissipationsterme übrig. Da die Diffusions- und Dissipationsterme in den vorangegangenen Tests überprüft worden sind, lässt sich an diesem Testfall also erproben, ob die Produktionsterme den Erwartungen entsprechend funktionieren.

Die Erwartungen für diesen Fall resultieren aus der von WILCOX [143] angegebenen Lösung:

$$k = \frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad , \quad (9.23)$$

$$\epsilon = \frac{v_\tau^3}{\kappa \cdot z} \quad , \quad (9.24)$$

$$v_x = \frac{v_\tau}{\kappa} \cdot \ln z + A \quad (9.25)$$

mit  
 $v_\tau$  Schubspannungsgeschwindigkeit und  
 $A$  Integrationskonstante.

---

<sup>7</sup>zur Diskrepanz zur linearen Schubspannungsverteilung im Gerinne siehe Verweis auf NIKURADSE in Abschnitt 2.2.1.

Dabei ergibt sich für die KARMAN-Konstante  $\kappa$ :

$$\kappa^2 = \sqrt{c_\mu} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1}) \cdot \sigma_\epsilon \quad (9.26)$$

mit

$c_\mu$ ,  $c_{\epsilon 1}$ ,  $c_{\epsilon 2}$  und  $\sigma_\epsilon$  Modellkonstanten.

Die hier vorgenommene Implementierung des Turbulenzmodells führt ohne weitere Angabe von Randbedingungen an der Wasseroberfläche zu einem Verschwinden der vertikalen Flüsse der Turbulenzgrößen, d.h. die vertikalen Gradienten von  $k$  und  $\epsilon$  sind an der Wasseroberfläche Null. Am oberen Rand der in diesem Abschnitt berechneten Schicht, bei dem es irreführend wäre, diesen Rand Wasseroberfläche zu nennen, verschwindet aber der diffusive Fluss der Dissipationsrate  $\epsilon$  nicht. Daher ist im Testfall dieses Abschnitts die Dissipationsrate am oberen Rand gemäß der analytischen Lösung Gl. (9.24) fest vorgegeben worden.

Geschwindigkeiten und Turbulenzgrößen werden auf zueinander versetzten Netzen diskretisiert, zudem ist die Gewässersohle nicht mit einem Knoten identifiziert, sondern unabhängig vom Netz vorgegeben, siehe Kapitel 8. Daher werden die Gln. (9.23) bis (9.25) auch dazu benutzt, den Abstand zwischen der tatsächlichen Sohle und dem sohnächsten Diskretisierungspunkt zu überbrücken.

Um eine Schicht mit konstanter Schubspannung zu erhalten, ist am oberen Rand des Berechnungsgebiets eine Schubspannung von  $30 \text{ N/m}^2$  in Längsrichtung des diskretisierten geraden Kanals mit ebener Sohle vorgegeben worden. Am Zu- und Auslauf ist derselbe Wasserstand von 2,0 m vorgegeben. In diesem Testfall wurde die Konvektion der Turbulenzgrößen ausgestaltet, so dass sich an jeder Vertikalen identische Resultate ergeben.

**Bild 30a** zeigt die Verteilung der Dissipationsrate  $\epsilon$  und **Bild 30b** die Verteilung der Wirbelviskosität  $\nu_t$  in Abhängigkeit des Sohlabstands  $z$ . Diese können von „casu“ problemlos reproduziert werden. In **Bild 31** sind die Verläufe der Geschwindigkeit in Kanallängsrichtung dargestellt. Durch einen „unnatürlich“ großen Reibungsbeiwert wurde die Geschwindigkeit in Sohlnähe nahe Null gebracht. **Bild 31a** visualisiert die Geschwindigkeiten in der gesamten Schicht. **Bild 31b** zeigt als Ausschnitt die Geschwindigkeiten im sohlnahen Teil der Vertikalen. In der Berechnung, deren Ergebnisse **Bild 31c** zeigt, sind in der vertikalen Diskretisierung in unmittelbarer Sohlnähe zwei zusätzliche Berechnungspunkte eingefügt worden. Das führt dazu, dass keine

nennenswerten Abweichungen zur analytischen Lösung mehr auftreten. Diese Verfeinerung zeigt aber auch, dass zur korrekten Simulation der großen Krümmungen des Geschwindigkeitsprofils in Sohlhöhe eine feine Diskretisierung erforderlich ist.

Dieser Testfall hat die Kennung „loglaw“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

### 9.3.4 Ebene Scherschicht

Die ebene Scherschicht (engl. two-dimensional mixing layer) ist eine Strömungskonfiguration aus der Gruppe der freien Scherschichten. In der ebenen Scherschicht existieren zwei Bereiche mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten bei gleicher Strömungsrichtung. Diese Bereiche tauschen über eine ebene Trennfläche hinweg miteinander Impuls aus. Dadurch wächst stromab die Dicke dieser reibungsbeeinflussten turbulenten Scherschicht. Die Rate, mit der die Dicke der Scherschicht wächst, ist ein Maß für die Größe des Impulsaustauschs.

WILCOX [143] vergleicht seine Berechnungen der ebenen Scherschicht mit den Messungen, die von LIEPMANN und LAUFER 1947 [70] veröffentlicht worden sind. Hier werden die Messungen, die WYGNANSKI und FIEDLER 1970 [146] veröffentlicht haben, zum Vergleich herangezogen. Die signifikant größere Ausbreitungsrate in den letztgenannten Messungen nehmen SLESSOR et al. [121] zum Anlass, den Einfluss der Zufluss-Randbedingungen auf die Anwachsrate zu untersuchen. Durch Manipulation der Wandgrenzschicht (Umschlagsdraht) auf einer Zunge, welche die beiden Strömungen vor ihrem Zusammenfließen trennt, gelingt es [121] die Anwachsrate um 21% zu verringern. Dieser Effekt, den auch [6] und [31] beobachtet haben, tritt nicht nur direkt hinter dem Zusammenfluss auf, sondern bleibt bis ins Fernfeld der Strömung erhalten, wo die Scherschicht eine große REYNOLDS-Zahl<sup>8</sup> erreicht.

Für den Vergleich zwischen Berechnungen und Messungen ist es bei der numerischen Simulation also offenbar entscheidend, die Randbedingungen genau wiederzugeben. Für die weitere Entwicklung der Scherschicht ist es ausschlaggebend, wie genau es gelingt, den Beginn der Scherschicht bei kleinen REYNOLDS-Zahlen, z. T. sogar den Umschlag der einströmenden laminaren Grenzschichten zu simulieren. Entsprechende Anforderungen sind für den Wasserbau aber wenig praxisrelevant, da Strömungen in flachen Oberflächengewässern durchweg turbulent sind und an der Sohle und zum Ufer hin breite turbulente Grenzschichten aufweisen.

Die Relevanz der ebenen Scherschichtströmung ergibt sich für den Wasserbau aus der Ähnlichkeit mit den Scherschichten, die z. B. in Hafeneinfahrten oder vor Bühnenfeldern auftreten. BOOIJ [8] untersucht im Labormodell

---

<sup>8</sup>Sie wird in diesem Fall mit der Geschwindigkeitsdifferenz und der Scherschichtdicke gebildet. REYNOLDS-Zahlen von bis zu  $2 \cdot 10^5$  werden in den Versuchen von SLESSOR et al. [121] erreicht.

einen Hafen von quadratischem Grundriss. Er gibt an, dass die Anwachsrate der Scherschicht am oberen Rand der bei freien Scherschichten gemessenen Werte liegt. BIJVELDS [7] untersucht ebenfalls die Daten von BOOIJ und findet, dass die Anwachsrate signifikant größer sind als diejenigen in den freien Scherschichten, die er zum Vergleich heranzieht. VAN SCHIJNDEL [112] studiert eine Hafeneinfahrt im physikalischen Modell. Durch die Anordnung einer permeablen Pfahl-Buhne im Fluss stromauf der Hafeneinfahrt verringert sich der Massen- und Impulsaustausch um ca 50 %. Dies lässt nun vermuten, dass die Wirkung der sogenannten CHRISTIANSEN-Umlenkwand [26] vor allem auf die Vergrößerung der Scherschichtbreite zurückzuführen ist. Laborversuche an freien Scherschichten, die eine praxisrelevante Beurteilung der Genauigkeit von numerischen Modellen für den Einsatz in der wasserbaulichen Praxis erlauben, müssten also hohe Turbulenzgrade, hohe REYNOLDS-Zahlen, raue Wände, ausgeprägte Wandgrenzschichten und eine entsprechende Spanne von Randbedingungen abdecken. Zudem wäre es erforderlich, auch experimentell den Einfluss der Sohlreibung auf die quasi freie Scherschicht zu untersuchen.

In dieser Arbeit ist die Untersuchung der ungeschichteten ebenen Scherschicht zudem als Referenz für die Untersuchungen der dichtegeschichteten ebenen Scherschicht in Abschnitt 9.4.2 erforderlich.

Ähnlich wie beim runden Freistrahle und der Nachlaufströmung wird bei der ebenen Scherschicht Selbstähnlichkeit beobachtet. Nach einer gewissen Anlaufstrecke tritt in allen Querschnitten senkrecht zur Hauptströmungsrichtung immer wieder die gleiche Geschwindigkeitsverteilung auf, wenn die Querkoordinate geeignet mit der Lauflänge skaliert wird. Selbstähnlichkeit lässt sich wie folgt beschreiben [143]:

$$\frac{v - v_u}{v_o - v_u} = f(\eta) \tag{9.27}$$

mit

$$\eta = \frac{z - z_m}{x - x_0}$$

Hierin gilt:

- $v$  Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung  $x$ ,
- $v_o$  Geschwindigkeit weit oberhalb der Scherschicht (schnelle Seite),
- $v_u$  Geschwindigkeit weit unterhalb der Scherschicht (langsame Seite),
- $x$  Raumkoordinate in Hauptströmungsrichtung,
- $x_0$  virtueller Ursprung der Scherschicht,
- $z$  Raumkoordinate senkrecht zur Scherschicht und
- $z_m$  Stelle in der Scherschicht an der  $v = v_o - v_u/2$ .

Bei der ebenen Scherschicht muss die Koordinate  $z$  (senkrecht zur Scherschicht) mit der ersten Potenz der Lauflänge  $x$  skaliert werden, d. h. die Aufweitung der ebenen Scherschicht erfolgt keilförmig. Die Geschwindigkeitsmessungen an der ebenen Scherschicht zeigen, dass die Annahme des selbstähnlichen Verhaltens vom Experiment in guter Näherung bestätigt wird [6], [146].

Die Selbstähnlichkeit ermöglicht es, die Differential-Gln. (7.1) und (7.2), die das Turbulenzmodell darstellen, auf ein 1D-Problem zu reduzieren. Von WILCOX [143] ist eine Software veröffentlicht worden, welche die selbstähnliche Lösung der ebenen Scherschicht auch für das  $k$ - $\epsilon$ -Modell berechnet. Die Anwendung dieser Software hat bei einer Ortsschrittweitenverfeinerung keine konvergenten Ergebnisse ergeben. Daher ist die ursprüngliche Idee, anhand dieser Testrechnung auch die datentechnische Implementierung des Konvektionsterms des Turbulenzmodells zu überprüfen, aufgegeben worden. Im Rahmen dieser Arbeit lässt sich die noch fehlende Überprüfung des Konvektionsterms des Turbulenzmodells mit weniger Aufwand anhand des Testfalls „isocon“ aus Abschnitt 9.3.1 vornehmen.

Für diesen Abschnitt wurden Testrechnungen für zwei unterschiedliche Anordnungen der Scherschicht durchgeführt. In der einen Anordnung findet die Impulsdiffusion bzw. Reibung vertikal statt, d. h. der schnellere Strom reibt an dem unter ihm fließenden langsameren. In der anderen Anordnung wird der Impuls horizontal diffundiert, d. h. die beiden unterschiedlich schnellen Ströme fließen in der Draufsicht nebeneinander. Diese beiden Berechnungen sind durchgeführt worden, da sich im Programm „casu“ die Diskretisierung der horizontalen Raumrichtungen von derjenigen der vertikalen Raumrichtung unterscheidet. Dieses Vorgehen verschafft eine zusätzliche Sicherheit gegen Implementierungsfehler.

**Bild 32** zeigt die Geschwindigkeitsverteilung  $v(x,z)$  für die Testrechnung mit dem vertikalen Impulsaustausch („fresh“), die Verteilung für die Testrechnung mit dem horizontalen Impulsaustausch („hofresh“) sowie den Vergleich

der Geschwindigkeitsprofile am Ausströmrand mit den Messungen von WYGNANSKI und FIEDLER [146]. Dazu ist Folgendes anzumerken: Stabilität bei der Testrechnung mit vertikalem Impulsaustausch lässt sich nur erzielen, wenn das Geschwindigkeitsprofil der Zuströmung abgeflacht wird. Bei der Testrechnung mit horizontalem Impulsaustausch kann eine freie seitliche Zuströmung angeordnet werden, während der Strömungsraum bei der Testrechnung mit vertikalem Impulsaustausch durch die Sohle und den Wasserspiegel begrenzt ist. Die Strömung entspricht somit dem Beginn der Strömung über eine rückspringende Stufe inklusive der Tendenz, eine Rückströmzone zu bilden und im weiteren Verlauf an der unteren Wand wieder anzuliegen. Die größere Scherschichtbreite in der „fresh“-Konfiguration gegenüber der „hofresh“-Konfiguration lässt sich mit der seitlichen Begrenzung und der größeren Zulaufbreite vollständig erklären. Es bleibt also der Umstand festzuhalten, dass das  $k$ - $\epsilon$ -Modell eine zu geringe Scherschichtbreite berechnet, wenn mit den Messungen von WYGNANSKI und FIEDLER [146] verglichen wird. Auf eine besonders detaillierte Nachbildung der Zuflussbedingungen in der Messung wurde hier verzichtet, weil, wie oben bereits ausgeführt, die Messungen im Bezug auf den Wasserbau wenig praxisrelevant sind. Dies gilt auch für die quantitative Ermittlung der Abweichung zwischen Berechnung und Messung.

**Bild 33** vergleicht zwei Berechnungen in der „fresh“-Anordnung. Im ersten Fall hat die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  am Zuströmrand den Wert  $0,02 \text{ m}^2/\text{s}^2$ , im zweiten Fall  $0,06 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Die Dissipationsrate  $\epsilon$  beträgt in beiden Berechnungen am Einströmrand  $0,006 \text{ m}^2/\text{s}^3$ . Dies entspricht einem Turbulenzgrad von 12% bzw. 20%. In der Mitte der Scherschicht ergeben Messungen [146] einen Turbulenzgrad von 16%. Der erhebliche Unterschied in der Ausbreitung der Scherschicht lässt erkennen, dass die große Sensitivität der Strömung bzgl. der Zuströmbedingungen auch in der numerischen Berechnung auftritt.

**Bild 34** zeigt die Verteilung der Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$ , sowie die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit  $v$ . **Bild 35** stellt zwei Berechnungen in der „hofresh“-Konfiguration den Messungen von WYGNANSKI und FIEDLER [146] gegenüber. Die erste Berechnung ist mit den Standard-Konstanten des  $k$ - $\epsilon$ -Modells durchgeführt worden. In der zweiten Berechnung ist  $C_\mu$  an die Messungen angepasst (rekalibriert) worden. Dabei ist es erforderlich,  $C_\mu$  von 0,09 auf 0,16 anzuheben.

Unter der Kennung „hofresh“ befindet sich die Testrechnung mit dem horizontalen Impulsaustausch und unter der Kennung „fresh“ die Testrech-

nung mit dem vertikalen Impulsaustausch in der bereits angegebenen Quelle  
<http://www.wyrwa.de/casu/test>.

### 9.3.5 Zwischenfazit

Im Abschnitt 9.1 wird das Verfahren erläutert, die datentechnische Realisierung einzelner Komponenten anhand von zwei Beispielen zu überprüfen. Demnach kann das hier implementierte  $k$ - $\epsilon$ -Modell als überprüft gelten. In der Testrechnung „iso“ in Abschnitt 9.3.1 ist ausschließlich die Dissipation aktiv, womit deren Realisierung überprüft ist. Die Berechnung „isocon“ in Abschnitt 9.3.1 testet die Dissipation und die Konvektion, womit die Realisierung der Konvektion geprüft ist. In Abschnitt 9.3.2 wird die Dissipation und Diffusion getestet. Dies führt zur Überprüfung der Diffusion. Bei der Berechnung des logarithmischen Wandgesetzes (Abschnitt 9.3.3) leisten die Produktion und die Dissipation (in der  $\epsilon$ -Gleichung auch die Diffusion) einen Beitrag. Dies verifiziert die datentechnische Realisierung der Produktion als letzter bisher noch ungeprüfter Komponente.

Als Besonderheit des numerischen Näherungsverfahrens muß die Notwendigkeit genannt werden, sehr kleine Zeitschritte zu verwenden, wenn die Dissipation ausreichend genau wiedergegeben werden soll, siehe Abschnitt 9.3.1. Die Besonderheiten bei der Berechnung der Konvektion, die im Abschnitt 9.2.7 diskutiert werden, gilt es auch beim Turbulenzmodell zu beachten.

Die hier durchgeführte Überprüfung von Software und numerischem Algorithmus ist anhand von Testrechnungen vorgenommen worden. Das Berechnungsprogramm fungiert dabei als Black Box. Damit ist das angewandte Verfahren auch zur Überprüfung von kommerziellen Programmen geeignet, deren Quellcode dem Benutzer nicht zugänglich ist.

Neben den datentechnischen und numerischen Aspekten erlaubt es der hier benutzte Satz an Testfällen, die Konstanten des  $k$ - $\epsilon$ -Modells zu bestimmen. In der folgenden Tabelle sind die Standard-Konstanten nach [104] und [142], die Modell-Konstanten des RNG-Modells [150] (s. Kapitel 7) und die hier ermittelten Konstanten aufgeführt.

	$c_\mu$	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$\kappa$
Standard	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	0,433
RNG [150]	0,0837	1,063	1,7215	0,7179	0,7179	0,372
Hier für ebene Scherschicht	0,16	1,48	1,92	0,74	0,962	0,412
Hier für runden Freistrah	0,06	1,20	1,92	0,74	0,962	0,412

Tabelle 9.1: Konstanten des Turbulenzmodells

Die Werte in der oben stehenden Tabelle kommen wie folgt zustande:  $c_{\epsilon 2}$  bestimmt sich aus den Experimenten mit abklingender isotroper Turbulenz, s. Abschnitt 9.3.1. Der Wert für  $\sigma_k$  ergibt sich, wenn der Abklingexponent  $n = -2$  als Messwert genommen wird (s. Abschnitt 9.3.2). Mit Hilfe der Bedingung von LELE [66] Gl.(9.20) berechnet sich dann  $\sigma_\epsilon$ . Die Bestimmung der verbleibenden Konstanten  $c_\mu$  und  $c_{\epsilon 1}$  ist nicht unabhängig voneinander möglich. Ausgehend von der auf Messungen beruhenden Angabe der KARMAN-Konstante  $\kappa=0,412$  durch NEZU und NAKAGAWA [89], berechnet sich mit Gl. (9.26) die Konstante  $c_{\epsilon 1}$  in Abhängigkeit von  $c_\mu$ . Insbesondere freie Scherschichten reagieren sensitiv auf die Konstante  $c_\mu$ . In dieser Arbeit ist anhand der hier behandelten ebenen Scherschicht der Wert von  $c_\mu$  mit 0,16 rekali­briert worden. SANDERS et al. [109] behandeln einen runden Freistrah. Für diese Situation ergibt die Rekalibrierung des k- $\epsilon$ -Modells einen Wert für  $c_\mu$  von 0,06. WILCOX [143] trägt die Ausbreitungsraten verschiedener Turbulenzmodelle für verschiedene freie Scherschichten in folgender Tabelle zusammen:

Ausbreitungsrate	k- $\epsilon$	k- $\omega$	LRR <sup>9</sup>	Messung
Ebene Scherschicht	0.098	0.103-0.141	0.104	0.115
Runder Freistrah	0.120	0.073-0.371	0.135	0.086-0.095

Tabelle 9.2: Ausbreitungsraten freier Scherschichten [143]

Auch wenn, wie in Abschnitt 9.3.4 diskutiert, die Zahlenangaben für die gemessene Ausbreitungsrate der ebenen Scherschicht problematisch sind und die numerischen Ergebnisse für das k- $\epsilon$ -Modell, die WILCOX [143] vorlegt, nicht nachvollziehbar sind, wird doch die Tendenz bestätigt, dass die Scherschichtbreite der ebenen Scherschicht vom k- $\epsilon$ -Modell mit den Standard-Konstanten zu gering berechnet wird. Für die Tendenz des k- $\epsilon$ -Modells, die

<sup>9</sup>LAUNDER-REECE-RODI REYNOLDS-Spannungs-Modell

Ausbreitungsrate des runden Freistrahls zu überschätzen, finden sich Angaben in der Literatur [109].

Daher werden in 9.2 zwei Wertepaare für  $c_\mu$  und  $c_{e1}$  angegeben, einmal für die Rekalibrierung mit der ebenen Scherschicht und einmal für die Rekalibrierung mit dem runden Freistrah.

Es existieren Vorschläge u.a. von RODI [104], die Konstante  $c_\mu$  als Funktion des Verhältnisses von Produktion zu Dissipation zu formulieren.

Der Wert für die KARMAN-Konstante  $\kappa=0,412$  wird hier nicht weiter in Frage gestellt. Für Grenzschichtströmungen ist dieser Wert so gut experimentell bestätigt und für die Berechnung so zentral, dass z.B. UMLAUF [132] seine sämtlichen Turbulenzmodelle so rekalibriert, dass sie für  $\kappa$  den Wert 0,4 ergeben. YAKHOT und ORSZAG haben 1992 zusammen mit THANGAM, GATSKI und SPEZIALE eine Modifikation [149] ihres RNG-Modells veröffentlicht, das es ermöglicht,  $\kappa=0,4$  einzuhalten.

Die Abweichungen zwischen den Werten für die Modell-Konstanten des  $k-\epsilon$ -Modells, die in obiger Tabelle auftauchen, sind insofern für die praktische Berechnungstätigkeit relevant, als sich in ihnen die vom Turbulenz-Modell zu erwartende Ungenauigkeit teilweise widerspiegelt. Auch wenn es nur mit gewissen Einschränkungen gelingen kann, die von einem Turbulenzmodell zu erwartenden Abweichungen von der Natur in einem Werte-Intervall seiner Modellkonstanten abzubilden, wäre doch der Nutzen für die Berechnungstätigkeit im Wasserbau erheblich. Die Validierung eines Modells lässt sich dann zumindest teilweise durch eine Sensitivitätsuntersuchung ersetzen. Aufgrund des chronischen Messwertemangels im Wasserbau ist eine Validierung nur in seltenen Ausnahmefällen möglich. Ein wissenschaftlich abgesichertes Verfahren, das eine Abgrenzung der Modell-Genauigkeit anhand einer Sensitivitätsuntersuchung erlaubt, wäre somit ein bedeutender technischer Fortschritt. Der Umfang der hier untersuchten Testfälle und die Praxisrelevanz der zum Vergleich herangezogenen Experimente erlaubt noch keine gesicherten Angaben zum Werte-Intervall, stellt aber einen ersten Schritt in diese Richtung dar.

## 9.4 Stabile Dichteschichtung

### 9.4.1 Abklingende isotrope Turbulenz

In dieser Testrechnung werden die Versuche von ITSWEIRE et al. [52] nachgebildet. Wie im Testfall „isocon“ in Abschnitt 9.3.1 wird hier das Abklingen isotroper Turbulenz beobachtet, die von einer gleichförmigen Strömung konvektiert wird. Die Abklingdauer ist proportional zu der von der mittleren Strömung zurückgelegten Strecke.

Für den Fall abklingender isotroper Turbulenz lassen sich die partiellen Differentialgleichungen, die das k- $\epsilon$ -Modell Gln. (7.1) und (7.2) ausmachen, auf die Terme der zeitlichen Änderung, Dissipation und Buoyancy reduzieren. Durch Differenzieren und Einsetzen kann man daraus folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Dissipationsrate  $\epsilon$  ableiten:

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = \frac{(2c_{\epsilon 2} - 1)}{c_{\epsilon 2}} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \cdot \frac{c_{\mu}}{\sigma_t} \cdot N^2 \cdot \epsilon \quad (9.28)$$

mit

- $\epsilon$  Dissipationsrate,
- $t$  Zeit,
- $c_{\epsilon 2}, c_{\mu}, \sigma_t$  Modellkonstanten und
- $N$  BRUNT-VÄISÄLÄ-Frequenz Gl. (6.8).

Die Anfangsbedingungen sind:

$$\epsilon(t=0) = \epsilon_0 \text{ und } \frac{\partial \epsilon}{\partial t}(t=0) = -c_{\epsilon 2} \cdot \frac{\epsilon_0^2}{k_0}$$

mit

- $\epsilon_0$  Dissipationsrate am Anfang des Abklingvorgangs und
- $k_0$  kinetische Energie der Turbulenz am Anfang des Abklingvorgangs.

Aus [52] wird der Versuch mit der BRUNT-VÄISÄLÄ-Frequenz, Gl. (6.8),  $N=0,97$  1/s verwendet<sup>10</sup>. Der zuffießende Dichtegradient beträgt  $109 \text{ kg/m}^4$ . Die Zuflussgeschwindigkeit hat den Wert  $0,25 \text{ m/s}$ . Im numerischen Modell wird der gitternächste Messpunkt als Zuflussrand verwendet. An dieser Stelle weist die Turbulenz die Größen  $k=63,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^2$  und  $\epsilon=106,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^3$  auf. Damit ergibt sich die Wirbelviskosität  $\nu_t=3,41 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Die turbulente Längenskala  $l_t$ , Gl.(7.7), beträgt  $0,0151 \text{ m}$ . Das diskretisierte Fluidvolumen ist  $0,25 \text{ m}$  tief,  $0,40 \text{ m}$  breit und  $2,2 \text{ m}$  lang.

Der Vergleich mit den Messwerten dient der Überprüfung von Stufe 1 (mathematische Modellierung der physikalischen Vorgänge) in Abschnitt 9.1.

---

<sup>10</sup>Versuchsreihe R37 in [52]

Um auch Aussagen zu Stufe 2 (Näherungslösung dieser partiellen Differentialgleichungen) und Stufe 3 (datentechnische Realisierung) machen zu können, wird eine Vergleichslösung der partiellen Differentialgleichungen benötigt. In diesem Testfall ist dazu eine Vergleichsberechnung mit dem Programm „MapleV“<sup>11</sup> durchgeführt worden. Mit einer Schrittweitenverfeinerung hat sich die Konvergenz der Ergebnisse nachprüfen lassen.

**Bild 36** zeigt die Berechnungsergebnisse, die mit dem Programm „casu“ erzielt worden sind im Vergleich mit den o. a. Resultaten von „MapleV“ und den Messungen aus [52]. Zur Orientierung ist im **Bild 36** die analytische Lösung des ungeschichteten Fluids (siehe Abschnitt 9.3.1) aufgetragen. Die Übereinstimmung mit den Resultaten von „MapleV“ lässt die gelungene datentechnische Realisierung des Buoyancy-Terms mit einem geeigneten numerischen Verfahren erkennen. Die weitgehende Übereinstimmung mit den Messwerten am Anfang des Abklingvorgangs ist dem Umstand zuzuschreiben, dass die Modellkonstante  $c_{\epsilon 2}$  des k- $\epsilon$ -Modells so gewählt worden ist, dass das Abklingen isotroper Turbulenz damit erfasst werden kann [104]. Bevor aus den Differenzen zwischen Messung und Berechnung Schlüsse abgeleitet werden können, sind folgende Besonderheiten in Betracht zu ziehen: Im Experiment ist die mittlere Strömung nicht völlig konstant, sondern sie beschleunigt von 0,25 m/s auf 0,26 m/s zum Ende der Messstrecke hin. Dies lässt auf Wandreibungseinflüsse schließen. Die BRUNT-VÄISÄLÄ-Frequenz  $N$  und damit die Stärke der Schichtung nimmt im Experiment entlang der Messstrecke von 1,02 auf 0,91/s ab. In den Berechnungen ist sie als konstant angenommen worden. Zwischen den Geschwindigkeitsmessungen und der Angabe der Dissipationsrate liegt ein Auswertungsverfahren, das auf einer Isotropie-Annahme fußt.

Dieser Testfall hat die Kennung „isoconst“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

---

<sup>11</sup>Kommerzielles Mathematikpaket der Firma Waterloo Maple Inc. (Release 5)

## 9.4.2 Ebene Scherschicht

Der Testfall einer stabil dichtegeschichteten ebenen Scherschicht ist deswegen so interessant, weil dabei der Zusammenbruch des Mischungsvorgangs infolge von Dichteschichtung besonders deutlich wird [25] [63]. Die Scherschicht verbreitert sich nicht mehr mit einer konstanten Rate wie im ungeschichteten Fall (Abschnitt 9.3.4), sondern die Turbulenz wird mit zunehmender Breite der Mischungszonen immer stärker gedämpft, bis das Breitenwachstum der Scherschicht zum Stillstand kommt. Die Scherschicht erreicht also eine Endbreite, die sie in ihrem weiteren Verlauf beibehält<sup>12</sup>. Dieser Vorgang kann auch anhand der RICHARDSON-Zahl erklärt werden. Wenn die in Gl. (6.9) auftretenden Dichte- und Geschwindigkeitsgradienten in Differenzenquotienten verwandelt werden, ergibt sich die bulk-RICHARDSON-Zahl:

$$Ri_b = \frac{-g \Delta\rho \cdot \Delta z}{\rho (\Delta v)^2} \quad (9.29)$$

mit  
 $\Delta\rho$  Dichtedifferenz,  
 $\Delta v$  Geschwindigkeitsdifferenz und  
 $\Delta z$  Scherschichtbreite

Bei der ebenen Scherschicht bleiben Dichte- und Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den beiden Seiten der Scherschicht konstant. Mit zunehmender Lauflänge steigt die Scherschichtbreite und damit die RICHARDSON-Zahl an. Diese ist, wie in Abschnitt 6.3 erläutert, ein Maß für den Einfluss der Dichteschichtung auf die Strömung, d. h., der Einfluss der Dichteschichtung auf die Turbulenz in der ebenen Scherschicht steigt mit zunehmender Scherschichtbreite. Am Beginn der Scherschicht, wenn die Breite noch gering ist, hat die Dichteschichtung kaum Einfluss und die Scherschicht verhält sich wie im ungeschichteten Fall. Experimente [25] [63] zeigen, dass die Dichteschichtung mit zunehmender Lauflänge die Turbulenz immer stärker dämpft, bis das Breitenwachstum ganz zum Stillstand kommt.

Der Stillstand des Breitenwachstums (Turbulenzkollaps) hat nicht das Verschwinden jeglicher Schwankungsbewegungen zur Folge. Die verbleibenden Schwankungsbewegungen werden von HOPFINGER [46] als quasi-2D-Turbulenz und nichtlineare Grenzflächenwellen beschrieben. Es besteht kein Anlass anzunehmen, dass das Verhalten der Schwankungsbewegungen nach dem Kollaps mit einem Turbulenz-Modell, das wie z. B. das  $k$ - $\epsilon$ -Modell eine isotrope Wirbelviskosität verwendet, simulierbar ist. Für die Berechnung des

---

<sup>12</sup>Z.T. wird sogar ein Rückgang der Breite beobachtet [63].

Stofftransports im Ästuar ist es nicht relevant, die geringfügige Mischungswirkung nach dem Kollaps zu erfassen, sondern es ist für die Ermittlung der insgesamt transportierten Stoffmenge entscheidend, dass das Turbulenzmodell das Eintreten des Kollapses näherungsweise erfassen kann.

In den hier durchgeführten Berechnungen kommt das Breitenwachstum der ebenen Scherschicht nahezu vollständig zum Stillstand. Die in diesem Endzustand auftretende RICHARDSON-Zahl dient als Vergleichskriterium. CHU und BADDOUR [25] ermitteln aus ihren Experimenten maximale Gradient-RICHARDSON-Zahlen<sup>13</sup> von 0,302 bis 0,469 für den zusammengebrochenen Endzustand der ebenen Scherschicht. **Bild 37** zeigt die hier berechneten Geschwindigkeitsverteilungen für dichtegeschichtete ebene Scherschichten und vergleicht mit dem ungeschichteten Fall. Die aus den Berechnungen ermittelte maximale Gradient-RICHARDSON-Zahl beträgt für die Berechnungen 0,339 und 0,454. Es kann vermutet werden, dass auch hier die starke Sensitivität der Strömung bezüglich der Zuflussrandbedingungen wie im ungeschichteten Fall (Abschnitt 9.3.4) auftritt.

Dieser Testfall hat die Kennung „strash“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

---

<sup>13</sup>Zu deren Berechnung verwenden die Autoren die maximalen Dichte- und Geschwindigkeitsgradienten, die im Experiment nicht an derselben Stelle auftreten.

### 9.4.3 Wandgrenzschicht

Der hier behandelte Testfall einer stabil dichtegeschichteten Wandgrenzschicht ist so angelegt worden, dass er den Versuchsaufbau von WIER und RÖMER [140] nachbildet. Diese haben die raue Sohle eines Windkanals auf eine konstante Temperatur gekühlt. Durch eine große Anlaufstrecke (13 m) stellen sie sicher, dass sich der wandnahe Bereich<sup>14</sup> im Gleichgewicht befindet. Durch Auftragung der gemessenen Geschwindigkeitsprofile gemäß der MONIN-OBUKHOV-Ähnlichkeitshypothese (Abschnitt 6.8) können sie die im logarithmisch-linearen Geschwindigkeitsprofil, Gl. (6.32), enthaltene Konstante bestimmen, so dass die im wandnahen Bereich gemessenen Geschwindigkeiten in engen Grenzen mit dem Geschwindigkeitsprofil übereinstimmen.

Als Berechnungsgebiet ist ein gerader Kanal von rechteckigem Querschnitt und 200 m Länge gewählt worden, der in Fließrichtung äquidistante Knoten in 2 m Abstand aufweist. Als Wassertiefe ist 10 m gewählt worden, wobei die unteren 2 m die gleiche Diskretisierung aufweisen wie im Beispiel „logarithmisches Wandgesetz“, Abschnitt 9.3.3. Die Zuströmgeschwindigkeit beträgt 0,9 m/s. Am Einlauf wird das Geschwindigkeitsprofil in den unteren 0,15 m abgeschrägt. Die Sinkgeschwindigkeit ist in diesem Testfall Null gesetzt. Als Sohlreibungskoeffizient wird  $\lambda=0.256$  angesetzt. Als Randbedingung für die Konzentration wird eine konstante Konzentration an der Sohle, s. Tabelle 9.3, vorgegeben. Die Konzentration im Zustrom beträgt Null. Die Vergleichbarkeit mit den Messungen wird über die RICHARDSON-Zahl<sup>15</sup> hergestellt, die, wie in Abschnitt 6.8 erläutert, mit dem dimensionslosen Wandabstand in Verbindung steht. Die Resultate, die sich aus den verschiedenen Berechnungen ergeben, sind in der folgenden Tabelle 9.3 zusammengefasst. Es wird die in Abschnitt 7.3 beschriebene Stabilitätsfunktion nach GALPERIN [36] verwendet.

---

<sup>14</sup>die unteren 20% der Grenzschicht, in denen in ungeschichteten Grenzschichten das logarithmische Wandgesetz Gl. (2.1) gilt

<sup>15</sup>hier gebildet mit der Grenzschichtdicke  $\delta$

Berechnung	ohne Schichtung	Standard k- $\epsilon$	Stabilitätsfunktion
$c_b$	0,00483	0,00242	0,00242
$\Delta\rho$	0	3,985	3,985
$\delta_{99}$	4,75	3,08	2,61
$Ri_b$	0	0,149	0,126
$Re_\delta$	411 000	277 000	235 000
$v_\tau$	0,0455	0,0357	0,0301
$\tau_b$	2,07	1,27	0,91
$\nu_{t,b}$	0,000 572	0.000 447	0.000 353
$\frac{\partial\rho}{\partial z}$	0	11,46	9,00
$L_m$	-	1,75	1,69

Tabelle 9.3: Resultate

mit

- $c_b$  konstante Konzentration (Volumenanteil) an der Sohle (engl. bottom) ,
- $\Delta\rho$  Dichtedifferenz in  $\text{kg}/\text{m}^3$ ,
- $\delta_{99}$  Grenzschichtdicke in m,
- $Ri_b$  bulk-RICHARDSON-Zahl  $\frac{g\delta_{99}\Delta\rho}{\rho_w v_\infty^2}$ ,
- $Re_\delta$  REYNOLDS-Zahl  $\frac{v_\infty \delta_{99}}{\nu}$ ,
- $v_\tau$  Sohlschubspannungs-Geschwindigkeit in m/s,
- $\tau_b$  Sohlschubspannung in  $\text{N}/\text{m}^2$ ,
- $\nu_{t,b}$  Wirbelviskosität an der Sohle in  $\text{m}^2/\text{s}$ ,
- $\frac{\partial\rho}{\partial z}$  Dichtegradient an der Sohle in  $\text{kg}/\text{m}^2$  und
- $L_m$  MONIN-OBUKHOV-Stabilitätslänge, Gl.(6.29), in m.

Die Schwierigkeiten, die sich bei der Nachrechnung von in der Literatur [4], [87], [91], [95] veröffentlichten Messungen ergeben, seien anhand der Arbeiten von MOREL et al. [83], [84] veranschaulicht: In **Bild 38a** sind die von MOREL et al. [84] gemessenen Geschwindigkeitsprofile für die beiden Versuche mit und ohne Kühlung der Windkanalsole an vier in Längsrichtung der Strömung aufeinander folgenden Positionen angegeben. Bei der Validierung eines k- $\epsilon$ -Turbulenzmodells in [83] werden die Messwerte an der Position<sup>16</sup> x=6400 mm aus [84] als Randbedingung der Strömungsberechnung verwendet. Aus der in **Bild 38a** wiedergegebenen Darstellung sind aber keine konkludenten Unterschiede zwischen den Geschwindigkeitsprofilen an den Positionen x=6400 mm und x=9300 mm zu entnehmen. Desweiteren fehlen die in [83] ebenfalls als Randbedingung bei Position x=6400 mm angesetzten Profile der

<sup>16</sup>Die Abstandsangaben beziehen sich auf die Fließlänge hinter dem zur Herbeiführung des Umschlags auf der Kanalsole angebrachten Kamm.

Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  in [84]. Dies führt dazu, dass nur ein qualitativer Vergleich mit den in **Bild 38b** wiedergegebenen Berechnungsergebnissen des Programms „casu“ möglich ist, obwohl Messung und Berechnung in Bezug auf die bulk-RICHARDSON-Zahl  $Ri_b$  (0,173 in der Messung von MOREL et al. [84]) miteinander vergleichbar sind. Die Berechnungen zeigen den von der Dichteschichtung verursachten Rückgang der Geschwindigkeit im wandnahen Teil des Profils. Eine Abnahme der Grenzschichtdicke und der Sohlschubspannung wird im Experiment beobachtet und tritt in den Berechnungen ebenfalls auf.

Um zu einem quantitativen Vergleich zu kommen, wird das berechnete Geschwindigkeitsprofil wie bei WIER und RÖMER [140] gemäß der MONIN-OBUKHOV-Ähnlichkeitshypothese aufgetragen. Der Wandabstand wird dazu mit der MONIN-OBUKHOV-Länge  $L_m$  skaliert. Die Geschwindigkeit wird mit der jeweiligen Sohlschubspannungsgeschwindigkeit  $v_\tau$  skaliert und im Ursprung an die Stelle  $z/L_m=0.1$  verschoben. Durch diese Skalierung und Verschiebung sind die Geschwindigkeiten nicht mehr direkt vergleichbar. Wie SCHLICHTING [111] darlegt, besteht ein Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsverteilung und Widerstandsgesetz. Dieser lässt sich bei der Gleichdruckgrenzschicht herleiten, wenn man sich den Umstand zunutze macht, dass sich die Impulsverlustdicke aus der Integration über die Schubspannung entlang der Stromlinie ergibt. Diese Information über den Verlauf der Schubspannung und die jeweilige Grenzschichtdicke wird bei den Messungen [140] nicht mitgeteilt. Die enge Verbindung von Geschwindigkeitsverteilung und Widerstandsgesetz lässt aber die Schlußfolgerung zu, dass nur, wenn die Geschwindigkeitsverteilung (deren Details für die praktische Berechnung nebensächlich sein können) zutreffend wiedergegeben werden kann, auch die Reibungswiderstände (welche praktisch vielfach von größerem Interesse sind) stimmen. Analoges gilt für den Zusammenhang von Konzentrationsverteilung und Transportrate.

**Bild 39** vergleicht die Berechnungsergebnisse mit und ohne Stabilitätsfunktion mit den Kurven, die in Anpassung an Experimente entstanden sind. Zum einen handelt es sich um die Kurve, die WIER und RÖMER [140] als Ergebnis ihrer Messungen angeben, zum anderen um die Kurve, die von BUSINGER et al. [13] 1971 als Anpassung an Messwerte angegeben worden ist, und die auch BURCHARD et al. [12] benutzen, um ihre Berechnungen mit der Stabilitätsfunktion nach GALPERIN [36] zu vergleichen. Es zeigt sich, dass durch Anwendung der Stabilitätsfunktion die gemessene Geschwindigkeitsverteilung besser angenähert werden kann.

Dieser Testfall hat die Kennung „loglinlaw“ in der bereits angegebenen Quelle  
<http://www.wyrwa.de/casu/test>.

## 9.5 Suspensierte Sedimente

### 9.5.1 Diffusion und Sinken

Dieser Testfall ist so konstruiert worden, dass nur die Diffusion und das Sinken des Sediments einen Beitrag zum Ergebnis leisten. Die Randbedingungen werden so angesetzt, dass das Wasser in Ruhe bleibt. Im stationären Fall halten sich der aufwärts gerichtete diffusive Fluss und das Absinken des Sediments dabei gerade in der Waage. Die Gl. (6.4) reduziert sich aufgrund dieser Annahmen wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial c}{\partial z} + w_s \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (9.30)$$

mit

- c Konzentration als Volumenanteil des Sediments,
- z aufwärts gerichtete Raumkoordinate,
- D Sediment-Diffusivität und
- $w_s$  Sinkgeschwindigkeit entgegen der z-Richtung.

Wird nun noch die Wirbelviskosität  $\nu_t$  und damit die Stoffdiffusivität D als konstant angenommen, lässt sich Gl. (9.30) analytisch lösen:

$$c = e^{a \cdot (z+z_0)} \quad (9.31)$$

wobei

$$a = \frac{w_s}{D} = \frac{w_s \cdot Sc_t}{\nu_t}$$

und

$$z_0 = a \cdot \ln \{c(z=0)\}$$

sind; mit

- $Sc_t$  turbulente SCHMIDT-Zahl und
- $\nu_t$  Wirbelviskosität.

In diesem Testfall ist die gleiche vertikale Diskretisierung wie im Testfall Abschnitt 9.3.3 verwendet worden. **Bild 40** zeigt, dass die Berechnung mit dem Programm „casu“ und die analytische Lösung keine erkennbaren Differenzen aufweisen.

Dieser Testfall hat die Kennung „rouse“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

## 9.5.2 Erosion

Dieser Testfall (**Bild 41**) dient der Abschätzung der Abweichungen, die das Turbulenzmodell bei der Erosion kohäsiver, suspendierbarer Sedimente verursacht. In einer 2000 m langen und 10 m tiefen Rinne wird eine Gerineströmung erzeugt, die im ungeschichteten Fall über die ganze Länge ein nahezu konstantes Geschwindigkeitsprofil aufweist. Dieses ist durch ein iteratives Vorgehen erzeugt worden. Das Geschwindigkeitsprofil am Ausströmrand der ersten Berechnung wird als Zuström-Randbedingung für die nächste Berechnung verwendet. Diese Prozedur wiederholt sich so lange, bis die Abweichungen zwischen beiden Profilen ausreichend gering sind. In **Bild 41b** zeigt die violette Kurve das Zuströmprofil, die rote Kurve das Ausströmprofil. Mit  $\lambda=0,11$  als Reibungsbeiwert<sup>17</sup> ergibt sich ein Wasserspiegelgefälle von 0,035 m auf der 2000 m langen Strecke. Dies entspricht einer mittleren Sohlschubspannung  $\tau_b=1,71 \text{ N/m}^2$ , einer Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_\tau=0,041 \text{ m/s}$  und einem Widerstandsbeiwert<sup>18</sup>  $C_D=0,00323$ .

Im nächsten Arbeitsschritt wird dann ein Zustrom an Suspensions-Konzentration über den unteren Gebietsrand (Sohle) zugegeben, der einem Massenstrom von  $0,96 \text{ g/(s m}^2\text{)}$  entspricht. Dieser Massenstrom ergibt sich aus dem Erosionsmodell, Gl. (5.2), mit der Erodibilitätskonstante  $e=0,735 \text{ g/(s m}^2\text{)}$  und der kritischen Erosionsschubspannung  $\tau_e=0,742 \text{ N/m}^2$ . Gemäß den Messungen von PULS [97] entsprechen diese Werte einer Bodenschicht, die bereits ein gewisses Maß an Konsolidierung erfahren hat (siehe auch Abschnitt 5.6).

**Bild 41a** zeigt Längsschnitte durch die Konzentrationsverteilungen. Bei der Berechnung, die im obersten Längsschnitt („ohne Schichtung“) dargestellt ist, wurde der Einfluss der Konzentration auf die Dichte des Fluides nicht berücksichtigt, so dass sich die Konzentration wie ein Tracer, der keinen Einfluss auf die Strömung ausübt, verhält. Die roten Kurven in **Bild 41b** und **Bild 41c** zeigen das Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofil am Ausströmrand. Im mittleren Längsschnitt von **Bild 41a** („Standard  $k-\epsilon$ “) ist die Konzentrationsverteilung zu sehen, die sich ergibt, wenn der Einfluss der Konzentration auf die Dichte mitberücksichtigt wird. Das  $k-\epsilon$ -Turbulenzmodell arbeitet in diesem Fall mit einem konstanten  $c_\mu$ . Die grünen Kurven in **Bild 41b** und **Bild 41c** zeigen das Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofil am Ausströmrand. Im unteren Längsschnitt von **Bild 41a** („Stabilitätsfunktion“)

---

<sup>17</sup>Dieser Reibungsbeiwert wirkt auf den sohnächsten Berechnungspunkt und ist daher netzabhängig. Siehe Anhang 12.2.

<sup>18</sup>Siehe Anhang 12.2

ist die Konzentrationsverteilung zu sehen, die sich ergibt, wenn zusätzlich noch die in Abschnitt 7.3 beschriebene und in Abschnitt 9.4.3 getestete Stabilitätsfunktion nach GALPERIN [36] verwendet wird. Die blauen Kurven in **Bild 41b** und **Bild 41c** zeigen das zugehörige Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofil.

In Folge der Dichteschichtung verringert sich die Sohlschubspannung. Die Sohlschubspannungen am Ausflussrand der drei hier durchgeführten Berechnungen sind in **Bild 41a** mit angegeben und betragen  $\tau_b=1,73 \text{ N/m}^2$  in der Berechnung „ohne Schichtung“,  $\tau_b=1,35 \text{ N/m}^2$  in der Berechnung „Standard k- $\epsilon$ “ und  $\tau_b=1,17 \text{ N/m}^2$  in der Berechnung „Stabilitätsfunktion“. Setzt man diese Werte in das Erosionsmodell ein, so ergeben sich für den bezogenen Massenstrom  $0,60 \text{ g/(s m}^2\text{)}$  bei der Berechnung „Standard k- $\epsilon$ “ und  $0,42 \text{ g/(s m}^2\text{)}$  bei der Berechnung „Stabilitätsfunktion“. Wird nun die Berechnung mit der Stabilitätsfunktion als die realistischere angenommen, so ergibt die Berechnung mit dem Standard k- $\epsilon$ -Modell eine Sohlschubspannung, die um 15% zu groß ist und eine Erosionsrate, die um 42% zu groß ist. Diese Erosions-Situation tritt typischerweise im Ästuar bei maximalem Tidestrom auf.

An diesem Testfall wird auch deutlich, dass Erosion von suspendierbaren Sedimenten ein sich selbst regelnder Prozess ist. Wenn die Masse des in Suspension befindlichen Sediments steigt, sinkt die erodierte Menge. Bei hinreichend langen Fließwegen würde sich ein Gleichgewichtszustand ergeben, bei dem so viel Material erodiert wird, bis die Sohlschubspannung gerade auf die kritische Erosionsschubspannung abgesunken ist

Dieser Testfall hat die Kennung „erosi“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

### 9.5.3 Deposition

Um sich dem Vorgang der Deposition<sup>19</sup> anzunähern, wurde in diesem Abschnitt ein Testfall berechnet, in dem der absinkende Sedimentmassenstrom denjenigen Massenstrom übertrifft, der von der Turbulenz durch Mischung nach oben befördert wird. Dazu wurde das Beispiel gewählt, in dem WINTERWERP [142] einen Turbulenzkollaps gefunden hat. In diesem Beispiel beträgt die Wassertiefe 16 m. Das Wasser hat eine tiefengemittelte Geschwindigkeit von 0,2 m/s, die durch die Vorgabe eines Wasserspiegelgefälles von  $1:2,2 \cdot 10^6$ , d. h. 0,92 mm in dem 2000 m langen Berechnungsgebiet erzeugt wird. Dies entspricht einer Sohlrauheit von 1,0 mm. Das zufließende Wasser hat eine konstante Sedimentkonzentration von 0,024 g/l. Die Sinkgeschwindigkeit des Sediments beträgt 0,5 mm/s. Der Vorgabe des Wasserspiegelgefälles entspricht eine Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_\tau = 0,0085$  m/s. Diese wird nun benutzt, um die Randbedingungen für die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  festzulegen. Gemäß Gl. (9.23) und (9.24) werden die Werte an der Sohle so angesetzt, als ob sich der erste Knoten des Berechnungsgebietes in 0,030 m Abstand von der Sohle und damit bereits in der logarithmischen Schicht befindet. Am Zuströmrand wird in den unteren 1,5 m der Wassertiefe eine Verteilung gemäß Gl.(9.23) und (9.24) angesetzt. Bei Sohlabständen von mehr als 1,5 m sind die Werte  $k$  und  $\epsilon$  konstant. Passend dazu stellt sich am Zuströmrand ein Geschwindigkeitsprofil ein, das im sohlnahen Bereich logarithmisch ist.

**Bild 42a** gibt die Berechnung von WINTERWERP [142] wieder, die er mit seinem 1DV-Modell<sup>20</sup> erzielt hat. Die 2000 m Fließstrecke im 3D-Modell „casu“ entsprechen dabei den ersten 167 Minuten Berechnungszeit von WINTERWERP.

Das entscheidende Ergebnis dieses Abschnitts ist, dass unter den gegebenen Randbedingungen kein stationärer Zustand mehr auftritt, wie in **Bild 42b** anhand der dort gezeigten Längsschnitte der kinetischen Energie  $k$  der Turbulenz sichtbar wird. Es ist erkennbar, dass die Turbulenz im oberen Teil des Wasserkörpers abklingt. Dies ist zum einen auf die Vorgabe eines gemessen am stationären Wert der Gerinneströmung zu großen Turbulenzgrades am Zuströmrand zurückzuführen. Zum anderen baut das absinkende Sediment eine Dichteschichtung auf, die ebenfalls turbulenzdämpfend wirkt. Wenn die

---

<sup>19</sup>lat. Ablagerung. Deposition wird in Anlehnung an die englische Fachsprache verwendet. Wird auch als Sedimentation bezeichnet.

<sup>20</sup>Das Modell diskretisiert als einzige Dimension (1D) die Vertikale (V). Siehe auch Abschnitt 3

Berechnung zeitlich lange genug fortgesetzt wird, zeigt sich, dass es im hinteren Bereich des Berechnungsgebietes periodisch immer wieder zum Aufwallen von Turbulenzflecken kommt.

Einschränkend muss angemerkt werden, dass das Turbulenzmodell für die Berechnung von kleinen turbulenten REYNOLDS-Zahlen nicht geeignet ist. In diesem weitgehend abgeklungenen Zustand unterschreiten die Turbulenzgrößen bereits die Clipping-Grenze (s. Abschnitt 8.3.2) und sind daher unrealistisch. Die Vorgabe der konstanten Turbulenzgrößen an der Sohle steht nicht in Übereinstimmung mit der nachlassenden Sohlschubspannung, die als Folge der abklingenden Turbulenz angenommen werden muss. Bei einer Verfeinerung des Zeitschritts von 50 s auf 5 s zeigt sich, dass der wieder aufwallende Turbulenzfleck flacher ist. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird aber in **Bild 42b** die Berechnung mit dem Zeitschritt  $\Delta t=50$  s wiedergegeben. Entfernt erinnert der Turbulenzfleck an die kohärente Struktur, die von NEZU und NAKAGAWA [89] als „bursting“ beschrieben wird. Für die Berechnung von kohärenten Strukturen reicht aber die horizontale Diskretisierung (20 m) nicht aus. Die vertikale Diskretisierung entspricht derjenigen im Beispiel aus Abschnitt 9.3.3.

Trotz einiger Unzulänglichkeiten ist dieser Testfall in diese Arbeit aufgenommen worden, da er deutlich macht, dass bei geringen Fließgeschwindigkeiten, bei denen Deposition erfolgt, der Turbulenzzustand langwellig instationär und leicht störanfällig ist. So ist die turbulente Zeitskala, Gl. (7.9), am Einströmrand oberhalb von 1,5 m Abstand von der Sohle mit  $t_t=30$  s bereits relativ groß und nimmt mit der abklingenden Turbulenz im weiteren Verlauf der Strömung noch zu. Insgesamt hat die Strömung allerdings eine REYNOLDS-Zahl von  $Re=3,2 \cdot 10^5$ . Für die Abkopplung der oberen Wasserschichten von der Sohlreibung ist die langsame Informationsübertragung in vertikaler Richtung verantwortlich, siehe dazu auch die Bemerkung zu internen Grenzschichten in Abschnitt 6.8.

Dieser Testfall hat die Kennung „deposi“ in der bereits angegebenen Quelle <http://www.wyrwa.de/casu/test>.

# Kapitel 10

## Auswertung

### 10.1 Methoden und Kriterien

Aufgrund der Größe und der rauen Bedingungen gelingt es nicht, im realen Ästuar Messungen von genügender Dichte und Genauigkeit auszuführen (s. auch Abschnitt 1.1), die beim Vergleich mit numerischen Simulationen des Transports kohäsiver Sedimente detaillierte Aussagen über einzelne empirische Modelle zulassen. Anstatt dessen werden hier Berechnungen mit Labormessungen verglichen. Die Methodik, aus diesen Vergleichen auf die praktisch erzielbare Berechnungsgenauigkeit zu schließen, wird daher hier einer kritischen Betrachtung unterzogen.

Von den vielen bisher unternommenen Versuchen, Einblicke in die Berechnungsgenauigkeit numerischer Simulationen zu gewinnen, seien hier vom methodischen Standpunkt zwei Beispiele herausgegriffen: RODI [103] vergleicht Berechnungen mit einzelnen Laborexperimenten. Sein erklärtes Ziel ist es, Berechnungsmöglichkeiten zu illustrieren. Die vorliegende Arbeit geht insofern einen Schritt weiter, als die auftretenden Differenzen im Sinne einer Planungsbeurteilung integral quantifiziert werden. Es wird dazu das Einsatzgebiet auf flache Ästuarare eingeschränkt. Es wird der Sedimentmassenstrom als ein für die Praxis relevantes integrales Maß der Abweichungen gewählt, und es wird angenommen, dass die zum Vergleich verwendeten Laborexperimente repräsentativ für die Strömung in der Natur sind.

Einen ganz anderen Ansatz verfolgen KANTHA und CLAYSON [56]. Sie vergleichen die Ergebnisse ihrer Berechnungen mit einer möglichst großen Zahl an Naturmessungen. Für dieses Vorgehen spricht die Unmittelbarkeit des Vergleichs zwischen Natur und Simulation. Dagegen spricht, dass dieses

Verfahren kaum Einblicke in die Ursachen liefert, z. B. warum das angewendete Turbulenzmodell realitätsnähere Ergebnisse liefert als Vorgängermodelle. Bei Planungen im Ästuar wird zumeist nur eine Berechnung angefertigt, deren Genauigkeit es zu beurteilen gilt. Ob sich der Modellierungsfehler im Mittel über viele Situationen heraushebt, hat dabei geringe Aussagekraft. KANTHA und CLAYSON [56] berechnen Austauschprozesse in den oberflächennahen Schichten des Ozeans. Vor dem Hintergrund der Klimaforschung ist die Aussage, ob die Oberflächentemperaturen des Wassers im Mittel richtig berechnet wird, durchaus relevant.

Die Notwendigkeit, die Implementierung eines Turbulenzmodells überprüfen zu können, wurde beim „9th ERCOFTAC Workshop on Refined Flow Modelling“ (2001) deutlich, bei dem von verschiedenen Berechnungsgruppen für den gleichen Testfall mit dem gleichen Turbulenzmodell unterschiedliche Resultate vorgelegt wurden [32].

In der wissenschaftlichen Entwicklung von Turbulenzmodellen ist die Aussage, dass das eine Modell eine gewisse Strömung zutreffender modellieren kann als ein anderes Modell, eine wichtige und weiterführende Information. In der wasserbaulichen Praxis ist die Erkenntnis, dass die Berechnung mit dem genauesten verfügbaren Modell durchgeführt worden ist, insofern irrelevant, wenn keine quantitativen Anhaltspunkte für die möglicherweise zwischen Modell und Natur auftretenden Abweichungen vorliegen.

## 10.2 Schlussfolgerungen

Die Testrechnungen mit der Software „casu“ ergeben, dass das Basismodell die erwartete Funktionalität erfüllt (s. Abschnitt 9.2). Der implementierte Algorithmus ist mit den genannten Einschränkungen bezüglich Zeit- und Ortsschrittweite in der Lage, die dem Turbulenzmodell zu Grunde liegenden partiellen Differentialgleichungen zu lösen (s. Abschnitt 9.3). Das Turbulenzmodell verhält sich in bekannter Weise.

Für den Erosionsprozess kann eine Genauigkeitsabschätzung angegeben werden (s. Abschnitt 9.5.2). Dazu wird das Ergebnis des Standard- $k$ - $\epsilon$ -Modells mit der Berechnung verglichen, welche die Stabilitätsfunktion nach GALPERIN [12] verwendet und von der sich zeigen lässt (s. Abschnitt 9.4.3), dass sie stabil geschichtete Grenzschichtströmungen genauer als das Standardmodell approximiert.

Der Einfluss der Turbulenzdämpfung infolge stabiler Dichteschichtung auf die vertikale Mischung in freien Scherschichten kann realistisch simuliert werden (s. Abschnitt 9.4.2). Die mangelnde Realitätsnähe der verfügbaren Laborexperimente in der Literatur erschwert quantitative Vergleiche. Horizontale Mischungsvorgänge in freien Scherschichten können aus Mangel an Laborexperimenten nicht untersucht werden.

Bei der Simulation von Strömungen, die Sediment deponieren (s. Abschnitt 9.5.3), zeigt sich ein langwellig instationäres Verhalten der Turbulenz, das einen Vergleich mit stationären Gerinneströmungen ungeeignet erscheinen lässt. Mit der Langwelligkeit dieses instationären Verhaltens lässt sich vermuten, dass Strömungen in Kenterungsphasen unterschiedlich ablaufen, auch bei gleichen Randbedingungen. Dies könnte erklären, warum Deposition als episodisches Ereignis im Ästuar auftritt. Um diesen Effekt aber weitergehend interpretieren zu können, müssen zuerst experimentelle Befunde aus Labor oder Natur vorliegen.

Über das Zusammenwirken der vier empirischen Modelle<sup>1</sup> lässt sich Folgendes aussagen: In stehendem Wasser ist der abwärts gerichtete Massenstrom proportional zur Sinkgeschwindigkeit und variiert mit ihr um einen Faktor von ca. 10. Wie die Abschätzung des Einflusses der Sinkgeschwin-

---

<sup>1</sup>Flocculationsmodell (s. Abschnitt 5.2)  
Erosions-Depositions-Modell (s. Abschnitt 5.4)  
Konsolidierungsmodell (s. Abschnitt 5.4)  
Turbulenzmodell (s. Kapitel 7)

digkeit auf den Massenstrom in einer annähernd durchmischten turbulenten Gerinneströmung in Abschnitt 5.6 ergibt, sinkt dieser Faktor auf ca. 1,4. Der zwischen Boden und Wasser auftretende Übergang des Sediments, der im Erosions-Depositions-Modell und im Konsolidierungsmodell abgebildet wird, steuert den Sedimentationsprozess am durchgreifendsten. Wie in Abschnitt 5.6 berechnet, führt die Verwendung der in der Natur auffindbaren Varianz der kritischen Erosions-Schubspannung zu Erosions-Massenströmen, die sich um einen Faktor von ca. 11 unterscheiden. Die Berechnung in Abschnitt 9.5.2 führt dazu, in einer typischen Erosionssituation die Genauigkeit der Schubspannungsberechnung des Standard-k- $\epsilon$ -Modells mit 15% abzuschätzen. Die Verknüpfung mit dem Erosions-Depositions-Modell vergrößert den Fehler dann auf ca. 40%. Die Kopplung dieser beiden empirischen Modelle führt also zu einer Vergrößerung der Abweichungen. Daher ist es sinnvoll, auch beim Turbulenzmodell nach einer Verbesserung der Berechnungsergebnisse zu streben, selbst wenn die primär vom Turbulenzmodell beeinflussten Größen Abweichungen im von der Praxis tolerierbaren Rahmen aufweisen.

## 10.3 Ausblick

Wenn Differenzen zwischen Messung und Berechnung genau quantifiziert werden sollen, ist die Informationsübermittlung via Literatur in vielen Fällen nicht ausführlich genug (s. auch Abschnitt 9.4.3). Wissenschaftlich ergiebiger ist es, wenn eine enge personelle und organisatorische Verknüpfung zwischen Experiment und Berechnung hergestellt wird, wie dies auf dem „9th ERCOFTAC Workshop on Refined Flow Modelling“ [32] der Fall gewesen ist.

Auch wenn die im Ästuar selbst durchgeführten und durchführbaren Messungen nicht vollständig und genau genug sind, um ein numerisches Modell in toto zu verifizieren, so stellen die vorliegenden und aus der laufenden Bewirtschaftung der Ästuar resultierenden Messungen und Erfahrungen doch wichtige Mosaiksteinchen dar. Um diese in ein größeres Bild einsetzen zu können, ist es erforderlich, diese Erkenntnisse zu sammeln, systematisch zu archivieren und wissenschaftlich aufzuarbeiten. Eine kontinuierliche wissenschaftliche Begleitung der laufenden Planungs-, Bau- und Unterhaltungsarbeiten wäre wünschenswert. Die langen Zeiträume, die diese Arbeiten erfordern, lassen sich in heute üblichen Drittmittelprojekten und Promotionsvorhaben leider nicht unterbringen.

Strömungen, in denen Deposition auftritt, scheinen instabil zu sein. Die Berechnungen von WINTERWERP [142] zeigen die Möglichkeit des Kollapses der Turbulenz, die Berechnungen im Abschnitt 9.5.3 ein sporadisches Wiederaufflackern. Naturbeobachtungen, welche diese Phänomene klar verifizieren oder falsifizieren, liegen nicht vor. In Laborströmungen sind diese Effekte entweder bisher nicht aufgetreten, ihre Beobachtung ist nicht mitgeteilt worden, oder es ist nach ihnen bisher nicht gesucht worden. Es ist naheliegend zu vermuten, dass o.g. Instabilität der Turbulenz von der REYNOLDS-Zahl abhängig ist. Laborversuche weisen zumeist kleinere REYNOLDS-Zahlen als die Natur auf. Kleine Störungen sind im realen Ästuar in Form von Pfählen, Bojen und Schiffahrt immer vorhanden, werden aber in Laborversuchen zumeist vernachlässigt.

Neben kohäsiven, feinen Sedimenten existieren in Ästuaren auch Gebiete, in denen überwiegend sandige Sedimente anzutreffen sind, die in weit größerem Maße als Geschiebe transportiert werden. Bisher findet die Erforschung des Transports dieser unterschiedlichen Sedimentfraktionen in weitgehend

getrennten Disziplinen<sup>2</sup> statt. Der Prozess der Trübungszonen-Entstehung kommt zwar einer Sortierung gleich, im realen Ästuar sind die Übergänge aber kontinuierlich. Bei der Erosion von Sand wird immer auch eine gewisse Menge an feinerem Sediment freigesetzt. Im Schlick finden sich Sandanteile, die beim Baggern mit nach oben gelangen. Die Interaktion der verschiedenen Sedimentfraktionen ist zwar nicht das Thema dieser Arbeit, aber bei Transportsimulationen, die das gesamte Ästuar abdecken, ist diese Interaktion durch Simulation mehrerer Fraktionen zu erfassen.

Der Turbulenzeintrag, der durch Seegang ausgelöst wird, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden.

Die Entwicklungsmöglichkeiten der Software „casu“ werden im Abschnitt 8.4 beschrieben.

---

<sup>2</sup>Z. B. müssen beim Sandtransport Geschiebebewegungen, Mehrphasenströmungen und Riffelbildung untersucht werden.

# Kapitel 11

## Zusammenfassung

In Flussmündungen (Ästuaren) mit genügend großem Tidehub bilden sich Trübungszonen aus. In diesen werden große Mengen kohäsiver Sedimente im Wechsel der Tidebewegung erodiert, in suspendierter Form vom Wasser mitgeführt und wieder deponiert. Die vom Menschen geschaffenen Einrichtungen wie Häfen und Fahrrinnen sind im Bereich der Trübungszonen ständig von Verschlickung bedroht. Die numerische Simulation des Transports kohäsiver Sedimente ist bisher nur mit eingeschränkter Genauigkeit möglich. Diese Arbeit leistet einen Beitrag dazu, die Differenzen zwischen Realität und numerischer Berechnung zu quantifizieren. In Besonderheit wird der Frage nachgegangen, welchen Anteil das Turbulenzmodell als eines von vier empirischen Ansätzen an o. g. Differenzen hat. Die Überprüfung der Turbulenzmodellierung findet am Beispiel des  $k$ - $\epsilon$ -Modells statt. Als praxisrelevantes Maß für die Abweichungen wird der Massenstrom des Sediments benutzt.

Typischerweise treten im Wasser von Ästuaren Dichteunterschiede auf, die durch unterschiedliche Konzentrationen von suspendiertem Sediment und gelöstem Salz verursacht werden. Die Dichteschichtung ist dabei in aller Regel stabil, d. h. die Dichte nimmt nach unten hin zu, da das Salzwasser das Süßwasser unterläuft, und das Sediment von oben nach unten sinkt. Auf die Turbulenz wirkt eine stabile Dichteschichtung dämpfend, da die Vermischung der Konzentrationsunterschiede potentielle Energie verbraucht. Die Berücksichtigung dieser Dämpfung ist bei der Berechnung der turbulenten Vermischung entscheidend. Eine begründete Vermutung besagt, dass die von kohäsiven Sedimenten ausgelöste Dichteschichtung die Turbulenz in bestimmten ästuarinen Strömungen sogar vollständig zum Verlöschen bringen kann.

Im Rahmen dieser Arbeit ist die Strömungsberechnungs-Software „casu“ programmiert worden. Unter Verwendung der hydrostatischen Druckannahme

werden alle drei Raumdimensionen diskretisiert. Damit lassen sich Strömungen in flachen Gewässern mit freier Oberfläche simulieren. Der finite Volumen Ansatz für die Kontinuitätsgleichung ermöglicht eine exakte Erfüllung der Massenbilanz. Die Stromlinienrückverfolgung zur Erfassung der Konvektion ermöglicht es, das ansonsten explizite Verfahren auch bei COURANT-Zahlen über Eins zu verwenden. Der auf Literaturvorschlägen basierende numerische Algorithmus wurde hier um die Möglichkeit der Verwendung unstrukturierter Gitter und um das Turbulenzmodell erweitert.

Mit der Software „casu“ sind Testrechnungen durchgeführt worden, die zunächst einmal die Funktion des Basismodells überprüft haben. Daran anschließend ist die Implementierung des Turbulenzmodells erprobt worden. Durch Vergleich mit analytischen Lösungen kann die Funktionsfähigkeit aller Terme des Turbulenzmodells dargelegt werden. Durch Vergleich mit Experimenten gelingt die Bestimmung der Modellkonstanten des Turbulenzmodells. Dies führt auf die Überlegung, statt mit festen Werten für die Modellkonstanten mit Wertespanssen zu arbeiten. Diese Wertespanssen könnten über den Weg einer Sensitivitätsuntersuchung auch in der praktischen Berechnungstätigkeit einen Zugriff auf die Modellungenauigkeiten ermöglichen.

Turbulenzdämpfung in stabil dichtegeschichteten Fluiden wurde am Beispiel der Gleichdruck-Wandgrenzschicht und der freien ebenen Scherschicht erprobt. Es zeigt sich, dass die Wandgrenzschicht durch die Hinzunahme einer Stabilitätsfunktion genauer berechnet werden kann. Die ebene Scherschicht lässt sich durch Veränderung der experimentellen Randbedingungen so stark beeinflussen, dass aus dem Vergleich zwischen Experiment und Berechnung nur auf eine qualitative Übereinstimmung geschlossen werden kann. Genauere Aufschlüsse bezüglich freier Scherschichten wären nur durch Vergleich mit Experimenten möglich, in denen praxisrelevantere Randbedingungen verwendet werden.

Mit dem absinkenden Sediment werden zwei für das Ästuar typische Situationen berechnet. Bei großer Strömungsgeschwindigkeit wird das Sediment erodiert und verursacht eine Dichteschichtung in Bodennähe. Es werden die Ergebnisse der Berechnung mit dem Standard  $k-\epsilon$ -Modell mit denjenigen verglichen, die durch Hinzunahme der Stabilitätsfunktion erzielt worden sind. Die Stabilitätsfunktion erlaubt es, in dieser Situation die Realität genauer zu approximieren. Das Standard  $k-\epsilon$ -Modell berechnet eine Sohlschubspannung, die 15% größer ist. Durch Einsetzen in ein gängiges Erosionsmodell ergibt sich ein um 42% größerer Massenstrom.

Als zweiter Testfall mit absinkendem Sediment wird eine Konfiguration verwendet, bei der im Ästuar typischerweise Sediment deponiert wird. Die Berechnung zeigt, dass in diesem Fall neben einem Abklingen der Turbulenz infolge des absinkenden Sediments ein instationäres, vom Boden ausgehendes Wieder-Aufflackern der Turbulenz mit einer Periodendauer in der Größenordnung des Tidezyklus stattfindet. Strömungen, die Sediment deponieren, können also nicht mit stationären Gerinneströmungen verglichen werden. Des Weiteren lässt sich damit erklären, warum Deposition kein gleichmäßiger sondern ein episodischer Vorgang ist.

# Kapitel 12

## Anhang

### 12.1 Konzentrationsmaße

Die verschiedenen Maße für die Konzentration von Sediment in Suspension mit Wasser lassen sich recht übersichtlich darstellen, wenn man sich einen einfachen Probennahmevergung vorstellt. Dazu wird ein definiertes Volumen dem Gewässer an der zu untersuchenden Stelle entnommen, beispielsweise durch Füllen einer Probennahmeflasche von bekanntem Inhalt. Damit ist das Gesamtvolumen  $V_g$  bekannt.

Durch Filtrieren, Trocknen und Wiegen lässt sich dann die Sedimentmasse  $M_s$  ermitteln.

Daraus ergibt sich der Sedimentgehalt:

$$k = \frac{M_s}{V_g} \quad (12.1)$$

Wird dazu noch das Sedimentvolumen bestimmt, oder ist die Sedimentdichte bekannt, lässt sich der Volumenanteil an Sediment bestimmen oder berechnen:

$$c = \frac{V_s}{V_g} = \frac{k}{\rho_s} \quad (12.2)$$

Wenn vor dem Abfiltrieren die Probe gewogen wird, oder die Dichte des Wassers als bekannt betrachtet wird, lässt sich die Gesamtdichte der Suspension

bestimmen oder berechnen:

$$\rho_g = \frac{M_g}{V_g} = \rho_w + c \cdot (\rho_s - \rho_w) = \rho_w + \frac{k}{\rho_s} \cdot (\rho_s - \rho_w) \quad (12.3)$$

Unter denselben Voraussetzungen lässt sich auch der Massenanteil bestimmen oder berechnen:

$$\phi = \frac{M_s}{M_g} = \frac{k}{\rho_w + k \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_s}\right)} \quad (12.4)$$

Es werden die folgenden Symbole verwendet:

$V_g$	Gesamtvolumen,
$M_g$	Gesamtmasse,
$V_s$	Sedimentvolumen,
$M_s$	Sedimentmasse,
$V_w$	Wasservolumen,
$M_w$	Wassermasse,
–	–
$\rho_g = \frac{M_g}{V_g}$	Gesamtdichte,
$\rho_s = \frac{M_s}{V_s}$	Sedimentdichte, soweit nicht anders angegeben $2650 \frac{kg}{m^3}$ ,
$\rho_w = \frac{M_w}{V_w}$	Wasserdichte, soweit nicht anders angegeben $1000 \frac{kg}{m^3}$ ,
–	–
$k = \frac{M_s}{V_g}$	Sedimentgehalt,
$c = \frac{V_s}{V_g}$	Volumenanteil und
$\phi = \frac{M_s}{M_g}$	Massenanteil.

## 12.2 Sohlschubspannung und Reibungsbeiwerte

Der Zusammenhang zwischen Sohlschubspannung, Schubspannungs-Geschwindigkeit und Energiegefälle stellt sich folgendermaßen dar:

$$\frac{\tau_b}{\rho} = v_\tau^2 = g \cdot h \cdot I_e \quad (12.5)$$

mit:

- $\tau_b$  Sohlschubspannung,
- $\rho$  Dichte (der Suspension),
- $v_\tau$  Schubspannungsgeschwindigkeit,
- $g$  Fallbeschleunigung,
- $h$  Wassertiefe und
- $I_e$  Energiegefälle.

Für die Verknüpfung mit der Geschwindigkeit werden die folgenden Reibungsansätze benutzt:

$$v_\tau^2 = \frac{\lambda}{8} \cdot v_L^2 = C_d \cdot v_{1,0}^2 \quad (12.6)$$

mit:

- $v_\tau$  Schubspannungsgeschwindigkeit,
- $v_L$  Geschwindigkeit am sohnächsten Level  $z_L$ ,  
im 2D-Fall tiefengemittelte Geschwindigkeit,
- $v_{1,0}$  Geschwindigkeit in 1,0 m Wassertiefe ,
- $\lambda$  hier verwendeter Reibungsbeiwert und
- $C_d$  Reibungsbeiwert, den HAM [133] verwendet.

Der Zusammenhang mit der äquivalenten Sandrauheit  $k_s$  ergibt sich unter Zuhilfenahme von Gl. (2.1) und Gl. (2.2):

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \left( \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{z_L}{k_s} \right) + 8,5 \right) \quad (12.7)$$

mit:

- $\kappa$  KARMAN-Konstante und
- $k_s$  äquivalente Sandrauheit nach NIKURADSE.

# Kapitel 13

## Literaturverzeichnis

# Literaturverzeichnis

- [1] ABRAHAM, G.  
Turbulence and Mixing in Stratified Tidal Flows  
in: Physical Processes in Estuaries Ed.:Job Dronkers ,Wim van Leussen  
Springer Berlin 1988 (International Symposium on Physical Processes  
in Estuaries 1986)
  
- [2] ALTENBACH, J. ; ALTENBACH, H.  
Einführung in die Kontinuumsmechanik  
(1994) Teubner Stuttgart
  
- [3] AMMER, M.  
Finite-Element-Modellierung dreidimensionaler Strömungen mit freier  
Oberfläche  
(1993) Diss. TU München, Lehrstuhl für Hydraulik und Gewässerkunde
  
- [4] ARYA, S.P.S.  
Buoyancy effects in a horizontal flat-plate boundary layer  
Journ. Fluid Mech.(1975) vol.68, part 2, pp321-343
  
- [5] ASTER, D. MEYER, E.  
Verbesserte Bestimmung der nautischen Tiefe im Emders Fahrwasser  
(1990) HANSA, Jhrg. 127, Nr. 23-24, pp
  
- [6] BELL, J.H. ; MEHTA, R.D.  
Development of a Two-Stream Mixing Layer from Tripped and  
Untripped Boundary Layer  
(1990) AIAA Journal, Vol. 28, December, No.12, pp 2034-2042

- [7] BIJVELDS, M.D.J.P.  
 Recirculating steady flow in harbours: comparison of numerical computations to laboratory measurements  
 (1997) Report no. 1-97 TU Delft , Hydromechanics Section, Department of Civil Engineering.
- [8] BOOIJ, R.  
 Depth-averaged K-epsilon Modelling  
 (1989) XXIII IAHR Congress Ottawa, pp A199-A206
- [9] BRIGGS, D. A. ; FERZINGER , J. H. ; KOSEFF, J. R. ; MONISMITH, St. G.  
 Turbulent mixing in a shear-free stably stratified two-layer fluid  
 J. Fluid Mech. (1998) vol. 354 pp 175-208
- [10] BULGARELLI, U. ; CASULLI, V. ; GREENSPAN, D.  
 Pressure Methods for the Numerical Solution of Free Surface Fluid Flows  
 (1984) Pineridge Press, Swansea U.K.
- [11] BURBAN, P.-Y. LICK, W. LICK, J.  
 The Flocculation of Fine-Grained Sediments in Estuarine Waters  
 (1989) Journ. Geophys. Res., Vol. 94, No. C6, pp 8323-8330
- [12] BURCHARD, H.; PETERSEN, O.  
 Models of turbulence in the marine environment - a comparative study of two-equation models  
 (1999) Journ. Marine Syst. vol. 21, pp. 29-53
- [13] BUSINGER, J.A.; WYNGAARD, J.C.; IZUMI,Y.; BRADLEY,E.F.  
 Flux profile relationships in the atmospheric surface layer  
 (1971) J. Atmos. Sci., 28, pp 181-189
- [14] BUNDESANSTALT FÜR WASSERBAU - AUSSENSTELLE KÜSTE  
 Hydronumerisches Verfahren (HN-Verfahren) TRIM-2D, Validierungsdokument 2.0

- (1998) Hamburg, <http://www.hamburg.baw.de/hnm/hnm-de.htm>
- [15] CASULLI V. ; ZANOLLI, P.  
A tree-dimensional semi-implicit algorithm for environmental flows on unstructured grids  
(1998) ICFD Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Oxford 1998
- [16] CASULLI V. ; STELLING G.S.  
Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic free-surface flow  
(1998) Journ. Hydr. Eng. Vol. 124, No. 7, July 1998, pp 678-686
- [17] CASULLI V.  
Numerical simulation of three-dimensional free surface flow in isopycnal coordinates  
(1997) Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 25, pp 645-658
- [18] CASULLI V.  
Recent developments in semi-implicit numerical methods for free surface hydrodynamics  
(1995) Advances in Hydro-Science and -Engineering, Vol II, pp 2174-2181, Beijing, China
- [19] CASULLI V. ; CATTANI, E.  
Stability, Accuracy and Stability of a Semi-Implicit Method for Three-Dimensional Shallow Water Flow  
(1994) Computers Math. Applic. Vol.27, No. 4, pp 99-112
- [20] CASULLI V. ; CHENG, R.T.  
Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow  
(1992) Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 15, pp 629-648
- [21] CASULLI, V.  
Semi-implicit Finite Difference Methods for the Two-Dimensional Shallow Water Equation

- (1990) Journ. Comput. Physics No. 86,
- [22] CASULLI V.  
Eulerian.-Lagrangian method for hyperbolic and convection dominated parabolic problems  
(1987) Computational Methods for Non-Linear Problems, Eds.: Taylor, Owen, Hinton
- [23] CASULLI, V. ; GREENSPAN, D.  
Pressure method for the numerical solution of transient, compressible fluid flows  
(1984) Int. Journ. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, pp 1001-1012
- [24] CHENG, R.T. ; CASULLI, V. ; GARTNER, J.W.  
Tidal, residual, Intertidal Mudflat (TRIM) Model and its Application to San Francisco Bay, California  
(1993) Estuarine, Coastal and shelf Science No. 36, pp 235-280
- [25] CHU, V.H. BADDOUR, R.E.  
Turbulent gravity-stratified shear flow  
(1984) J. Fluid Mech. vol. 138 pp 353-378
- [26] CHRISTIANSEN, H.  
Erfahrungen mit der Strömungsumlenkwand  
(1997) HANSA, Jhrg. 134, Nr. 12, pp70-73
- [27] CROUCHER, A. E. ; O'SULLIVAN, M.J.  
Numerical methods for contaminant transport in rivers and estuaries  
Computers and Fluids (1998) Vol.27, No.8, pp861-878
- [28] DRAZIN, P.G. ; REID, W.H.  
Hydrodynamic Stability  
(1981) Cambridge University Press
- [29] DVWK  
Numerische Modelle von Flüssen, Seen und Küstengewässern

(1999) Heft 127 des Deutschen Verbandes für Wasser- und Kulturbau e.V. (DVWK), zsgest. von W. Zielke

- [30] DYER, K. R.  
Coastal and Estuarine Sediment Dynamics  
(1990) J. Wiley Chichester
  
- [31] DZIOMBA, B. FIEDLER, H.E.  
Effect of initial conditions on two-dimensional free shear layers  
(1985) J.Fluid Mech. vol. 152, pp 419-442
  
- [32] JAKIRLIC, S. et al.  
Proceedings of the 9th ERCOFTAC/IAHR/COST Workshop on Refined Turbulence Modelling  
(2001) TU Darmstadt, <http://www.sla.maschinenbau.tu-darmstadt.de/workshop01.html>
  
- [33] ETLING, D.  
Turbulence collapse in stably stratified flows: application to the atmosphere  
in: Waves and Turbulence in Stably Stratified Flows (Leeds 1989) Ed.: Mobbs and King (1993)
  
- [34] FERZINGER, J.H.; PERIC, M.  
Computational Methods for Fluid Dynamics  
(2002) Springer, 3rd rev. Edition
  
- [35] FRANZIUS-INSTITUT Uni Hannover für das niedersächsische Landesamt für Straßenbau  
Wesertunnel bei Dedesdorf, Untersuchung zum Schlickfall in der Absenkrinne  
Abschlußbericht (1991)
  
- [36] GALPERIN, B.; KANTHA, L.H.; HASSID, S.; ROSATI, A.  
A quasi-equilibrium turbulent energy model for geophysical flows.

- (1988) J. Atmos. Sci. 45, pp. 55-62
- [37] GARRATT, J.R.  
The internal boundary layer - a review  
(1990) Boundary-Layer Meteorology, No. 50, pp 171-203
- [38] GOLDBERG, U.; PEROOMIAN, O.; CHAKRAVARTHY, S.  
A wall-distance-free k-epsilon model with enhanced near-wall treatment  
Journ. Fluids Eng.; Sept. (1998) ; Vol. 120 ; pp 457-462
- [39] GRABEMANN, I.  
Die Trübungszone im Weser-Ästuar: Messung und Interpretation  
(1992) Diss Geowiss. Uni Hamburg; erschienen bei der GKSS Geesthacht als Bericht: GKSS 92/E//15
- [40] GRABEMANN, I. KRAUSE, G.  
Response of the turbidity maximum in the Weser Estuary to pulses in freshwater runoff and to storms  
in: Physics of Estuaries and Coastal Seas, Eds.: Dronkers + Scheffers, 1998 Balkema Rotterdam
- [41] GRAVERTS, H.  
Abwicklung des Projektes CT III / Container-Terminal Bremerhaven  
Hansa (1997) Nr. 9. , Jg. 134 , pp 69-78
- [42] GRAY, D. D.; GIORGINI, A.  
The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases  
(1976) Int. Journ. Heat Mass Transfer Vol.19 pp545-551
- [43] GUO, J. ; JULIEN, P.  
Turbulent velocity profiles in sediment-laden flows  
(2001) Journ. Hydr. Res. Vol.39, No. 1, pp 11-23
- [44] GUST, GISELHER  
Observations on turbulent-drag reduction in a dilute suspension of

- clay in sea-water  
(1976) J. Fluid Mech. vol. 75 part 1 pp 29-47
- [45] HAMM, L. ; T. CHESHER ; M. FETTWEIS ; K. P. P. PATHIRANA  
; E. PELTIER  
An intercomparison exercise of cohesive sediment transport numerical  
models  
in: Cohesive Sediments (InterCoh 94) Ed.: Burt, Parker and Watts,  
(1997) pp.439-448
- [46] HOPFINGER, E.J.  
Turbulence in stratified fluids: a Review  
(1987) Journ. Geophys. Res.,Vol. 92, No. C5, pp5287 5303
- [47] HOPFINGER, E.J. TOLY, J.-A.  
Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density  
interfaces  
(1976) J. Fluid Mech. vol.78, part 1, pp 155-175
- [48] HRISSANTHOU, V. HARTMANN, S.  
In-situ-Ermittlung der kritischen Erosionsgeschwindigkeit  
(1998) Wasser & Boden 50/8 pp 37-40
- [49] HUANG, X. GARCIA, M.H.  
A Perturbation Solution for Bingham-plastic Mudflows  
(1997) J. Hydr. Eng., vol. 123, No. 11 pp. 986
- [50] HUANG, X. GARCIA, M.H.  
A Herschel-Bulkley model for mud flow down a slope  
(1998) J. Fluid Mech., vol. 374, pp. 305-333
- [51] ILINCA, F.; HETU,J.-F.; PELLETIER,D.  
A unified finite element algorithm for two-equation models of turbu-  
lence  
Computer and Fluids, (1998) Vol. 27, No. 3; pp 291-310

- [52] ITSWEIRE, E.C. ; HELLAND, K.N. ; VAN ATTA, C.W.  
The evolution of grid-generated turbulence in a stably stratified fluid  
(1986) J. Fluid Mech. , vol. 162 , pp 299-338
- [53] IVEY, G.N. ; IMBERGER, J.  
On the Nature of Turbulence in a Stratified Fluid. Part I: The  
Energetics of Mixing  
(1991) Journal of Physical Oceanography, Vol. 21, No. 5, pp 650-658
- [54] JAKOBITZ, F. G.; SAKAR, S.  
The effect of nonvertical shear on turbulence in stably stratified  
medium  
Physics of Fluids ,May (1998), Vol 10, No.5, pp 1158-1168
- [55] KALTENBACH, H.-J.  
Turbulente Diffusion in einer homogenen Scherströmung mit stabiler  
Dichteschichtung  
(1992) Diss TU München
- [56] KANTHA, L.H.; CLAYSON C.A.  
An improved mixed layer model for geophysical applications  
(1994) Journ. Geophys. Res. Vol. 99, No. C12, pp25235-25266
- [57] KATO, M.; LAUNDER, B.E.  
The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating  
cylinders  
(1993) Ninth Symposium on turbulent shear flows, Kyoto, pp 10-4-1  
10-4-6
- [58] KERRUTH, M.  
Experimentelle Untersuchung des Ausbreitungsverhaltens eines gas-  
förmigen Stoffes in neutral- und stabil-geschichteten turbulenten  
Plattengrenzschichten bei unterschiedlicher Bodenrauigkeit  
(1988) Diss. Uni Bundeswehr München

- [59] KESSELS VAN, T.; BLOM, C.  
Rheology of cohesive sediments: comparison between a natural and an artificial mud  
Journ. Hydr. Res. (1998) Vol. 36, No. 4, pp 591-612
- [60] KLINGBEIL, E.  
Tensorrechnung für Ingenieure  
(1966) Bibliographisches Institut AG, Mannheim,  
Hochschultaschenbücher-Verlag
- [61] KOLBE, K.  
Sedimente und Makrozoobenthos der Wesermündung  
(1997) Berichte der Forschungsstelle Küste Norderney, Band 41, pp9-31
- [62] KOMATINA, D. JOVANOVIĆ, M.  
Experimental study of steady and unsteady free surface flows with water-clay mixtures  
(1997) Journ. Hydr. Res. vol. 35 No. 5 pp579-590
- [63] KOOP, C.G. BROWAND, F.K.  
Instability and turbulence in a stratified fluid with shear  
(1979) J. Fluid Mech. vol. 93 part 1 pp 135-159
- [64] KRANENBURG, C.  
On internal Waves in partially mixed and stratified flows  
in: Physical Processes in Estuaries Ed.: Job Dronkers, Wim van Leussen ; Springer Berlin 1988 (International Symposium on Physical Processes in Estuaries 1986)
- [65] KRANENBURG, C. ; WINTERWERP, J.C.  
Erosion of fluid mud layers I: Entrainment model  
Journal of hydraulic engineering ASCE (1997) Vol 123, No.6, June 1997, pp 504
- [66] LELE, S.K.  
A consistency condition for reynolds stress closure

- (1985) Phys. Fluids, Vol.28, No.1, January 1985, pp 64-68
- [67] LESCHZINER , M. A.  
Modelling Turbulence in Physically Complex Flows  
(1995) XXVI IAHR Congress London, Vol. 2, pp 1-33, hydra2000
- [68] VAN LEUSSEN, W.  
Aggregation of Particles, Settling Velocity of Mud Floccs A Review  
in:(1988) Physical Processes in Estuaries Ed.:Job Dronkers ,Wim van Leussen Springer Berlin (International Symposium on Physical Processes in Estuaries 1986)
- [69] LIENHARD, J.H.; VAN ATTA, C.W.  
The decay of turbulence in thermally stratified flow  
(1990) J.Fluid Mech. vol. 210; pp 57-112
- [70] LIEPMANN, H.W.; LAUFER J.  
Investigation of free turbulent mixing  
(1947) NACA TN 1257
- [71] LING, W. ; CHUNG, J.N.; TROUTT, T.R.; CROWE, C.T.  
Direct numerical simulation of a three-dimensional temporal mixing layer with particle dispersion  
J. Fluid Mech. (1998) vol. 358; pp.61-85
- [72] MALCHEREK, A. et al.  
Three dimensional numerical modelling of cohesive sediment transport processes in estuarine environments  
April (1994), final report to the EC contract MAS2-CT92-0013
- [73] MALCHEREK, A.  
Physik und Numerik der Oberflächengewässer  
Version 4.6, August 2001, <http://www.hamburg.baw.de/hnm/nummeth/nummeth.pdf>
- [74] MALCHEREK, A.  
Lagrange-Verfahren zweiter Ordnung

(1997) Supercomputing News, No. 2,  
<http://www.hamburg.baw.de/scn/index-de.htm>

- [75] MALCHEREK, Andreas  
Mathematische Modellierung von Strömungen und Stofftransportprozessen in Ästuaren  
(1995) Dissertation Universität Hannover, Bericht 44/1995, Institut für Strömungsmechanik
- [76] MARUM Transferstelle Geochemie & Hydrogeologie  
Projekte Hafen und Flußsedimente  
(2001) [http://www.marum.de/transferstelle\\_geochemie/hafen\\_und\\_flusssedimente.html](http://www.marum.de/transferstelle_geochemie/hafen_und_flusssedimente.html)
- [77] MC'ANALLY, W.H. MEHTA, A.J.  
Aggregation rate of fine sediments  
(2000) Journ. Hydr. Engineering Vol. 126, No. 12, pp 893-903
- [78] MC'LEAN, S.R.  
Stratification effects due to suspended sediments  
Int. Sym.: the transport of suspended sediments and its mathematical modelling; Florence (1991)
- [79] MEESENBURG, S. MEYER, H. BECKER, D.  
Baggern im Emdrer Fahrwasser - Ein neues Konzept  
(1999) HANSA Jhrg. 136, Nr. 2, pp 39-45
- [80] MELLOR, G.L.; YAMADA, T.  
Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems  
(1982) Review of geophysics and space physics, Vol. 20, No. 4, pp851-875
- [81] MONIN, A.S.; OBUKHOV, A.M.  
Basic regularity on turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere

(1954) U.S.S.R. Acad. Sci. Geophys. Inst., No. 24

- [82] MONIN, A.S.; OBUKHOV, A.M.  
Fundamentale Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Vermischung in der bodennahen Schicht der Atmosphäre  
(1958) in: Goering, H. (Hrsg.) Sammelband zur statistischen Turbulenz, S.199-226, Akademie-Verlag Berlin
- [83] MOREL, R.; LAASSIBI, A.; ALCARAZ, E.; ZEGADI, R.; BRUN, G.; JEANDEL, D.  
Validation of a k-epsilon model based on experimental results in a thermally stable stratified turbulent boundary layer  
(1992) Int. Journ. Heat Mass Transfer, Vol. 35, No.10, pp 2717-2724
- [84] MOREL, R.; ALCARAZ, E.; AYRAULT, M.; ZEGADI, R.; MEJEAN, P.  
Effects of thermal stable stratification on turbulent boundary layer characteristics  
Atmospheric Environment (1991) Vol. 25A, No 7, pp 1263-1269
- [85] MUNK, W.H. ANDERSON E.R.  
Notes on a Theory of the Thermocline  
(1948) J. Mar. Res. 7, 276-295
- [86] MYDLARSKI, L. WAHRHAFT, Z.  
Experiments on the Reynolds Number Dependence of Grid Generated Turbulence  
Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3 , Ed: Rodi, Bergeles ,(1996) Elsevier Science
- [87] NICHOLL, C.I.H.  
Some dynamical effects of heat on a turbulent boundary layer  
(1970) Journ. Fluid Mech. vol. 40, part 2, pp. 361-384
- [88] NIKURADSE, J.  
Strömungsgesetze in rauhen Rohren

- (1933) Forsch. Arb. Ing.-Wes. Heft 361
- [89] NEZU, I. ; NAKAGAWA, H.  
Turbulence in open-channel flow  
(1993) IAHR Monograph, Balkema Rotterdam
- [90] OELLERICH, J.  
Naturschutzrechtliche Eingriffsregelung bei Großvorhaben  
(2002) Hansa, 139. Jahrgang, Nr. 8 pp 58-63
- [91] OHYA, Y.; NEFF, D.E.; MERONEY, R.N.  
Turbulence structure in a stratified boundary layer under stable conditions  
(1997) Boundary-Layer Meteorology 83 ; pp 139-161
- [92] PARTHASARATHY, R.N.  
Spectral models for turbulence modification by particles  
(1995) Gas-Particle Flows, Ed.: Stock et al. , ASME FED-Vol. 228, pp289-295
- [93] PATT, H. JÜRGING, P. KRAUS,W.  
Naturnaher Wasserbau - Entwicklung und Gestaltung von Fließgewässern  
(1998) Springer Verlag
- [94] PETUKOV, B. S. ; POLYAKOV, A. F.  
Heat transfer in turbulent mixed convection  
(1988) Hemisphere Publishing  
Übersetzung des 1986 in russisch erschienenen Buches
- [95] PLATE, E.J.; LIN, C.W.  
Investigation of the thermally stratified boundary layer  
(1966) Fluid mechanics papers, Paper No. 5, Colorado State University
- [96] POLLERT, J. ET AL  
Flow of surfactant drag reducers for decreasing of pumping energy demand in district heating systems

- (1995) XXVI IAHR Congress London, Vol. 2, pp 152, hydra2000
- [97] PULS, W.  
Erosion characteristics of estuarine muds  
(1984) Report IT 265, Hydraulics Research Wallingford
- [98] PULS, W. ; KUEHL, H. ; HEYMAN, K.  
Settling Velocity of Mud Flocs: Results of field Measurements in the  
Elbe and Weser Estuary  
in Physical Processes in Estuaries, Eds. Dronkers, J. van Leussen, W.  
(1988) Springer Verlag
- [99] RAUDKIVI, A. J.  
Loose Boundary Hydraulics  
(1967) Pergamon Press
- [100] RIEMER, M.  
Technische Kontinuumsmechanik  
(1993) BI-Wiss.-Verlag Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich
- [101] RIETHMÜLLER, R. et al.  
Hydrographic Measurements in the Turbidity Zone of the Weser  
Estuary  
in Physical Processes in Estuaries, Eds. Dronkers, J. van Leussen, W.  
(1988) Springer Verlag
- [102] RIJN VAN L. C.  
Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas  
AQUA Publications, The Netherlands
- [103] RODI, W.  
Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified  
fluids  
(1987) Journal of Geophysical Research, Vol. 92, No. C5, pp 5305-5328

- [104] RODI, W.  
Turbulence Models and Their Application in Hydraulics: A state-of-the-art review  
IAHR Monograph Balkema Rotterdam 1980,1984, 1993(dritte Auflage)
- [105] RODIEK, W.  
Ausbau der Außenweser auf eine Mindesttiefe von 14 m unter SKN  
Hansa, (1997) Nr.9 , Jg.134 , pp 84-92
- [106] ROTTA, J. C.  
Turbulente Strömungen  
(1972) Teubner Stuttgart
- [107] RUCK, B.  
Einfluß der Tracerteilchengröße auf die Signalinformation in der Laser-Doppler-Anemometrie  
(1990) Technisches Messen, Heft 7/8, pp. 284-295
- [108] SADIKI, A.; HUTTER, K.  
On the frame dependance and form invariance of the transport equations for the reynolds stress tensor ond the turbulent heat flux vector: its consequence on closure models in turbulence modelling  
(1996) Continuum Mech. Thermodyn. No.8, pp341-349
- [109] SANDERS, J.P.H.; SARH, B.; GÖKALP, I.  
Variable density effects in axisymetric isothermal turbulent jets: a comparison between first- and second -order turbulence models  
Int. Journ. Heat Mass Transfer (1997) Vol.40, No. 4, pp 823-842
- [110] SCHADE, H. KUNZ, E.  
Strömungslehre  
(1980) Walter de Gruyter Berlin New York
- [111] SCHLICHTING, H.  
Grenzschicht - Theorie  
Verlag G. Braun Karlsruhe 8. Auflage (1982)

Vorsicht, in dem von Gerstel (1997) überarbeiteten und unter gleichem Titel erschienen Buch, fehlen wichtige hier zitierte Erkenntnisse.

- [112] VAN SCHIJNDEL, S.A.H.; KRANENBURG, C.  
Reducing the siltation of a river harbour  
(1999) Journ. Hydr. Res., Vol. 36, No. 5, pp803-814
- [113] SCHRÖDER, W.  
Grundlagen des Wasserbau  
(1999) Werner Verlag Düsseldorf
- [114] SCHÜNEMANN, M. KÜHL, H.  
Experimental Investigation of the Erosional Behavior of Naturally Formed Mud from Elbe Estuary and Adjacent Wadden Sea, Germany in: Nearshore and Estuarine Cohesive Sediment Transport, Ed.:Metha, A.J., 1993, Coastal and Estuarine Studies 42
- [115] SCHUMANN, U. GERZ, T.  
Turbulent Mixing in Stably Stratified Shear Flow  
(1995) Journ. Appl. Meteorology Vol. 34, pp 33-48
- [116] SHIELDS, A.  
Anwendung der Aehnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung  
(19936) Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, Heft 26
- [117] SHIH, L.H.; KOSEFF, J.R.; FERZINGER, J.H.; REHMANN, C.R.  
Scaling and parameterization of stratified homogeneous turbulent shear flow  
(2000) J. Fluid Mech. vol. 412, pp 1-20
- [118] SHIMIZU, A. ; YOKOMINE, T. ; HASEGAWA, S.  
Modeling of the turbulent energy equation of gas phase in the gas-solid suspension flow  
(1993) Gas-solid flows, Ed.:Stock et al. , ASME FED-Vol. 166 pp 85-91

- [119] SIEKMANN, H. E.  
Strömungslehre - Grundlagen  
(2000) Springer Berlin Heidelberg
- [120] SIMONIN, O.; UITTENBOGAARD, R.E.; BARON, F.; VIOLLET, P.L.  
Possibilities and limitations of the k-epsilon model to simulate turbulent fluxes of mass and momentum, measured in a steady, stratified mixing layer  
(1989) 23rd IAHR Congress Ottawa pp A55-A62
- [121] SLESSOR, M.D.; BOND, C.L.; DIMOTAKIS, P.E.  
Turbulent shear-layer mixing at high Reynolds numbers: effects of inflow conditions  
Journ. Fluid Mech., (1998), Vol. 376, pp115-138
- [122] SONIN, A.A.  
Calibration of the k-eps turbulence model for the diffusion of turbulence  
(1983) Phys. Fluids, No. 26, vol 10, October 1983, pp 2769
- [123] SPINGAT, F. M.  
Analyse der Schwabstoffdynamik in der Trübungszone eines Tideflusses  
(1997) Dissertationsschrift Mitteilungen Heft 139 Leichtweiss-Institut TU-Braunschweig
- [124] SPORK, V.  
Erosionsverhalten feiner Sedimente und ihre biogene Stabilisierung  
(1997) Mitteilungen des Inst. f. Wasserbau und Wasserwirtschaft der RWTH Aachen; Band 114
- [125] STEWARD, E.J.; HUQ, P.  
Evolution of vertically (or horizontally) sheared grid turbulence in density stratified flow  
(2000) fifth int. Sympos. on stratified flows, Vancouver, vol II, pp 1259-1264

- [126] STREHLE, E.  
Stabilitätsberechnung dichtegeschichteter ebener Wandgrenzschichten  
(1979) Diss. TU Dresden
- [127] SUNDARAM, S. ; COLLINS, L.R.  
A numerical study of the modulation of isotropic turbulence by  
suspended particles  
(1999) J.Fluids Mech. Vol. 379, pp 105-143
- [128] TEISSON, C.  
A review in cohesive sediment transport models  
in: Cohesive Sediments (1997) Ed.: Burt, Parker, Watts. INTERCOH  
'94
- [129] THOMPSON, S.M. TURNER, J.S.  
Mixing across an interface due to turbulence generated by an oscillating  
grid  
(1975) J. Fluid Mech. vol. 67, part 2, pp 349-368
- [130] TSUJIMOTO, T. ; GOTOH, H.; NAKAGAWA, H.  
Open channel flow with suspended sediment particles  
(1995) XXVI IAHR Congress London, Vol. 2, pp 232, hydra2000
- [131] TURNER, J.S.  
Buoyancy effects in fluids  
(1973) Cambridge University Press
- [132] UMLAUF, L.  
Turbulence parameterisation in hydrobiological models for natural  
waters  
(2001) Dissertation D17 TU Darmstadt, Fachbereich Mechanik
- [133] VAN DER HAM, R.  
Turbulent exchange of fine sediments in tidal flows  
(1999) TU Delft, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Report  
No. 99-1

- [134] VANONI, V. A.  
Sedimentation Engineering  
(1975) ASCE
- [135] VILLASENOR, F.  
The Kevin-Helmholtz Instability in a Stratified Shear Flow  
Thesis Uni London, Computational Fluid Dynamics Unit, Imp. Coll.  
of Science and Techn., July (1987)
- [136] VINZON, S. B. ; METHA, A. J.  
Mechanism for formation of lutoclines by waves  
Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE,  
Vol.124, No. 3, May/June (1998)
- [137] WANG, Z.Y. ; LARSEN, P. ; WEI, X.  
Rheological properties of sediment suspensions and their implications  
(1994) Journ. Hydraulic Res. Vol.32, No. 4
- [138] WANG, Z.Y. ; LARSEN, P. ; NESTMANN, F. ; DITTRICH, A.  
Resistance and drag reduction of flows of clay suspensions  
Journ. Hydraulic Engineering Jan. (1998), pp. 41
- [139] WELLERSHAUS, S.  
Die Trübungswolke im Weser-Ästuar  
(1982) Deutsche Gewässerkundliche Mitteilungen 26 Heft 1/2
- [140] WIER, M. ; RÖMER, L.  
Experimentelle Untersuchungen von stabil und instabil geschichteten  
turbulenten Plattengrenzschichten mit Bodenrauheit  
(1987) Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 11 pp78-86
- [141] WINTERWERP, J.C.  
A simple model for turbulence induced flocculation of cohesive sedi-  
ment  
(1998) Journ. Hydr. Res., Vol. 36, No. 3, pp 309-326

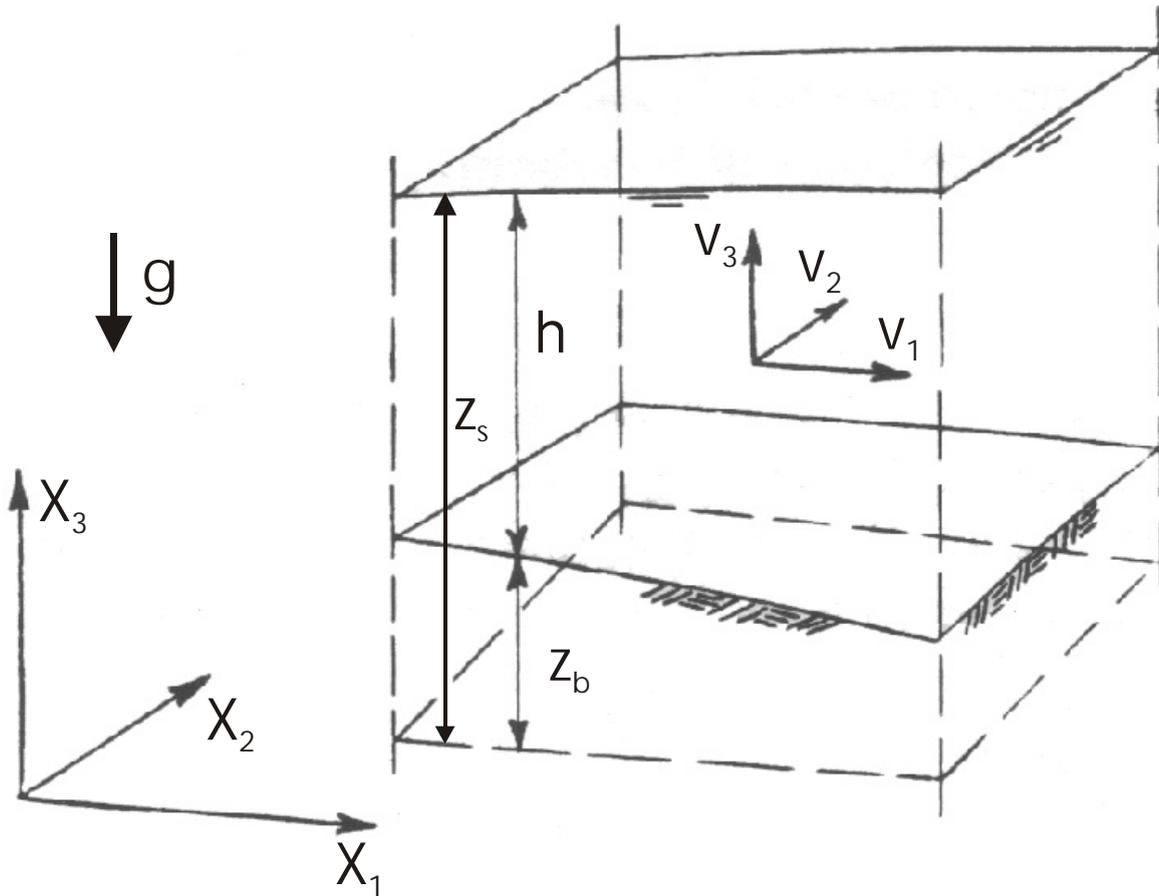
- [142] WINTERWERP, J.C.  
On the dynamics of high-concentrated mud suspensions  
Dissertationsschrift (1999) Technische Universiteit Delft
- [143] WILCOX, D. C.  
Turbulence Modelling for CFD  
(1993) DCW Industries (Selbstverlag)
- [144] WOLTERING, S ; VISSCHER, G.  
Messungen des tideabhängigen Schwebstoffgehalts in der Brackwasserzone der Weser bei Bremerhaven  
Wasser & Boden (1998) Nr.5 , Jg. 50 ; pp 49-53
- [145] WURPTS, R. GAMNITZER, R. GRESIKOWSKI, S. HARMS, H. GREISER, N.  
Fluid Mud im Emdener Außenhafen - Konsequenzen für die Baggertechnik und -strategie  
(1996) HANSA, Jhrg. 133, Nr. 11, pp 78-86
- [146] WYGNANSKI, I. ; FIEDLER, H.E.  
The two-dimensional mixing region  
(1970) J. Fluid Mech. vol 41. part 2 pp 327-361
- [147] YANG, C. T.  
Sediment Transport / Theory and Practice  
(1996) McGraw-Hill
- [148] YANG, C.T. ; CROWE, J.N. ; CHUNG, J.N. ; TROUT, T.R.  
Quantitative study of particle dispersion in a bluff-body wake  
(1993) Gas-solid flows, Ed.: Stock et al. , ASME FED-Vol. 166
- [149] YAKHOT, V.; ORZAG, S.A.; THANGAM, S.; GATZKI, T.B.; SPEZIALE, C.G.  
Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique  
(1992) Pys. Fluids A, Vol. 4, No. 7, July 1992, pp1510-1520

- [150] YAKHOT, V.; ORZAG, S.A.  
Renormalization group analysis of turbulence. I Basic theory  
(1986) Journ. of Scientific Computing, Vol.1, No. 1, pp3-51
- [151] ZIENERT, G.  
Ein numerisches Modell für den dreidimensionalen Schwebstofftransport in der Unterelbe  
(1996) Diss. Uni Hamburg

# Kapitel 14

## Bildteil





**X** Ortsvektor  
und  
**v** Geschwindigkeitsvektor  
mit den Komponenten 1 ... 3  
für die drei orthonormalen Raumrichtungen

**$z_b$**  Sohlhöhe  
 **$z_s$**  Wasserspiegellage  
**h** Wassertiefe

**Bild 2.** Koordinatensystem der Strömung im Ästuar



Blick über den Blexer Bogen ins Lune-Watt

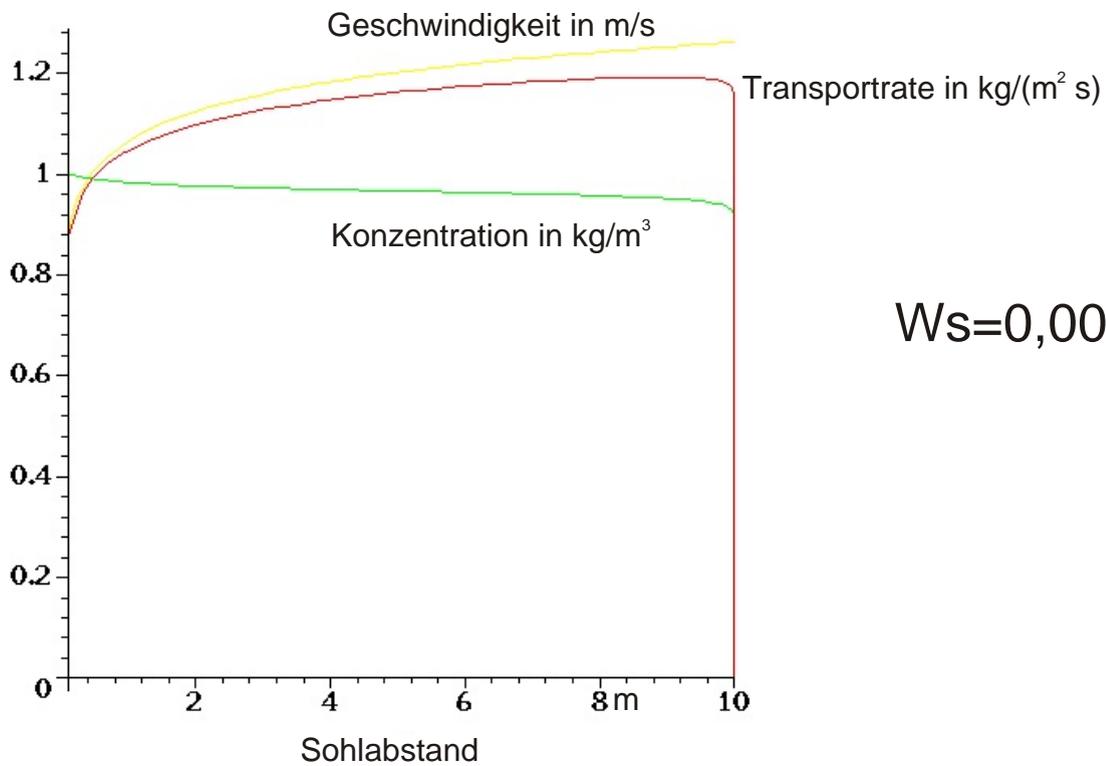
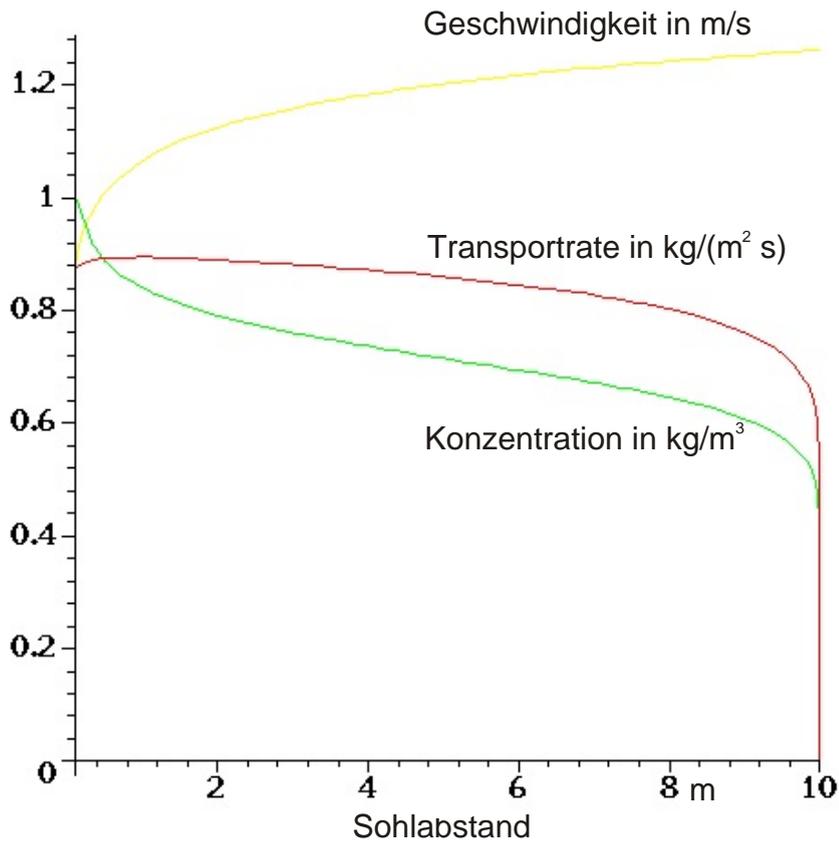
Dauermessstelle GRABEMANN [39]

Lüne-Watt

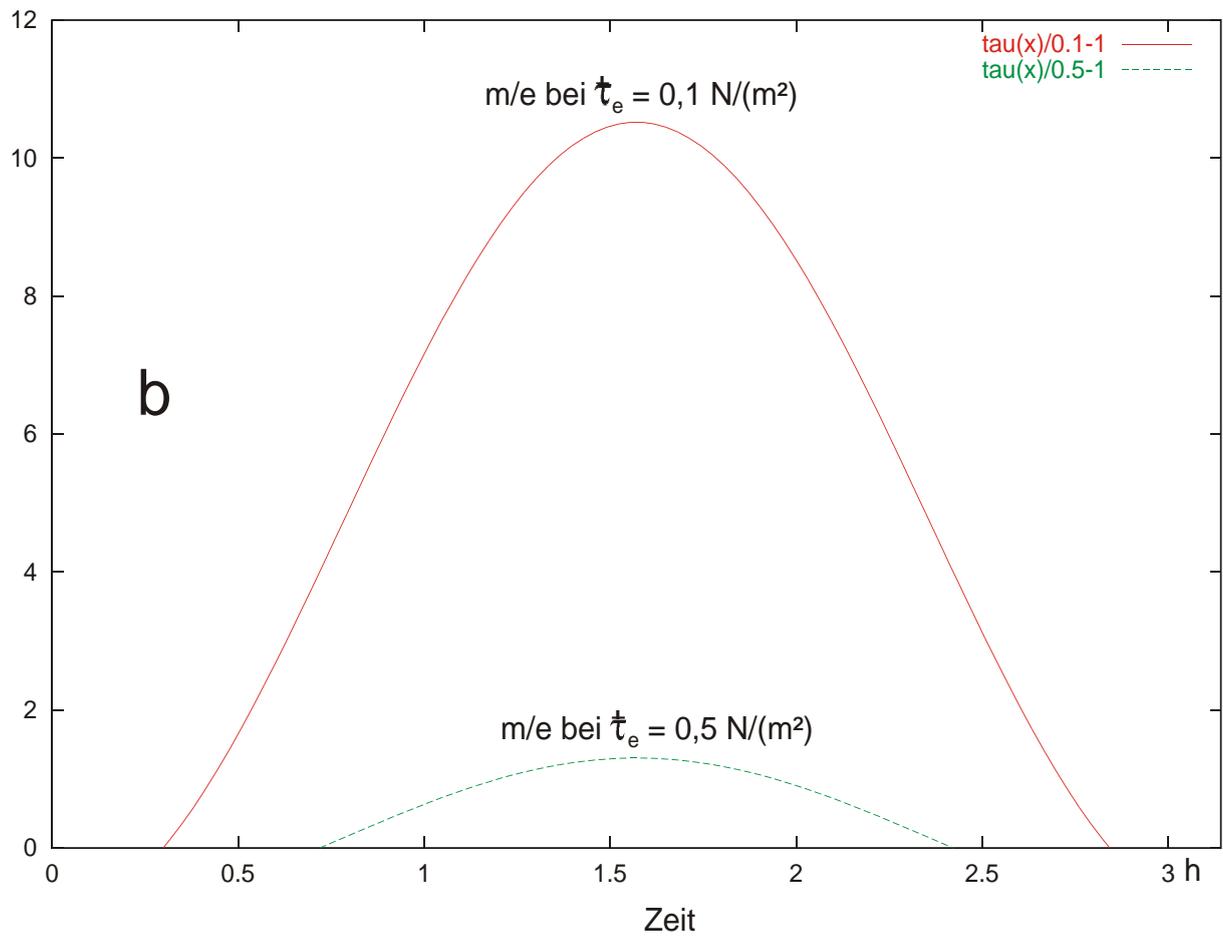
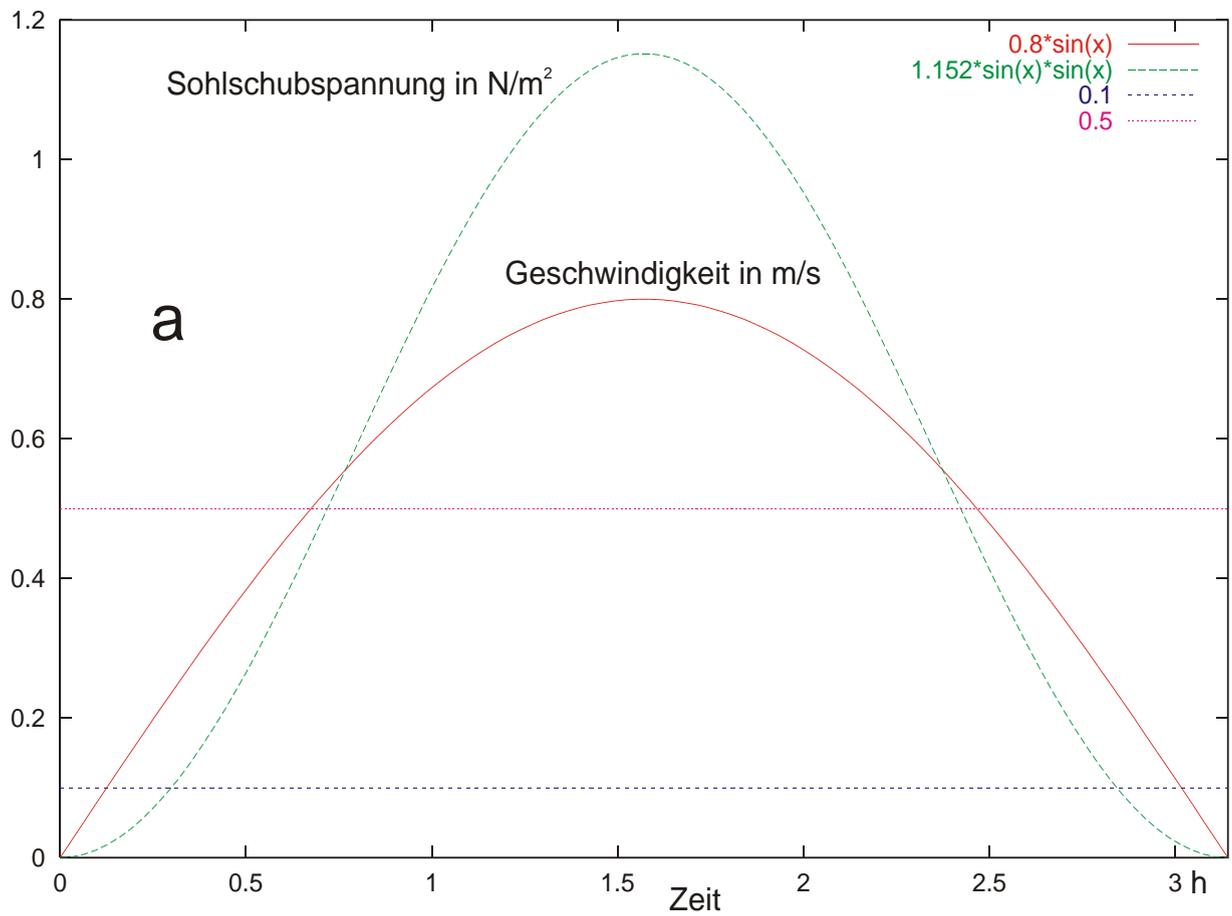


Bild 3. Blexer Bogen und Lune-Watt

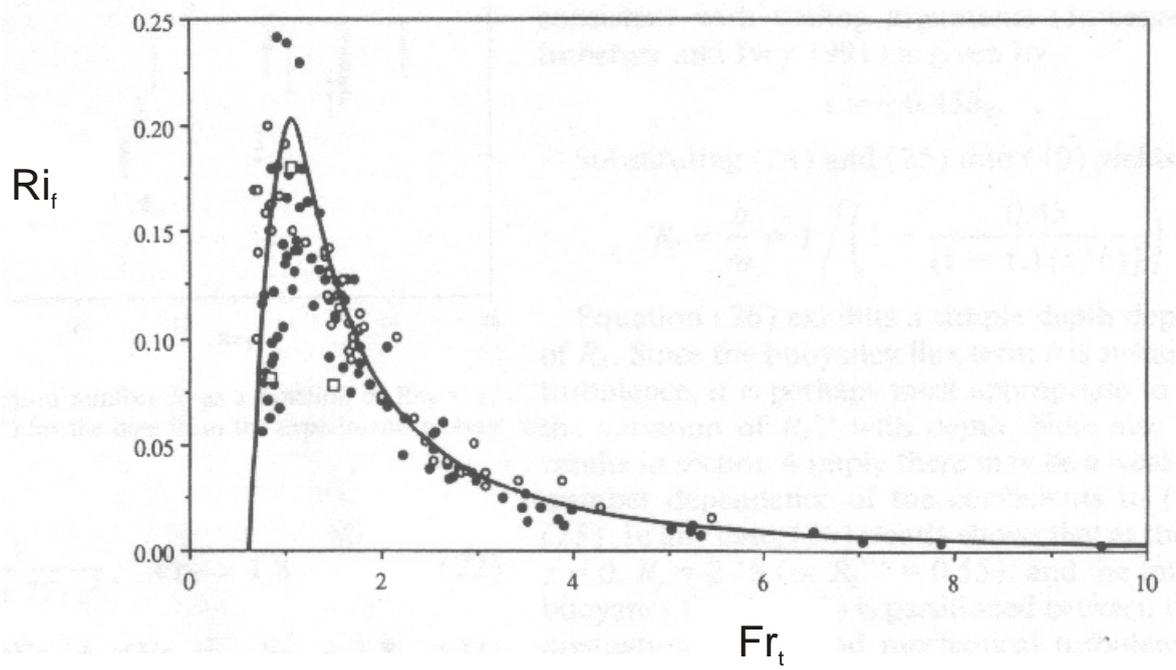




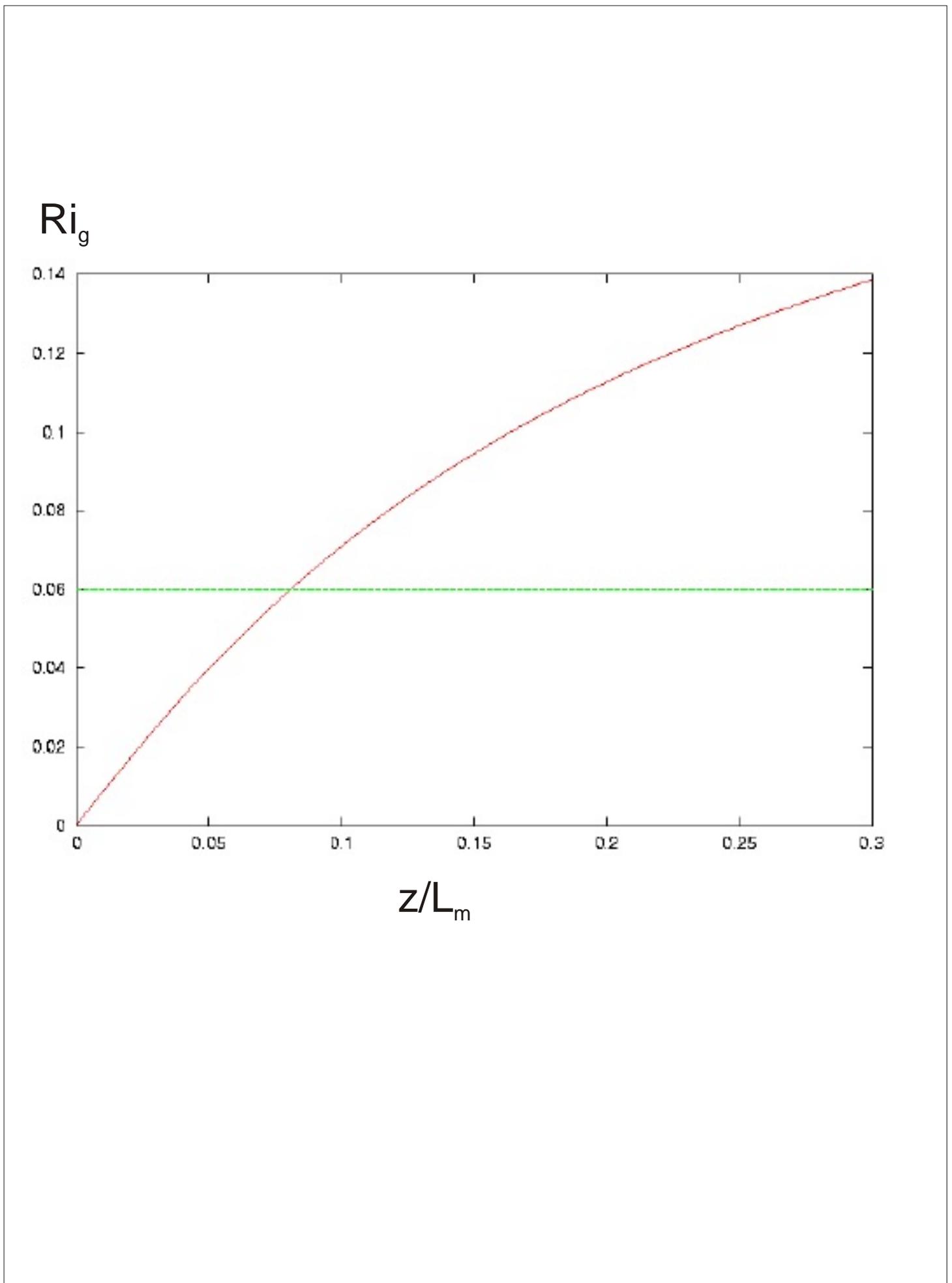
**Bild 5.** Vertikale Profile der Geschwindigkeit, der Sedimentkonzentration und der Transportrate für unterschiedliche Sinkgeschwindigkeiten  $W_s$



**Bild 6.** Erodiertes Massenstrom, a zeitlicher Verlauf von Geschwindigkeit und Sohlschubspannung, b zeitlicher Verlauf des auf die Erodibilitätskonstante e bezogenen Massenstroms m



**Bild 7.** Abhängigkeit der flux-RICHARDSON-Zahl von der turbulenten FROUDE-Zahl, Messwerte nach IVEY und IMBERGER [53]



**Bild 8.** Gradient-RICHARDSON-Zahl in Abhängigkeit von dem mit der Stabilitätslänge  $L_m$  dimensionslos gemachten Wandabstand  $z$

V

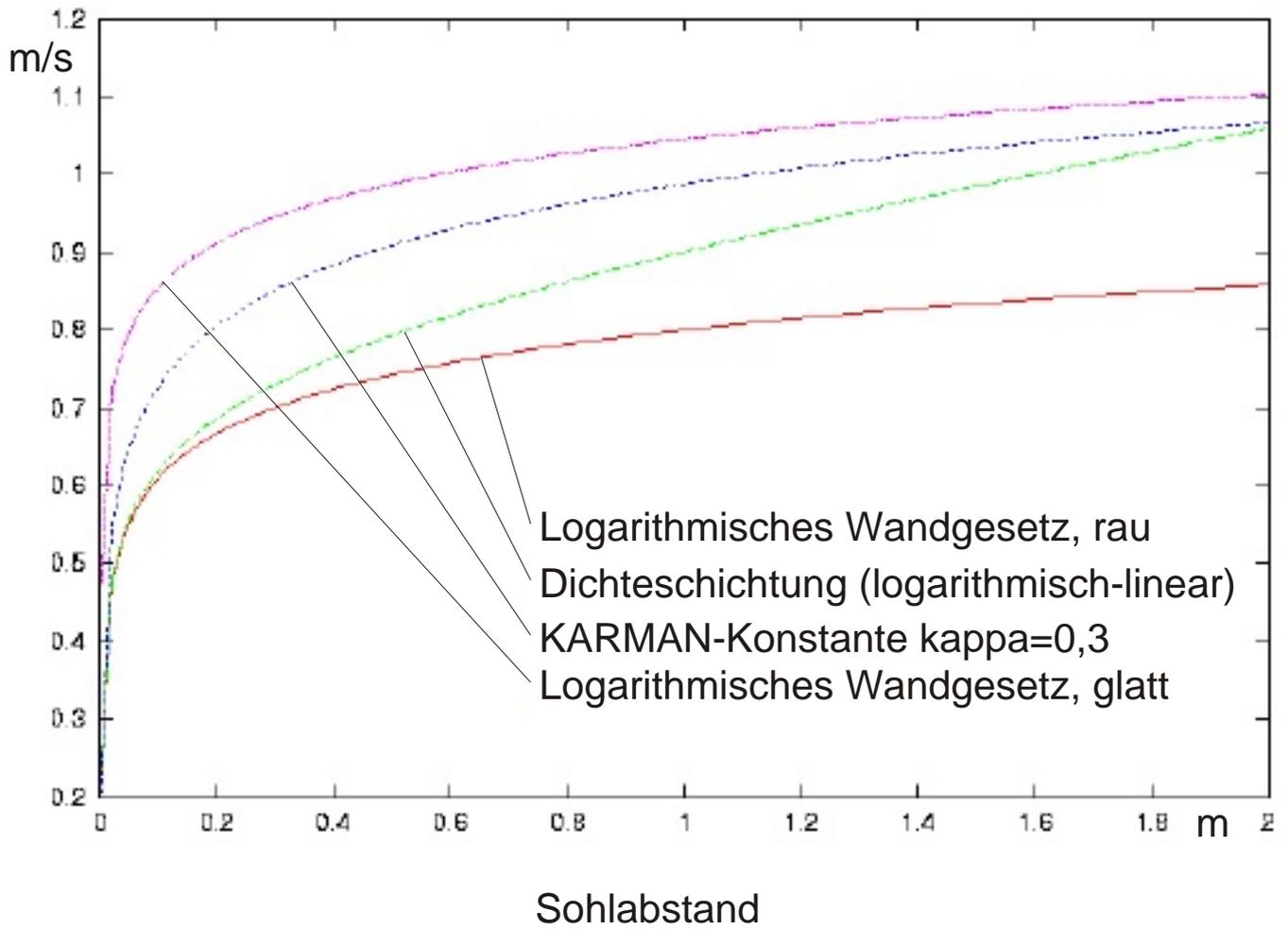


Bild 9. Geschwindigkeitsverläufe in Sohlhöhe



Ton-Suspension

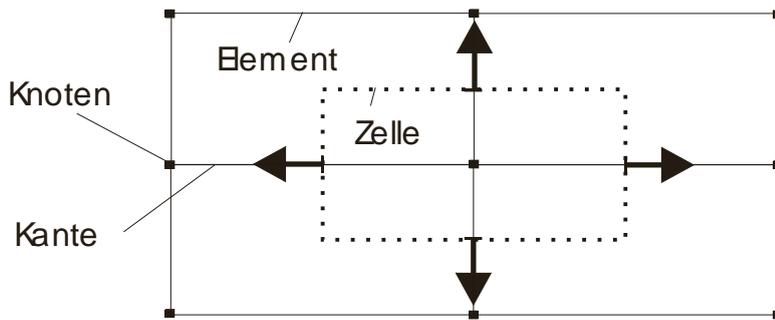
Der abgebildete Ausschnitt hat die Maße 70 x 70 mm.  
Bei dem vertikalen Streifen handelt es sich um einen Draht des  
zum Rühren verwendeten Schneebesens.  
Dauer des Rührvorgangs: ca. 10 Minuten.



Möhrensaft

## Diskretisierung:

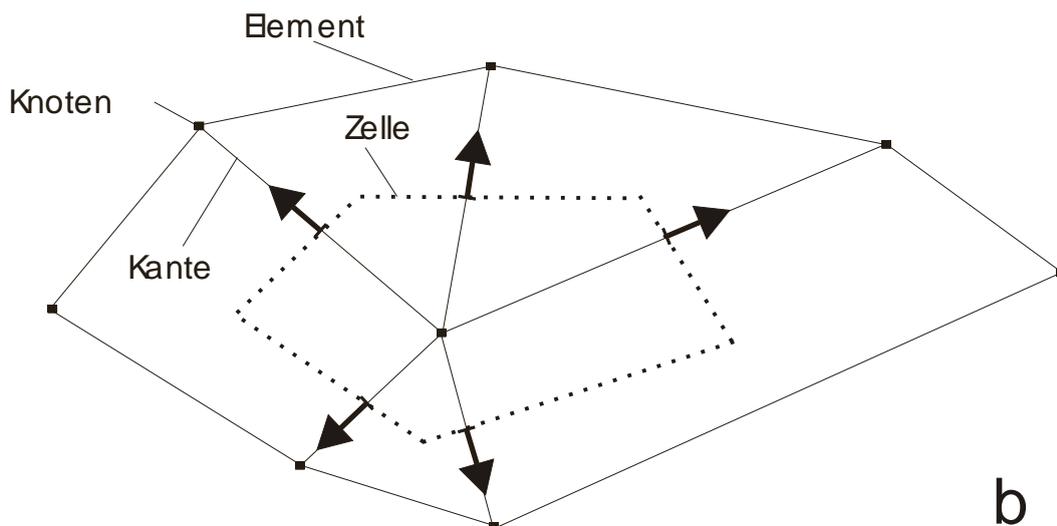
- Wasserspiegelhöhe am Knoten
- Geschwindigkeitskomponente in Kantenrichtung auf der Kantenmitte



a



Übergang vom regelmäßigen Rechtecknetz zum Netz aus beliebigen drei- und viereckigen Elementen

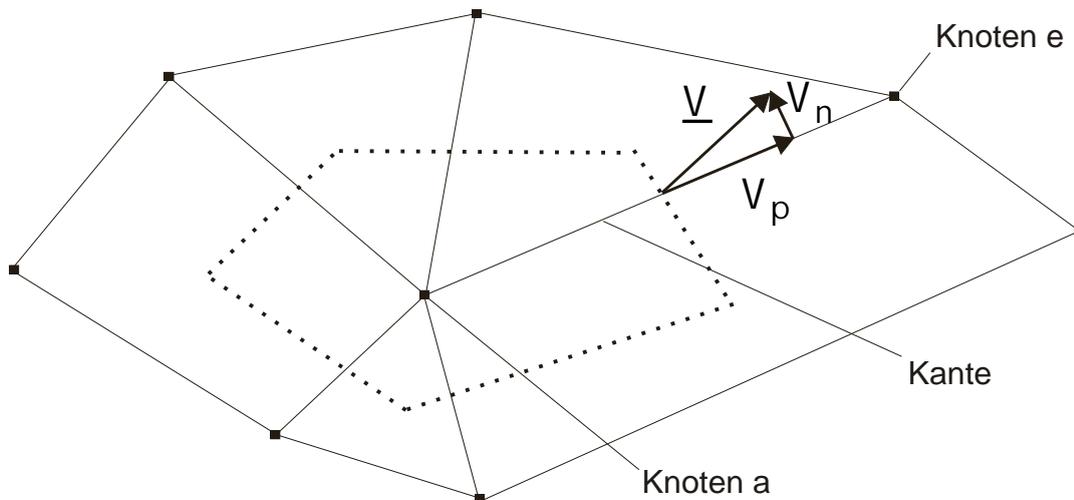


b

**Bild 11.** Horizontale 2D-Vernetzung  
a CASULLI-Netz, b modifiziertes Netz

$$\frac{v_{p.k} - v_{p.k-1}}{\Delta t} = -g \frac{z_{s.k.e} - z_{s.k.a}}{\Delta s} - \frac{\lambda_{k-1} \cdot v_{p.k} \cdot |v_{k-1}|}{8 \cdot h_{k-1}}$$

Spezifische  
Impulsänderung resultiert aus  
Wasserspiegelgefälle und Sohlreibung

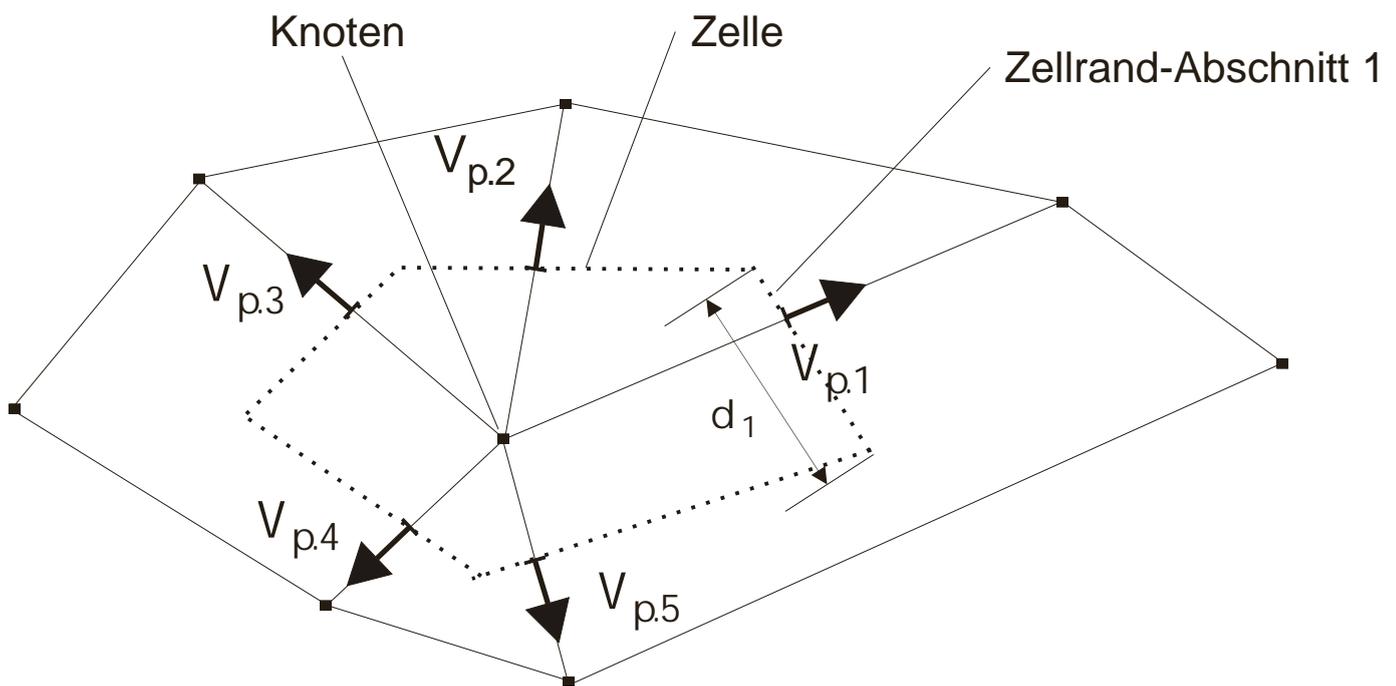


$\underline{v}$	Geschwindigkeitsvektor 2D horizontal, tiefengemittelt
$\Delta t$	Zeitschritt
$g$	Fallbeschleunigung
$z$	geodätische Höhe
$\Delta s$	Kantenlänge
$l$	Reibungsbeiwert
$h$	Wassertiefe
Indizes	
$k, k-1$	Aktueller Zeitschritt, vorangegangener Zeitschritt
$a, e$	Knoten an Anfang und Ende der Kante
$p, n$	Geschwindigkeitskomponenten parallel und normal zur Kantenrichtung
$s$	Wasserspiegelhöhe s surface

**Bild 12.** Spezifische Impulsänderung (2D tiefengemittelt) auf der Kantenmitte

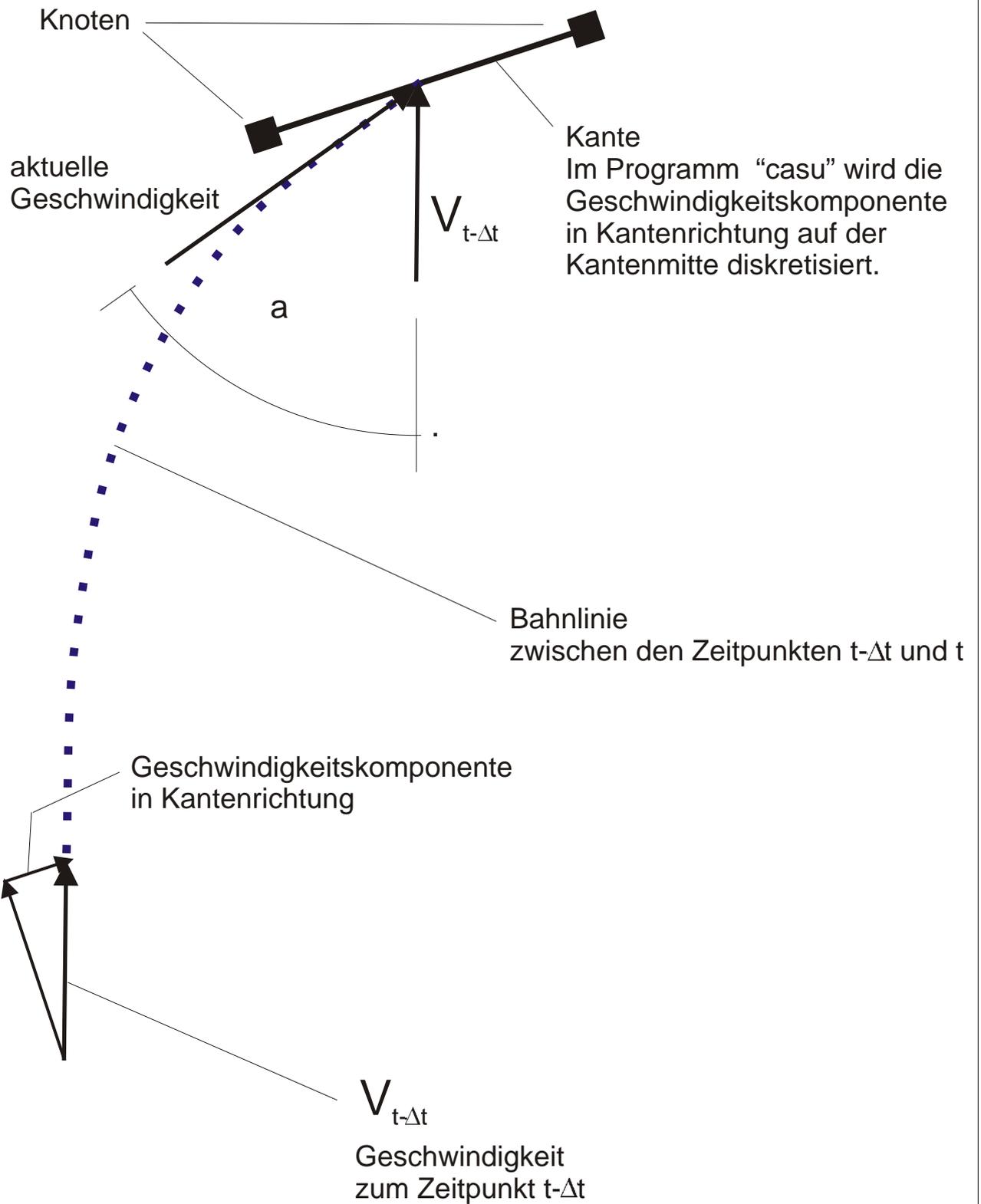
$$A \frac{z_{s.k} - z_{s.k-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^5 v_{p.k.i} \cdot d_i \cdot h_{k-1.i} = 0$$

Zeitliche Volumenzunahme in der Zelle + Abflüsse über die Zellrand-Abschnitte = 0

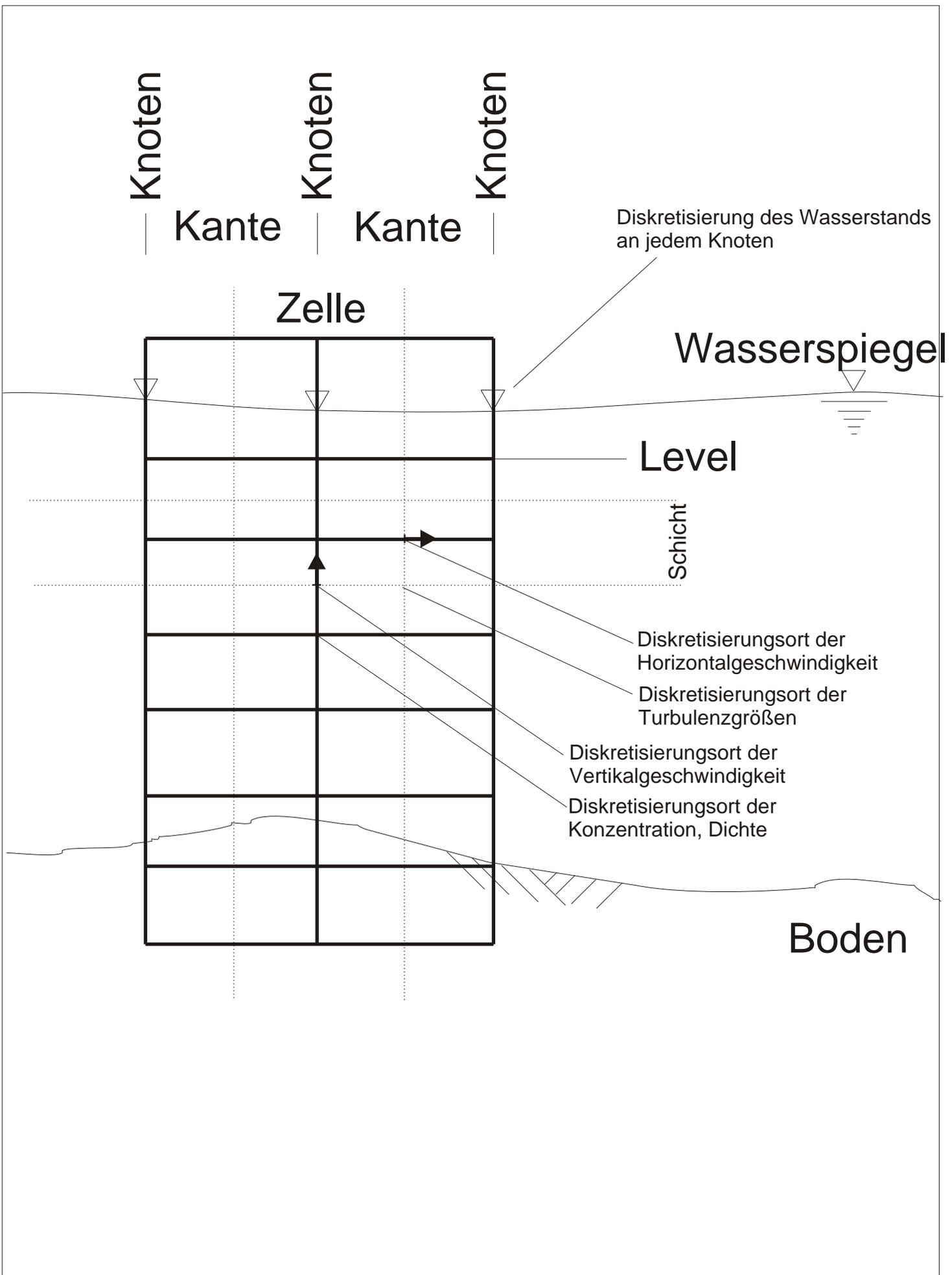


$d$	Länge eines Zellrand-Abschnitts
$A$	Zellfläche, umrandet von $d_1 \dots d_5$
$z$	geodätische Höhe
$\Delta t$	Zeitschritt
$v_p$	Geschwindigkeitskomponente parallel zur Kante, senkrecht zum Zellrand-Abschnitt
$h$	Wassertiefe
Indizes	
$k, k-1$	Aktueller Zeitschritt, vorangegangener Zeitschritt
$i$	Laufender Index über alle Zellrand-Abschnitte, hier 1 ... 5
$s$	Wasserspiegelhöhe s surface

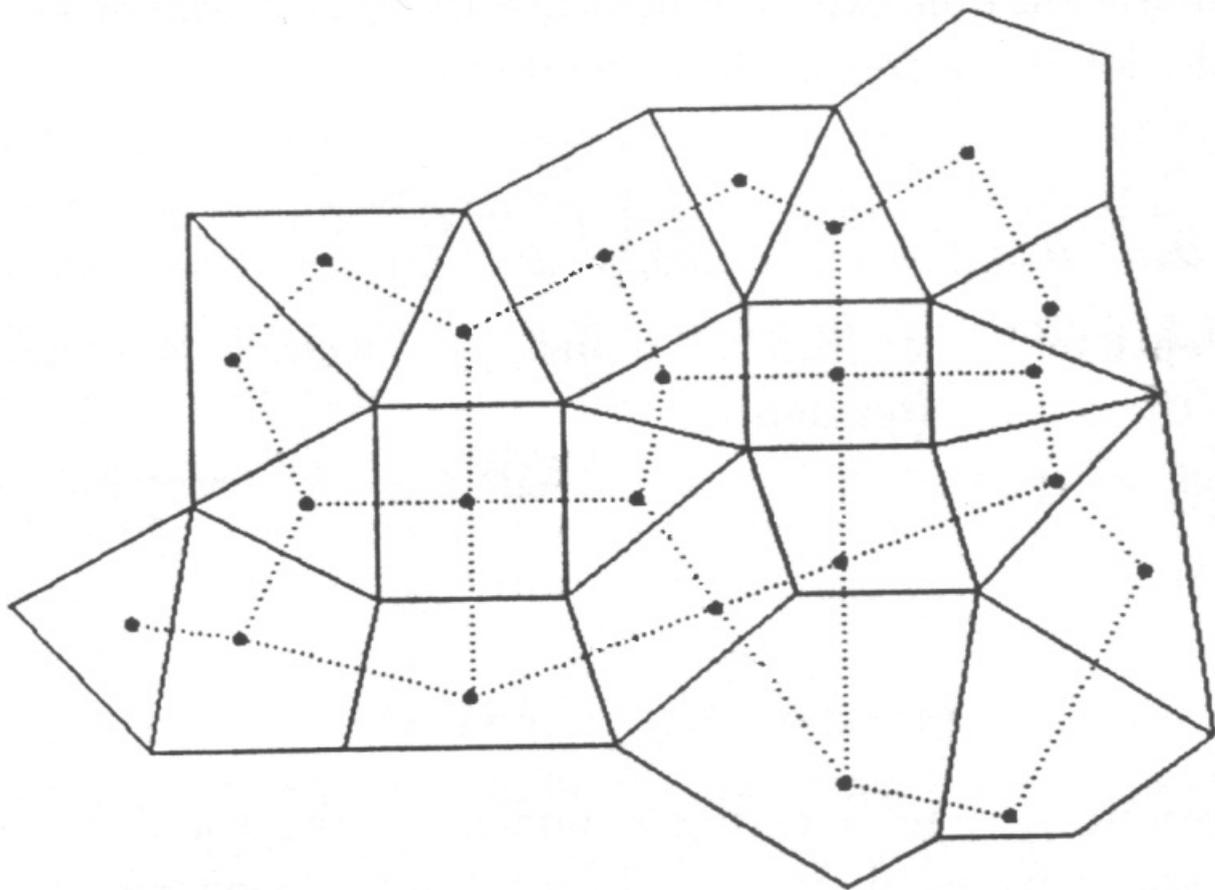
**Bild 13.** Kontinuitätsgleichung für die Zelle



**Bild 14.** Stromlinien-Zurückverfolgung im Programm "casu" vom Zeitpunkt  $t$  zum Zeitpunkt  $t-\Delta t$

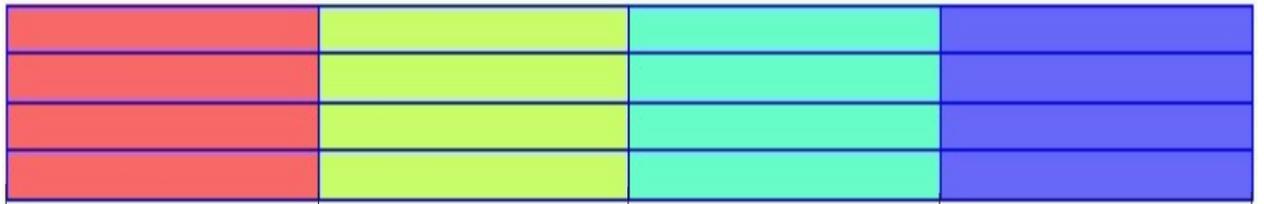


**Bild 15.** Vertikaler Schnitt zur Erläuterung der 3D-Diskretisierung

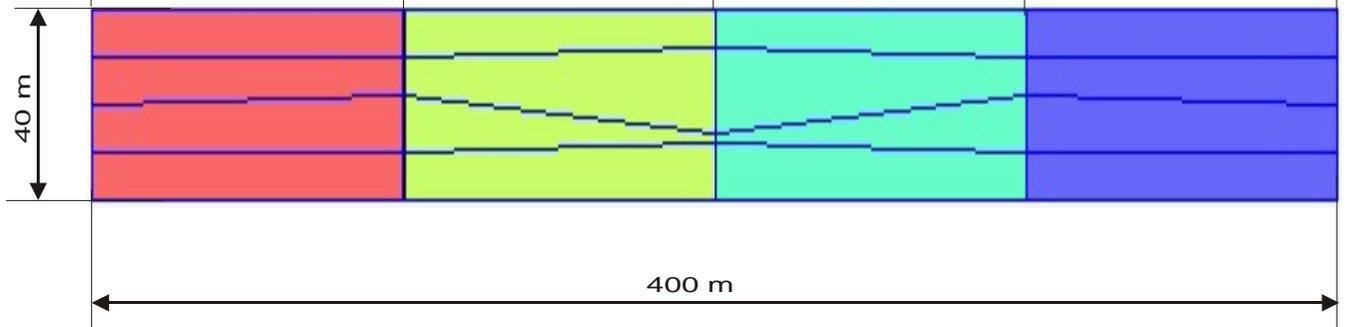


**Bild 16.** Unstrukturiertes orthogonales Netz nach [15]

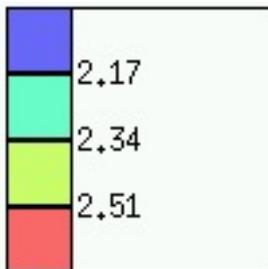
a



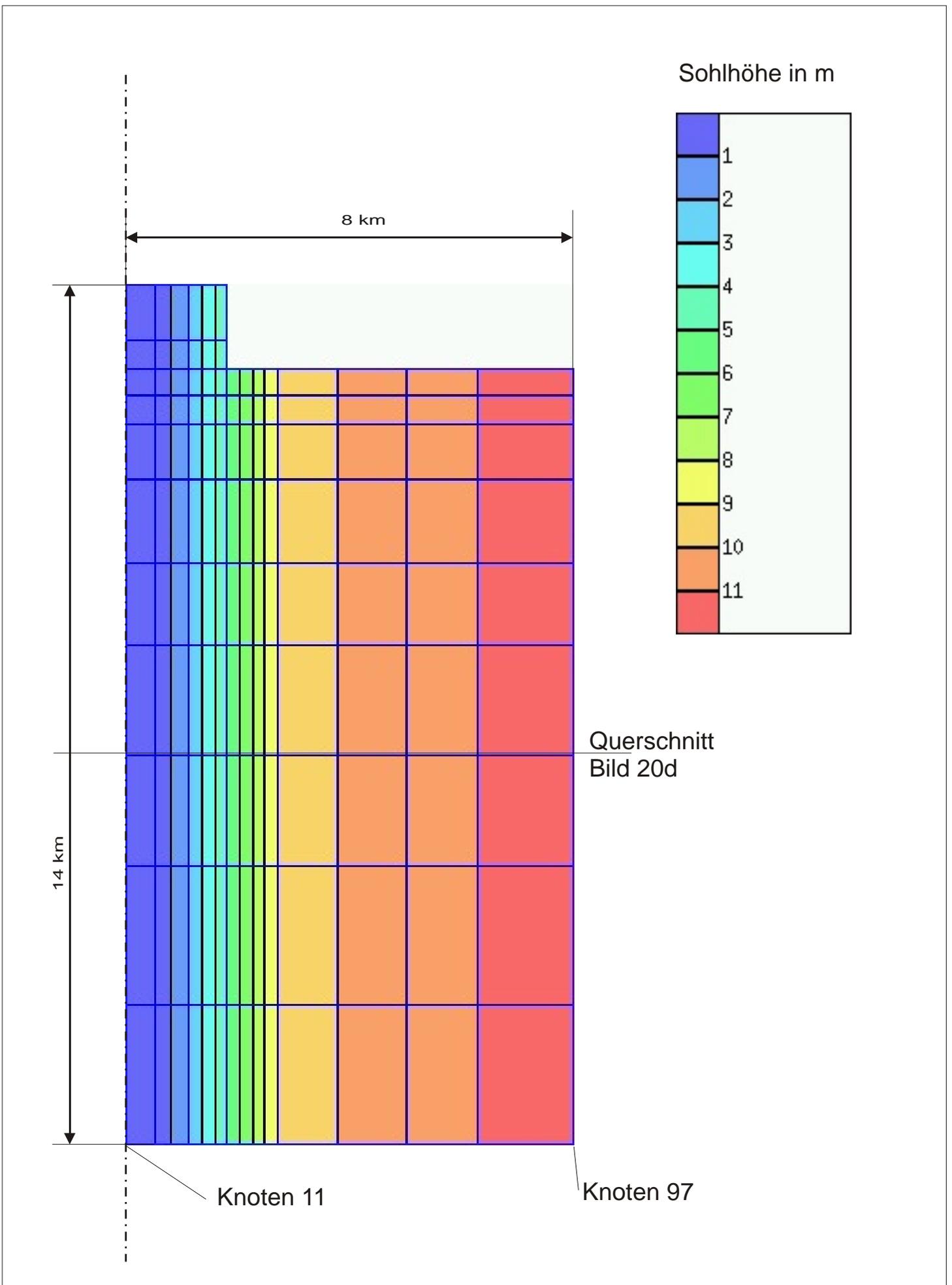
b



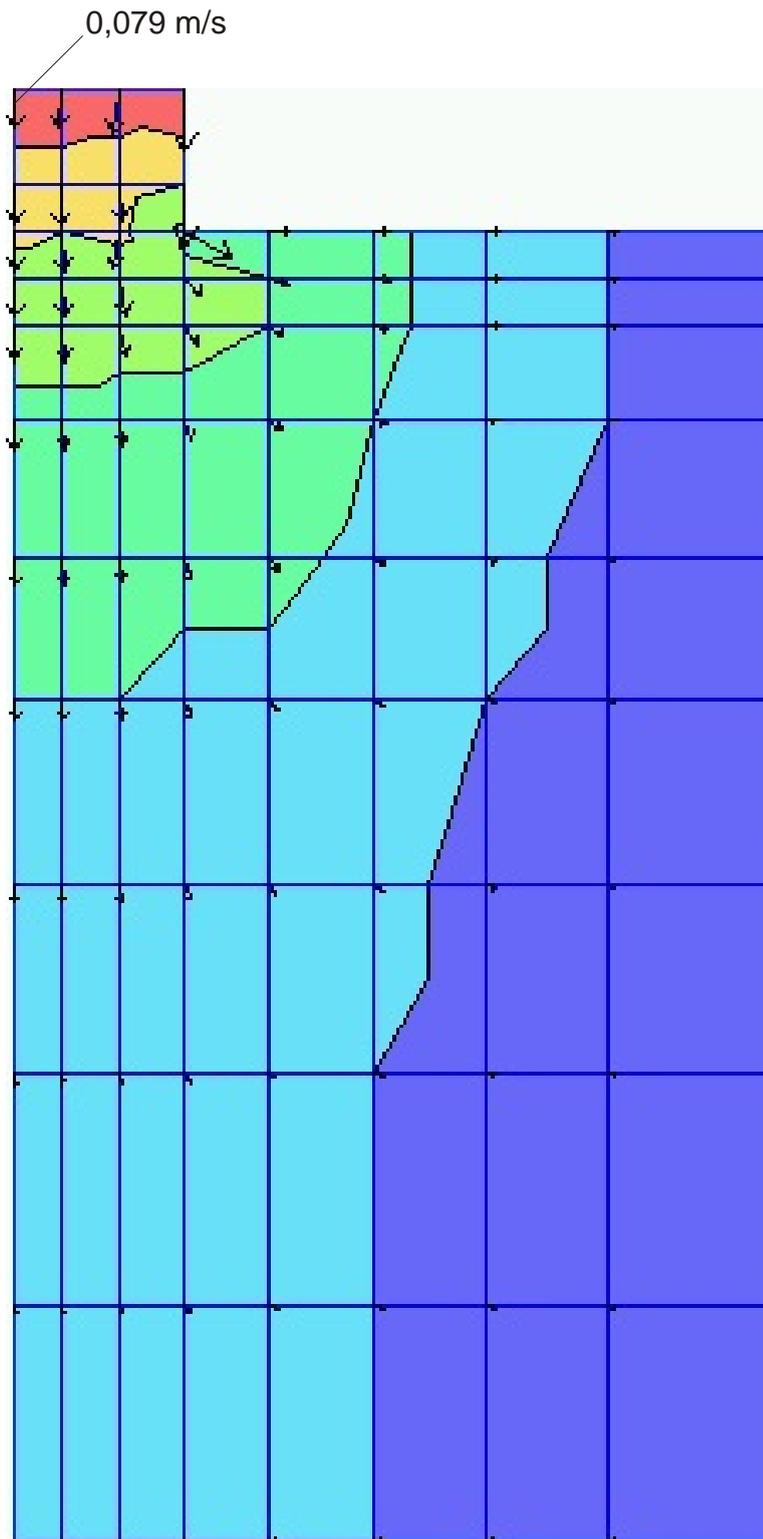
Wasserstand in m



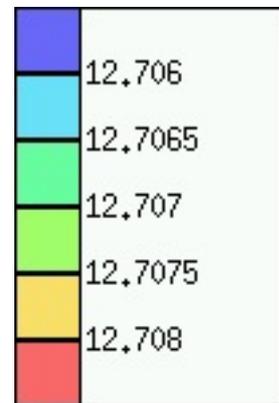
**Bild 17.** Testfall Gerader Kanal (Draufsicht, Strömung nach rechts),  
a ebenmäßiges Rechtecknetz, b verzerrtes Netz



**Bild 18.** Testfall Tide in einer Bucht, Netz und Topographie



Wasserstand in m  
nach 12,5 h

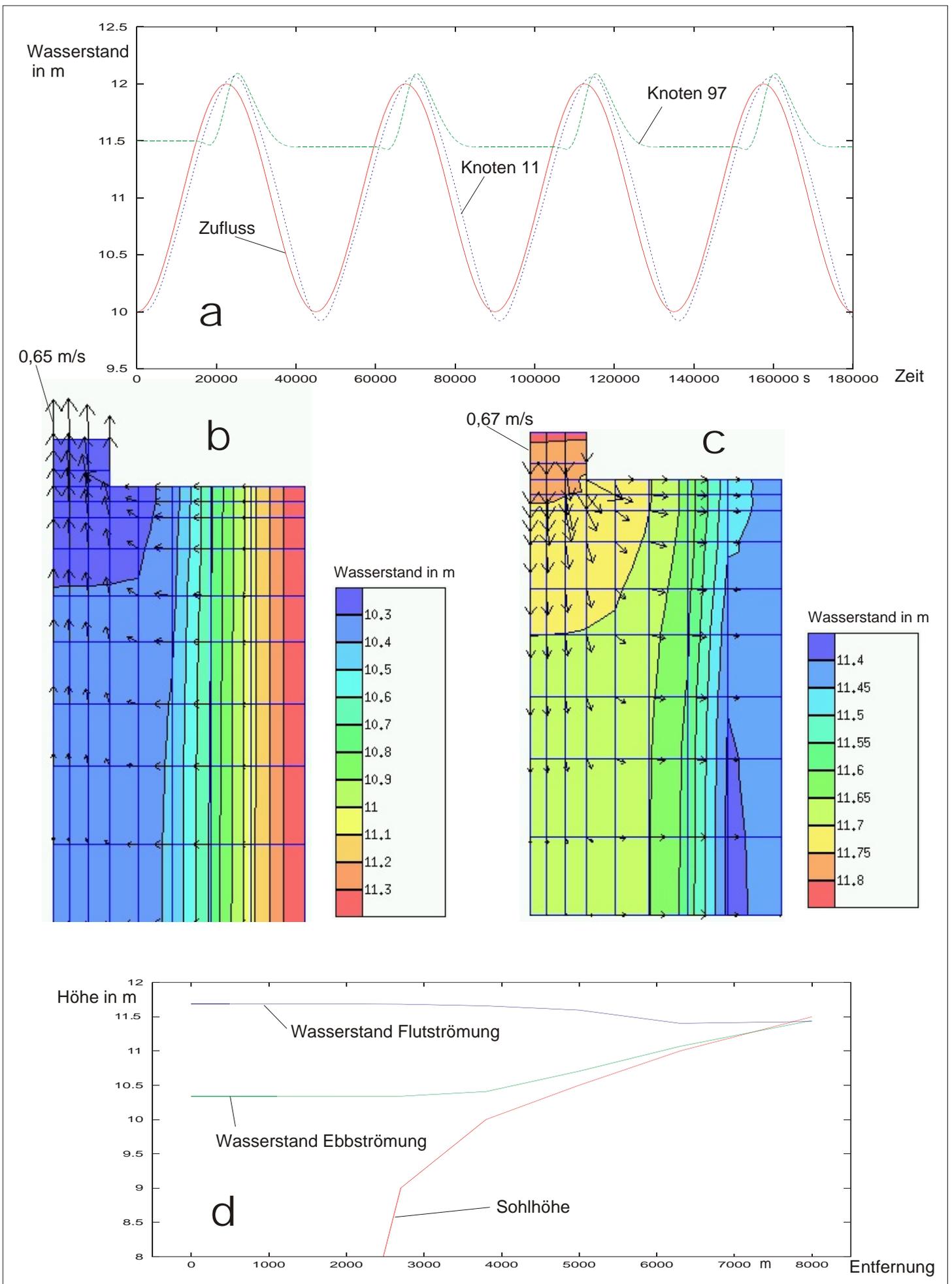


Anfangswasserstand  
12,000 m

Konstanter Zustrom  
1 800 m<sup>3</sup>/s

Wasserstand in m  
nach 12,5 h

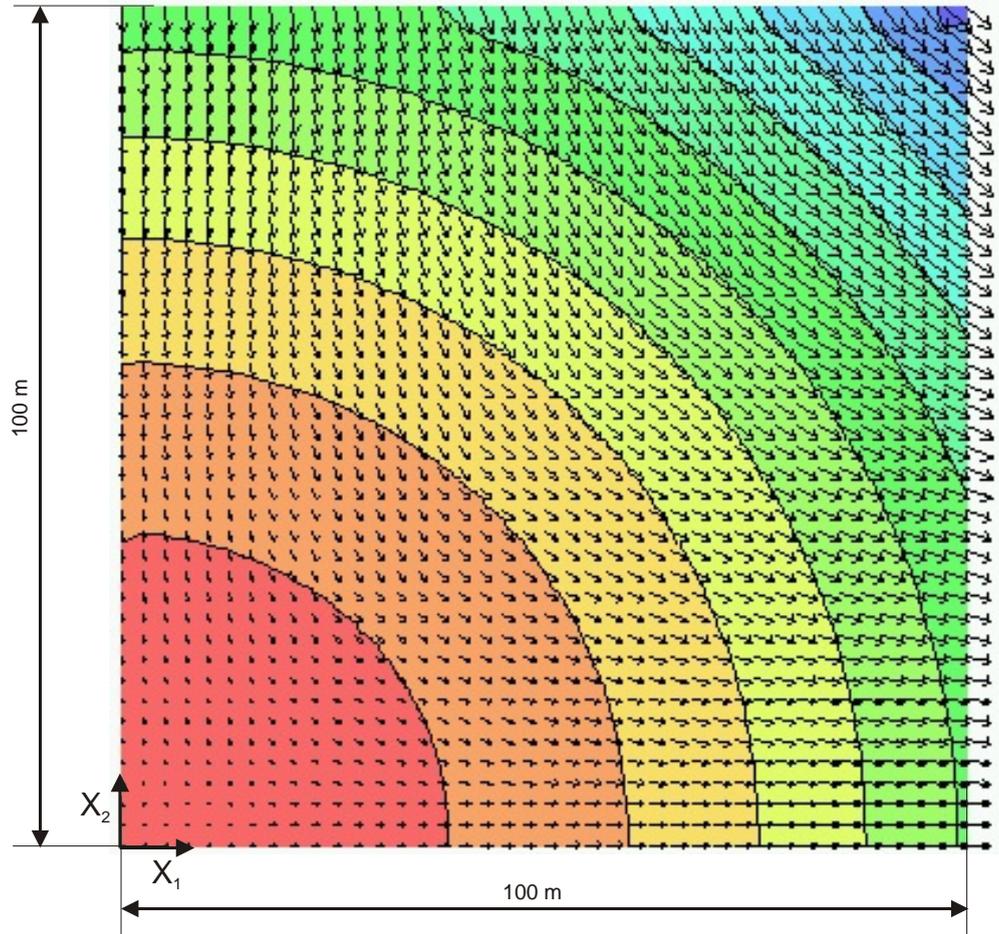
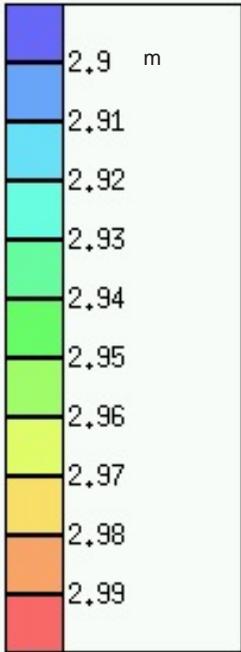
**Bild 19.** Testfall Tide in einer Bucht, konstanter Zustrom



**Bild 20.** Testfall Tide in einer Bucht, a Wasserstandsganglinien, b Ebb-Strömung 130 500 s = 36,25 h, c Flut-Strömung 153 000 s = 42,5 h, d Querschnitt

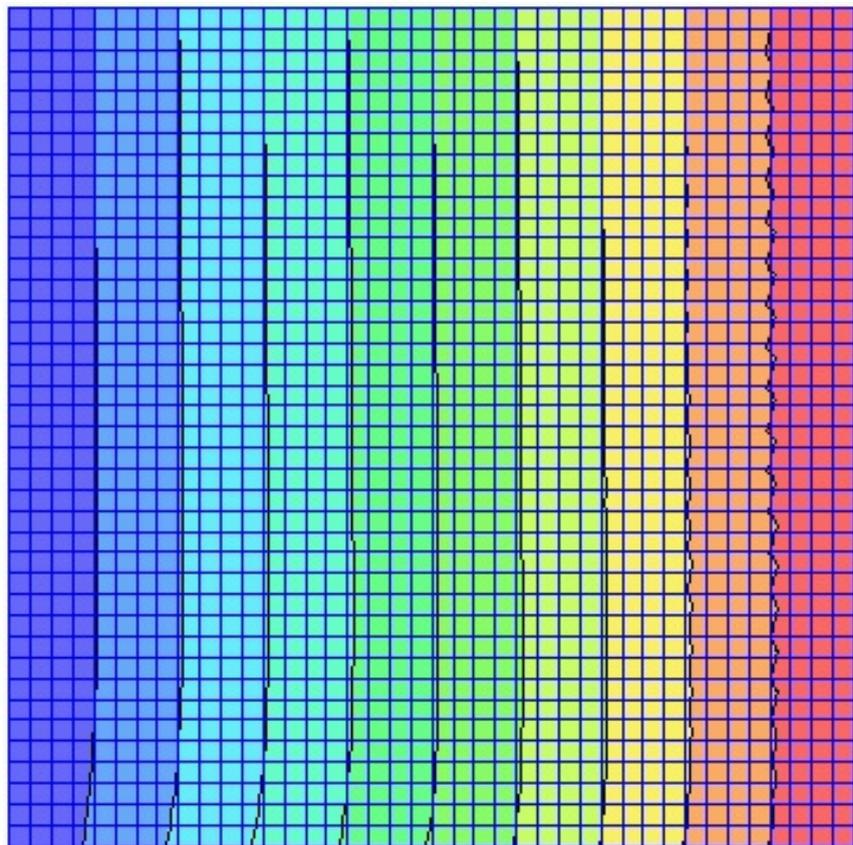
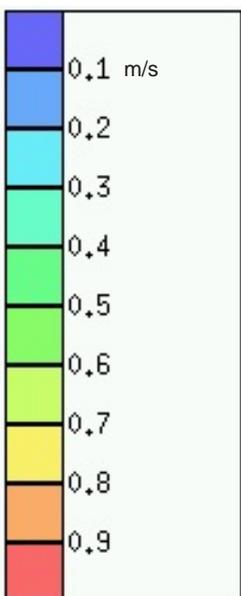
a

Wasserstand  $z_s$



b

$v_1$



**Bild 21.** Potential-Staupunktströmung, a Vektor- und Wasserstands-Plan, b Berechnungsnetz und  $v_1$  Geschwindigkeitsplan

Wandabstand

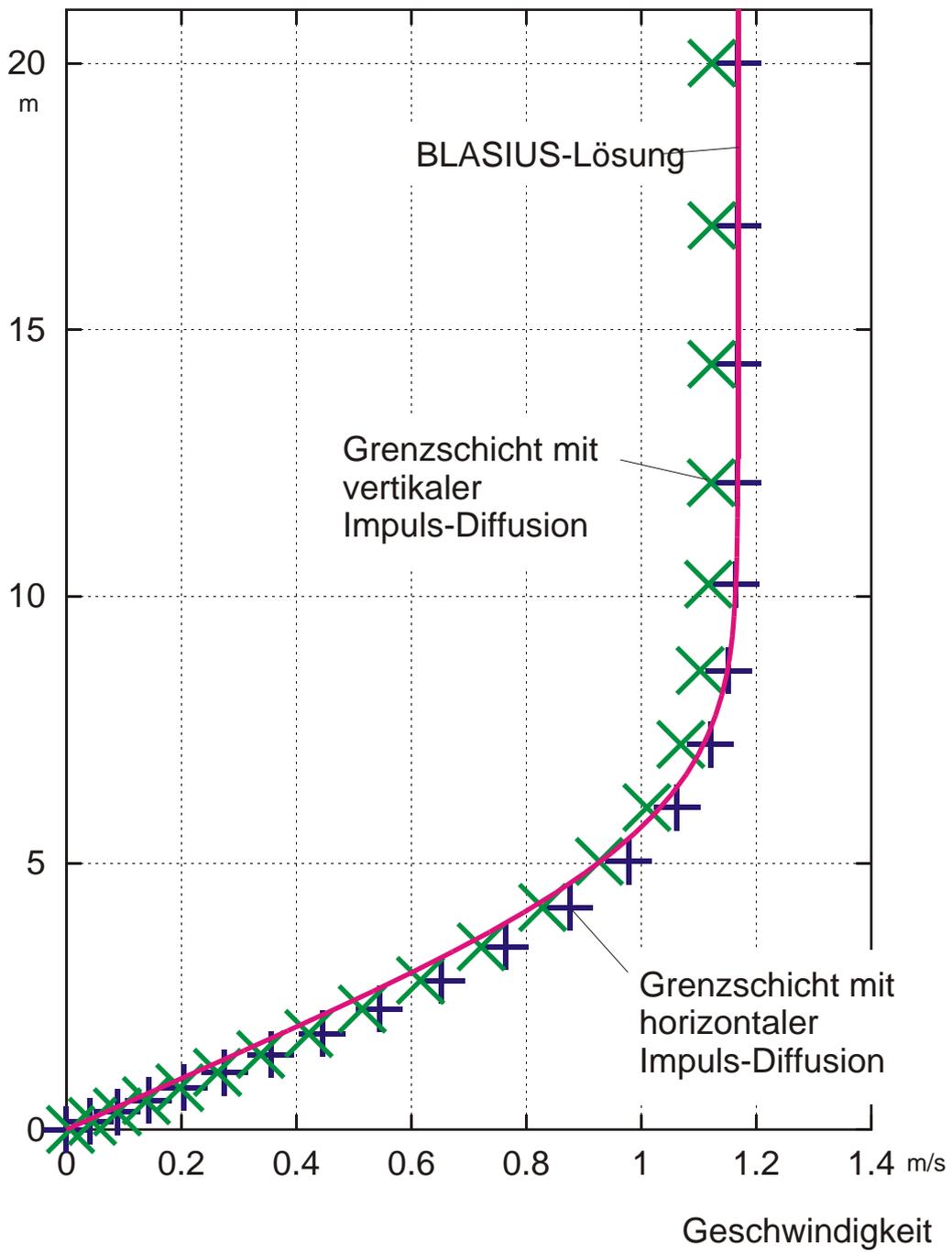
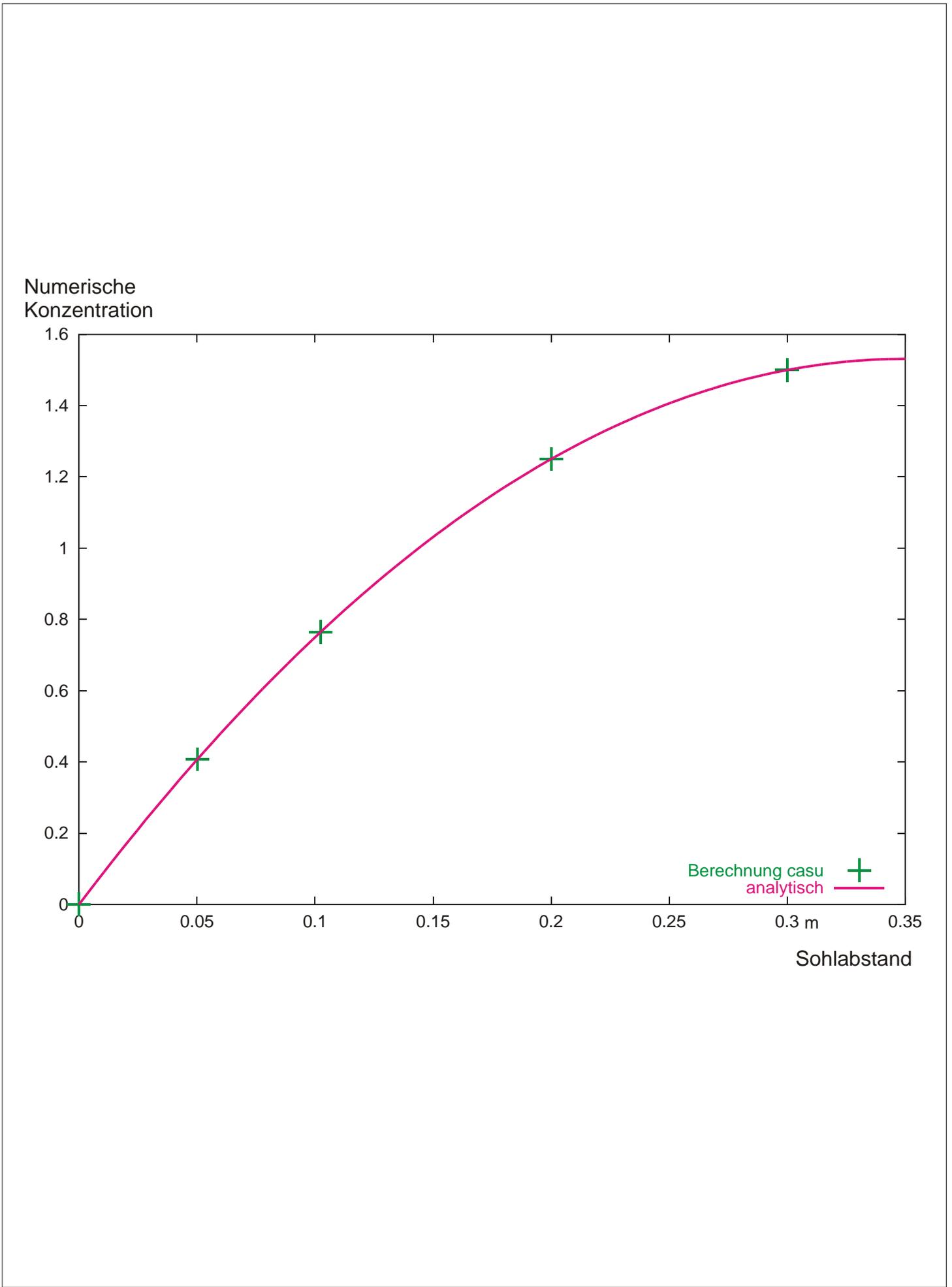
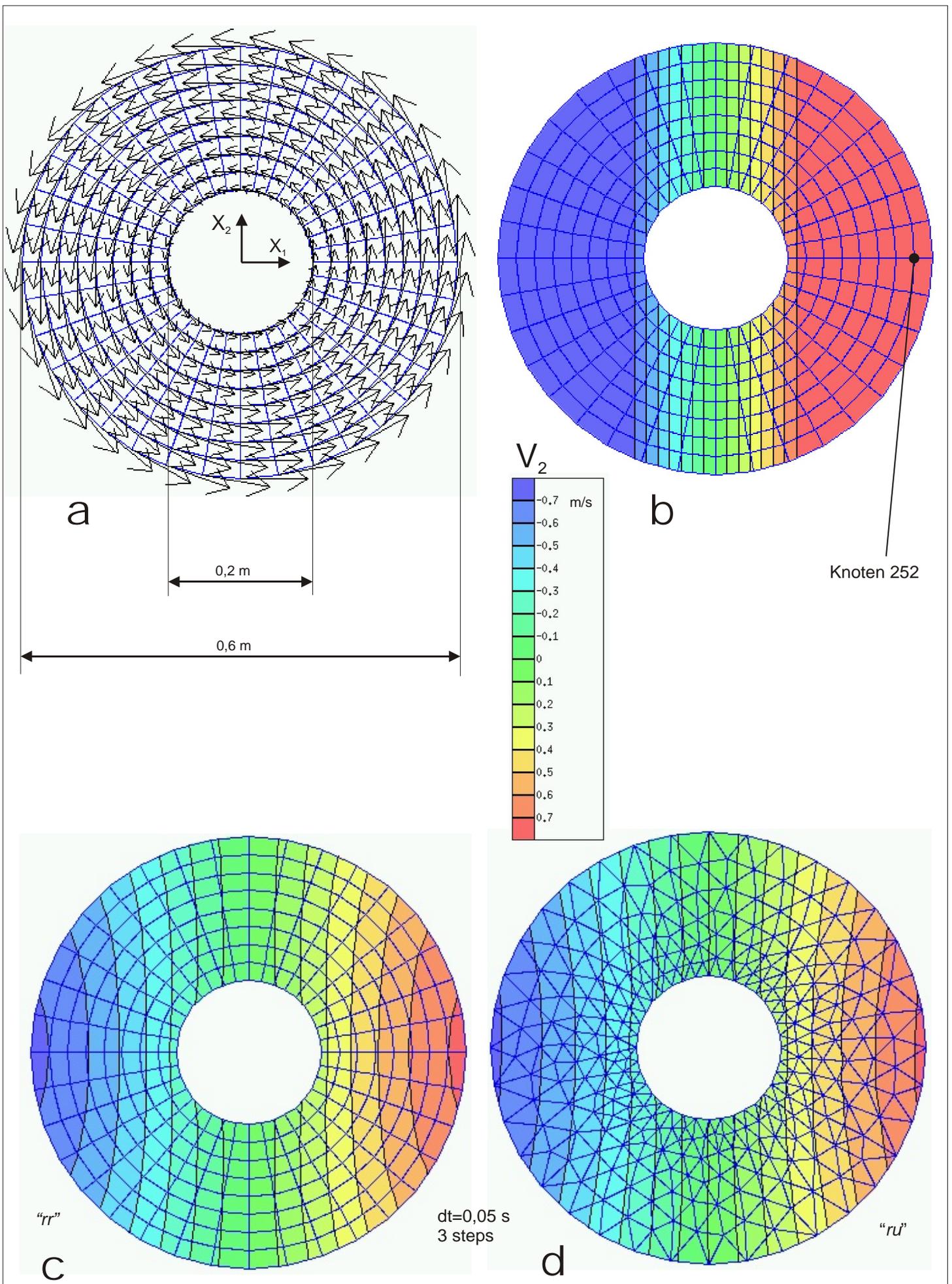


Bild 22. Testfall Laminare Grenzschicht

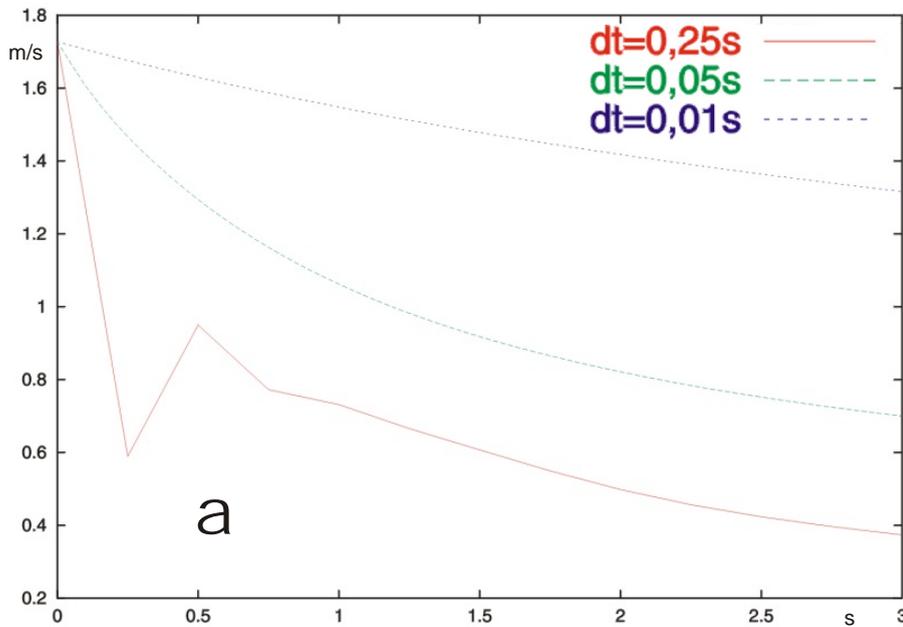


**Bild 23.** Testfall Diffusion von Konzentrationen

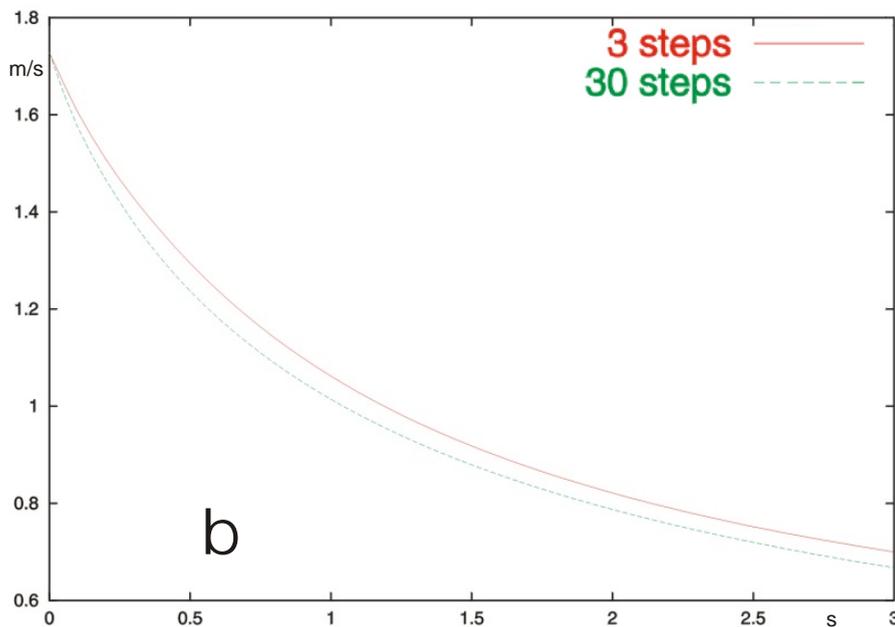


**Bild 24.** Testfall Starrkörperrotation,  
 a Anfangsbedingung Geschwindigkeitsverteilung, b Anfangsbedingung Isotachen  $v_2$ ,  
 c Isotachen  $v_2$  nach 3 s Rechenzeit, regelmäßiges Netz, d dito, unregelmäßiges Netz

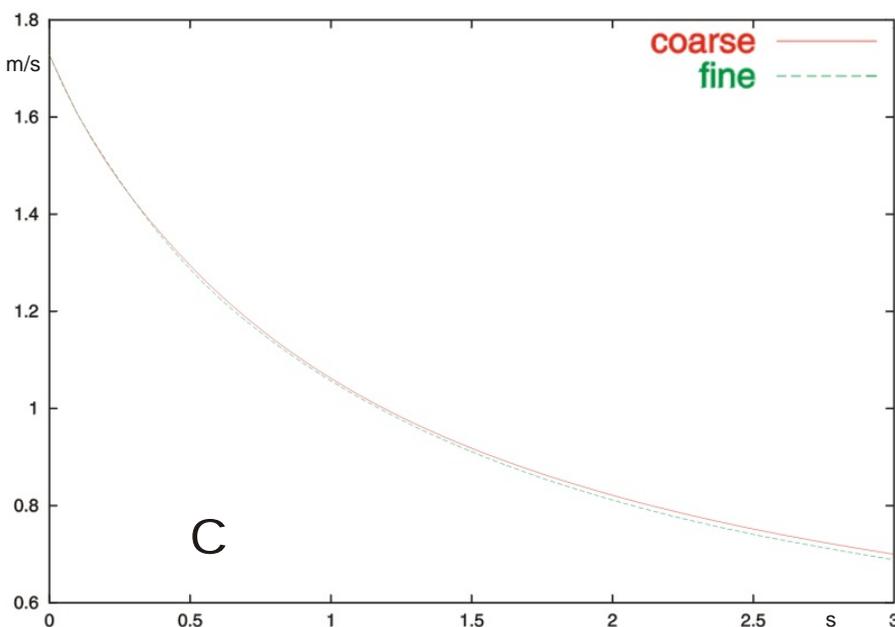
V\_2



Variation des Zeitschritts dt  
(coarse, 3 steps)



Variation der Genauigkeit  
bei der Berechnung der  
Stromlinien  
(dt=0,05 s , coarse)

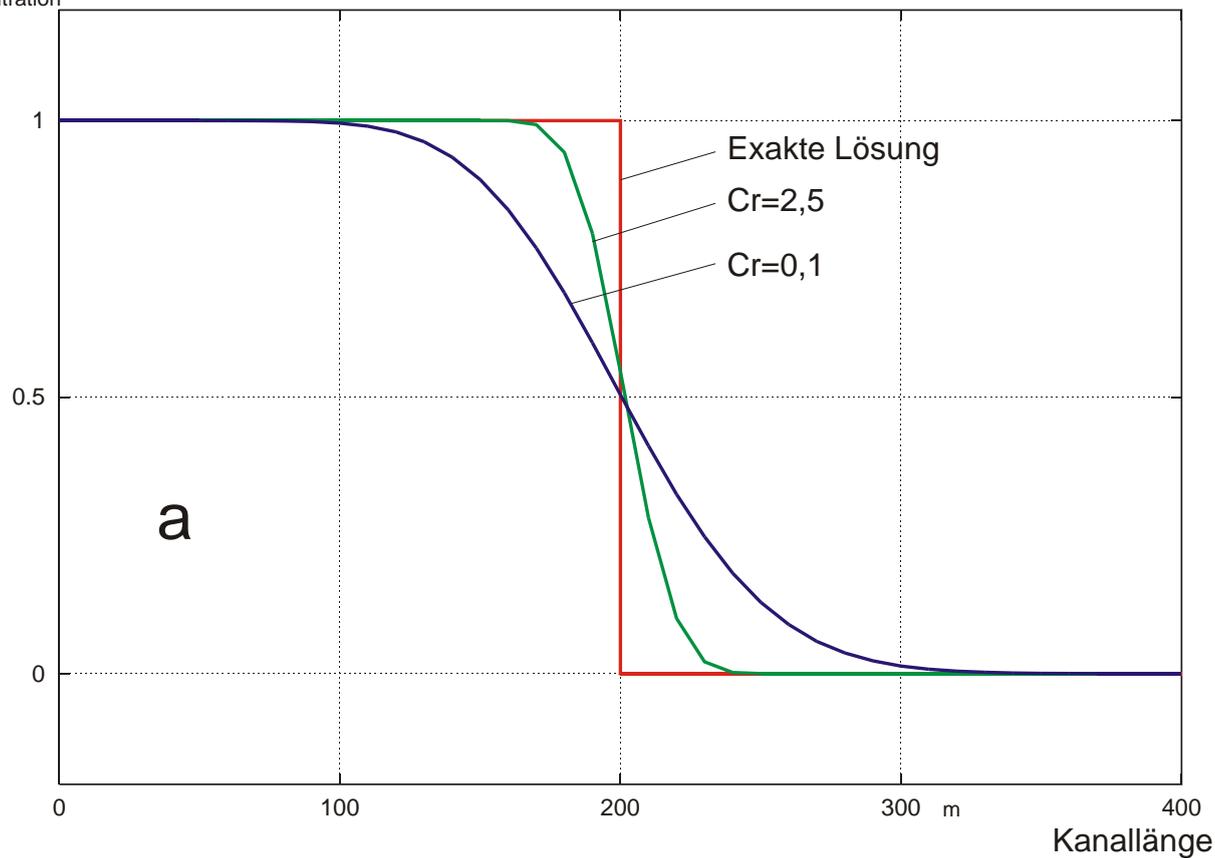


Variation der Netzfeinheit  
(dt=0,05 s , 3 steps)

Zeit

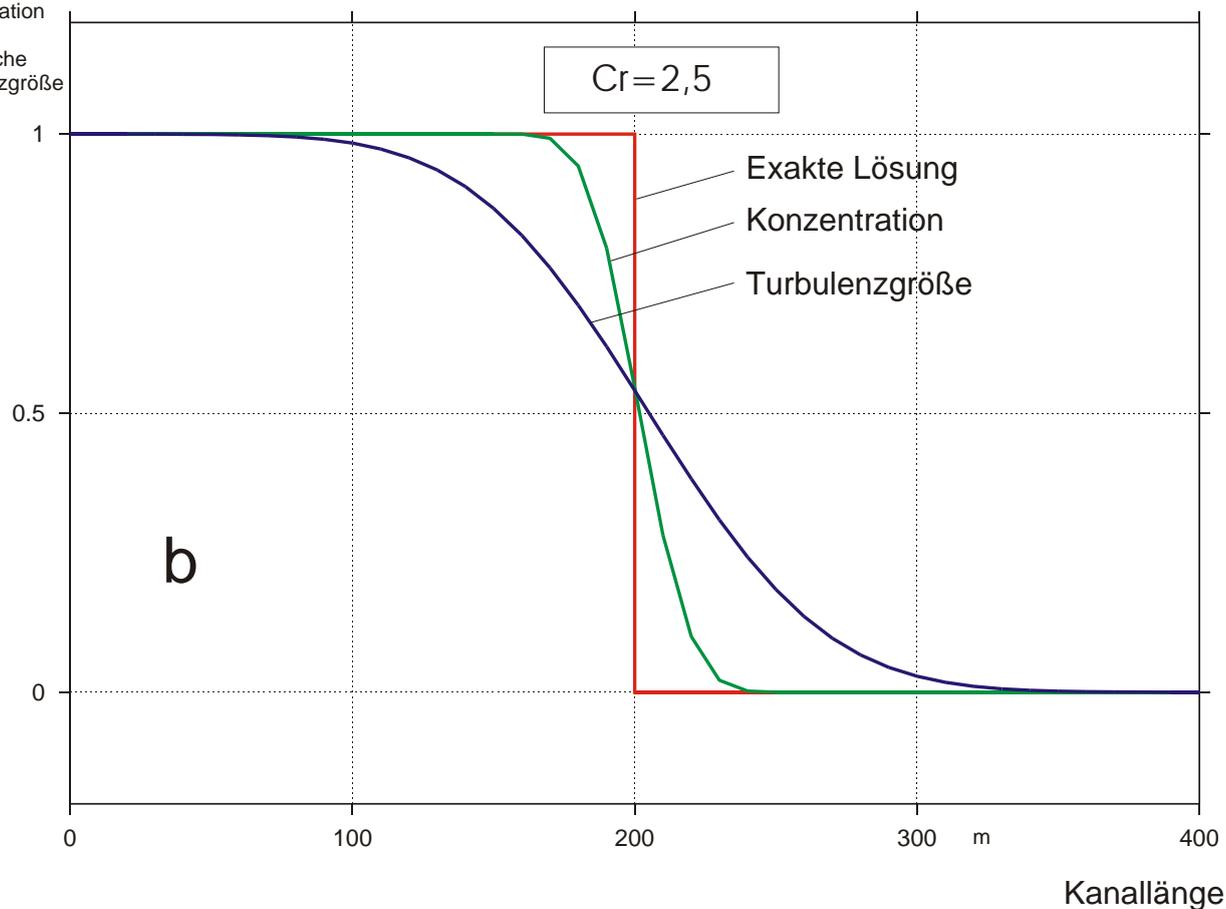
**Bild 25.** Testfall Starrkörperrotation, numerisch bedingte Geschwindigkeitsabnahme am Knoten 252 (siehe **Bild 24b**), a Variation des Zeitschritts dt, b Variation der Genauigkeit in der Stromlinienberechnung, c Variation der Netzfeinheit

Numerische  
Konzentration



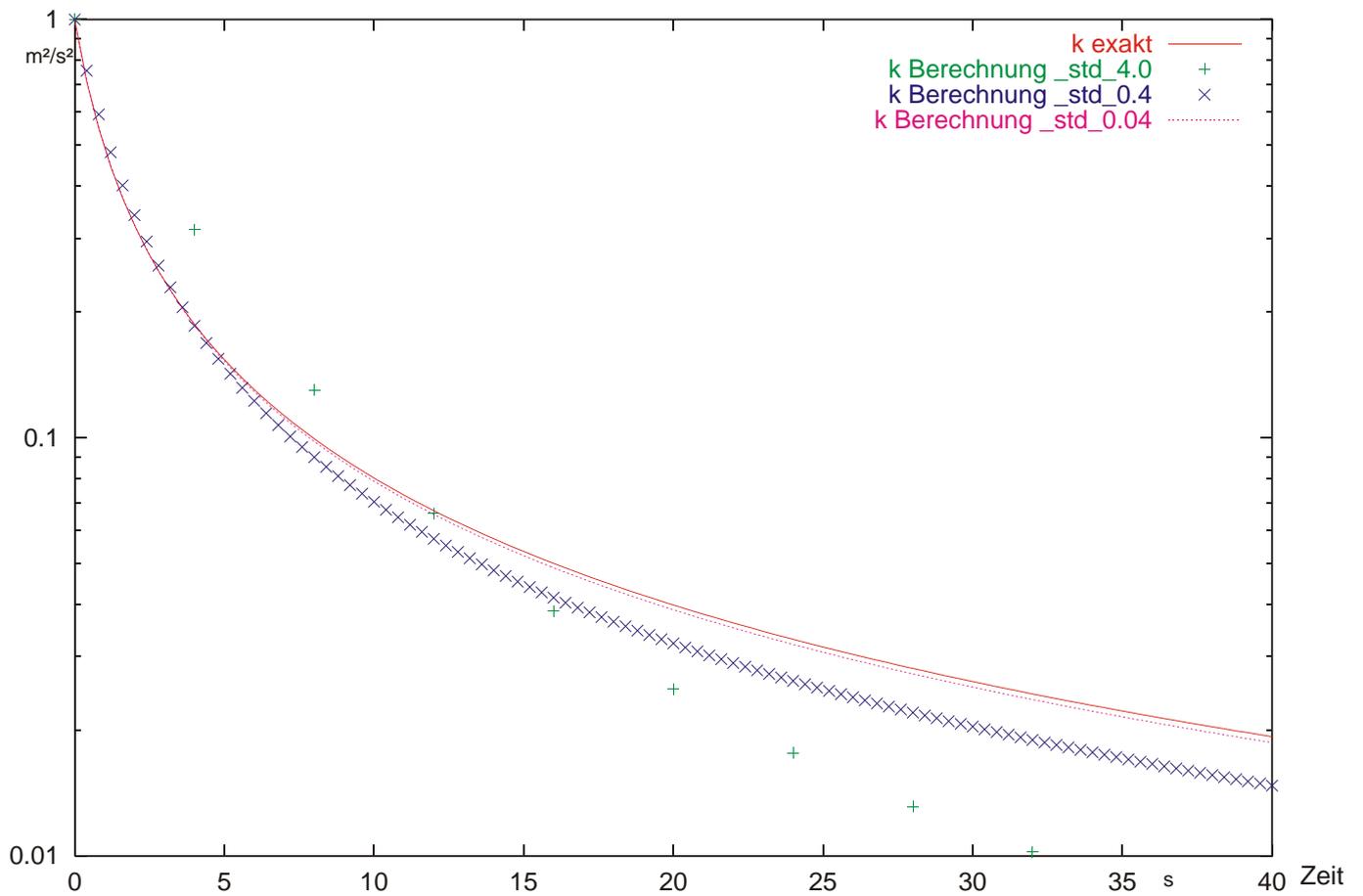
Numerische  
Konzentration

Numerische  
Turbulenzgröße



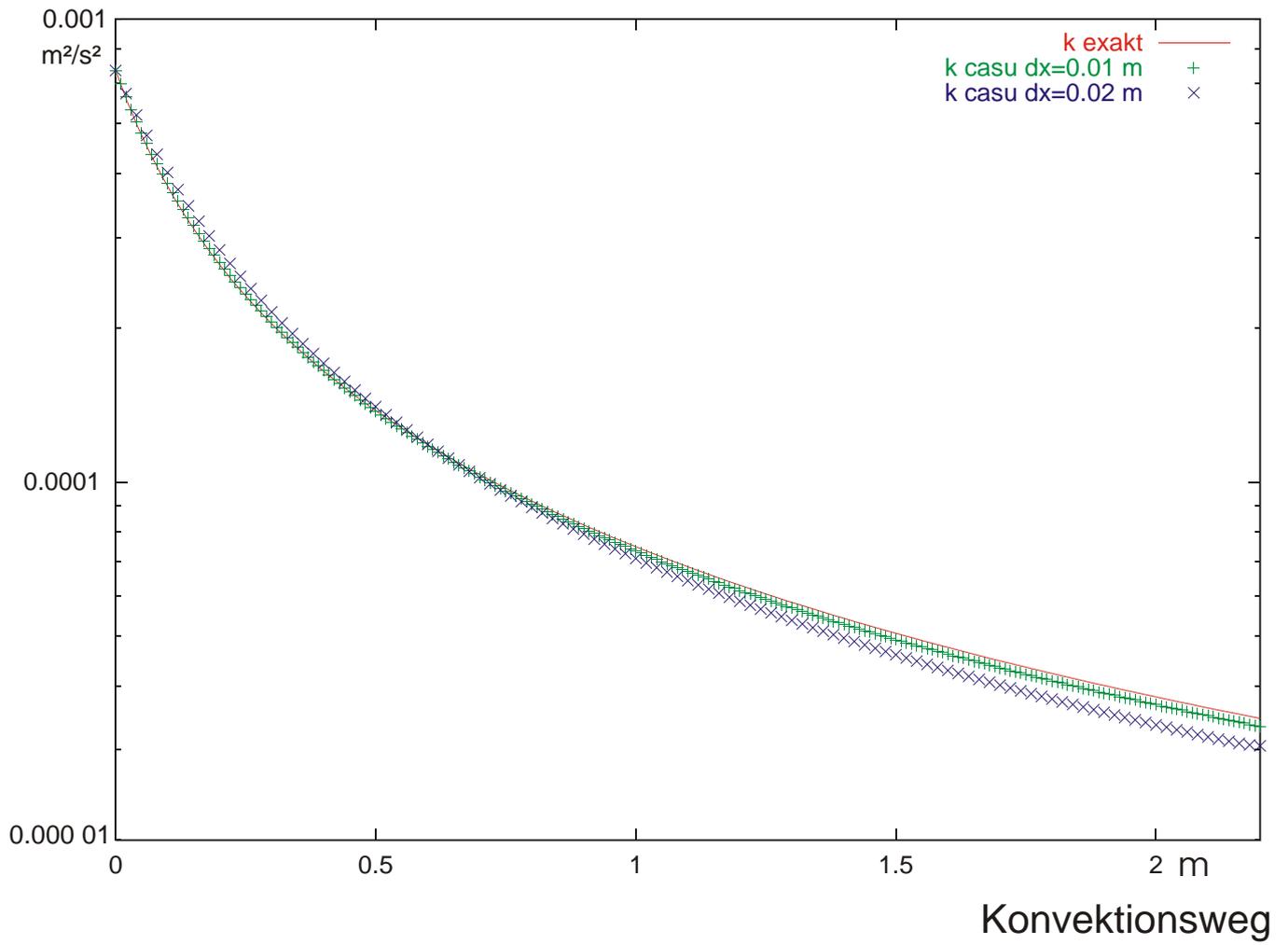
**Bild 26.** Testfall Konvektiver Transport,  
a Einfluss der COURANT-Zahl,  
b Vergleich von Konzentration und Turbulenzgröße

kinetische Energie  
der Turbulenz  $k$ .

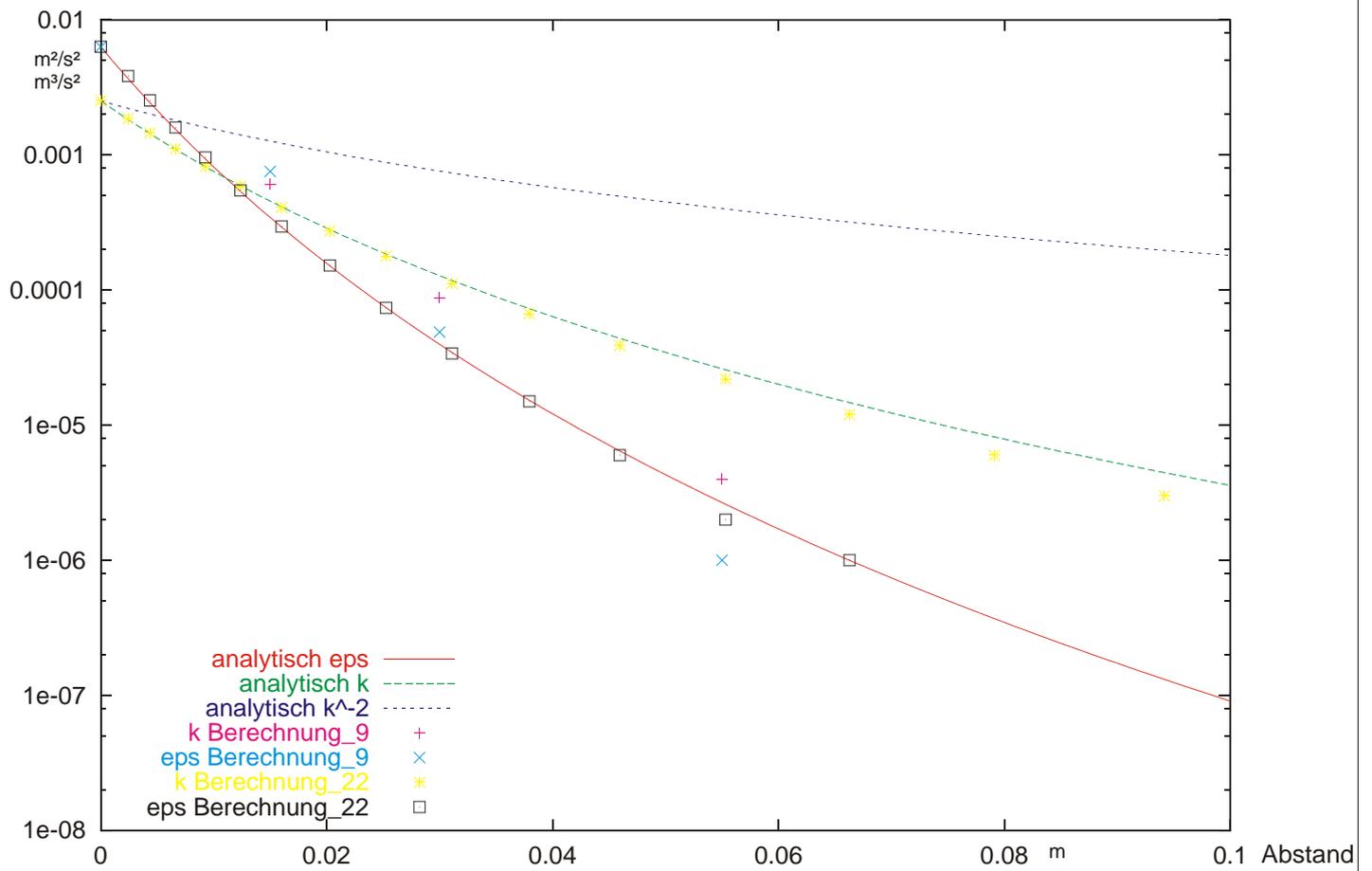


**Bild 27.** Testfall Abklingen isotroper Turbulenz,  
zeitlicher Verlauf der kinetischen Energie der Turbulenz  $k$ .

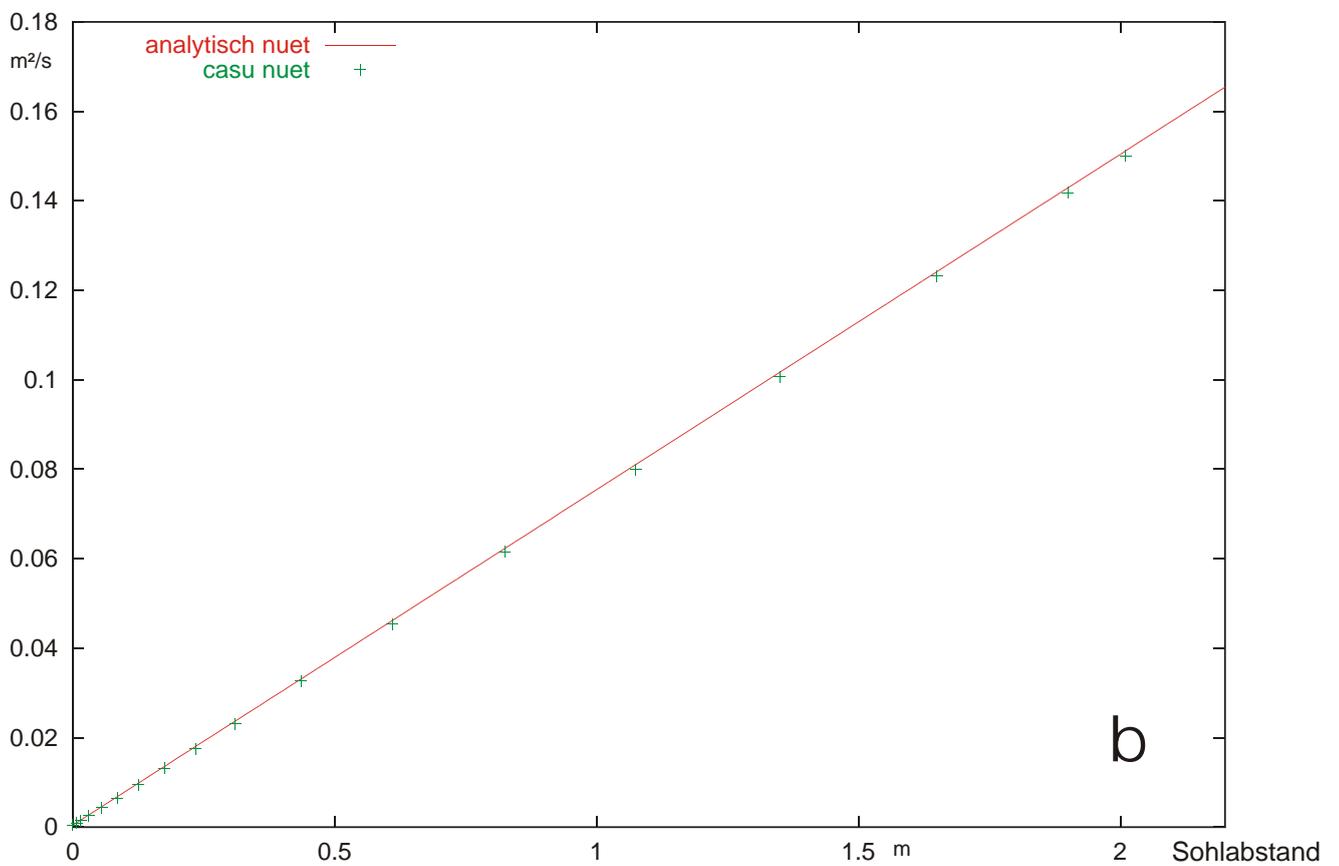
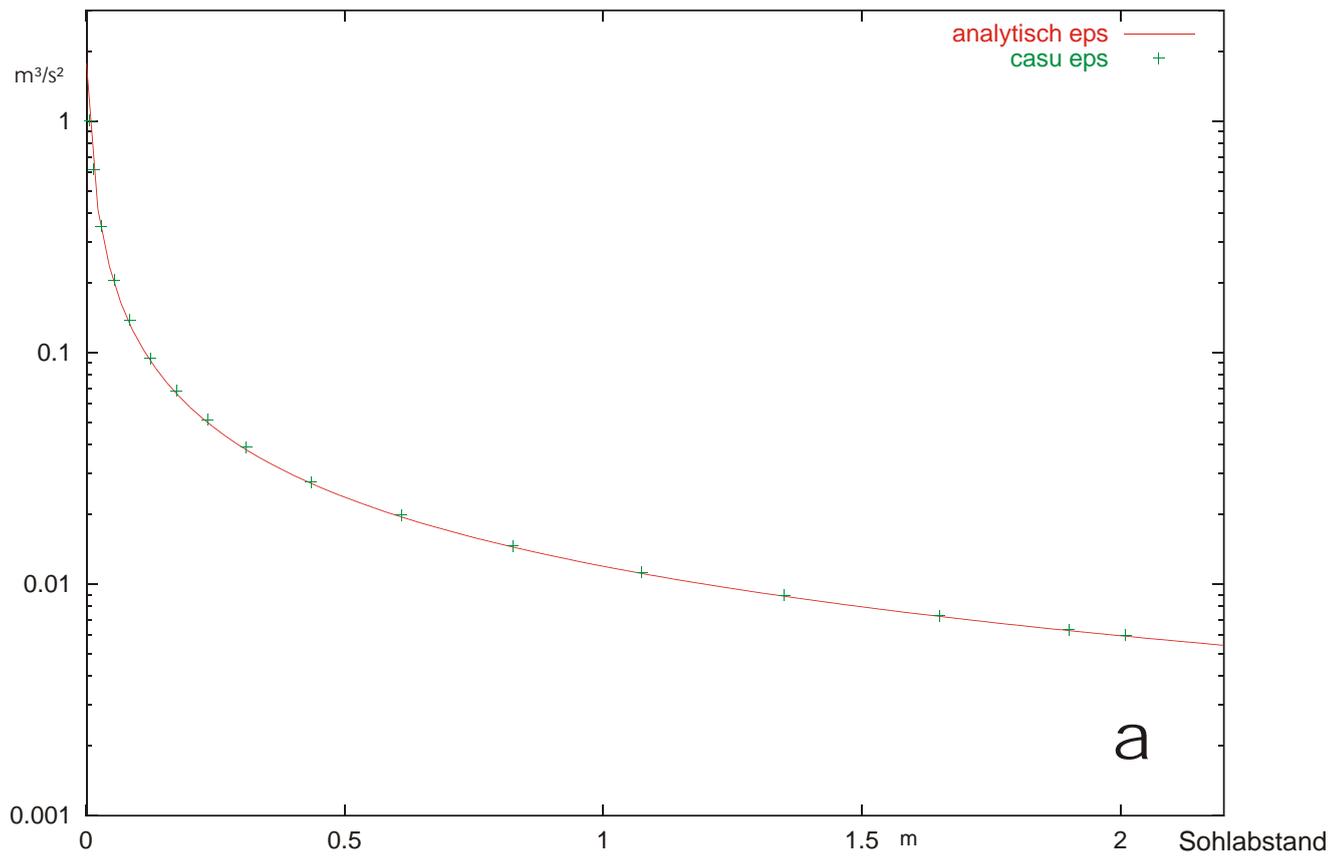
kinetische Energie  
der Turbulenz  $k$ .



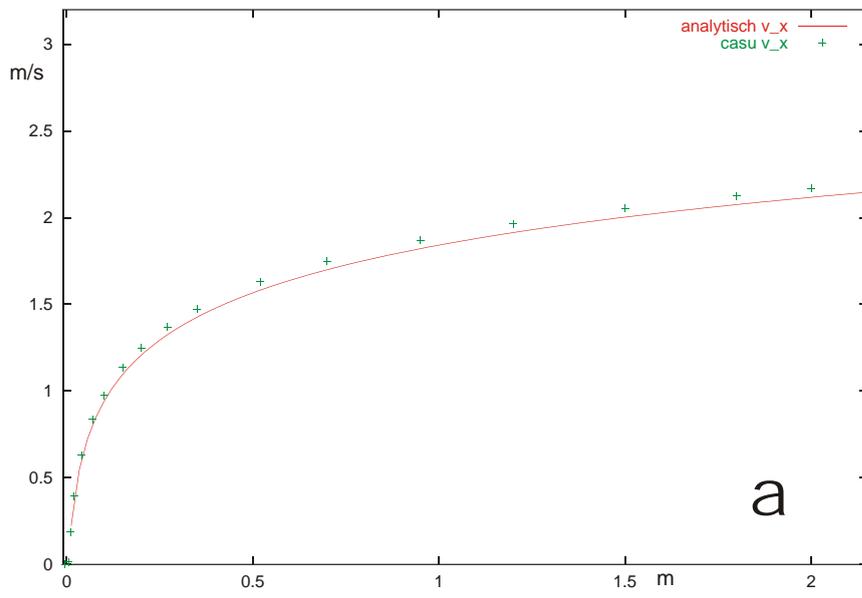
**Bild 28.** Testfall Abklingen isotroper Turbulenz, kinetische Energie der Turbulenz  $k$  entlang des Konvektionsweges in gleichförmiger Strömung



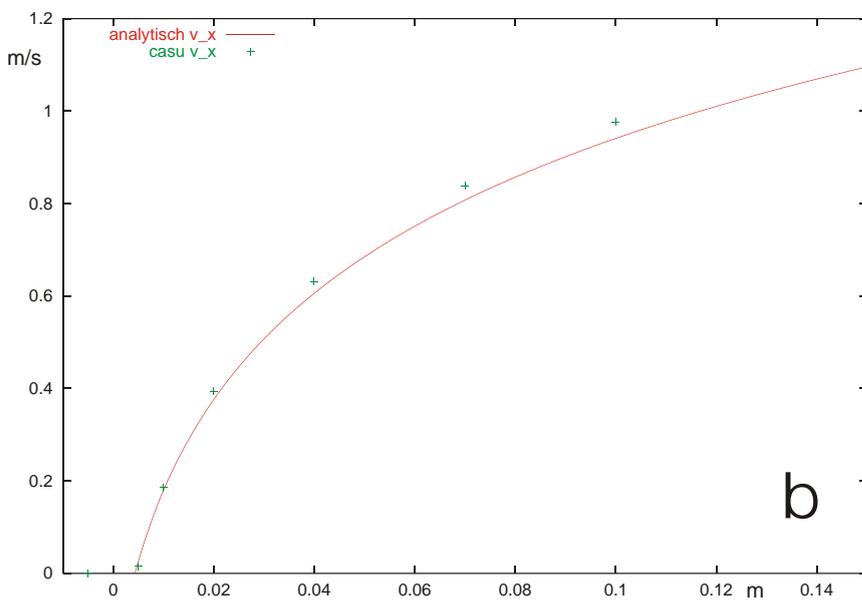
**Bild 29.** Testfall Oszillating-Grid-Tank, räumliche Verteilung der turbulenten kinetischen Energie  $k$  und der Dissipationsrate  $\epsilon$ .



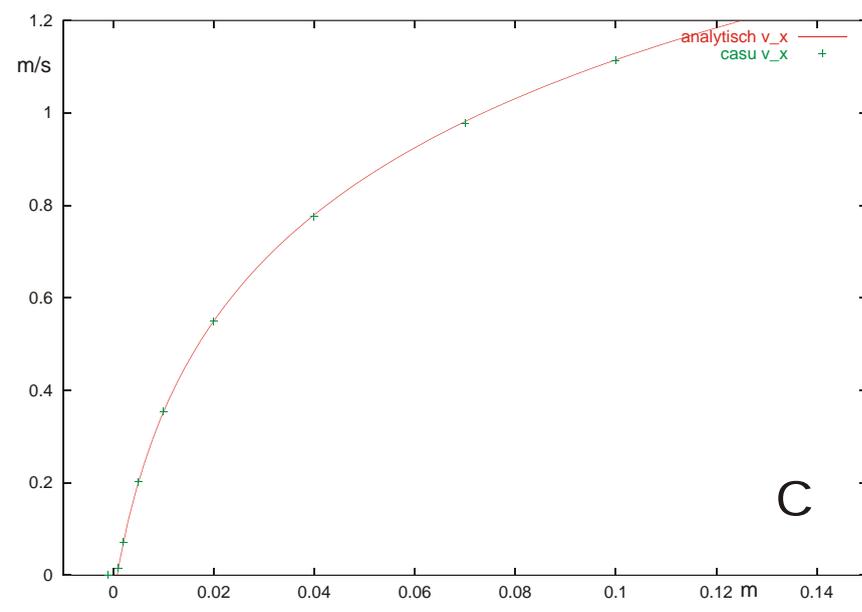
**Bild 30.** Testfall Logarithmisches Wandgesetz,  
 a Dissipationsrate,  
 b Wirbelviskosität



Sohlabstand



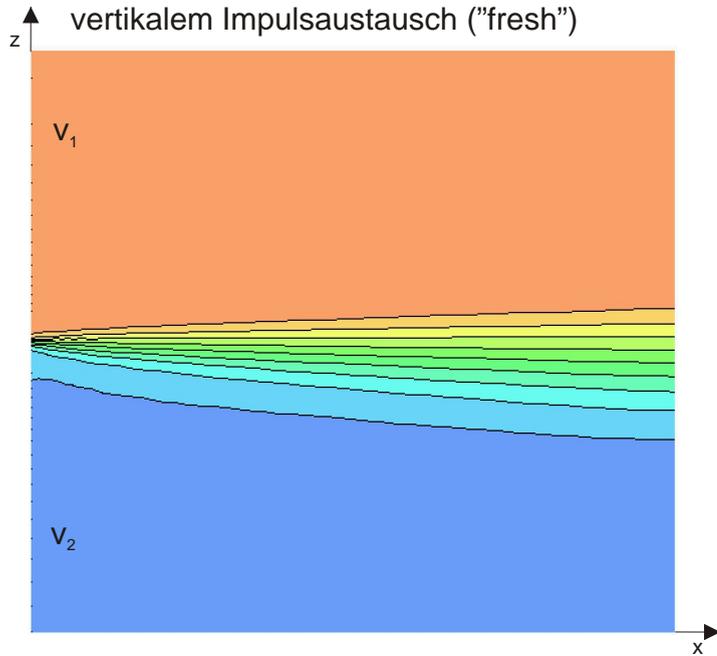
Sohlabstand



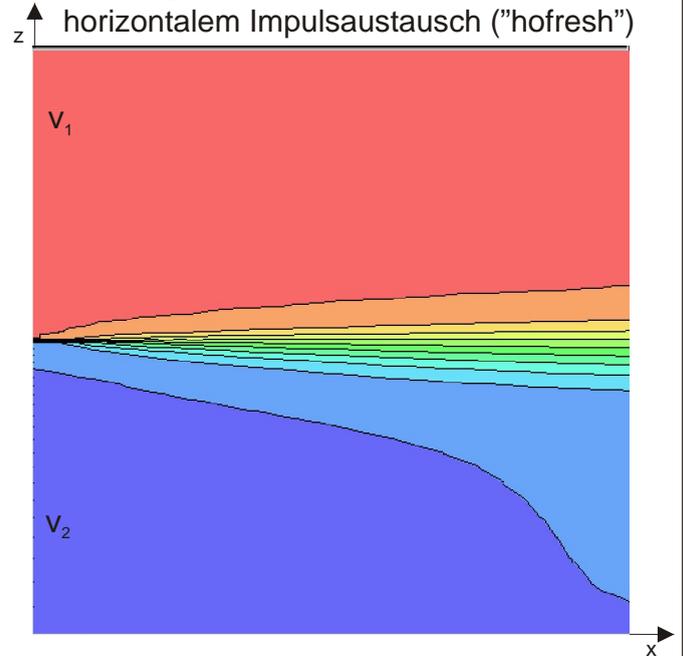
Sohlabstand

**Bild 31.** Testfall Logarithmisches Wandgesetz,  
 a Geschwindigkeit in der gesamten Schicht,  
 b Geschwindigkeit im sohnahen Bereich,  
 c Geschwindigkeit im sohnahen Bereich (verfeinert)

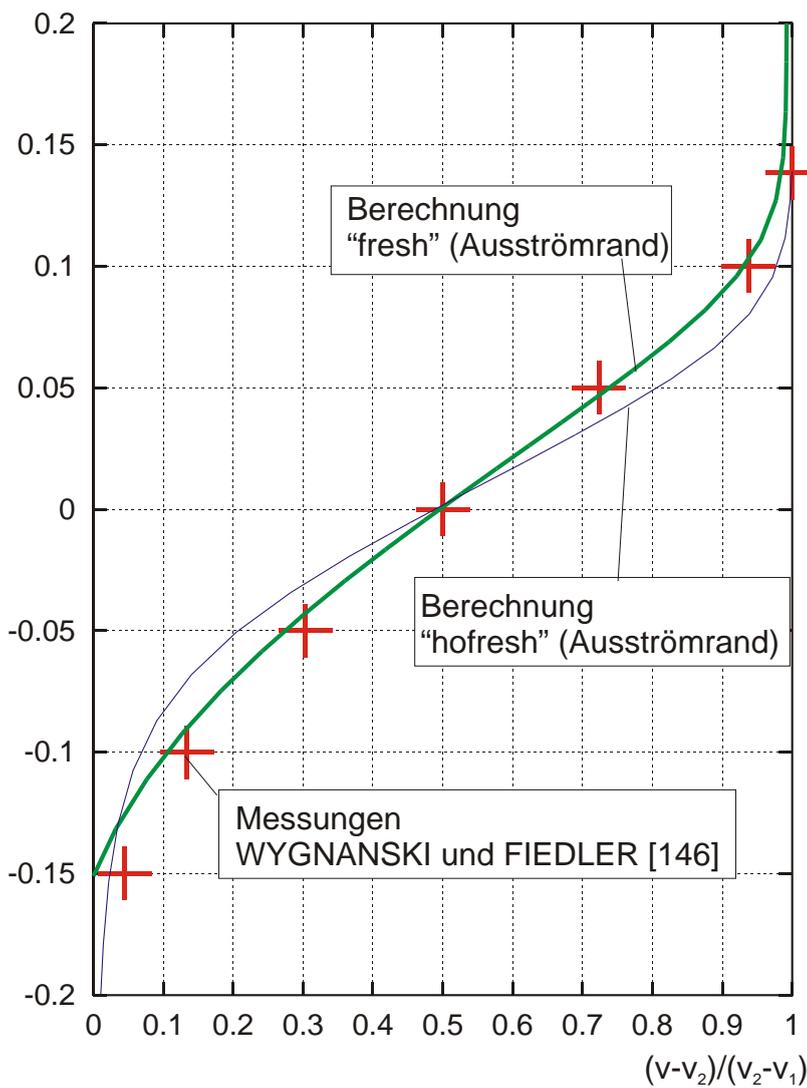
Ebene Scherschicht mit vertikalem Impulsaustausch ("fresh")



Ebene Scherschicht mit horizontalem Impulsaustausch ("hofresh")



$$\eta = (z-z_0)/(x-x_m)$$



V

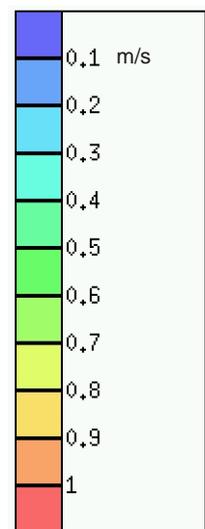
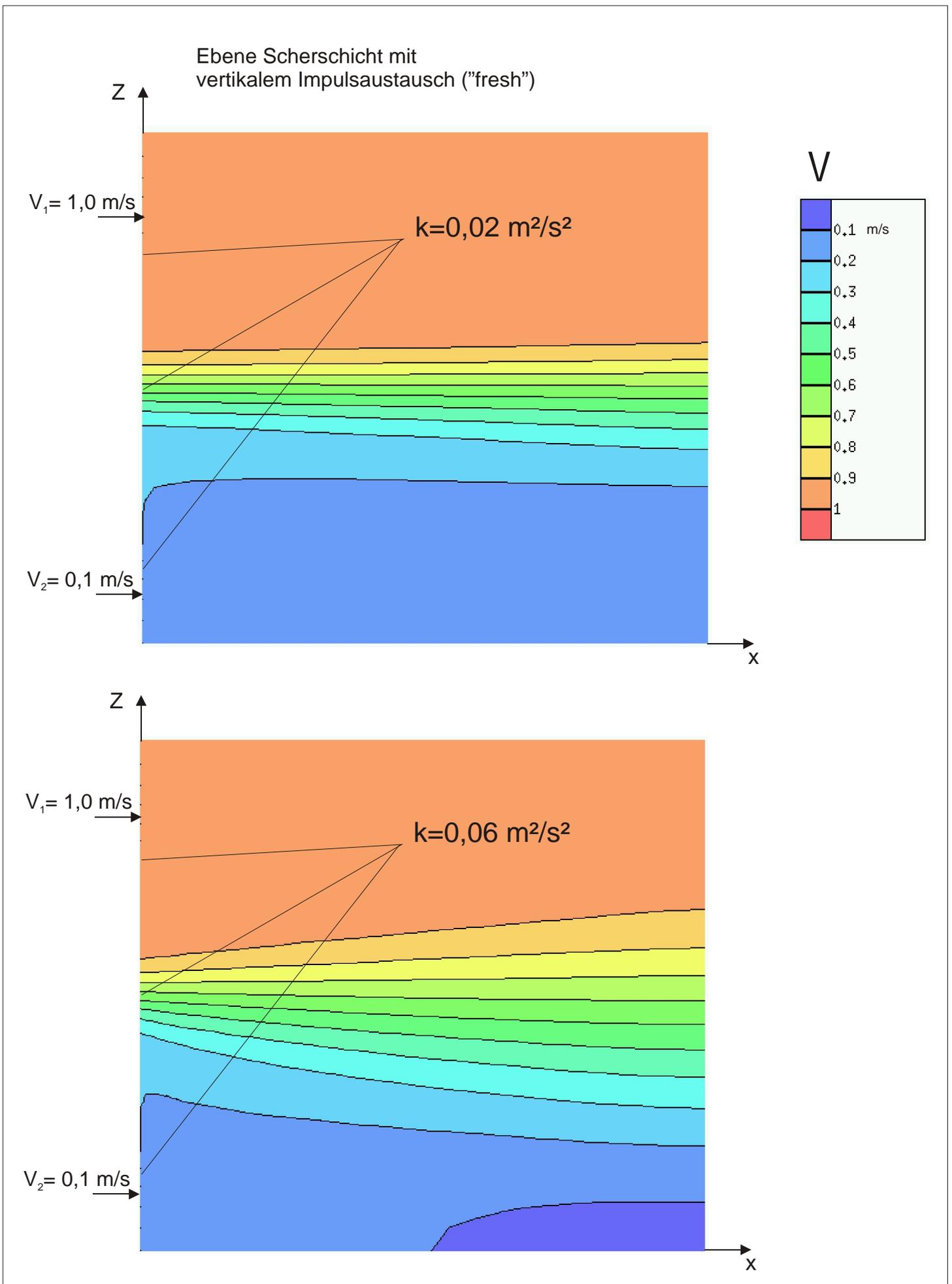
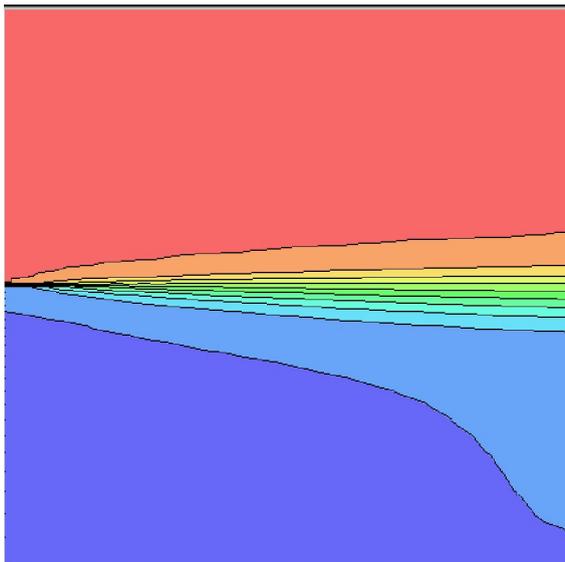


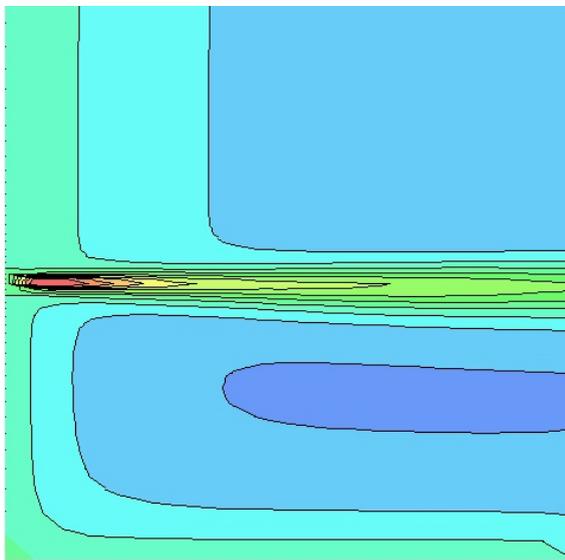
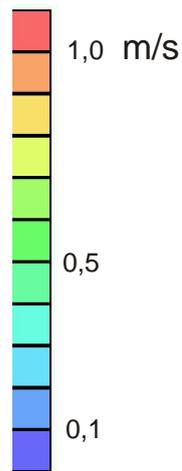
Bild 32. Testfall Ebene Scherschicht



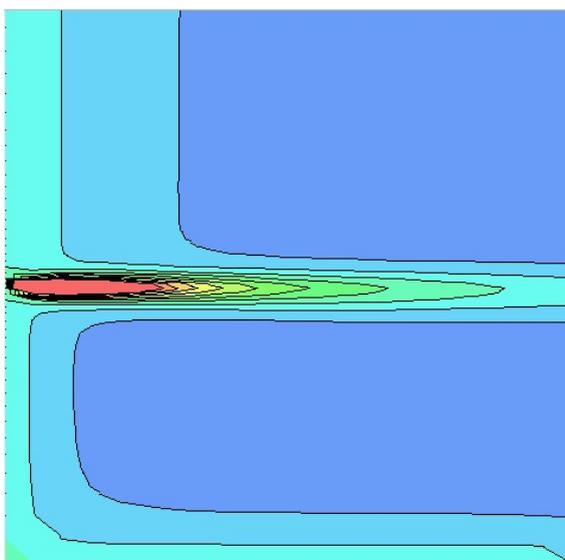
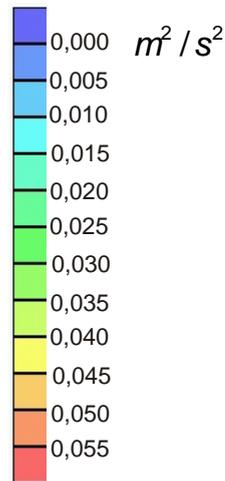
**Bild 33.** Testfall Ebene Scherschicht, Vergleich unterschiedlicher Zufluss-Randbedingungen für die Turbulenzgrößen



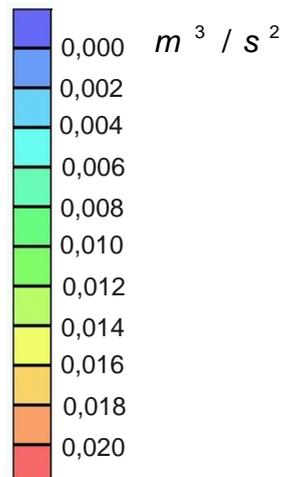
Mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$



kinetische Energie der Turbulenz  $k$



Dissipationsrate  $\epsilon$



**Bild 34.** Testfall ebene Scherschicht (Konfiguration "hofresh"),  
Turbulenzgrößen

$$\eta = (z-z_0)/(x-x_m)$$

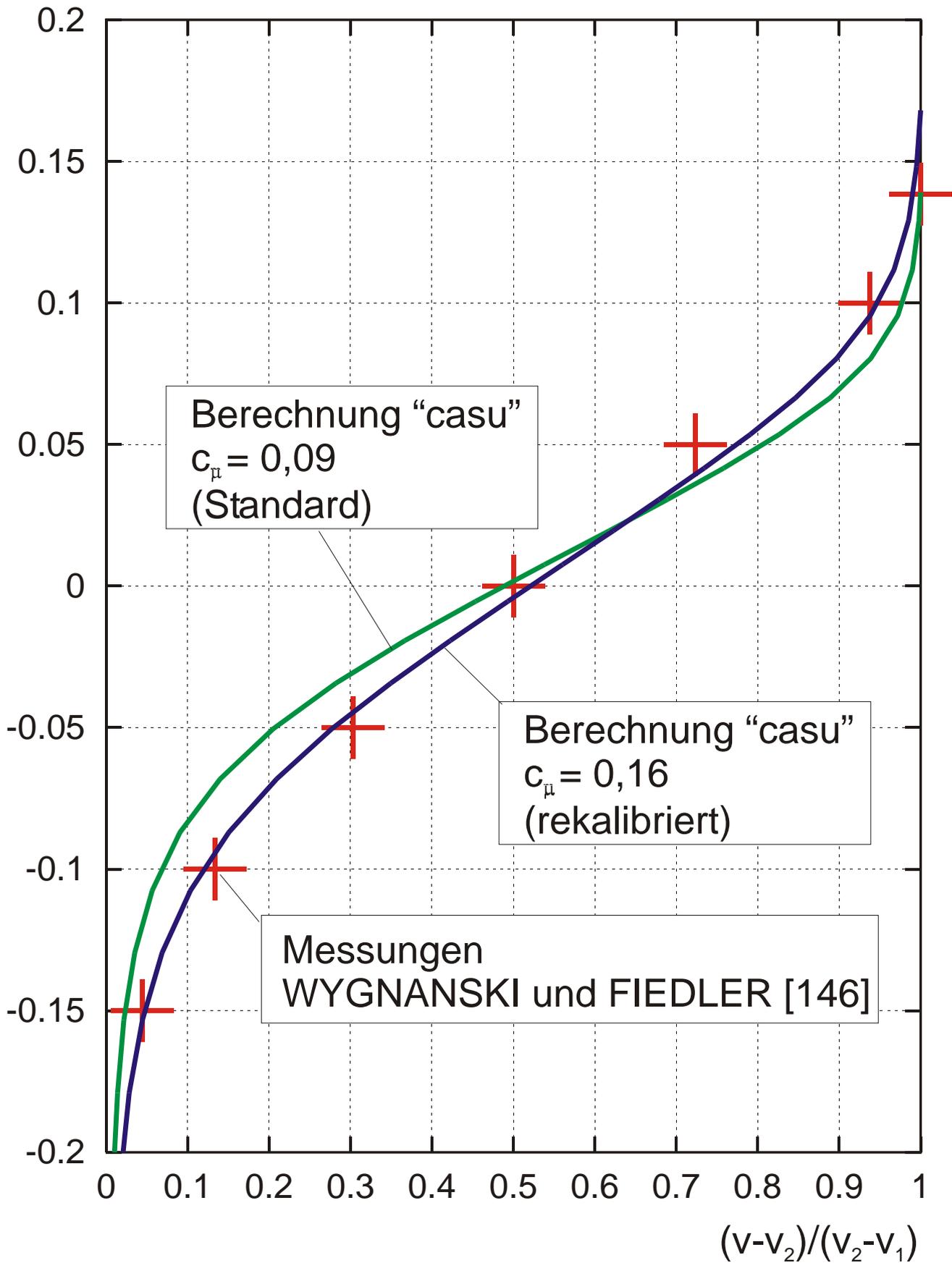
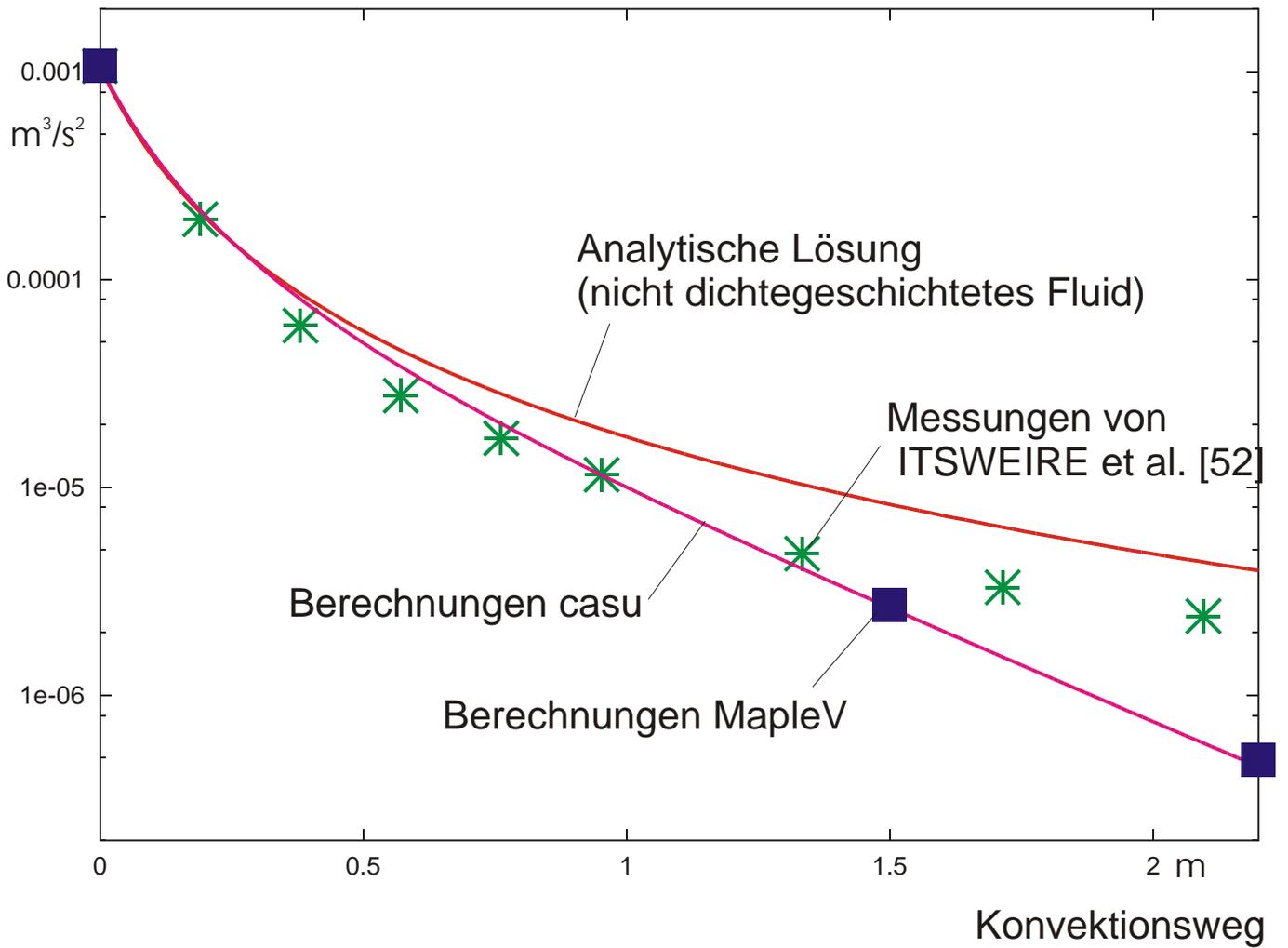
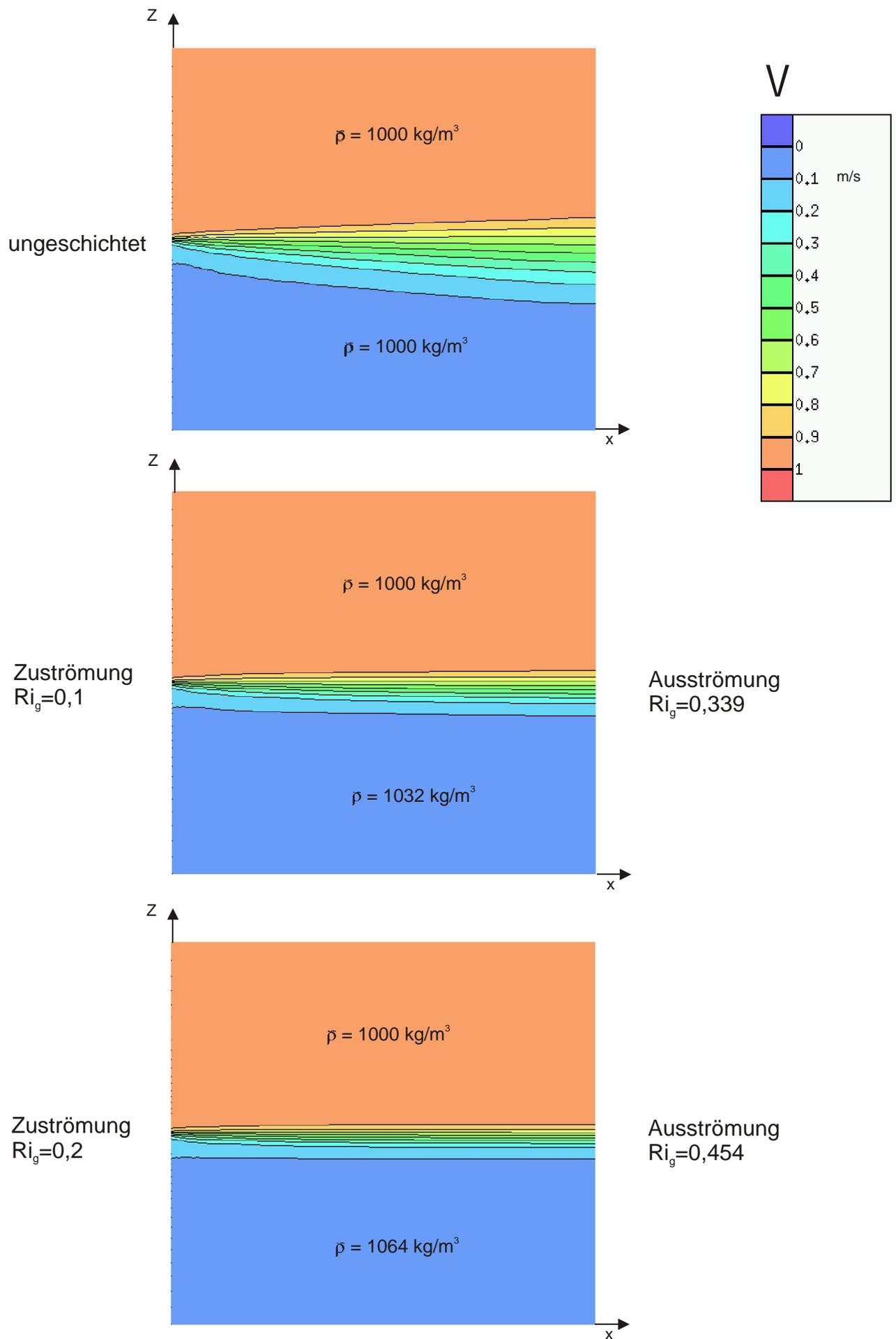


Bild 35. Testfall ebene Scherschicht, Rekalibrierung

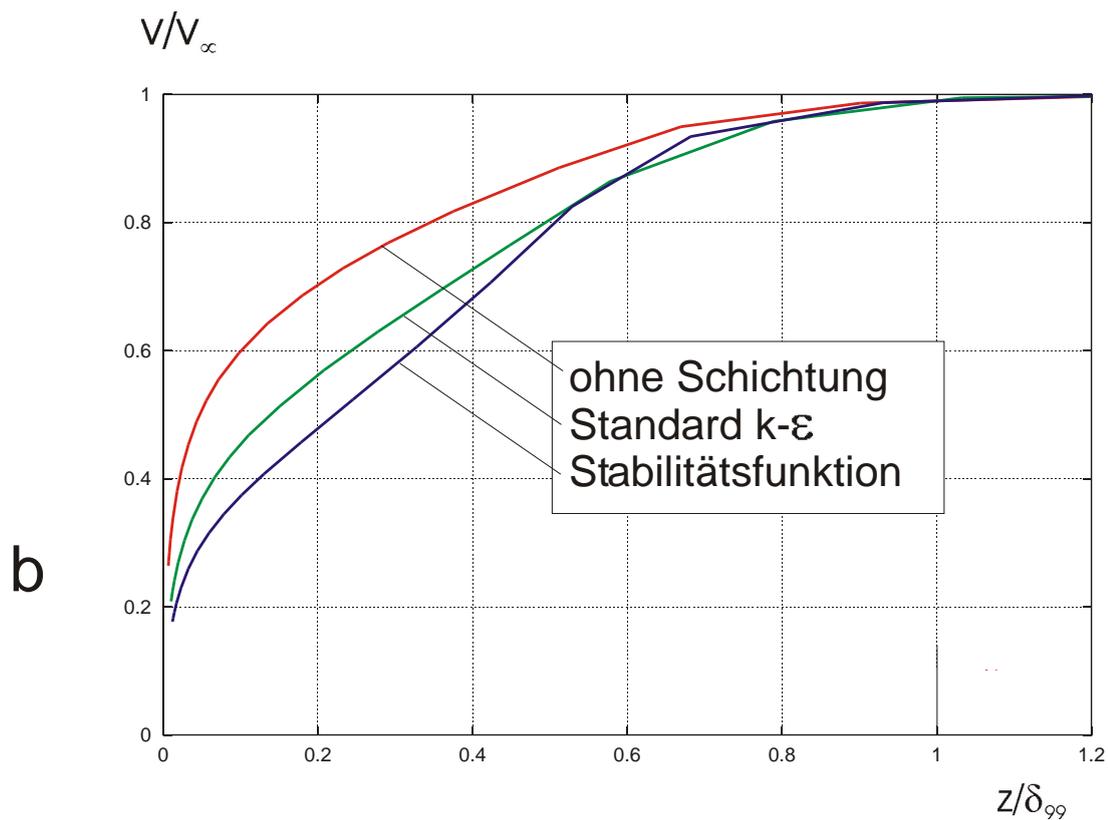
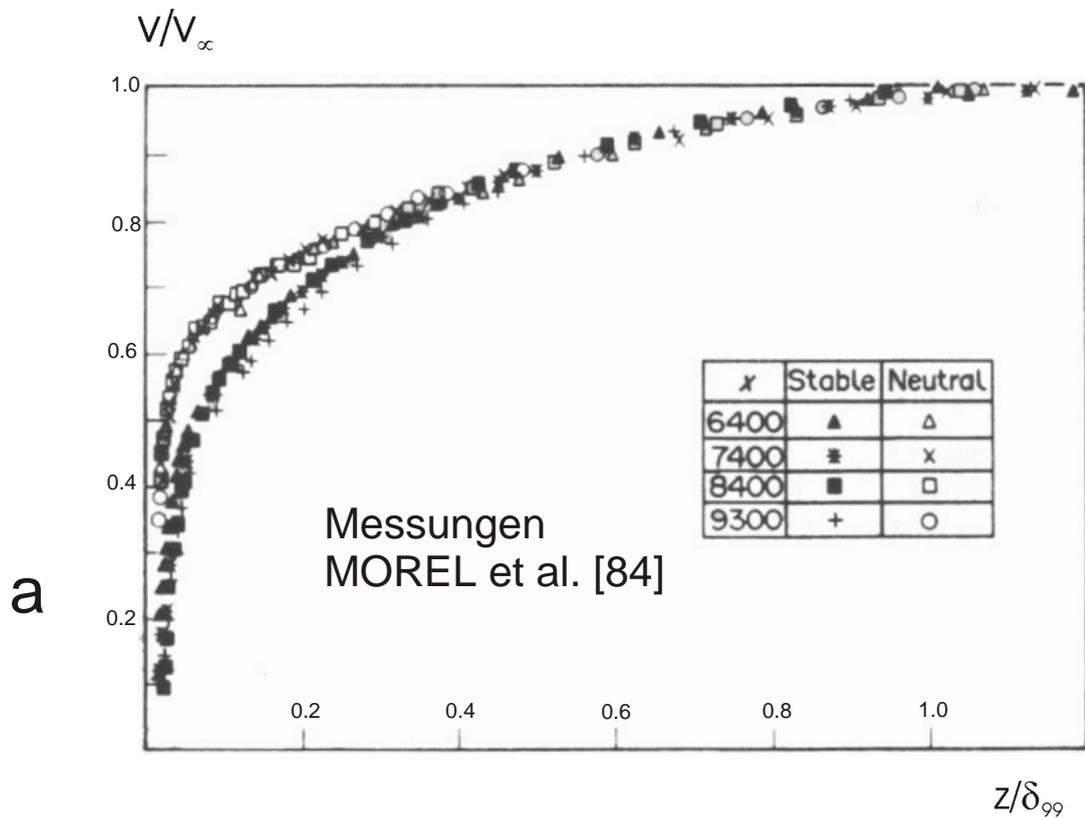
# Dissipationsrate



**Bild 36.** Testfall Abklingen isotroper Turbulenz in stabil dichtegeschichtetem Fluid, Dissipationsrate entlang des Konvektionsweges in gleichförmiger Strömung

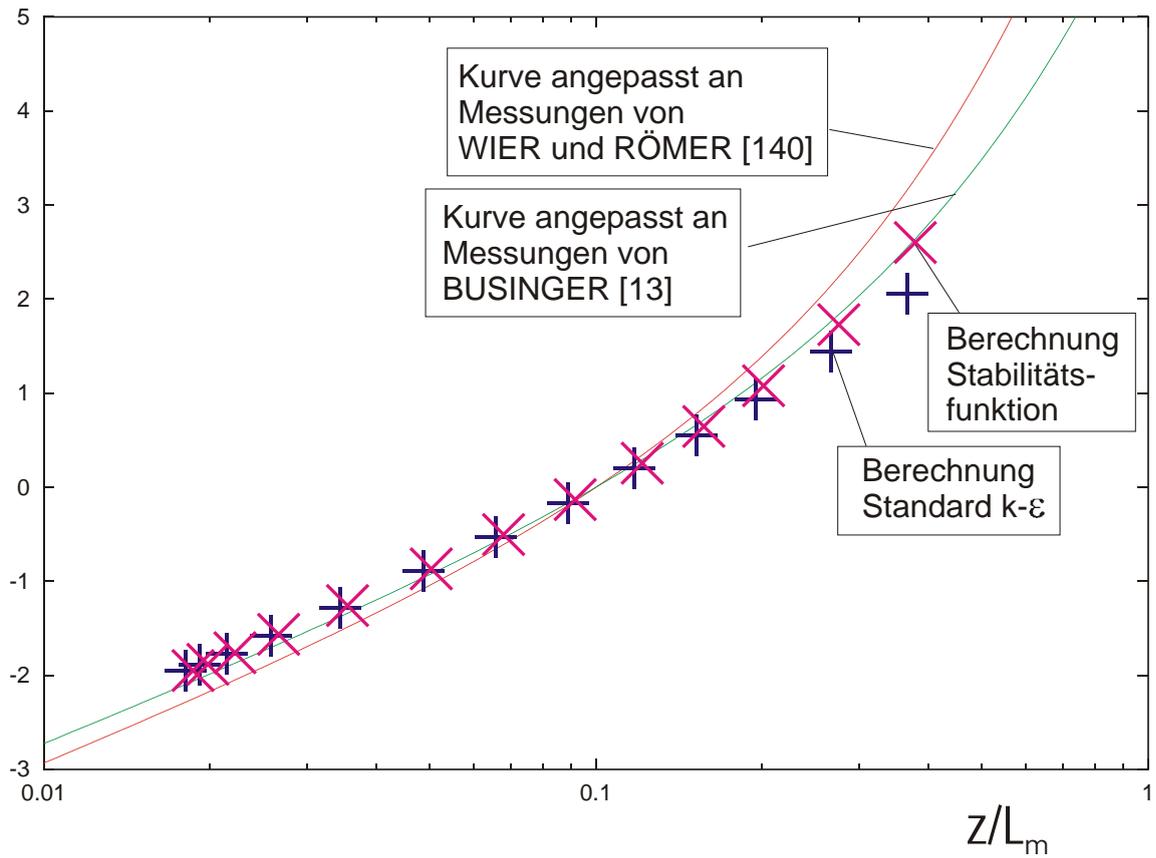


**Bild 37.** Testfall dichtegeschichtete, ebene Scherschicht, Geschwindigkeitsverteilung von Berechnungen mit unterschiedlich starker Schichtung



**Bild 38.** Testfall stabil dichtegeschichtete Wandgrenzschicht, Geschwindigkeitsprofile,  
a Messungen MOREL et al. [84],  
b Berechnungen mit dem Programm "casu"

$$\kappa \frac{V - V_{0,1}}{V_\tau}$$



**Bild 39.** Testfall stabil dichtegeschichtete Wandgrenzschicht, Vergleich mit Messungen im wandnahen Bereich

Suspensionskonzentration,  
bezogen auf den Wert an der Sohle

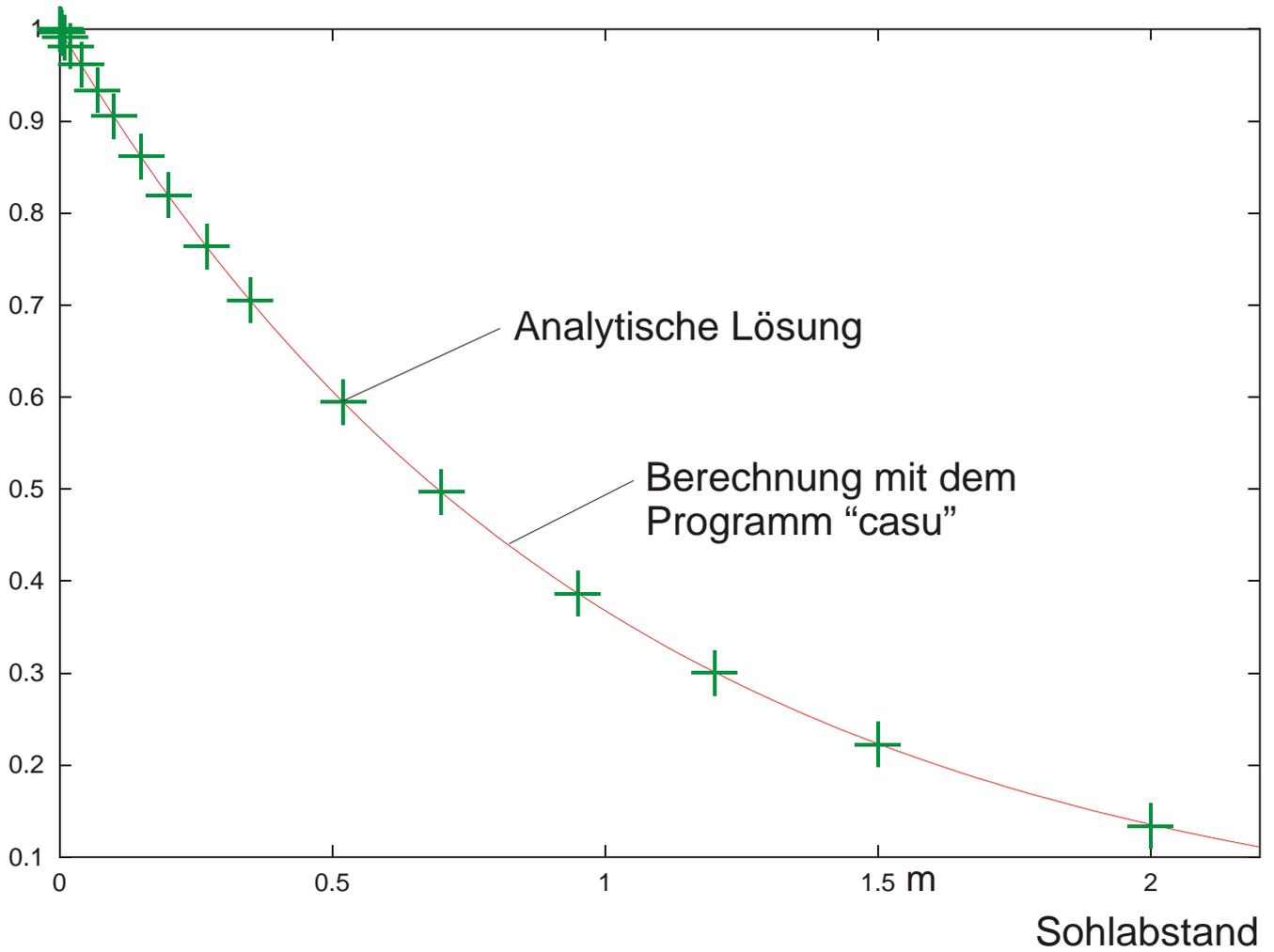
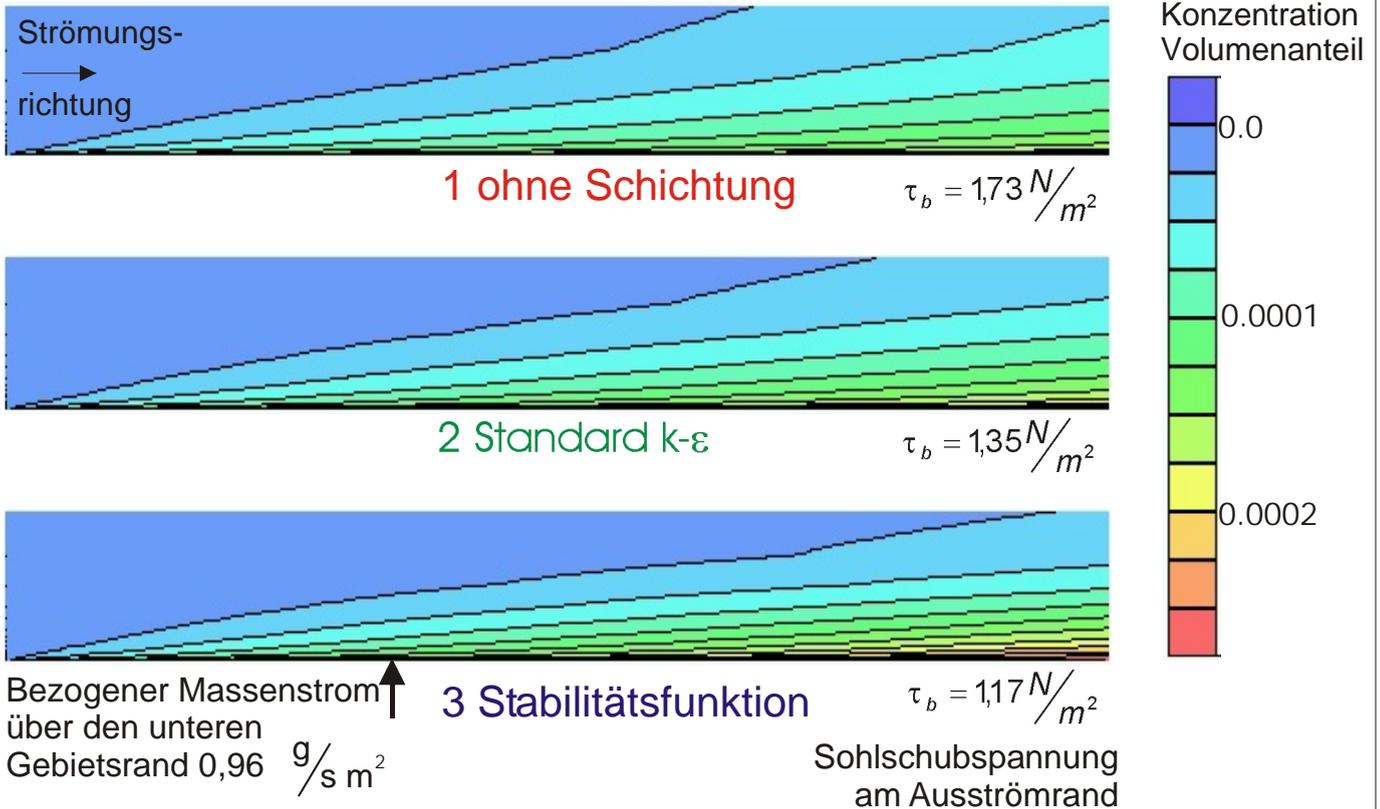


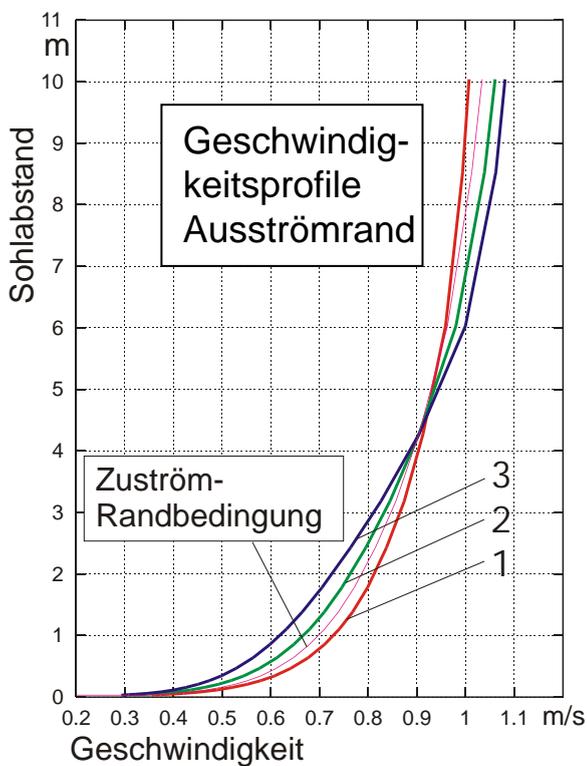
Bild 40. Testfall Diffusion und Sinken

# Längsschnitte der Konzentrationsverteilung

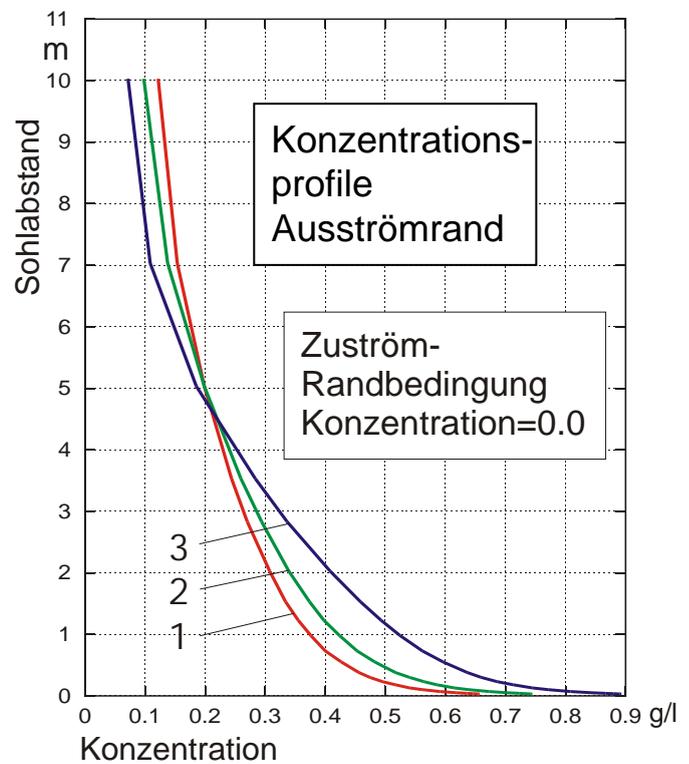
Länge 2000 m, Wassertiefe 10 m



a



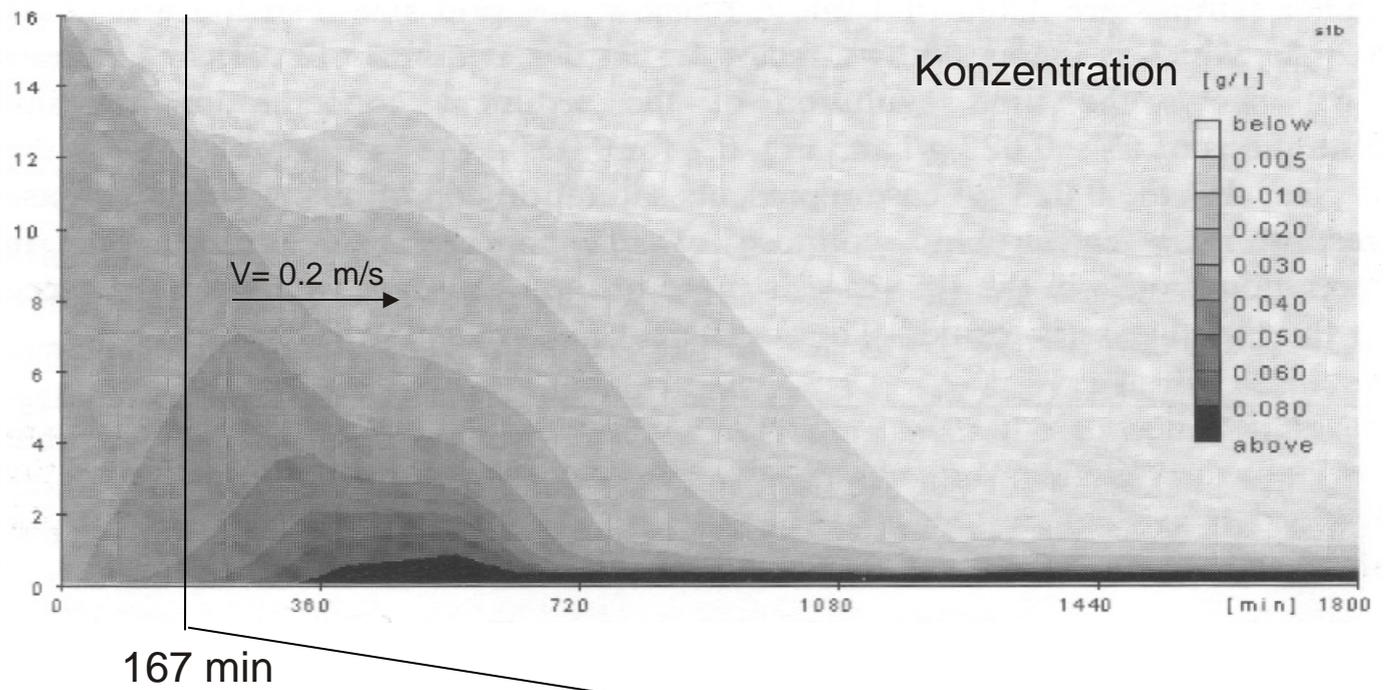
b



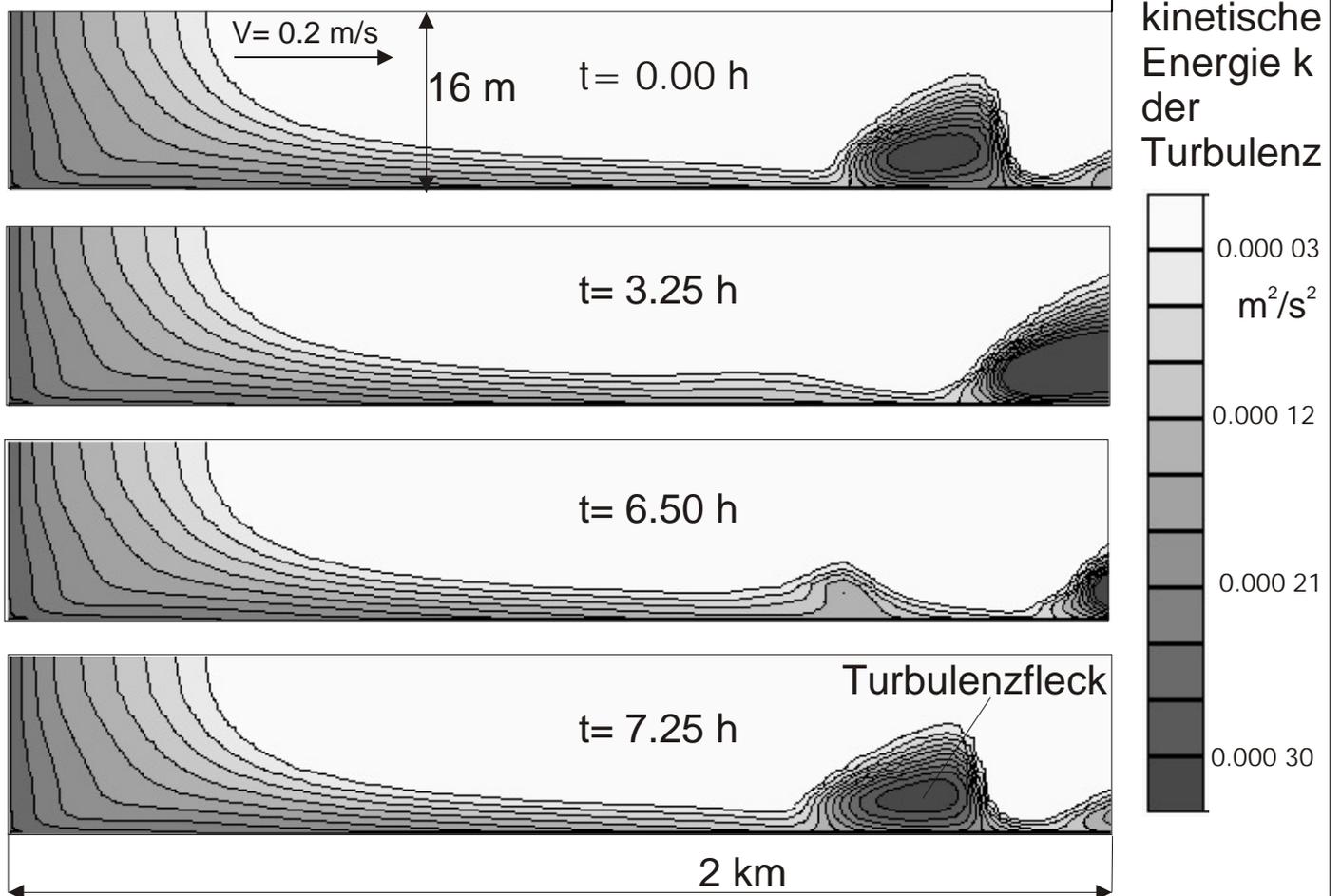
c

**Bild 41.** Testfall Erosion an waagerechter Sohle,  
a Längsschnitte der Konzentrationsverteilung,  
b Geschwindigkeitsprofile, c Konzentrationsprofile

a Berechnung von WINTERWERP [142] mit dem 1DV-Modell



b Berechnung mit dem 3D-Modell "casu"



**Bild 42.** Testfall Deposition.

a Konzentrationen berechnet von WINTERWERP [142] mit dem 1DV-Modell,  
b kinetische Energie k der Turbulenz berechnet mit dem 3D-Modell "casu".