Numerische Simulation und Analyse turbulenter Strömungen am Beispiel der Umströmung eines Zylinderstumpfes mit Endscheibe

Octavian Frederich

Numerische Methoden der Thermofluiddynamik
Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik
Technische Universität Berlin

ISBN 978-3-7983-2241-7 (Druckausgabe)
ISBN 978-3-7983-2242-4 (Online-Version)

∞ ***Gedruckt auf säurefreiem alterungsbeständigem Papier***

Druck/ Printing:	docupoint GmbH Otto-von-Guericke-Allee 14, 39179 Barleben
Verlag/ Publisher:	Universitätsverlag der TU Berlin Universitätsbibliothek Fasanenstr. 88 (im VOLKSWAGEN-Haus), D-10623 Berlin Tel.: (030)314-76131; Fax.: (030)314-76133 E-Mail: publikationen@ub.tu-berlin.de http://www.univerlag.tu-berlin.de

Numerische Simulation und Analyse turbulenter Strömungen am Beispiel der Umströmung eines Zylinderstumpfes mit Endscheibe

Dipl.-Ing.
Octavian Frederich

Von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuß:

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Nitsche
Berichter:	Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele
	Prof. Dr.-Ing. habil. Alfred Leder

Wissenschaftliche Aussprache am 27.05.2010

Berlin 2010
D 83

Vorwort

Ein Forschungsprojekt im DFG-Schwerpunktprogramm SPP-1147 „Bildgebende Meßverfahren für die Strömungsanalyse“, das ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Numerische Methoden der Thermofluiddynamik der Technischen Universität Berlin unter der Leitung von Herrn Professor Frank Thiele bearbeiten durfte, stellte den Rahmen der vorliegend dokumentierten Arbeit.

Es ist mir ein Bedürfnis an dieser Stelle Herrn Professor Thiele für die Möglichkeit der Promotion, die mir übertragene Verantwortung sowie die stete Unterstützung und Förderung bei der Verwirklichung eigner Ideen ganz herzlich zu danken.

Besonderer Dank gilt Herrn Professor Alfred Leder für die Begutachtung in meinem Promotionsverfahren und die langjährige Zusammenarbeit im Schwerpunktprogramm. Für den Vorsitz des Prüfungsausschusses sowie die gleichermaßen langjährige Zusammenarbeit bedanke ich mich herzlich bei Herrn Professor Wolfgang Nitsche.

Bedanken möchte mich auch bei den vorwiegend experimentell arbeitenden Projektmitarbeitern im SPP-1147 für die Vergleichsdaten und den teilweise regen Austausch.

Die Bearbeitung des Projektes wurde durch die gewährten Rechnerressourcen vom HLRN unterstützt, wofür ich mich ebenfalls bedanke. Spezieller Dank geht hierbei an den betreuenden Fachberater Herrn Wolfgang Baumann.

Den Kollegen des Fachgebiets, die stets bei Fragen helfen und Anregungen geben, danke ich für das tolle Arbeitsumfeld. Großer Dank gilt besonders den Herren Erik Wassen für die anfängliche Begleitung, Mark Luchtenburg für die Einführung in Geheimnisse der linearen Algebra und Jon Scouten für die Umsetzung des Strukturverfolgungsalgorithmus. Den Herren Thilo Knacke, Angelo Carnarius und Christoph Richter danke ich für die Durchsicht von Teilen des Manuskripts und Herrn Lars Oergel für die sorgfältige Rechtschreibkorrektur.

Die Unterstützung und der bedingungslose Rückhalt durch meine Familie ist wesentlicher Bestandteil meines erfolgreichen Promotionsvorhabens. Dafür kann ich besonders meiner Frau Anita nicht genug danken. Meine Töchter Nathalie und Helena sorgten dabei immer für ausreichend Abwechslung.

Berlin, im Juni 2010 Octavian Frederich

Für die Lieben der Familie,
die sich im Leben nur knapp verpaßt haben:

Meine Omi Antonie, Oma Esther
und
meine Töchter Nathalie und Helena.

Zusammenfassung

Die Analyse der Dynamik in turbulenten Strömungen ist wegen des instationären, dreidimensionalen und stochastischen Charakters von Turbulenz noch immer eine große Herausforderung. Dieser ist jedoch zu begegnen, um die Eigenschaften von Turbulenz zu charakterisieren und zu quantifizieren, so daß erwünschte bzw. unerwünschte Effekte wie starke Vermischung oder erhöhter Widerstand, speziell in technisch relevanten Strömungen erkannt, verstanden und gegebenenfalls kontrolliert werden können. Insbesondere aufgrund der räumlich-zeitlichen Variation turbulenter Strömungen muß im Rahmen der Analyse nahezu zwingend methodenbasiert vorgegangen werden, um zumindest die dominanten Effekte im industriellen Umfeld semiautomatisch zu extrahieren.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Strömung um einen wandgebundenen Zylinderstumpf, der repräsentativ für diverse Fahrzeuganbauten oder auch Gebäude ist, als Beispiel einer komplexen turbulenten Strömung numerisch hochauflösend simuliert und bezüglich stark verschiedener Perspektiven analysiert. Im Rahmen der traditionell üblichen statistischen Analyse konnte eine Topologie für das zeitlich gemittelte Strömungsfeld gewonnen werden und kaum dokumentierte Einzelheiten extrahiert und quantifiziert werden. Der dabei extensiv durchgeführte Vergleich von numerischen und experimentellen Strömungsdaten lieferte durchweg hervorragende Übereinstimmung.

Die Analyse der Strömungsdynamik wurde unter Verwendung einer Kombination konzeptionell unterschiedlicher Analysemethoden durchgeführt. Zu den wichtigsten und erfolgreichsten Verfahren zählen Proper Orthogonal Decomposition, ein neu entwickelter Strukturverfolgungsalgorithmus sowie verschiedene Filterungskonzepte. Die Extraktion der dominanten Bewegungsformen, intermittierenden Effekte und instantanen Wirbelformationen wurde durch diese Methoden wesentlich vereinfacht. Schwierigkeiten bei der Identifikation von Einzelphänomenen treten durch deren Interaktion und Synchronisation im Strömungsfeld auf. Dennoch kann wesentlich zum Verständnis der speziellen Strömung beigetragen werden, und die Eigenschaften der eingesetzten Analyseverfahren können hinsichtlich ihrer Eignung zur Turbulenzanalyse charakterisiert werden.

Abstract

The analysis of the dynamics in turbulent flows is still a major challenge due to the unsteady, three-dimensional and stochastic nature of turbulence. Overcoming this challenge is important, however, to characterise and quantify the properties of turbulence, so that desired and undesired effects such as strong mixing or increased drag, especially in technically relevant flows, can be identified, understood and possibly controlled. In particular, because of the spatial and temporal variation of turbulent flows, a method-based analysis is near-mandatory in order to extract at least the dominant effects semi-automatically in an industrial environment.

In the present study, the flow around a finite wall-mounted cylinder, which is a prototype for various vehicle fittings or buildings and an example of a complex turbulent flow, has been numerically simulated with high resolution and analysed with respect to different perspectives. Employing traditional statistical analysis a topology for the time-averaged flow field could be obtained and seldom-documented flow features have been extracted and quantified. The extensive comparison of numerical and experimental flow data in this framework reveals consistently excellent agreement.

The analysis of the fluid dynamics has been carried out using a combination of conceptually different analysis methods. Proper Orthogonal Decomposition, a newly-developed structure tracking algorithm and various filtering approaches are among the most important and successful techniques. The extraction of the dominant flow pattern, intermittency effects and instantaneous vortex formations was substantially simplified by these methods. Difficulties in the identification of individual phenomena arise from their interaction and synchronisation in the flow field. Nevertheless, much can be contributed to the understanding of the specific flow and the analysis procedures are evaluated with respect to their suitability for the analysis of turbulence.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur und Abkürzungen

Dieses Verzeichnis benennt die wichtigsten verwendeten Formelzeichen, Symbole, Indizes und Kennzahlen, sowie nur wesentliche Definitionsgleichungen und Verweise. Diese und alle weiteren Zeichen werden bei ihrer Verwendung im Text benannt bzw. definiert. Es wurde darauf verzichtet die diversen Parameter und Konstanten der Turbulenzmodelle, der DES-Erweiterungen und komplexen Konvektionsschemata namentlich zu benennen.

Die Notation von Gleichungen erfolgt konsequent in Indexschreibweise, auch für Matrizen. Über doppelt auftauchende, tiefgestellte Indizes wird, wenn nicht anders angegeben, entsprechend der Einsteinschen Summenkonvention über die Indexwerte $1, 2, 3$ summiert. Davon abweichende Indexbereiche werden gesondert gekennzeichnet, genauso wie die Summation über hochgestellte Indizes, welche in Einzelfällen nicht elegant zu vermeiden ist.

Die Liste der Abkürzungen und Synonyme faßt ebenso nur die wichtigsten bzw. am häufigsten verwendeten Vertreter zusammen, wobei diese bei ihrem ersten Auftreten im Text eingeführt werden.

Lateinische Großbuchstaben

A	Fläche
A_i^f	Flächenvektor zur Fläche f
Bl	Verblockung
C_{DES}	Modellparameter von DES (Tabelle 3.1)
C_{mn}	Korrelationsmatrix von POD, nach (4.15)
C_S	Parameter des Smagorinsky-Feinstrukturmodells, hier 0.1
C_x	Widerstandsbeiwert
C_y	Seitenkraftbeiwert
C_z	Kraftbeiwert in z-Richtung
D	Durchmesser des Zylinders
D^k	Druckdiffusionsterm der Transportgleichung für k, aus (7.2)
$D(\kappa)$	Dissipationsspektrum
$E(\kappa)$	Energiespektrum
E^f	spektrale Verteilung der Energiedichte im Zeitsignal $\mathsf{f}(t)$
E_{TKE}^m	kinetische Energie der POD-Mode m
F^f	Massenfluß über die Fläche f
G	Filterfunktion, Beispiele in Tabelle 2.4
II_b, III_b	Invarianten des Anisotropietensors b_{ij}, nach (A.9) und (A.10)
L	charakteristisches Längenmaß der Strömung
M	Anzahl der POD-Moden
M_F	Anzahl der POD-Moden für eine niederdimensionale Beschreibung
N	Anzahl der Momentanaufnahmen
N_S^p	Anzahl der Schnappschüsse in der Phasenlage p
P^k	Produktionsterm der Transportgleichung für k, aus (7.2)
Q	Wirbelkernkriterium nach HUNT *et al.* (1988)
R_{ij}	Korrelationstensor
$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$	Scherratenparameter, Norm bzw. Invariante des Scherratentensors
S_I^m	Informationsentropie des Zeitkoeffizienten der POD-Mode m

$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$	Scherratentensor, Deformationgeschwindigkeitentensor
T	Zeitraum, Periodendauer, Temperatur
U	charakteristische Geschwindigkeit der Strömung
$U_{B,norm}$	Hitzdrahtbrückenspannung, nach (F.4)
V	Volumen
$W^{\mathsf{f}}(s,\tau)$	Wavelet-Koeffizienten, nach (4.1)

Lateinische Kleinbuchstaben

a	Skalenparameter bei CWT, Schallgeschwindigkeit
a^P, a^{nb}	Koeffizienten der Diskretisierungsgleichungen
$a_m(t)$	Zeitkoeffizient zur POD-Mode m
b_{ij}	Anisotropietensor der Reynolds-Spannungen, nach (2.58)
$\overline{c_f} = \mathrm{sgn}(u)\sqrt{\mathrm{Re}_D}$...	gemittelter Reibungsbeiwert,
...$\lvert\overline{\tau_w}\rvert/\varrho U_\infty^2$	vorzeichenbehaftet und skaliert mit der Reynolds-Zahl
$\overline{c_f'} = \sqrt{\overline{(c_f - \overline{c_f})^2}}$	RMS-Wert der Reibungskraftfluktuation
$\overline{c_p} = 2\,\overline{p - p_\infty}/\varrho U_\infty^2$	gemittelter Druckbeiwert
$\overline{c_p'} = \sqrt{\overline{(c_p - \overline{c_p})^2}}$	RMS-Wert der Druckfluktuation
$\overline{c_r} = 2\lvert\overline{\tau_w}\rvert/\varrho U_\infty^2$	gemittelter Reibungsbeiwert, normiert mit ...
d	Durchmesser des Transitionsdrahtes
d_w	Wandabstand
$e_{x,i}$, $e_{y,i}$, $e_{z,i}$	Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems
f	Frequenz
$\mathsf{f}(t)$	Zeitsignal
f_b	Bandbreitenparameter des Morlet-Wavelets
f_c	zentrale Frequenz des Morlet-Wavelets, hier 0.8
f_{t2}	Dämpfungsfunktion des Spalart-Allmaras-Modells
h	Enthalpie, Gitterweite
$\imath = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
$k = \frac{1}{2}\,\overline{u_i'^2}$	turbulente kinetische Energie, nach (2.16)
l	charakteristisches Wirbellängenmaß
l_0	Längenmaß der größten Wirbel
l_{DES}	charakteristisches Längenmaß für DES
l_{RANS}	charakteristisches Längenmaß für RANS
n	beliebiger Exponent, wandnormale Richtung
p	statischer Druck
r_i	Abstandsvektor
s	Skalierungsparameter bei CWT
t	Zeit
u_i	Geschwindigkeitsvektor, kartesisch
u, v, w	Geschwindigkeitskomponenten, kartesisch
$u(l)$	charakteristische Wirbelgeschwindigkeit
$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\varrho}$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit, nach (2.31)
$u_{rms,i}$	Vektor für die RMS-Komponenten der Geschwindigkeiten
w_n^m	POD-Gewicht zur Mode m und dem Schnappschuß n
x_i	Ortsvektor, kartesisch
x, y, z	Koordinaten, kartesisch

Griechische Großbuchstaben

Δ	Filterweite
Δt	Zeitschrittweite
Δu_i	Differenzvektor zwischen zwei Geschwindigkeitsfeldern
ΔU	Betrag des Differenzvektors Δu_i
Δx_i	Vektor der Gitterabmessungen, kartesisch
Δx, Δy, Δz	lokale Gitterlängen, kartesisch
Θ	Winkel auf dem Zylindermantel, ausgehend von der Staupunktlinie
Λ^m	normierter Eigenwert zur POD-Mode m
Φ	Phasenwinkel, Erhaltungsgröße
Ψ	Schutz vor Wandtermaktvierung im LES-Modus der DES
$\Psi(t)$	Wavelet-Ansatzfunktion
$\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$	Wirbelstärkeparameter, Norm bzw. Invariante des Wirbeltensors
$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$	Wirbeltensor

Griechische Kleinbuchstaben

$\alpha_p(\Phi)$	Zeitkoeffizienten nach Filterung mit TH-POD
β	Wichtungsparameter bei Flux-Blending
$\beta_{pm} = \beta_p(m)$	Faktoren zur Modenrekonstruktion nach Filterung mit TH-POD
δ	Grenzschichtdicke
ε	Energiedissipationsrate
$\eta = \varepsilon^{-\frac{1}{4}}\nu^{\frac{3}{4}}$	Kolomogorov-Längenmaß, nach (2.1 a)
ϑ	Interpolationsfaktor für Flächenwerte, nach (E.2)
$\kappa = 2\pi/l$	Wellenzahl
κ_c	Grenzwellenzahl für LES
$\kappa \approx 0.41$	Kármán-Konstante
λ^m	Eigenwert zur POD-Mode m
λ_2	Wirbelkernkriterium nach JOENG & HUSSAIN (1995)
μ	dynamische Viskosität
μ_t, ν_t	turbulente Wirbelviskosität
$\nu = \mu/\varrho$	kinematische Viskosität
ν_{sgs}	Feinstrukturviskosität
ξ^p	Partikel
ϱ	Dichte
σ	Wichtungsfunktion des hybriden Konvektionsschemas, nach (D.2)
τ	zeitlicher Abstand, Zeitverschiebung
τ_{ij}	Spannungstensor
$\tau_{ij}^{turb} = -\varrho\overline{u_i'u_j'}$	Reynolds-Spannungstensor
$\tau_{ij}^{sgs} = \varrho(\widetilde{u_iu_j} - \widetilde{u}_i\widetilde{u}_j)$	Feinstrukturspannungstensor
τ_w	Betrag des planaren Wandschubspannungsvektors
$\tau(l)$	charakteristisches Wirbelzeitmaß
ϕ, χ, ψ	beliebige Strömungsgröße
$\phi_m(x_i)$	POD-Mode m
$\omega = \varepsilon/k$	spezifische Energiedissipationsrate (LLR k-ω Modell)
$\omega_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\epsilon_{ijk}u_k$	Wirbelstärkevektor, nach (2.7)

ω_x	Wirbelstärkekomponente um die Längsachse x
$\omega(t)$	variable Harmonik
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz

Dimensionslose Kennzahlen

$\mathrm{CFL} = \lvert u\rvert \Delta t/\Delta x$	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl, z. B. bezüglich x
$\mathrm{Ma} = U_\infty/a_\infty$	Mach-Zahl
$\mathrm{Pe} = \varrho u \Gamma_\phi/\Delta x$	Péclet-Zahl, z. B. bezüglich x
$\mathrm{Re} = UL/\nu$	Reynolds-Zahl, bezogen auf charakteristische Strömungsgrößen
$\mathrm{Re}_D = U_\infty D/\nu$	Reynolds-Zahl, bezogen auf den Durchmesser
$\mathrm{St} = fD/U_\infty$	Strouhal-Zahl, bezogen auf den Durchmesser
$\mathrm{Tu} = \sqrt{(2k/3)}/U_\infty$	Turbulenzgrad der Anströmung

Indizes

$()_\infty$	Anströmgröße
$()_\eta$	Kolmogorov-Skalen
$()^+$	dimensionslos bezüglich der Wandeinheiten u_τ, ν
$()_i$, $()_{ij}$, ...	Vektorkomponenten, Tensorkomponenten, ...
$()^f$	zur Fläche f gehörend
$()_c$	charakteristisch
$()^P$	zum zentralen Kontrollvolumenzentrum gehörend
$()^F$	zum benachbarten KVZ hinter der betrachteten Fläche f gehörend
$()^{E,W,N,S,T,B}$	zum benachbarten KVZ in der Kompaßnotation gehörend

Funktionen und Symbole

$\overline{()}$	zeitliche Mittelung, Ensemble-Mittelung
	berechnet aus gemittelten Größen, z. B. $\overline{\lambda_2}$, $\overline{\tau_w}$
$()'$	Schwankungsgröße, Feinstrukturgröße
$\widetilde{()}$	Grobstrukturgröße, gefilterte bzw. aufgelöste Größe
$\hat{()}$	Fourier-Transformierte
$\widehat{()}$	dimensionsfreier Zahlenwert
$\breve{()}$	rekonstruierte Mode nach Filterung
$\lvert()\rvert$	Betrag, Norm
$\langle()\rangle$	phasengemittelte Größe
$\langle()\rangle^f$	Flächenwert
$\partial/\partial t$	partielle Ableitung (z. B. nach der Zeit)
D/Dt	substantielle Ableitung
$f()$	funktionale Abhängigkeit
$\mathcal{O}()$	von der Ordnung
δ_{ij}	Kronecker-Symbol, ...
ϵ_{ijk}	Permutationssymbol

Abkürzungen und Synonyme

cDNS	Grobe DNS
CDS	Central Differencing Scheme
CFD	Computational Fluid Dynamics
CST	Coherent Structure Tracking
CWT	Kontinuierliche Wavelet-Transformation
DES	Detached-Eddy Simulation
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft
DFT	Diskrete Fourier-Transformation
DMD	Dynamic Mode Decomposition
DNS	Direkte Numerische Simulation
ELAN	Elliptic Analysis of the Navier-Stokes equations
FVM	Finite-Volumen-Methode
HDA	Hitzdraht-Anemometrie
HLRN	Norddeutscher Verbund für Hoch- und Höchstleistungsrechnen
ID-DES	Improved-Delayed-DES
KDR	Konventionelle Druckmessungen
KVZ	Kontrollvolumenzentrum
LDA	Laser-Doppler-Anemometrie
LES	Large-Eddy Simulation
LIC	Line Integral Convolution
LLR	Local Linear Realizable
MEMS	Micro-Electro-Mechanical System
PIV	Particle Image Velocimetry
POD	Proper Orthogonal Decomposition
PSC	Pressure Sensitive Coating
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
RMS	Root Mean Square
SA	Spalart-Allmaras
SA-E	Spalart-Allmaras mit Edwards-Modifikation
SGS, sgs	Subgrid Scale
SLD	Spektrale Leistungsdichte
SPP-1147	DFG Schwerpunktprogramm 1147
TH-POD	Temporal Harmonic Specific POD Mode Extraction
TL	Tripless
TR-PIV	Time-Resolved PIV
TVD	Total Variation Diminishing
UDS	Upwind Differencing Scheme
U-RANS	Unsteady RANS
WD-LES	LES mit Wanddämpfung
WDV	Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung
WHD	Wandhitzdrahtmessungen
WM-LES	Wall-Modelled LES

bzw.	beziehungsweise
i. A.	im Allgemeinen
sog.	sogenannte(r, s, n)
vgl.	vergleiche
z. B.	zum Beispiel

1 Einleitung

Der erste Abschnitt gibt Auskunft über Beweggründe, Ziele und die Gliederung der Dissertationsschrift. Der Stand der Forschung ist den jeweiligen Einzelabschnitten vorbehalten.

1.1 Hintergrund und Motivation

Turbulenz als häufig auftretende und deshalb wichtige Eigenschaft von Strömungen in Natur und Technik ist weitab, hinsichtlich all ihrer Merkmale vollends verstanden zu sein. Gründe dafür liegen besonders im dreidimensionalen und stochastischen Charakter, der eine detaillierte Beschreibung erschwert und deren Gültigkeit oftmals auf die zugrundeliegende Strömungskonfiguration beschränkt. LUMLEY (1970) beschreibt die damit verbundenen Symptome sehr treffend in seinem Vorwort:

> ..., the turbulence syndrome includes the following symptoms:
> The velocity field is such a complicated function of space and time
> that a statistical description is easier than a detailed description;
> it is essentially three-dimensional, in the sense that the dynamical mechanism
> responsible for it (the stretching of vorticity by velocity gradients) can only
> take place in three dimensions; it is essentially nonlinear and rotational,
> for the same reasons; a system of partial differential equations exists,
> relating the instantaneous velocity field to itself a every time and place. ...
> (LUMLEY, 1970)

Die Analyse und das Verständnis von Turbulenz mit ihren Variationen in Bezug auf die zeitliche Entwicklung sind wichtig, um damit verbundene beobachtbare Eigenschaften, wie z. B. starke Vermischung und erhöhten Widerstand, zu charakterisieren und bei Bedarf zu kontrollieren. Die Wichtigkeit ergibt sich dabei aus der Tatsache, daß viele, wenn nicht sogar die meisten, für den Ingenieur relevanten Strömungen teilweise oder vollständig turbulenzbehaftet sind. Da analytische Lösungen der mathematischen Beschreibung nur für wenige spezielle, fast ausschließlich laminare Strömungstypen abzuleiten sind, kommt den experimentellen Meßverfahren, aber auch den numerischen Vorhersagemethoden große Bedeutung zu. Ergebnisse aus Experiment und Simulation stellen vorerst die Grundlage jeglicher Turbulenzanalyse, wobei statistische Auswertungen verbreitet sind, im Detail aber wenig zum Verständnis beitragen.

Um experimentelle Meßmethoden im Hinblick auf hohe räumliche und vor allem zeitliche Auflösung zu verbessern bzw. neu zu entwickeln, wurden zahlreiche Projekte von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert. Den Rahmen dazu bildete das Schwerpunktprogramm SPP-1147 „Bildgebende Meßverfahren für die Strömungsanalyse“, dessen Name die Notwendigkeit beschreibt, möglichst jegliche Strömung qualitativ und quantitativ erfassen zu können. Die Begleitung durch numerisch gestützte Analysen etabliert dabei eine Datenbasis zu Vergleichszwecken, deren Strömungsgrößen räumlich und zeitlich hochaufgelöst und korreliert sind. Mögliche Abweichungen zur realen Physik resultieren experimentell hauptsächlich aus Meßfehlern und numerisch wesentlich aus Modellierungsdefiziten, so daß Vergleiche zur Validierung dienen und die durchzuführende Strömungsanalyse auf eine gesicherte Basis stellen. Es liegt auf der Hand, daß kombinierte Untersuchungen von Experiment und Numerik besonders effektiv bei Betrachtung einer gemeinsamen Strömungskonfiguration sind.

Da Turbulenz häufig speziell mit Ablösung an umströmten Körpern oder Strömungshindernissen verknüpft ist, die Form des Körpers für die Turbulenzentwicklung aber oft eine untergeordnete Rolle spielt, kann die Untersuchungskonfiguration durchaus sehr einfach bzw. generisch sein. Für die im Rahmen des SPP-1147 betrachtete Beispielkonfiguration wurde ein relativ kurzer Zylinderstumpf ausgewählt, der auf einer Grundplatte positioniert ist und ein frei umströmtes Ende aufweist (Details in Abschnitt 5). Ein derartiges, geometrisch einfaches Hindernis unterliegt bei ausreichend hoher Trägheit der Anströmung in mehrfacher Hinsicht der Strömungsablösung. Die Umströmung ist wesentlich gekennzeichnet durch Grenzschichtablösung von der festen Oberfläche mit nachfolgender Instabilität der Scherschicht, die zu komplexen (hier definitiv turbulenten) Wirbelformationen im Nachlauf führt. Solche Strömungen, bei denen zusätzlich mehrere Strömungsanteile (vom Kopf, vom Mantel und der Platte) dreidimensional interagieren, sind typisch für viele technische Anwendungen und detailliert zu erfassen, um Mischprozesse zu verstehen und wichtiger noch Ablösung aufgrund erhöhten Widerstandes, Lärm und möglichen Strukturantworten (z. B. Vibrationen) vermeiden zu können. BRADSHAW (1971) illustriert die Strömung um einen wandgebundenen Zylinderstumpf und bezeichnet diesen beispielhaft als „Gebäude im Wind“. In der zugehörigen Skizze (Abbildung 1.1) weist er auf die Instationarität und Komplexität im Nachlauf hin. Dieser Zusammenhang verleitet ihn zu einer bezüglich Turbulenz und Dreidimensionalität aussagekräftigen Feststellung:

> Three-dimensional separated flows (Fig. 27) are the most complicated form of turbulence, containing all the difficult features of two-dimensional separated flows plus the effects of stretching of mean flow vorticity. ...
> (BRADSHAW, 1971)

Klassische Beispiele, die generisch durch die Zylinderstumpfkonfiguration beschrieben werden, reichen von großen Gebäuden, Kühltürmen, Telegraphenmasten, Schornsteinen usw. bis zu vielerlei Anbauten an Fahrzeugen. Grundsätzlich werden viele Strömungen mit Ablösung an glatten Oberflächen und hoch turbulenter Nachlaufströmung bei schwacher Periodizität der formierten Wirbel repräsentiert. AYOUB & KARAMCHETI (1982) geben als Beispiel das Flugzeugfahrwerk an, welches während Start und Landung als Hindernis auf einer großen Fläche verstanden werden kann und selbst wieder einzelne Bauteile aufweist, die so einer Beschrei-

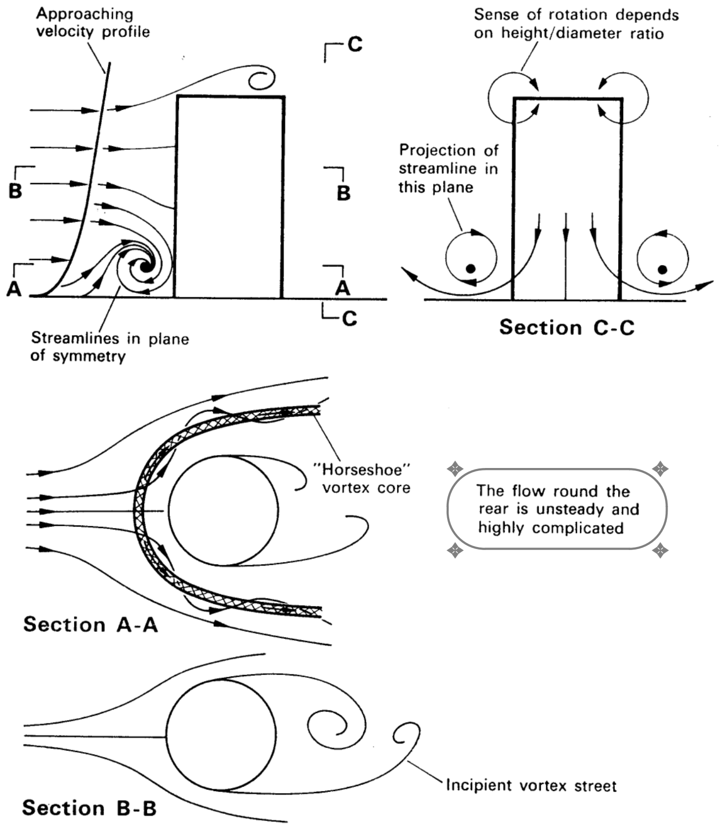


Abb. *1.1:* Vereinfachte Darstellung der Umströmung eines wandgebundenen Hindernisses mit Grenzschichteinfluß aus BRADSHAW (1971, Fig. 27)

bung anheim fallen. Zusätzlich weisen die Autoren darauf hin, daß die Strömungsregion am Kopf ein relativ intensiver Lärmgenerator ist und damit das aerodynamische Lärmproblem mitverursacht. SUMNER *et al.* (2004) benennen das vielen Menschen aus eigener Beobachtung bekannte Problem der Abwärtsbewegung von Rauch hinter Schornsteinen als wichtiges Problem, womit Verschmutzungen zum Boden transportiert werden könnten. Zusätzlich geben sie eine Zusammenfassung der verschiedenen Widersprüche bezüglich der Strömungstopologie in der Literatur. Durch die Aussage, daß aufgrund der Herausforderungen an Visualisierung, Messung und Modellierung in der Literatur noch ein vollständiges Verständnis der Strömung fehlt, motivieren SUMNER *et al.* (2004) auch die vorliegende Arbeit.

Das numerische Projekt im SPP-1147, welches ein Grund für die vorliegende Arbeit ist, gewährte neue Einblicke in die Dynamik der Strömung am Zylinderstumpf (siehe z. B. Abschnitt 7.2). Die gleichzeitige Erfassung der Strömung mittels experimenteller Methoden erlaubte dabei frühzeitig, Defizite der Modellierung und Randbedingungen zu erkennen, so daß ebenso frühzeitig vertiefte Einblicke in die Strömungsphänomene und deren Wechselwirkung untereinander ermöglicht wurden. Neben der gegenseitigen Ergänzung von Numerik und Experiment bei Methoden- und Verfahrensgrenzen sind für die numerischen Daten besonders gut algorithmische Auswerteverfahren einzusetzen. Dadurch soll, über die Statistik hinaus, die instationäre Umströmung des Zylinderstumpfes erstmals, im Sinne des Schwerpunktprogrammes bildgebend, analysiert werden und das Verständnis für turbulente Interaktion verbessert werden. Die Untersuchungen können damit jedem nutzen, dessen Interesse zeitlich entwickelnde und interagierende Turbulenz sowie ähnliche Strömungskonfigurationen umfaßt.

1.2 Aufgabenstellungen und Zielsetzungen

Die Zielsetzungen der numerischen Untersuchungen sind, kurz zusammengefaßt, die numerische Simulation und Analyse der Strömung um den Zylinderstumpf sowie die Beurteilung, einschließlich der eingesetzten Verfahren, bezüglich eines industrienahen, ingenieurtechnisch relevanten Standpunktes.

Die Simulation einer komplexen turbulenten Strömung mit räumlich und zeitlich hochauflösenden Verfahren ist die Grundlage der Analyse und dient gleichzeitig zur Begleitung experimenteller Projekte im SPP-1147. Dabei ist der Vergleich von numerischen und experimentellen Ergebnissen essentiell für die kreuzweise Validierung und die Verläßlichkeit der Daten. Die Strömungsanalyse soll umfassend statistisch und vor allem im instationären Kontext bezüglich der Dynamik durchgeführt werden, um die auftretenden Strömungsphänomene ausführlich zu beschreiben. Hierbei steht die Strömungsphysik im Vordergrund, mit dem Ziel das Verständnis dreidimensionaler Turbulenz zu erweitern, aber auch mögliche Vorgehensweisen bei der Extraktion von kohärenten Bewegungen und ihrer Ursache aufzuzeigen. Da ähnliche Phänomene in vielen anderen Strömungskonfigurationen auftreten, soll die vorliegende Arbeit als beispielhafter Arbeitsablauf verstanden werden. Durch den gezielten Einsatz von etablierten und neu bzw. weiter entwickelten Auswerteverfahren sollen die „Bildgebung“ für die Strömung durchgeführt, aber auch Stärken und Schwächen der Verfahren aufgezeigt werden. Von zentraler Bedeutung ist in diesem Zusammenhang die Reduktion der hochaufgelösten Strömungsfelder auf den relevanten Informationsgehalt.

Die Simulationsarbeiten selbst müssen die vollständige Prozeßkette umfassen und sollen die Vorteile eines vorhandenen Strömungslösers, der auf block-strukturierten Gittern basiert, eine Vielzahl Simulationsansätze zur Verfügung stellt und parallelisiert ist, ausnutzen. Zusätzliche Erweiterungen des Programms um Modellannahmen und Auswerteverfahren sind dabei notwendig. Die Untersuchung mit verschiedenen Simulationsverfahren (Abschnitt 6) sollen dazu beitragen zu prüfen, inwieweit diese in der Lage sind, die auftretenden und Strömungsphänomene widerzugeben. Da der Zylinderstumpf mit Endplatte frei umströmt wird, sind die (instationären) Zuströmbedingungen und die Lage der Randbedingungen von Bedeutung. Diese können einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Simulation haben, weshalb ihr Einfluß auf die Struktur sowie die zeitliche und räumliche Entwicklung der Strömung untersucht werden, um mit vertretbarer Gitterpunktanzahl und Zeitauflösung zu rechnen. Ziel ist schließlich eine Referenzlösung für die ausführliche Analyse, aber auch ein reduziertes, industriell vertretbares, numerisches Modell.

Die Zusammenstellung der ermittelten Daten aus Experiment und Simulation liefert eine Datenbasis, die zur Validierung von vorhandenen numerischen und experimentellen Verfahren dient und gleichzeitig auch eine Grundlage zur gezielten Verbesserung von Modellansätzen sein könnte. Die numerischen Ergebnisse werden sich dabei durch die hohe räumliche und zeitliche Auflösung, die Korrelation aller Strömungsgrößen und die Auswertung komplexer Transportgrößen auszeichnen, aber aufgrund begrenzten Speicherplatzes auch durch gegenüber Experimenten i. A. um eine Größenordnung kleineren Zeitintervallen. Aus den Daten, nebensächlich welchen Ursprungs, sollen dann Detailfragen beantwortet werden, auf die in der Literatur nur teilweise oder konträr eingegangen wird. Ein derartiger Aspekt wird beispielsweise durch die seitlichen Kopfwirbel formuliert, deren Ursprung, Ausdehnung und Eingliederung in die Wirbelstraße zu klären sind. Besonders diffizil ist auch die Frage nach alternierender oder symmetrischer Wirbelformation im Nachlauf.

Neben den wissenschaftlichen Fragestellungen existieren noch mindestens zwei weitere Ziele beim Verfassen der vorliegenden Ausarbeitung. Die meisten der dokumentierten Arbeitspakete sind Bestandteil des numerischen Projektes im DFG-geförderten SPP-1147, welches über beinahe sechs Jahre, seit Februar 2004 vom Autor bearbeitet wurde. Die dargelegten Arbeiten und Ergebnisse stellen somit, neben dem gemeinsamen Buch aller Projekte von Nitsche & Dobriloff (2009), auch eine umfassende Berichtslegung der Numerik dar. Darüber hinaus soll mit dem Theorieteil „Modellbildung und Simulation turbulenter Strömungen“ die Grundlage für eine zu der gleichnamigen Vorlesung des Autors gehörende vorlesungsbegleitende Dokumentation erstellt werden. Im Zusammenhang mit den durchgeführten Simulationen ist dies sehr passend, da eine Vielzahl an Verfahren eingesetzt wurde.

1.3 Gliederung

Die Struktur der Dissertationsschrift wird nachfolgend kurz beschrieben, um das Zurechtfinden zu erleichtern bzw. gezieltes Einlesen zu ermöglichen.

Grundsätzlich wurde versucht, die Beschreibung der Theorie von der Numerik zu separieren, und beide von der spezifischen Modellbildung und den Ergebnissen zu trennen. Aufgrund der starken Koppelung konnte dies nicht vollständig erreicht werden. Im Abschnitt 2 wird eine etablierte Modellvorstellung zu Turbulenz mit vielen ihrer Aspekte präsentiert, welche auf den eigenen Vorlesungsunterlagen fußt und teilweise auf das Lehrbuch von POPE (2000) zugreift. Bei der nachfolgenden mathematischen Beschreibung von Strömungen sowie den globalen Simulationsansätzen im gleichen Abschnitt wurde nicht nur Wert auf die Definition der Ansätze gelegt, sondern ebenso auf notwendige Voraussetzungen, Anforderungen und Limitierungen. Zusätzliche Informationen (z. B. biografische) dienen dem besseren Verständnis und wurden in Teilen, der Moderne angemessen, dem Internetlexikon WIKIPEDIA entnommen.

Im Abschnitt 3 wird neben der spezifischen Numerik des eingesetzten Strömungslösers *ELAN* auch ein kurzer Überblick über die wichtigsten numerischen Verfahren und Diskretisierungsfehler gegeben. Aufgrund der Vielschichtigkeit und vorhandener Entwicklungen ist den eingesetzten Auswerteverfahren für turbulente Strömungen der Abschnitt 4 gewidmet.

Die Dokumentation in Bezug auf den Zylinderstumpf beginnt im Abschnitt 5 mit der Beschreibung der Konfiguration, Phänomenologie und begleitender Projekte im SPP-1147 sowie einem ausführlichen Literaturüberblick. Darauf aufbauend sind im Abschnitt 6 alle Vorarbeiten und die Auswahl der Simulationsansätze dokumentiert.

Den größten Teil der Ausarbeitung umfaßt die Darlegung der Ergebnisse und der Methodenvergleich im Abschnitt 7. Die Gliederung dieses Abschnittes folgt nur in Teilen der Projekthistorie, sondern ist eher methodisch strukturiert. Nach der Schilderung der Voruntersuchungen und der Motivation durch erste Einblicke in die Strömungsdynamik folgt eine detaillierte Analyse der statistisch ausgewerteten Strömung. Der anschließende Vergleich mit Experimenten ist mehr als obligatorisch, könnte aber nahezu beliebig erweitert werden. Auch der Vergleich verschiedener Simulationsansätze ist zugunsten einer Fokussierung auf die instationären Phänomene nicht all umfassend ausgeführt. Letztere werden soweit sinnvoll dokumentiert, wobei auch Mißerfolge beim Einsatz der Auswerteverfahren nicht ausgespart wurden. Den Abschluß der Strömungsanalyse bilden ausgewählte Einzelphänomene in den Datensätzen der Simulation.

Die einzeln gewonnenen Bausteine eines globalen Bildes der Umströmung des Zylinderstumpfes werden schließlich im Abschnitt 8 zusammengeführt und zusammen mit den wichtigsten Analysemethoden diskutiert. Der Ausblick beinhaltet dann noch konkrete zukünftige Arbeitspakete mit der Dokumentation von Vorarbeiten.

Der Anhang ist letztlich mathematischen Feinheiten, Zusammenhängen, Formeln und zusätzlichen Ergebnissen gewidmet, die in den Details nicht relevant für den Inhalt der vorliegenden Arbeit sind, aus Gründen der Vollständigkeit, Verständlichkeit und Nachvollziehbarkeit aber nicht unerwähnt bleiben sollen.

2 Modellbildung und Simulation turbulenter Strömungen

Vor der numerischen Analyse von Turbulenz steht deren Charakterisierung sowie die Entwicklung einer Modellvorstellung. Die hier benutzte Beschreibung basiert auf der Energiekaskade turbulenter Skalen. Dieser Abschnitt gibt einen Überblick der grundlegenden Eigenschaften von Turbulenz, deren Einflußgrößen und Möglichkeiten der Quantifizierung. Darauf aufbauend werden die strömungsmechanischen Bilanzgleichungen eingeführt und die gängigsten, in der vorliegenden Arbeit benutzten Ansätze der Strömungssimulation beschrieben. Die Beschreibung enthält die mathematischen Grundlagen, physikalische Interpretationen, notwendige Voraussetzungen bzw. Randbedingungen und eine kurze Diskussion der wichtigsten Modellgrenzen. Der Herleitung von Gleichungen kommt in den nachfolgenden Abschnitten eine untergeordnete Rolle zu, vielmehr werden Diskussionsgrundlagen für die Modellierung, Simulation und die Ergebnisbeurteilung der turbulenten Umströmung der Beispielkonfiguration geschaffen. Es ist der Begeisterung des Autors an der Lehre in diesem Themenkomplex geschuldet, daß gerade dieser Abschnitt sehr umfangreich anmutet.

2.1 Eigenschaften turbulenter Strömungen

Der Begriff Turbulenz[1] im Zusammenhang mit Strömungen von Fluiden[2] vereint eine Reihe von Eigenschaften der Fluidbewegung oberhalb einer kritischen Reynolds-Zahl[3]. Gekennzeichnet sind turbulente Strömungen durch dreidimensionale, stochastisch verteilte und instationäre Schwankungsbewegungen der Fluidpartikel als Überlagerung einer mittleren Strömungsbewegung. Turbulenz entsteht durch den laminar[4]-turbulenten Übergang (Transition), wobei Störungen angefacht werden und aufgrund des Strömungszustandes nur wenig gedämpft werden können. Die Schwankungsbewegungen in Form von Verwirbelungen treten breitbandig über nahezu alle Zeit- und Geschwindigkeitsskalen der Strömung auf, wobei die Bandbreite

[1] Turbulenz: lateinisch von turbare – drehen, beunruhigen, verwirren

[2] Fluid: lateinisch von fluidus – fließend; ein Medium, das in Ruhe keine Schubspannung aufnehmen kann

[3] Osborne Reynolds (1842 – 1912), britischer Ingenieur und Physiker; bekannt geworden durch seine Untersuchungen zum laminar-turbulenten Umschlag von Strömungszuständen; das von ihm hierfür angegebene Kriterium in Form einer dimensionslosen Kennzahl UL/ν heißt ihm zu Ehren Reynolds-Zahl.

[4] laminar: lateinisch von lamina – Schicht

unter anderem eine Funktion der Reynolds-Zahl ist. Innerhalb dieser chaotischen bzw. verwirbelten Fluidbewegung können kohärente Strukturen auftreten, die als zusammenhängende Gebiete konzentrierter und phasenkorrelierter Wirbelstärke (HUSSAIN, 1986) angesehen werden können.

Abb. *2.1:* Laminare und turbulente Zylindernachlaufströmungen mit ausgeprägter Kohärenz in Form der Wirbelstraße (aus WILLIAMSON, 1996)

Als eine Folge der Fluktuationsbewegungen sind turbulente Strömungen durch eine deutlich verstärkte Diffusion[5] gegenüber der molekularen gekennzeichnet. Deshalb sind hoher Impuls-, Energie- und Stoffaustausch (Vermischung) charakteristisch für derartige Strömungen, deren Viskosität scheinbar erhöht ist (turbulente Viskosität). Bei technischen Anwendungen jeglicher Art sind turbulente Strömungen der Regelfall, während laminare Strömungszustände, also geordnete turbulenzfreie Bewegungen bei niedrigen Reynolds-Zahlen, die Ausnahme darstellen. Die Eigenschaften turbulenter Strömungen sind dabei verantwortlich für erhöhten Widerstand, Energieverluste, Vibration oder Lärm. Aufgrund der starken Abhängigkeit von Anfangs- und Randbedingungen ist die räumlich-zeitliche Turbulenzstruktur nur schwer vorhersagbar, mehr noch: sie ist aus diesen nicht direkt ableitbar. Daher müssen zur Beschreibung von Turbulenz im Allgemeinen statistische Größen herangezogen werden (Abschnitt 2.2.7).

2.2 Skalen turbulenter Bewegung

Für eine irgendwie geartete Berechnung oder Quantifizierung von Turbulenz ist es notwendig, als Ausgangspunkt eine Modellvorstellung für turbulente Strömungen zu verwenden. Die Grundlagen für die bis heute gültige Beschreibung von Turbulenzstruktur und -energie legte Richardson[6] bereits im Jahre 1922. Die von ihm durch Beobachtung und Überlegung gewonnenen Zusammenhänge, die auch als turbulente Energiekaskade bezeichnet werden, hat er in einem Reim zusammengefaßt:

> Big whirls have little whirls which feed on their velocity,
> little whirls have smaller whirls and so on to viscosity.
> (RICHARDSON, 1922)

[5] Diffusion: lateinisch von diffundare – ausgießen, verstreuen, ausbreiten

[6] Lewis Fry Richardson (1881 – 1953); britischer Mathematiker, Physiker und Friedensforscher; legte die Grundlagen für die Simulation komplexer Phänomene, z. B. meteorologischer Art, mit Hilfe von Parallelrechnern; nach ihm ist die *Richardson-Extrapolation* benannt.

2.2.1 Die Energiekaskade

Startpunkt der Überlegungen ist eine voll turbulente Strömung bei ausreichend hoher Reynolds-Zahl $\mathrm{Re} = UL/\nu$ mit der charakteristischen Geschwindigkeit U, dem Längenmaß L und der molekularen Viskosität des Fluids ν. Als erster Aspekt läßt sich feststellen, daß Turbulenz aus „Eddies“ verschiedener Größe l mit einer charakteristischen Geschwindigkeit $u(l)$ und einer Zeitskale $\tau(l) = l/u(l)$ besteht. Ein Eddy[7] entzieht sich einer präzisen Definition, kann aber als turbulente Bewegung in einer Region der Größe l verstanden werden. Er ist mäßig kohärent in dieser Region, in der auch kleinere Eddies enthalten sein können. Die Eddies mit den größten Abmessungen sind charakterisiert durch ihr Längenmaß l_0, das von der Größenordnung der Strömungsskale L ist, sowie ihr charakteristisches Geschwindigkeitsmaß $u_0 = u(l_0)$ in der Größenordnung der RMS-Turbulenzintensität $(2/3k)^{1/2}$ vergleichbar mit dem Geschwindigkeitsmaß U. Da ihre Reynolds-Zahl $\mathrm{Re}_0 = u_0 l_0/\nu$ groß (vergleichbar mit Re) ist, sind viskose Effekte vernachlässigbar klein, d. h. der Einfluß innerer Reibung ist klein gegenüber Trägheitskräften.

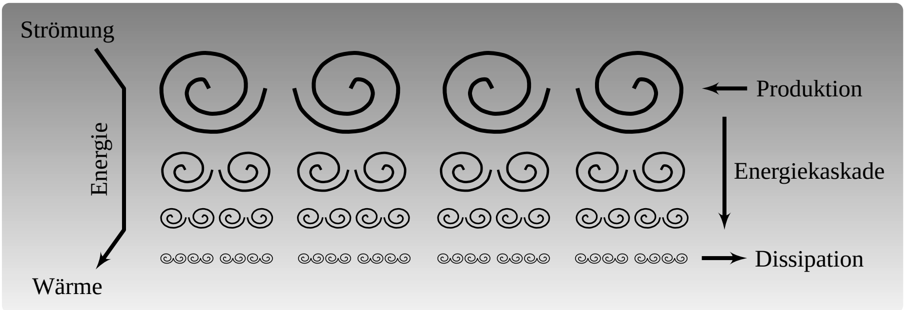


***Abb.** 2.2:* Prinzip der Energiekaskade und des Energietransfers

Der zweite offensichtliche Aspekt in turbulenten Strömungen ist die Tatsache, daß die großen Wirbelstrukturen (Large Eddies) instabil sind und aufbrechen, indem sie ihre Energie zu immer kleineren Eddies transferieren. Diese kleineren Eddies wiederum durchlaufen einen ähnlichen Prozeß, und der Energietransfer findet zu immer noch kleineren Skalen statt. Diese Energiekaskade wird fortgesetzt, bis die Reynolds-Zahl $\mathrm{Re}(l) = u(l)l/\nu$ der Eddies ausreichend klein ist, so daß ihre Bewegung stabil ist und kinetische Energie durch molekulare Viskosität dissipiert[8] wird (Abbildung 2.2).

Aus diesen Überlegungen ergibt sich als wichtigste Folgerung, daß sich die Dissipation am Ende einer Reihe von Energietransferprozessen findet. Die Rate der Dissipation oder Dissipationsrate ε wird deshalb vom ersten Prozeß in der Sequenz festgelegt, nämlich dem Transfer von Energie aus den größten Skalen. Diese Skalen bzw. Eddies haben ein Energieniveau der Größenordnung

[7] Eddy: englisch für Wirbel, Strudel

[8] dissipieren, Dissipation: englisch für Zerstreuung, Umwandlung; gemeint ist der Übergang von mechanischer Energie in innere Energie

u_0^2 und ein Zeitmaß $\tau_0 = l_0/u_0$, so daß die Rate des Energietransfers mit $u_0^2/\tau_0 = u_0^3/l_0$ skaliert. Konsistent mit den Beobachtungen in freien Scherströmungen gibt dieses Ergebnis der Energiekaskade an, daß die Dissipationsrate ε unabhängig von ν (für große Reynolds-Zahlen) mit u^3/l skaliert (POPE, 2000).

2.2.2 Skalencharakteristika und -quantität

Nach den Vorüberlegungen bleiben noch einige Fragen zu klären. Wie groß sind eigentlich die kleinsten Wirbelstrukturen, d. h. in welcher Größenordnung turbulenter Skalen wird die Energie dissipiert? Was passiert mit den charakteristischen Geschwindigkeits- und Zeitmaßen $u(l)$ bzw. $\tau(l)$, wenn sich die Eddygröße l reduziert? Antworten auf diese Fragen formulierte Kolmogorov[9] in drei Hypothesen bereits 1941. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie konnte er z. B. zeigen, daß Geschwindigkeits- und Zeitmaße reduziert werden bei reduzierter Eddygröße.

Im Allgemeinen haben die großen Wirbelstrukturen (Large Eddies) anisotrope[10] Eigenschaften und sind stark abhängig von den geometrischen und physikalischen Randbedingungen, wobei bei großer Reynolds-Zahl das Verhältnis l_0/L asymptotisch gegen 0.43 strebt (POPE, 2000). Diese Strukturen erhalten ihre Energie aus den Geschwindigkeitsgradienten $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ der mittleren Strömung im sog. *Energie*- oder *Produktionsbereich*. Die Ausrichtung dieser Skalen geht im Laufe des chaotischen Prozesses der Skalenreduktion, durch den Energie zu kleineren Skalen transferiert wird, verloren. Jegliche Information über die Geometrie der großen Skalen – festgelegt durch die Hauptströmung und die Randbedingungen – verschwindet ebenso. In der Konsequenz muß die Statistik der kleinskaligen Bewegungen universell sein, d. h. eben auch ähnlich in allen turbulenten Strömungen, sobald die Reynolds-Zahl nur groß genug ist. POPE (2000) führt ein Längenmaß l_{EI} zur Abgrenzung der großen anisotropen Skalen ($l > l_{EI}$) im *Energieproduktionsbereich* und den kleinen isotropen Skalen ($l < l_{EI}$) ein, dessen Größenordnung er mit $l_{EI} \approx l_0/6$ angibt. Die zugehörige von KOLMOGOROV (1941) formulierte *Hypothese lokaler Isotropie* lautet: *„Bei ausreichend hoher Reynolds-Zahl sind die kleinskaligen turbulenten Bewegungen* $(l \ll l_0)$ *statistisch isotrop.*“ Die Ausnahme bilden nur Gebiete in der Nähe von Wänden und Berandungen.

Mit der *Ersten Ähnlichkeitshypothese* beantwortete (KOLMOGOROV, 1941) auch noch die Frage, von welchen Parametern der statistisch universelle Zustand abhängt: *„Bei ausreichend hoher Reynolds-Zahl hat in jeder turbulenten Strömung die Statistik der kleinskaligen Bewegungen eine universelle Form, die einheitlich bestimmt ist durch* ν *und* ε.“ Die zugrunde liegenden Überlegungen sind logisch nachvollziehbar und erlauben schließlich auch die Frage nach der Größe der kleinsten Skalen zu beantworten.

[9] Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1903 – 1987), sowjetischer / russischer Mathematiker; erarbeitete wesentliche Grundlagen in den Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Topologie sowie die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Turbulenz und der klassischen Mechanik.

[10] isotrop: griechisch von isos – gleich; griechisch von tropos – Richtung, Drehung; bezeichnet die Unabhängigkeit einer Eigenschaft von der Richtung. Anisotropie ist das Gegenteil von Isotropie.

Der Energietransfer zu immer kleineren Skalen und die viskose Dissipation sind die beiden dominanten Prozesse in der Energiekaskade. Die entscheidenden Parameter sind daher die Rate $\mathcal{T}_{EI}$, bei der kleine Skalen Energie von den großen erhalten, und die kinematische Viskosität ν. Auf einfache Weise läßt sich zeigen, daß nun die Energiedissipationsrate ε über die Energietransferrate $\mathcal{T}_{EI}$ bestimmt wird, so daß beide Raten ungefähr gleich sind, z. B. $\varepsilon \approx \mathcal{T}_{EI}$ (POPE, 2000). Der Skalenbereich $l < l_{EI}$, in dem die Dissipationrate und die Viskosität die bestimmenden Parameter sind, wird auch als *Gleichgewichtsbereich* bezeichnet. In diesem Bereich sind die Zeitskalen $l/u(l)$ klein im Vergleich zu l_0/u_0, so daß kleine Eddies sich schnell anpassen können, um das dynamische Gleichgewicht mit der Energietransferrate aus den großen Skalen zu erhalten.

Aus den charakteristischen Parametern ε und ν lassen sich mittels Dimensionsbetrachtungen eine Einheitslänge η, -geschwindigkeit u_η und Zeitskale τ_η bilden.

$$\eta = \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \nu^{\frac{3}{4}} \qquad u_\eta = \varepsilon^{\frac{1}{4}} \nu^{\frac{1}{4}} \qquad \tau_\eta = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \tag{2.1 a,b,c}$$

Diese sog. Kolmogorov-Skalen charakterisieren die allerkleinsten, dissipativen Wirbelstrukturen (Eddies). Mit Hilfe dieser kleinsten turbulenten Maße sowie den charakteristischen Parametern können zwei Identitäten gebildet werden.

$$1 = \frac{\eta u_\eta}{\nu} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{u_\eta}{\eta} \right)^2 = \frac{\nu}{\tau_\eta^2} \tag{2.3}$$

Die Beziehung (2.2) repräsentiert eine Reynolds-Zahl basierend auf den Kolmogorov-Skalen. Das Ergebnis beschreibt die Tatsache, daß die Trägheit im Verhältnis zur inneren Reibung (die Reynolds-Zahl) die gleiche Größenordnung hat. Das ist konsistent mit der Anschauung einer Energiekaskade, die zu immer kleineren Skalen fortgesetzt wird, bis die Reynolds-Zahl für die viskose Dissipation klein genug ist. Die zweite Beziehung (2.3) stellt die Definition der Energiedissipationsrate dar und erlaubt die konsistente Beschreibung der Geschwindigkeitsgradienten für die dissipativen Eddies $u_\eta/\eta = 1/\tau_\eta$ über das turbulente Zeitmaß.

Die Dimensionsbetrachtung der charakteristischen Größen ε und ν macht deutlich, daß aus diesen beiden kein dimensionsloser Parameter gebildet werden kann. Im Zusammenhang mit den Kolmogorov-Skalen führt dies zu einer weiteren wichtigen Schlußfolgerung. Werden in einer Statistik, z. B. einer Geschwindigkeits-Doppelkorrelation (2.19), die Differenzen von Ortsvektoren und Geschwindigkeiten mit Hilfe der Skalen (2.1) entdimensioniert, dann kann die „universelle Form“ einer solchen Statistik nicht mehr von den charakteristischen Größen selbst abhängen. Dementsprechend muß das dimensionslose Geschwindigkeitsfeld, ausgewertet auf nicht zu großer Skale ($< l_{EI}/\eta$), statistisch isotrop und statistisch identisch in allen Punkten sein. Mehr noch: auf den kleinen Skalen sind alle turbulenten Geschwindigkeitsfelder bei ausreichend hoher Reynolds-Zahl statistisch ähnlich. Sie sind statistisch identisch, wenn sie mit den Kolmogorov-Skalen skaliert (normiert) werden (POPE, 2000).

2.2.3 Skalenverhältnisse

Im Hinblick auf die numerische Simulation turbulenter Strömungen sind die Verhältnisse der größten zu den kleinsten turbulenten Skalen von Interesse. Diese ergeben sich aus der Definition der Kolmogorov-Skalen (2.1) und der im Abschnitt 2.2.1 angeführten Skalierung der Energiedissipationsrate für die größten Skalen $\varepsilon \sim u_0^3/l_0$.

$$\frac{l_0}{\eta} \sim \mathrm{Re}^{\frac{3}{4}} \qquad \frac{u_0}{u_\eta} \sim \mathrm{Re}^{\frac{1}{4}} \qquad \frac{\tau_0}{\tau_\eta} \sim \mathrm{Re}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(2.4 a,b,c)}$$

Entsprechend sind bei hoher Reynolds-Zahl die Geschwindigkeitsskalen und Zeitskalen der kleinsten turbulenten Strukturen klein gegenüber denen der größten Eddies.

Mit Hilfe der Skalierung von größten zu kleinsten Eddies gelingt es, eine weitere Charakteristik turbulenter Skalen abzuleiten. Da das Verhältnis $\frac{l_0}{\eta}$ mit steigender Reynolds-Zahl größer wird, gibt es bei ausreichend hoher Reynolds-Zahl einen Skalenbereich l, der klein gegenüber den größten Skalen l_0, aber schon sehr groß gegenüber den kleinsten Skalen η ist ($\eta \ll l \ll l_0$). Da die Eddies in diesem Bereich viel größer sind als die dissipativen Eddies, ist anzunehmen, daß ihre Reynolds-Zahl schon groß ist. Dies bedeutet dann aber weiterhin, daß ihre Bewegung von der Viskosität wenig beeinflußt ist. Dieses Ergebnis bildet den Kern der *Zweiten Ähnlichkeitshypothese* von KOLMOGOROV (1941): *„Bei ausreichend hoher Reynolds-Zahl hat in jeder turbulenten Strömung die Statistik der Bewegungen mit der Skale l im Bereich $\eta \ll l \ll l_0$ eine universelle Form, die einheitlich bestimmt ist durch ε, unabhängig von ν.“*

***Abb.** 2.3:* Bereiche turbulenter Skalen mit den jeweiligen Einflußparametern

Durch die Einführung eines Längenmaßes l_{DI} kann o. g. Intervall auch durch $l_{DI} < l < l_{EI}$ ausgedrückt werden, wobei die Größe von l_{DI} mit 60η angeben wird (POPE, 2000). Dieses Längenmaß teilt den bereits erwähnten Gleichgewichtsbereich ($l < l_{EI}$) in zwei Bereiche mit leicht unterschiedlichen Skalencharakteristika (Abbildung 2.3). Im *Inertial-* oder *Trägheitsbereich* ($l_{DI} < l < l_{EI}$) sind die turbulenten Bewegungen bestimmt durch Trägheitseffekte, und viskose Effekte sind vernachlässigbar. Nur die Bewegungen im *Dissipationsbereich* ($l < l_{DI}$) erfahren signifikante viskose Effekte und sind somit verantwortlich für nahezu die gesamte Energiedissipation.

2.2.4 Energiedissipation

Die Formulierung turbulenter Längen-, Zeit- und Geschwindigkeitsmaße einzig unter Verwendung der Energiedissipationsrate ε ist nicht möglich. Für einen Eddy der Größe l im Inertialbereich müssen diese dann mittels ε und dem Längenmaß l gebildet werden.

$$u(l) = \varepsilon^{\frac{1}{3}}\, l^{\frac{1}{3}} = u_\eta \left(\frac{l}{\eta}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \tau(l) = \varepsilon^{-\frac{1}{3}}\, l^{\frac{2}{3}} = \tau_\eta \left(\frac{l}{\eta}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.5 a,b}$$

In der Konsequenz der letzten Hypothese ist sofort erkennbar, daß im Inertialbereich die Geschwindigkeits- und Zeitmaße mit dem Längenmaß l kleiner werden. Die Energietransferrate $\mathcal{T}(l)$, bei der Energie von den Eddies größer als l zu denen kleiner als l transferiert wird, ist entsprechend von der Ordnung $u(l)^2/\tau(l)$. Mit den Skalenbeziehungen (2.5) führt diese Skalierung wiederum direkt auf die Energiedissipationsrate ε.

$$u(l)^2/\tau(l) = \varepsilon \tag{2.6}$$

Es läßt sich zeigen, daß die Energietransferrate von den großen Skalen $\mathcal{T}_{EI}$ die Transferrate $\mathcal{T}(l)$ im Inertialbereich festlegt; damit die Rate $\mathcal{T}_{DI}$, bei der Energie in den Dissipationsbereich eintritt; und letztlich die Dissipationsrate ε.

2.2.5 Energietransfer

In turbulenten Strömungen existieren Wirbelstrukturen über ein breites Band an Längen- und Zeitskalen. Die globale Strömung beinhaltet rotationsbehaftete kohärente Eddies in Überlagerung unterschiedlicher Größe und Lebensdauer. All diese Strukturen führen zu Schwankungen der Zustandsgrößen, wobei die Ausdehnung der größten Wirbel durch die Geometrie des Strömungsbereiches begrenzt wird. Diese großen Strukturen werden durch die Scherschichten der globalen Strömung getrieben und gestreckt, womit inhärent der Hauptströmung kinetische Energie entzogen wird. Die großen Turbulenzelemente zerfallen durch Wirbelfadenstreckung in kleinere Wirbel, die ihre Energie an immer kleinere Eddies weitergeben, bis die Energie durch die Wirkung viskoser Kräfte in den kleinsten Wirbeln dissipiert wird.

Die Wirbelfadenstreckung stellt einen der wichtigsten Mechanismen in turbulenten Strömungen dar, insbesondere da der Transfer turbulenter kinetischer Energie darauf basiert. Zur Veranschaulichung eignet sich eine wesentliche Eigenschaft turbulenter Strömungen – die Wirbelstärke. Ihre Definition basiert auf der Rotation des Geschwindigkeitsfeldes und beschreibt hier die einzelnen Rotationskomponenten um kartesische Achsen.

$$\omega_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\, \epsilon_{ijk}\, u_k \tag{2.7}$$

Die Anwendung der Rotation auf die inkompressiblen Impulsgleichungen (2.41) liefert die laminare Wirbeltransportgleichung, deren intensive Größe die Wirbelstärke ist und die zur Erläuterung der Wirbelfadenstreckung geeignet ist.

$$\frac{\mathrm{D}\omega_i}{\mathrm{D}t} := \underbrace{\frac{\partial \omega_i}{\partial t}}_{\text{Zeitverlauf}} + \underbrace{u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{Streckung}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k^2}}_{\text{Dissipation}} \tag{2.8}$$

Die beiden Terme auf der linken Seite von (2.8) repräsentieren die zeitliche Entwicklung der Wirbelstärke sowie den Transport mit der Hauptströmung (Advektion[11]), während die rechte Seite in einen Wirbelstreckungsterm und die viskose Dissipation unterteilt ist. Der Druckterm $-\frac{\partial}{\partial x_j}\epsilon_{ijk}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_k}$ verschwindet für inkompressible Strömungen aufgrund der Wirbelfreiheit von Gradientenfeldern (SCHADE, 1999).

Wenn eine vorhandene Scherung bzw. Streckung parallel und in die gleiche Richtung wie die Wirbelstärke gerichtet ist, wird der Term $\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ positiv und verstärkt die Wirbelstärke ($\frac{\mathrm{D}\omega_i}{\mathrm{D}t}$). Die Wirbelstärke steigt an und damit wird der viskose Term groß genug um die Verstärkung auszugleichen (HULIN *et al.*, 2003). Da jedoch die Viskosität ν für die Skalen im Produktions- und Trägheitsbereich gegenüber der Trägheit vernachlässigbar ist, führt dies zu einer immer weiter steigenden Wirbelstärke bzw. Rotationsgeschwindigkeit. Aufgrund der Drehimpulserhaltung $\omega A = \mathrm{const.}$ muß damit entsprechend proportional die Querschnittsfläche A des Wirbelfadens verkleinert werden (SCHADE & KUNZ, 1980). Genau dieser Zusammenhang ist die Grundlage des Energietransfers von den großen zu den kleinen Skalen mittels reibungsfreier Wirbelstreckung bis in den Bereich der Dissipation.

Die vergrößerte Rotationsgeschwindigkeit gestreckter Wirbelfäden induziert wiederum eine Streckung benachbarter anders orientierter Wirbelfäden und intensiviert dadurch die Bewegung in den jeweils anderen Raumrichtungen. Diese räumlichen Zusammenhänge führen neben dem Energietransfer mit zunehmend kleineren Längenmaßen auch zu fortwährend steigender Gleichverteilung der Wirbelstreckung und damit zur Isotropie (BRADSHAW, 1971).

2.2.6 Energiespektrum

Die Energieverteilung in Abhängigkeit der verschiedenen turbulenten Längenskalen kann mit Hilfe des Spektrums der Turbulenzenergie E dargestellt werden. Die Darstellung derartiger Spektren erfolgt üblicherweise im Fourier[12]-Raum, wobei die Wellenzahl $\kappa = 2\pi l^{-1}$ die entsprechende unabhängige Variable ist. Die turbulente kinetische Energie k und die Energiedissipation ε stellen hierbei integrale Größen des Energiespektrums $E(\kappa)$ dar.

$$k = \int_0^\infty E(\kappa)\,\mathrm{d}\kappa \qquad \varepsilon = \int_0^\infty 2\nu\kappa^2 E(\kappa)\,\mathrm{d}\kappa \tag{2.9 a,b}$$

[11] Advektion: lateinisch von advehi – dahinfahren, heranbewegen; bezeichnet den kontinuierlichen Transport von Fluideigenschaften eingebettet in die Hauptströmung.

[12] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 –1830), französischer Mathematiker und Physiker; beschäftigte sich ausgiebig mit der Wärmeausbreitung in Festkörpern und etablierte die Fourier-Reihen-Analyse.

Die in Abbildung 2.4 beispielhaft skizzierten kontinuierlichen Spektren für isotrope Turbulenz sind charakteristisch für turbulente Strömungen – im Gegensatz zu laminaren Strömungen mit diskreten Spektren. Durch das Einspeisen kinetischer Energie in die größten turbulenten Wirbelstrukturen hat das Energiespektrum im Produktionsbereich sein Maximum. Die Form des Spektrums dort ist stark abhängig von der betrachteten Strömungskonfiguration. Im Übergang zum Trägheitsbereich geht diese Abhängigkeit des Energiespektrums mit zunehmender Isotropie der Wirbelstrukturen verloren, und die Energieverteilung wird analog der Eddystruktur universell. Mit Hilfe der Dimensionsanalyse auf Basis der Einflußparameter ε und κ konnten Kolmogorov (1941) und Weizsäcker (1948) unabhängig von einander zeigen, daß die Form des Spektrums im Trägheitsbereich der einfachen Abhängigkeit (2.10) folgt.

$$E(\kappa) = C_K \, \varepsilon^{\frac{2}{3}} \, \kappa^{-\frac{5}{3}} \tag{2.10}$$

Die enthaltene Konstante C_K wird als Kolmogorov-Konstante bezeichnet, deren Wert $C_K \approx 1.5$ basierend auf Experimenten und numerischen Simulationen nahezu als universell bestätigt wird (Sreenivasan, 1995). Da sich mit zunehmender Reduzierung des turbulenten Längenmaßes die zugehörige Reynolds-Zahl verkleinert, nimmt die Wirksamkeit der molekularen Viskosität bzw. der Energiedissipation immer stärker zu. Dementsprechend muß die spektrale Energieverteilung im Dissipationsbereich stärker als mit der ebenfalls experimentell bestätigten Potenz $\kappa^{-\frac{5}{3}}$ abfallen. Für sehr große Wellenzahlen und damit verbunden für sehr große Frequenzen gibt Heisenberg (1948) die Skalierung der spektralen Energieverteilung mit $E(\kappa) \sim \kappa^{-7}$ an.

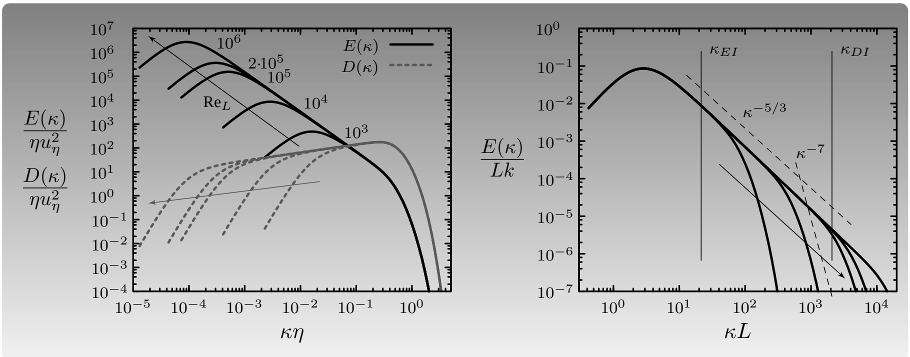


***Abb.** 2.4:* Energie- und Dissipationsspektrum isotroper Turbulenz in Abhängigkeit steigender Reynolds-Zahl $\mathrm{Re}_L = 10^3 ... 10^6$: normiert mit den Kolmogorov-Skalen (links); normiert mit den Strömungsskalen und Darstellung der Skalierungen in Inertial- und Dissipationsbereich sowie den Bereichsgrenzen für $\mathrm{Re}_L = 10^6$ (rechts)

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Turbulenz ist die Dreidimensionalität, deren unterschiedliche Ausprägung zwangsläufig auch zu unterschiedlicher spektraler Verteilung der Turbulenzenergie in den einzelnen Raumrichtungen führt. Zum besseren Verständnis wird deshalb sehr oft das räumlich unabhängige Energiespektrum der isotropen Turbulenz dargestellt bzw. untersucht. In Abbildung 2.4 sind derartige Spektren der Turbulenzenergie und der Energiedissipation in Abhängigkeit verschiedener Reynolds-Zahlen und unterschiedlichen Normierungen aufgetragen, während die zugehörigen Definitionsgleichungen des Modellspektrums nach

POPE (2000) im Anhang A.1 aufgeführt sind. Alle Spektren erweitern sich mit zunehmender Reynolds-Zahl in Richtung kleinerer Wellenzahlen (größerer Längenmaße), so daß die Turbulenzenergie über ein immer größer werdenden Skalenbereich verteilt ist. Die Skalierung mittels der Kolmogorov-Skalen (2.1) bestätigt deutlich die Idee universeller Strukturen im Trägheits- und Dissipationsbereich, wobei ersterer im selben Maße aufweitet wie das gesamte Spektrum. Die Normierung mit der Turbulenzenergie k und der Strömungsskale L verdeutlicht zusätzlich die Ähnlichkeit des Produktionsbereiches bei isotroper Turbulenz. Spektren beliebiger turbulenter Strömungen weisen diese Ähnlichkeit nur bedingt auf bzw. unterscheiden sich gerade bei den kleinen Wellenzahlen.

Während nach Einspeisung im Produktionsbereich der spektrale Energieanteil mit zunehmender Wellenzahl (kleineren Längenmaßen) abfällt, um im Dissipationsbereich in innere Energie umgesetzt zu werden, verläuft das zugehörige Dissipationsspektrum nahezu umgekehrt. Der Anstieg über weite Wellenzahlbereiche bestätigt, daß die Dissipation überwiegend bei kleinen Skalen stattfindet, aber auch bei Skalen deutlich größer als die Kolmogorov-Skale η.

2.2.7 Maße für Turbulenz

In Abhängigkeit der zu beschreibenden Eigenschaften einer turbulenten Strömung sind selbstverständlich verschiedenste Meßgrößen bzw. Arten und Weisen der Beschreibung möglich. Aufgrund des stochastischen Verhaltens von Strömungsgrößen unter Turbulenzeinfluß werden jedoch im Allgemeinen statistische Größen verwendet. Eine individuelle Beschreibung einzelner Strömungskonfigurationen oder auf tieferer Ebene einzelner Strömungszustände, stellt eher die Ausnahme dar und ist meist dann von Interesse, wenn der zeitliche Verlauf einzelner kohärenter Strukturen relevant wird, z. B. bei der Meteorologie.

Die Verwendung statistischer Größen zur Beschreibung von Turbulenz unterstreicht das Vorhandensein einer nahezu ungeordneten Bewegung. Dennoch können auf diese Art, die allerdings auftretende Kohärenz von turbulenten Strukturen oder Beziehungen zwischen Schwankungsbewegungen unter Verwendung von Mittelwerten oder Korrelationen einzelner Strömungsgrößen in Raum und Zeit zumindest teilweise erfaßt werden.

Zeitliche Mittelwerte Für die numerische Behandlung sowie das Verständnis turbulenter Bewegungen ist es dienlich, diese in eine mittlere Bewegung und eine überlagerte turbulente Schwankung aufzuteilen (SCHLICHTING, 1968). Im inkompressiblen Fall wird dann für die Geschwindigkeiten u_i und den Druck p (allgemeine Strömungsgröße ϕ) eine additive Zerlegung in den zeitlichen Mittelwert $\overline{\phi}(x_i)$ und die Schwankungsgröße $\phi^{'}(x_i, t)$ verwendet – im allgemeinen kompressiblen Fall gilt diese Zerlegung analog für Dichte und Temperatur.

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \qquad \text{inkompressibel}: \quad u_i = \overline{u}_i + u_i' \qquad p = \overline{p} + p' \tag{2.11 a,b,c}$$

Die Mittelwerte werden als zeitliches Mittel der Strömungsgröße ϕ in einem fixierten Raumpunkt x_i über den Zeitraum T gebildet.

$$\overline{\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x_i, t)\, \mathrm{d}t \tag{2.12}$$

Die Grenzwertbildung $\lim_{T\to\infty}$ der Definition (2.12) würde das exakte Ergebnis liefern. In der Praxis ist die Mittelungszeit T für die Mittelwertberechnung soweit auszudehnen, daß die Mittelwerte von der Zeit unabhängig sind – meßtechnisch üblicherweise mehr als zwei Größenordnungen länger als die Periodendauer der niedrigsten, energetisch relevanten Frequenz des Spektrums von ϕ (FIEDLER, 2003). Da die Schwankungsgröße eine zeitliche Fluktuation um den Mittelwert darstellt, muß der zeitliche Mittelwert der Schwankungsgröße ϕ' verschwinden.

$$\overline{\phi'} = 0 \qquad \text{inkompressibel}: \quad \overline{u'}_i = 0 \qquad \overline{p'} = 0 \tag{2.13 a,b,c}$$

Momente höherer Ordnung und Schwankungsintensität Im Gegensatz zur Betrachtung einzelner Schwankungsgrößen im zeitlichen Mittel können durch zusätzliche Gewichtung von ϕ' mittels Potenzieren sog. *Momente höherer Ordnung* definiert werden, die im zeitlichen Mittel allgemein nicht null sind (DURST, 2006).

$$\overline{\phi'^n} = \frac{1}{T}\int_0^T \phi'^n \, \mathrm{d}t \tag{2.14}$$

In dieser Art können die Intensitäten der Turbulenz aus den Geschwindigkeitsschwankungen u_i' (auch bezeichnet als RMS-Wert[13]) mit n=2 gebildet werden.

$$\sqrt{\overline{u'^2}} \qquad \sqrt{\overline{v'^2}} \qquad \sqrt{\overline{w'^2}} \tag{2.15 a,b,c}$$

Die Varianzen der einzelnen Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ dienen außerdem zur Definition der üblichen Parameter zeitlich gemittelter Turbulenz: der mittleren Turbulenzenergie k bzw. dem Turbulenzgrad Tu.

$$k = \frac{1}{2}\,\overline{u_i'^2} = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right) \tag{2.16}$$

$$\mathrm{Tu} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u_i'^2}\right)}}{U} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k}}{U} \tag{2.17}$$

Korrelationen Eine Möglichkeit die Turbulenzstruktur oder Größe verschiedener Eddies quantitativ zu beschreiben, stellt die zeitlich gemittelte Verknüpfung von Strömungsgrößen an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten dar. Diese sog. *Korrelationen* R werden aus dem gemittelten Produkt von n Schwankungsgrößen ϕ_n gebildet (FIEDLER, 2003), wobei die Skalierung mit den zeitlich gemittelten Intensitäten der Einzelgrößen $\sqrt{\overline{\phi_n'^2}}$ die dimensionslose Darstellung $\mathcal{R} \leq 1$ der Korrelation liefert.

$$R = \overline{\prod_n \phi_n} \qquad \mathcal{R} = \frac{\overline{\prod_n \phi_n}}{\prod_n \sqrt{\overline{\phi_n'^2}}} \tag{2.18 a,b}$$

Im Rahmen der Beschreibung von turbulenten Strömungen werden hauptsächlich Doppelkorrelationen (n=2) und seltener Tripel- oder Quadrupelkorrelationen der Geschwindigkeitsschwankungen verwendet. Eine Geschwindigkeits-Doppelkorrelation (in Form des Korrelationstensors R_{ij}) zwischen den beiden Orten x_i und x_i+r_i sowie den beiden zugehörigen Zeiten t und t+τ nach (2.19) gibt dann Anhaltspunkte, wie stark die Geschwindigkeitsschwankungen

[13]RMS-Wert: Abkürzung für Root-Mean-Square; englisch für Effektivwert, quadratischer Mittelwert

beider Orte und Zeiten miteinander verknüpft sind. Hohe Korrelationswerte indizieren hierin höhere Kohärenz bzw. eine höhere Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Punkte im gleichen Eddy lokalisiert sind.

$$R_{ij}(x_i, t, r_i, \tau) = \overline{u_i'(x_i, t)\, u_j'(x_i{+}r_i, t{+}\tau)} \tag{2.19}$$

Der Korrelationstensor R_{ij} ist räumlich symmetrisch und verschwindet für die Grenzwerte unendlichen räumlichen $|r_i|{\to}\infty$ und / oder zeitlichen Abstands $\tau{\to}\infty$. Darüber hinaus liefert die Korrelation zweier Geschwindigkeitsschwankungen an gleicher räumlich-zeitlicher Position (Ein-Punkt-Limit) eine Aussage, ob und wie stark die Änderung der lokalen Geschwindigkeiten korreliert erfolgt, $R_{ij}(x_i, t, 0, 0) = \overline{u_i' u_j'}$. Üblicherweise werden entweder nur räumliche oder zeitliche Korrelationsverläufe betrachtet, wobei die räumliche Korrelationsfunktion durch $R_{ij}(x_i, t, r_i, 0)$ und die zeitliche oder Autokorrelationsfunktion durch $R_{ij}(x_i, t, 0, \tau)$ definiert sind.

Der Korrelationstensor dritter Stufe kann analog zu den Doppelkorrelationen bestimmt werden. Da allerdings die physikalische Interpretation einer solchen beliebigen Tripelkorrelation oftmals fehlt, erfolgt üblicherweise die Beschränkung auf das Ein-Punkt-Limit. Der so entstehende Tensor beinhaltet 27 Korrelationen dreier Schwankungsgrößen am selben Punkt und beschreibt das dynamische Verhalten der Doppelkorrelationen. Derartige Tripelkorrelationen, z. B. mit den Geschwindigkeitsschwankungen $\overline{u_i' u_j' u_k'}$, treten in den Bewegungsgleichungen für die Reynolds-Spannungskomponenten auf, wobei jedoch aufgrund mehrerer Symmetrieeigenschaften nur 10 der 27 Terme voneinander verschieden sind. Quadrupelkorrelationen würden in den Bilanzgleichungen für die Tripelkorrelationen auftreten, usw.

Insbesondere die Berechnung von Geschwindigkeits-Doppelkorrelationen stellt die Grundlage für die Definition integraler Längen- und Zeitskalen der Turbulenz, sowie der spektralen Energieverteilung dar (siehe nachfolgende Abschnitte und POPE, 2000).

Spektren Eine Möglichkeit, die Instationarität einer turbulenten Strömung zu analysieren, besteht in der Analyse der spektralen Zusammensetzung. Zu diesem Zweck können gezielt Zeitschriebe hinsichtlich dominanter Frequenzen (Frequenzspektrum) untersucht oder die spektrale Energieverteilung (Energiespektrum) ausgewertet werden.

Die Aufnahme von Zeitschrieben nahezu beliebiger Strömungsgrößen während der Simulation (bzw. des Experiments) erlaubt beispielsweise die Berechnung von Mittelwert und Schwankungsgröße oder auch von Korrelationen am Monitorpunkt. Darüber hinaus kann ein solches Signal unter Verwendung der Diskreten Fourier-Transformation (DFT) bzw. der Fast-Fourier-Transformation (FFT) in spektrale Amplitudenanteile zerlegt werden. In der spektralen Darstellung des zeitdiskreten Signals können anschließend diejenigen Frequenzen f oder in der dimensionslosen Darstellung diejenigen Strouhal[14]-Zahlen $\mathrm{St} = \frac{f\,L}{U}$ identifiziert werden, deren Schwankungsanteile das Signal dominieren. Solche Frequenzen geben in der Regel Auskunft über die Periodizität eines Wirbelabwurfs, Instabilitäten oder Wellen und können u. a. zur Phasenmittelung von Strömungsgrößen herangezogen werden.

[14]Strouhal-Zahl: dimensionslose Darstellung einer Frequenz; benannt nach dem tschechischen Physiker und Experimentator Vincent Strouhal (1850 – 1922).

Wie bereits im Abschnitt 2.2.6 dargestellt kann mit Hilfe des Energiespektrums die Verteilung der Turbulenzenergie in Abhängigkeit verschiedener Längenskalen dargestellt werden. Auf der Basis der Fourier-Transformierten $\hat{\Phi}_{ij}$ einer räumlichen Geschwindigkeits-Doppelkorrelation R_{ij} als spektraler Energiedichte ist es möglich, ein solches Turbulenzenergiespektrum zu berechnen.

$$\hat{\Phi}_{ij}(\kappa_m) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(x_i,t,r_i,0)\; e^{-\mathrm{i}\kappa_m r_m} \mathrm{d}r_i \tag{2.20}$$

Der mit dem dreidimensionalen Wellenzahlvektor κ_m definierte Tensor der Geschwindigkeitsspektren $\hat{\Phi}_{ij}$ bildet im Fall homogener Turbulenz mit der Doppelkorrelation R_{ij} ein Fourier-Transformations-Paar (POPE, 2000).

$$R_{ij}(x_i, r_i) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}_{ij}(\kappa_m)\; e^{\mathrm{i}\kappa_m r_m} \mathrm{d}\kappa_m \tag{2.21}$$

Die Summe der Diagonalelemente von $\hat{\Phi}_{ij}$ stellt den Anteil kinetischer Energie bei einer gegebenen Wellenzahl dar. Dies wird besonders deutlich, wenn in Gleichung (2.21) das Ein-Punkt-Limit $r_i = 0$ eingeführt wird.

$$R_{ij}(x_i, 0) = \overline{u_i' u_j'} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}_{ij}(\kappa_m)\; \mathrm{d}\kappa_m \tag{2.22}$$

Um den Zusammenhang zur Energiespektralverteilung $E(\kappa)$ herzustellen sind abschließend noch die Informationen über die Richtungen der Geschwindigkeiten und der Fourier-Moden geeignet zusammenzufassen. Die Kontraktion der Beziehung (2.22) führt die Geschwindigkeitsrichtungen zusammen und liefert direkt die turbulente kinetische Energie k.

$$k = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}_{ii}(\kappa_m)\; \mathrm{d}\kappa_m \tag{2.23}$$

Durch Integration über alle Wellenzahlen κ_m mit dem Betrag $|\kappa_m| = \kappa$, mathematisch die Integration über eine Kugelfläche $\mathcal{A}(\kappa)$ mit dem Radius κ im Fourier-Raum, führt schließlich auf die Energiespektralverteilung (vgl. POPE, 2000) und weiter auf den Zusammenhang (2.9a).

$$E(\kappa) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{A}} \hat{\Phi}_{ii}(\kappa_m)\; \mathrm{d}\mathcal{A}(\kappa) \tag{2.24}$$

Charakteristische Skalen Wie bereits im Abschnitt 2.2.2 verdeutlicht, können den einzelnen Bereichen der dreigeteilten Energiekaskade jeweils charakteristische Einflußgrößen zugeordnet werden und deren Kombination zur Definition von Längen-, Zeit- und Geschwindigkeitsskalen verwendet werden. Die so gewonnenen charakteristischen Skalen beschreiben im eigentlichen Sinne lediglich eine Proportionalität, sind aber durchaus auch als quantitatives Turbulenzmaß gebräuchlich. In Tabelle 2.1 sind die aus Dimensionsbetrachtungen gewonnenen Skalen zusammengefaßt.

Bereich	Einflußparameter	Länge	Zeit	Geschwindigkeit
Produktionsbereich	ε, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ (, k)	$k^{3/2}/\varepsilon$	k/ε	$k^{1/2}$
Trägheitsbereich	ε, l	l	$l^{2/3}/\varepsilon^{1/3}$	$\varepsilon^{1/3} l^{1/3}$
Dissipationsbereich	ε, ν	$\nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$	$\nu^{1/2}/\varepsilon^{1/2}$	$\nu^{1/4}\varepsilon^{1/4}$

***Tab.** 2.1:* Charakteristische Skalen in der Energiekaskade

Um die jeweiligen Skalen in Tabelle 2.1 quantitativ angeben zu können, muß u. a. auch die Energiedissipationsrate ε bekannt sein. Dies gilt auch für einige andere typische Längenmaße wie z. B. die Taylorsche Mikrolänge $\lambda = \sqrt{10\nu k/\varepsilon}$. Die Messung und numerische Berechnung von ε ist jedoch meist problematisch und nicht trivial, so daß andere charakteristische Skalen nicht unbedingt gebräuchlicher sind, aber leichter zu bestimmen.

Die Korrelationsfunktion R_{ij} nach (2.19) beinhaltet Informationen über die Größe verschiedener Eddies und kann entsprechend benutzt werden, um integrale und richtungsabhängige Skalen der Turbulenz zu bestimmen. Inbesondere die räumliche Korrelationsfunktion dient dazu, ein Maß für die größten Wirbelstrukturen anzugeben – das integrale Längenmaß (FIEDLER, 2003).

$$l_{ij,n} = \frac{1}{2\,R_{ij}(x_i,t,0,0)} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(x_i,t,r_n,0)\;\mathrm{d}r_n = \frac{1}{2\overline{u_i'u_j'}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(x_i,t,r_n,0)\;\mathrm{d}r_n \tag{2.25}$$

Die gebräuchlichsten Längenmaße dieser Art sind die in kartesischer Ausrichtung gebildeten longitudinalen und transversalen integralen Längenmaße l_x und l_y.

$$l_x = \frac{1}{\overline{u'u'}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}\;\mathrm{d}r_1 \qquad l_y = \frac{1}{\overline{v'v'}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{22}\;\mathrm{d}r_2 \tag{2.26}$$

Analog zu den integralen räumlichen Skalen läßt sich ein typischer Zeitmaßstab der Turbulenz I_τ einführen, der angibt, über welchen Zeitraum die inhärent in einer turbulenten Strömung enthaltenen Geschwindigkeitsfluktuationen an einem Punkt (x_i,t) mit sich selbst korreliert sind (DURST, 2006).

$$I_\tau = \frac{1}{\overline{u_i'u_i'}} \int_{0}^{\infty} R_{ij}(x_i,t,0,\tau)\;\mathrm{d}\tau \tag{2.27}$$

2.2.8 Wandnahe Turbulenz

Im Rahmen turbulenter Strömungen kommt der Berücksichtigung von Wänden als Begrenzung des Strömungsfeldes eine besondere Bedeutung zu. Die in der Theorie oftmals betrachtete isotrope Turbulenz, z. B. in Beschreibung nach KOLMOGOROV (1941), ist bei praxisrelevanten Strömungen eher selten und meist nur für innere Strömungsgebiete oder das Fernfeld relevant. Unter dem Einfluß und in der Nähe von Wänden werden die Eigenschaften der Strömung von diesen dominiert und sind stark richtungsabhängig (anisotrop). Es ist unmittelbar einsichtig, daß turbulente Schwankungsgrößen in Grenzschichten normal zur Wand weniger stark ausgeprägt sind als in den tangentialen Richtungen, wobei diese Anisotropie bei Grenzschichtablösung in das Strömungsfeld transportiert wird.

Auf der Suche einer Modellbeschreibung für wandnahe Turbulenz gibt es mehrere Startpunkte. So kann beispielsweise die Grenzschichtnäherung der Erhaltungsgleichungen ermittelt werden, wie u. a. von SCHADE & KUNZ (1980) dargestellt. Darüber hinaus bietet die Dimensionsanalyse eine relativ einsichtige Vorgehensweise an, die jedoch auch nicht ohne Empirie auskommt. Ausgehend von der Selbstähnlichkeit laminarer Grenzschichtprofile, die skaliert mit charakteristischen Längen- und Geschwindigkeitsmaßen L und U die gleiche Form bezüglich der

Wandnormalenrichtung y aufweisen, wird ein analoger Skalierungszusammenhang für die Mittelwerte der Hauptströmungsrichtung turbulenter Grenzschichten gesucht.

$$\frac{\overline{u}}{U} = f\left(\frac{y}{L}\right) \tag{2.28}$$

Zu den wichtigsten Einflußparametern für das Geschwindigkeitsprofil zählen in erster Linie die Fluideigenschaften, beschrieben durch die Dichte ϱ und die Viskosität μ, der wandnormale Abstand y und die Wandreibung enthalten in der Wandschubspannung τ_w. Weitere Parameter wie Wandrauhigkeit, Druckgradient oder Temperatur sind denkbar, ändern die Geschwindigkeitsprofile in erster Näherung aber nur unwesentlich.

$$\overline{u} = f(y, \varrho, \mu, \tau_w) \tag{2.29}$$

Die Dimensionsanalyse unter Verwendung der SI-Einheiten[15] als Basis liefert eine Kennzahlenfunktion mit zwei dimensionslosen Parametern, die verdeutlicht, daß die Einflußparameter bezüglich des Geschwindigkeitsprofils nicht unabhängig zu betrachten sind.

$$\frac{\overline{u}^2 \varrho}{\tau_w} = f\left(\frac{y^2 \varrho \tau_w}{\mu^2}\right) \tag{2.30}$$

Aus dem Vergleich der funktionalen Zusammenhänge (2.28) und (2.30) lassen sich die charakteristischen Skalierungsparameter L und U bestimmen.

$$U = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}} \equiv u_\tau \tag{2.31}$$

$$L = \frac{\mu}{\sqrt{\varrho \tau_w}} = \nu \sqrt{\frac{\varrho}{\tau_w}} = \frac{\nu}{u_\tau} \tag{2.32}$$

Die Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ und ihr Quotient mit der Viskosität $\frac{\nu}{u_\tau}$ werden als innere Wandskalen für turbulente Grenzschichten bezeichnet. Der funktionale Zusammenhang $f(...)$ des selbstähnlichen Geschwindigkeitsprofils $u^+ = \frac{\overline{u}}{u_\tau}$ in Abhängigkeit des dimensionslosen Wandabstandes $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$ wird in drei unterschiedlichen Bereichen einer turbulenten Wandgrenzschicht gesondert bestimmt.

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) \qquad u^+ = f(y^+) \tag{2.33}$$

Viskose Unterschicht Im wandnächsten Bereich bis etwa $y^+ = 5$ dominieren die viskosen Kräfte (ausgedrückt durch ν) die Trägheitskräfte (Masse oder ϱ). Die vorherrschenden viskosen Schubspannungen hängen nicht vom Wandabstand ab (SCHADE & KUNZ, 1980). Einzig ein linearer funktionaler Zusammenhang stellt die Unabhängigkeit von der Dichte ϱ sicher, womit als Ergebnis in der viskosen Unterschicht ein linearer Anstieg des Geschwindigkeitsprofils mit dem Wandabstand folgt.

$$u^+ = y^+ \tag{2.34}$$

[15] SI-Einheiten: 1960 eingeführtes Internationales Einheitensystem (frz. Système international d'unités, SI) basierend auf metrischen Einheiten für physikalische Größen

Turbulenter Wandbereich In diesem wandnahen Bereich ist die Schubspannung in erster Näherung ebenfalls unabhängig vom Wandabstand. Hier dominieren jedoch die Trägheitskräfte, und der Reibungsterm wird bedeutungslos, so daß turbulente Schubspannungen vorherrschend sind. Aus der Forderung, daß der funktionale Zusammenhang unabhängig von ν ist, leitet sich eine umgekehrte Proportionalität zwischen dem Geschwindigkeitsgradienten und dem Wandabstand her. Die Einführung einer Proportionalitätskonstante κ und anschließende Integration führt auf eine logarithmische Form des Geschwindigkeitsprofils im wandnahen Bereich, weshalb diese Schicht auch als logarithmischer Bereich bezeichnet wird.

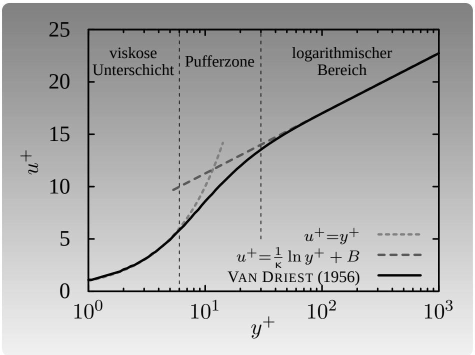


***Abb.** 2.5:* Skalierte mittlere Geschwindigkeitsprofile einer turbulenten Wandgrenzschicht

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \tag{2.35}$$

Die Bestimmung der sog. Kármán[16]-Konstante κ und B erfolgt durch Experimente. Die ermittelten Werte variieren ziemlich stark, wobei meist $\kappa = 0.40...0.41$ und $B = 5.2...5.5$ verwendet wird (FRÖHLICH, 2006).

Äußerer Wandbereich Im Außenbereich einer Wandgrenzschicht ist der Wandeinfluß vergleichsweise gering, womit die Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ nicht zur Skalierung verwendet werden kann. Stattdessen werden die Anströmgeschwindigkeit U_∞ und die Grenzschichtdicke δ als charakteristische Größen in einem Potenzgesetz an Experimente angepaßt.

$$\frac{\overline{u}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n \tag{2.36}$$

Der Exponent n variiert etwa im Intervall $1/7...1/10$, wobei die kleineren Werte zu höheren Reynolds-Zahlen gehören (BRADSHAW, 1971).

In Abbildung 2.5 ist das mittlere wandnahe Geschwindigkeitsprofil mit linearem und logarithmischen Bereich dargestellt. Offenbar gibt es einen Übergangsbereich bei etwa $y^+ = 5...30$, der auch als Pufferzone bezeichnet wird, in dem neben den dominierenden turbulenten Effekten noch Reibungseffekte vorhanden sind. Eine zusammenhängende funktionelle Beschreibung des Geschwindigkeitsprofils, wie ebenfalls in Abbildung 2.5 dargestellt, wurde von VAN DRIEST (1956) vorgeschlagen und beinhaltet auch den Übergangsbereich. Der logarithmische oder voll turbulente Bereich geht fließend in den Außenbereich über. Die Turbulenz in dieser Schicht ist ungefähr im Gleichgewicht; Produktion und Dissipation halten sich also die Waage. In der viskosen Unterschicht hingegen findet fast ausschließlich Dissipation statt. Die verschiedenen Bereiche des wandnahen Geschwindigkeitsprofils können ähnlich wie bei der Zerlegung des

[16] Theodore von Kármán (1881 – 1963), amerikanischer Physiker und Aerodynamiker ungarischer Herkunft; durch seine Arbeiten zur Strömungslehre gilt er als Pionier der Aerodynamik.

Energiespektrums als Dissipationsbereich, Inertialbereich und ein produktionsdominierter Bereich charakterisiert werden (TENNEKES & LUMLEY, 1972).

Bei der Simulation wandgebundener Strömungen ist die Wandrandbedingung durch die geeignete Erfassung der dominierenden molekularen Schubspannung in unmittelbarer Wandnähe zu gewährleisten. Dies kann durch eine entsprechende Modellierung oder aber durch Auflösung der steilen Geschwindigkeitsgradienten erreicht werden. Wesentlich in diesem Zusammenhang ist auch die Erfassung der Anisotropie der Reynolds-Spannungen in Wandnähe, die z. B. in den numerischen Experimenten von KIM *et al.* (1987) deutlich sichtbar wird. Zusätzlich sind die Fluktuationen der Geschwindigkeiten im logarithmischen Wandbereich mit den Wandschubspannungen korreliert, was sich als Ergebnis kohärenter Strukturen in Wandnähe darstellt. Bei diesen wandgebundenen Turbulenzstrukturen handelt es sich um streifenförmige Längswirbel, sog. „streaks“ (KLINE *et al.*, 1967), deren räumlich-zeitlich Auflösung die Grundlage der Erfassung dynamischer Grenzschichtvorgänge darstellt.

2.2.9 Abschließende Feinheiten

Der vorstehend geschilderte stationäre Energietransport in Form der Energiekaskade von den großen zu den kleinen Skalen auf Basis von Wirbelstreckungsmechanismen stellt ein idealisiertes Bild turbulenter Strömungen dar. Hierin wird insbesondere Isotropie der kleinen Skalen und die Lokalität der Energiekaskade, d. h. Energie wird nur zum nächst kleineren Eddy übertragen, angenommen. Diese Modellbeschreibung stellt eine Netto-Energiebilanz als Ergebnis statistischer Beschreibung dar, mit dem statistischen Resultat, daß Energie nur in Richtung kleinerer Skalen transferiert wird. In der realen Physik instationärer Strömungen ist jedoch auch Energierückstreuung (Backscatter) von kleinen turbulenten Skalen zu größeren möglich, wobei das Verschmelzen von kleineren Eddies zu größeren nicht ausgeschlossen ist (BREUER, 2002). Auch wenn die Rückstreuung von Energie zu anderen Zeitpunkten durch den im statistischen Mittel stattfindenden Kaskadenprozeß (Forwardscatter) wieder kompensiert wird, verdeutlichen jedoch die numerischen Untersuchungen von PIOMELLI *et al.* (1991), daß Rückstreuung kein Einzelfall ist. Die Autoren konnten bei mehreren Strömungskonfigurationen Energierückstreuung in etwa 50% aller Gitterpunkte feststellen und deuten an, daß ungenügende Modellierung bei Nichtgleichgewichtsströmungen zu fehlerhaften Vorhersagen führen kann. Auch COMB (1990) weist auf die Möglichkeit negativer Wirbelstreckung (Stauchung) hin, die im Sinne des Energietransfers rückwärtig zu den großen Skalen zu verstehen ist.

Die Annahme der ausreichend hohen Reynolds-Zahl gilt nicht zwangsläufig als Einschränkung der Modellanschauung, da auch bei Überlappung von Energie- und Dissipationsbereich (also bei kleinerer Reynolds-Zahl) die Mechanismen ähnlich bleiben. Aufgrund der Annahme der statistischen Stationarität und des Gleichgewichtes sind transitionelle Strömungsbereiche in der Theorie nicht enthalten. Dennoch kann davon ausgegangen werden, daß sich die kleinen Skalen im Allgemeinen aufgrund ihrer kleinen Zeitmaße schneller an geänderte Verhältnisse anpassen und entsprechend den Gleichgewichtszustand wieder herstellen (FRÖHLICH, 2006).

Ein wichtige Annahme, aber auch Folge der Theorie von Kolmogorov ist die Isotropie in den kleinen turbulenten Skalen. Obwohl die Mehrheit der turbulenten Strömungen insbesondere in Wandnähe anisotrop ist, zeigen zahlreiche Untersuchungen, daß die kleineren Skalen stärker als die groben Skalen durch Isotropie gekennzeichnet sind. VAN ATTA (1991) bestätigt in seinen Untersuchungen die statistische Unabhängigkeit der großen und der kleinen Skalen und damit die lokale Isotropie der kleinsten turbulenten Skalen in homogenen Fluiden. Demgegenüber weist der Autor auf die Zunahme lokaler spektraler Anisotropie hin, die unter dem Einfluß von Auftriebskräften beobachtet werden kann.

Die vorliegende Theorie macht keine Aussage über den Einfluß von stromauf liegenden Randbedingungen und Anfangsbedingungen bzw. werden diese in keiner Form berücksichtigt. So zeigen GEORGE & DAVIDSON (2004) die starke Variation von Skalierungsparametern für Geschwindigkeitsprofile infolge unterschiedlicher stromauf befindlicher Randbedingungen, so daß Momente höherer Ordnung nicht mehr universell sind. OUELLETTE *et al.* (2006) fanden in vergleichbarer Weise in den kleinen Skalen Reflektionen der Anisotropie der großen Skalen aufgrund deren Asymmetrie. All diese Untersuchungen verdeutlichen die Wichtigkeit und Sensitivität der Strömungen gegenüber Anfangs- und Randbedingungen, wobei die vorgefundene Anisotropie in den kleinen Skalen, der Nichtgleichgewichtszustand der Strömung oder auch der von HURST & VASSILICOS (2007) gemessene exponentielle Turbulenzzerfall weit stromab noch nicht ganz ins Bild zu passen scheinen.

Große Skalen	Kleine Skalen
→ werden von der mittleren Strömung erzeugt	→ entstehen aus den großskaligen Bewegungsformen
→ abhängig von den Randbedingungen bzw. von der Geometrie	→ universell
→ Strukturen (kohärent) erkennbar	→ ungeordnet (regellos)
→ inhomogen und anisotrop	→ homogen und isotrop
→ langlebig und energiereich	→ kurzlebig und energiearm
→ diffusiv	→ dissipativ
✓ schwierig zu modellieren	✓ einfacher zu modellieren
✓ universelles Modell kaum möglich	✓ universelles Modell wahrscheinlicher

Tab. *2.2:* Eigenschaften großer und kleiner turbulenter Skalen nach BREUER (2002)

Im Hinblick auf die numerische Modellierung bei der Simulation turbulenter Strömung sind in Tabelle 2.2 die wesentlichen Eigenschaften großer und kleiner Skalen zusammengefaßt. Zusätzlich ist aus diesen Eigenschaften schnell ersichtlich, daß die kleinen Skalen im Rahmen der Modellierung als Ansatzpunkt deutlich besser geeignet sind als die großen.

2.3 Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen

Für die vollständige Beschreibung eines einphasigen Strömungsfeldes müssen die drei kartesischen Geschwindigkeitskomponenten u_i und die drei thermodynamischen Zustandsgrößen Dichte ϱ, Druck p und Temperatur T in Abhängigkeit von Ort x_i und Zeit t bekannt sein. Die Stoffgrößen des Fluids: die dynamische Viskosität μ, die Volumenviskosität μ^*, die Wärmeleitfähigkeit λ und die spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v vervollständigen die Beschreibung. Die kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen von Masse, Impuls und Energie und die thermodynamischen Zustandsgleichungen stellen hierbei den Zusammenhang zwischen den Strömungs- und den Stoffgrößen her. Diese nach Navier[17] und Stokes[18] benannten Navier-Stokes-Gleichungen sind die Grundlage der Berechnung von Strömungen mit all ihren möglichen Eigenschaften wie Instationarität, Reibungsbehaftung, Kompressibilität und Thermik.

$$\text{Masse:} \quad \frac{\partial}{\partial t}\varrho + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho u_j) = 0 \tag{2.37}$$

$$\text{Impuls:} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\varrho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho u_j u_i - \tau_{ij}) = \varrho g_i + f_i \tag{2.38}$$

$$\text{Energie:} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\varrho h) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho u_j h + q_j) = (\tau_{ij} + p\delta_{ij})S_{ji} + \frac{\partial p}{\partial t} + u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + w^h \tag{2.39}$$

Die zusätzlich auftretenden, bisher nicht benannten Größen in den Gleichungen (2.38) und (2.39) sind: der Spannungstensor τ_{ij}, der Gravitationsvektor g_i, weitere Volumenkräfte f_i (z. B. Corioliskraft), die Enthalpie h, der Vektor der Wärmestromdichte q_i, der Scherraten- oder Deformationsgeschwindigkeitstensor S_{ij}, sowie eine volumenspezifische Wärmequelle w^h. Definitionen dieser Größen werden sofern benötigt noch angegeben.

Aufgrund der mathematischen Eigenschaften dieses gekoppelten Gleichungssystems (Nichtlinearität, Koppelung, Inhomogenität, etc.) stehen analytische Lösungen nur für idealisierte Sonderfälle bzw. Vereinfachungen der Gleichungen zur Verfügung (vgl. Abbildung 2.6). Keine dieser Vereinfachungen ist dazu geeignet, die Komplexität einer wandgebundenen turbulenten Strömung zu beschreiben.

Einige wenige Einflußgrößen können je nach untersuchter Strömungskonfiguration in den Gleichungen (2.37) – (2.39) vernachlässigt werden. Im Folgenden werden nur noch Strömungen mit kleiner Mach[19]-Zahl ($\mathrm{Ma} < 0.3$) und Vernachlässigung von thermischen Effekten berücksichtigt, so daß sich das reduzierte Gleichungssystem (2.40), (2.41) bei inkompressibler Strömung ohne Temperatureinfluß und Volumenkräfte ergibt.

---

[17] Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836), französischer Mathematiker und Physiker; schärfte die mathematische Beschreibung der Elastizitätstheorie als Professor für Mechanik; gab 1822 die Bilanzgleichungen für die Bewegung eines viskosen Fluids an.

[18] Sir Georg Gabriel Stokes (1819–1903), irischer Mathematiker und Physiker; beschäftigte sich eingehend mit Hydrodynamik, elektromagnetischen Wellen und Schallausbreitung; erkannte als erster das Phänomen der Fluoreszenz; formulierte die Stokes-Gleichungen für schleichende Strömungen.

[19] Ernst Mach (1838 – 1916), in Mähren geborener, deutschsprachiger Physiker, Philosoph und Wissenschaftstheoretiker; mit seinen Forschungen an fliegenden Projektilen legte er die Grundlagen der Gasdynamik.

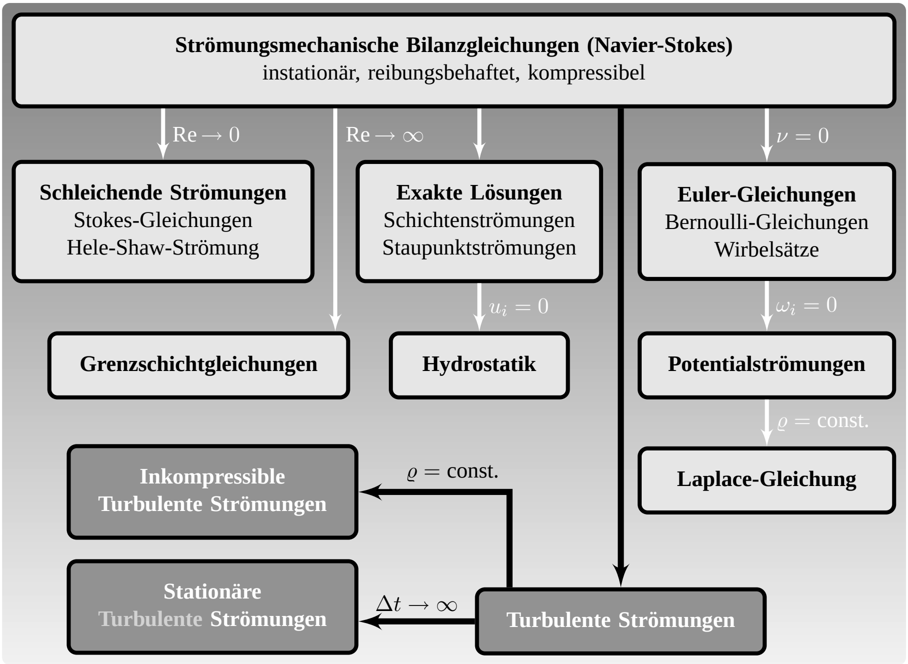


***Abb.** 2.6:* Die strömungsmechanischen Bilanzgleichungen und deren Sonderfälle (angepaßte Vorlage nach TROPEA, 2005)

$$\text{Masse:} \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} u_j = 0 \tag{2.40}$$

$$\text{Impuls:} \qquad \frac{\partial}{\partial t} u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j u_i - \frac{\tau_{ij}}{\varrho}\right) = 0 \tag{2.41}$$

Zur Vervollständigung der Bilanzgleichungen fehlt noch die Angabe des Spannungstensors τ_{ij}. Dieser setzt sich, vorerst ohne inkompressible Vereinfachung, zusammen aus dem Druck p als Normalspannungsanteil sowie dem Reibspannungstensor für Newtonsche[20] Fluide. In der allgemeinsten Form eines Materialgesetzes für den Reibspannungstensor Newtonscher Fluide wird die Proportionalität zum Scherratentensor S_{ij} mit den Laméschen[21] Materialkonstanten λ und μ in Form des isotropen Hookeschen[22] Gesetzes verknüpft.

$$\tau_{ij} = -\underbrace{p\delta_{ij}}_{Druck} + \underbrace{\lambda S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}}_{Reibspannungstensor} \qquad \text{mit} \qquad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.42}$$

Die Auswertung der mittleren Normalspannung $\frac{1}{3}\tau_{ii}$ aus Gleichung (2.42) führt auf eine Kombination der Materialkonstanten, die als Druckzähigkeit $\mu_D = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ bezeichnet wird. Die

[20] Sir Isaac Newton (1643 – 1727), englischer Universalwissenschaftler; neben vielem Anderen formulierte er die Gravitations- und Bewegungsgesetze als Basis der klassischen Mechanik.

[21] Gabriel Lamé (1795 – 1870), französischer Mathematiker und Physiker; bekannt durch seine Arbeiten zur Differentialgeometrie und der mathematischen Physik.

[22] Sir Robert Hooke (1635 – 1703), englischer Physiker, Mathematiker und Erfinder; formulierte die Theorie der Elastizität und entdeckte die pflanzlichen Zellen.

Diagonalelemente des Spannungstensors bzw. die mittlere Normalspannung entsprechen nach der Stokesschen Hypothese im Mittel dem negativen thermodynamischen Druck, $\tau_{ii} = -3p$. Dies bedeutet, daß eine reine Kompression keine Formänderung verursacht bzw. reversibel ist und die Druckzähigkeit verschwinden muß, $\mu_D = 0$ (SCHADE & KUNZ, 1980). In der Folge sind die beiden Materialkonstanten λ und μ nicht mehr unabhängig voneinander, sondern durch $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ verbleibt lediglich eine Materialkonstante für den Spannungstensor Newtonscher Fluide – die dynamische Viskosität μ.

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} = \underbrace{-p\delta_{ij}}_{Kugeltensor} \underbrace{+2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right)}_{symm.Deviator} \tag{2.43}$$

$$= \underbrace{-\left(p + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}}_{Dilatation} + \underbrace{\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{Distorsion} \tag{2.44}$$

Der symmetrische Spannungstensor kann wie in Gleichung (2.43) ersichtlich in einen Kugeltensor und einen symmetrischen Deviator aufgespalten werden. Darüber hinaus ist auch eine analoge Aufteilung in eine gestalterhaltende Volumenänderung (Dilatation) und volumenerhaltende Gestaltänderung (Distorsion) nach Gleichung (2.44) möglich. In der Art wird nicht nur das Verständnis der einzelnen Anteile gestärkt, sondern auch ein Analogon geschaffen, das später bei der Turbulenzmodellierung aufgegriffen wird.

Für den Fall der inkompressiblen Strömungen entfällt der Spuranteil des Scherratentensors aufgrund der Massenbilanz (2.40), so daß die inkompressiblen Impulsbilanzgleichungen nach Einsetzen des Spannungstensors ihren vollständigen mathematischen Charakter offenbaren.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2.45}$$

Mit Hilfe der Massenbilanz (2.40) und der Produktregel kann der konvektive Term leicht umformuliert werden. Zusätzlich können für den Fall ortsunabhängiger Viskosität ν die Gradienten im Diffusionsterm ebenfalls unter Verwendung der Massenbilanz zusammengefaßt werden.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{2.46}$$

Auch die Vereinfachungen für inkompressible Strömungen erlauben keine allgemeingültige analytische Lösung des gekoppelten Gleichungssystems, so daß auf numerische Lösungsverfahren ausgewichen werden muß.

2.4 Direkte Numerische Simulation

Alle Eigenschaften turbulenter Strömungen sind mit den Bilanzgleichungen der Strömungsmechanik (2.37) – (2.39) beschrieben. Mit Hilfe numerischer Verfahren, die sich im Allgemeinen der räumlich-zeitlichen Diskretisierung des Kontinuums bedienen, können diese Gleichungen gelöst werden. Bei Verzicht auf jegliche Art von Turbulenzmodellierung müssen dabei alle turbulenten Skalen bzw. Schwankungsbewegungen räumlich und zeitlich erfaßt werden. Numerische Verfahren, die in dieser Art und Weise das vollständige Strömungsfeld – mit laminaren und turbulenten Bereichen – erfassen, werden Direkte Numerische Simulation (DNS) genannt.

Die erste erfolgreiche und veröffentlichte DNS stammt von ORSZAG & PATTERSON (1972), die das Abklingverhalten homogener isotroper Turbulenz mittels eines Spektralverfahrens bei $\mathrm{Re}_\lambda=35$ untersucht haben. Aufgrund fehlender Computerressourcen hatten in den Anfängen der DNS die untersuchten Strömungskonfiguration nur eine inhomogene Richtung und waren nicht wandgebunden. Die DNS des ebenen Kanals bei $\mathrm{Re}_\tau=180$ von KIM *et al.* (1987) gilt noch heute als das Standardbeispiel wandgebundener turbulenter Strömungen.

2.4.1 Numerische Verfahren

Grundvoraussetzung für die Verwendung eines numerischen Verfahrens bei der DNS ist die Eigenschaft, dreidimensionale und instationäre Strömungen vorhersagen zu können. Die wichtigste Anforderung ist eine möglichst genaue Vorhersage einer Strömung mit einem breiten Spektrum verschiedener Längenskalen. Einsetzbar sind prinzipiell alle gängigen Verfahren, die obige Eigenschaft und Anforderung erfüllen: Finite-Volumen-Methode (FVM), Finite-Differenzen-Methode (FDM), Finite-Elemente-Methode (FEM), (Pseudo-) Spektralverfahren, Wavelet-Methoden, Lattice-Boltzmann-Automaten, etc.

Spektralverfahren sind aufgrund ihrer hohen Genauigkeit bei der Vorhersage von Strömungsfeldern, die schnell variierenden Funktionen mit einem Großteil der Wellenzahlen im hochfrequenten Bereich entsprechen, prinzipiell zu bevorzugen. Wegen der fehlenden Möglichkeit zur Approximation komplexer Berandungen bzw. der erzwungenen Periodizität in mindestens zwei Richtungen sind sie für praxisrelevante Anwendungen jedoch unbrauchbar. Aufgrund ihrer Erhaltungseigenschaften, universellen Einsetzbarkeit bei konturangepaßten strukturierten und unstrukturierten Simulationsgittern haben vor allen die Finite-Volumen-Verfahren Vorteile. Da diese Verfahren mit größerem numerischen Fehler als Spektralverfahren behaftet sind, wird eine höhere räumliche Auflösung benötigt, um die gleiche Vorhersagequalität zu erzielen. Durch Steigerung der Ordnung des Verfahrens steigt der numerische Aufwand pro Gitterpunkt und Zeitschritt, und es treten Probleme bei der Formulierung der Randbedingungen auf.

Das Zeitschrittverfahren ist möglichst derart zu wählen, daß annähernd gleiche räumliche und zeitliche Diskretisierungsfehler erreicht werden. Da für die räumlichen Diskretisierungen in der Regel Verfahren zweiter und höherer Ordnung eingesetzt werden, sind auch Zeitschrittverfahren dieser Fehlerordnung stark verbreitet. Weil die notwendigen Zeitschritte meist die Stabilitätskriterien expliziter Verfahren erfüllen, sind aufgrund der geringen Rechenzeit pro Zeitschritt und der einfacheren numerischen Umsetzung explizite Verfahren den impliziten vorzuziehen. Häufig eingesetzte Verfahren sind das Leapfrog- (zweiter Ordnung), das Adams-Bashforth- (zweiter Ordnung) und das Mehrschritt-Runge-Kutta-Verfahren (n-ter Ordnung) (vgl. BREUER, 2002).

Bei geometriebedingten Gitterpunktanhäufungen ist es durchaus sinnvoll, auch implizite Verfahren einzusetzen, da diese stabile numerische Systeme auch für größere Zeitschritte gewährleisten. Da die Verwendung großer Zeitschritte jedoch impliziert, daß die kleinen Skalen große Fehler beinhalten können, ist bei diesem Vorgehen Vorsicht geboten. So ist der Einfluß des Zeitschrittes derart groß, daß zu große Zeitschritte zu dissipativem Charakter führen können, obwohl die räumliche Diskretisierung nicht dissipativ ist. Dennoch ist es üblich, für inkompressible DNS wandgebundener Strömungen implizite Verfahren für die viskosen Terme und explizite Verfahren für die konvektiven Terme zu verwenden (MOIN & MAHESH, 1998).

In Folge kleinster Störungen liefert jede DNS einer Strömungskonfiguration eine einzelne Realisierung der Strömung und entspricht damit dem stochastischen Charakter der Turbulenz. Eine vergleichende Bewertung verschiedener Simulationen bzw. Simulationsverfahren ist daher nur unter Verwendung von Statistiken möglich.

2.4.2 Diskretisierung

Die Auflösung aller Skalen der Bewegung in Raum und Zeit ist die Voraussetzung, damit eine Direkte Numerische Simulation die Turbulenz und damit die Physik realitätsnah vorhersagen kann. Der zu erfassende Skalenbereich ist hierbei durch die Physik vorgegeben. Die Diskretisierung bestimmt dann die Skalen, die erfaßt werden können, während das numerische Verfahren bestimmt, mit welcher Genauigkeit diese Skalen repräsentiert werden können.

Die größten aufzulösenden Skalen l_0 werden typischerweise durch physikalische Parameter wie Kanalhöhe, Grenzschichtdicke, etc. entlang inhomogener Richtungen festgelegt. Die Strömungsskale L muß groß genug sein, um die energiereichen Strukturen zu erfassen, was entlang homogener Richtungen durch die Forderung verschwindender Zweipunktkorrelationen nach der Hälfte der Länge L gewährleistet wird (BREUER, 2002). Die kleinste aufzulösende Skale ist typischerweise die Kolmogorov-Skale η, womit die Gitterabmessungen Δx_i klein genug sein müssen, um diese dissipativen Skalen zu erfassen. Ergebnisse spektraler DNS zeigen jedoch bereits sehr gute Übereinstimmung mit Experimenten, ohne daß η aufgelöst wurde. Offenbar werden erste und zweite statistische Momente richtig vorhergesagt, wenn die Auflösung ausreichend ist. um die meiste Dissipation zu erfassen. Entsprechend reicht es aus, wenn das kleinste aufzulösende Längenmaß von der Ordnung $\mathcal{O}(\eta)$ ist. So stellen MOSER & MOIN (1987) bei ihrer DNS eines gebogenen Kanals fest, daß der größte Teil der Energie bereits oberhalb von 15η dissipiert wird.

Das Verhältnis der größten Skalen l_0 zu den kleinsten Skalen η ist nach Gleichung (2.4 a) proportional zu $\mathrm{Re}^{\frac{3}{4}}$. Da die Anzahl der Gitterpunkte N_G von den kleinsten Längenmaßen abhängt und deren Auflösung in drei Raumrichtungen zu gewährleisten ist, steigt die Gitterpunktanzahl mit zunehmender Reynolds-Zahl entsprechend $N_G \sim \mathrm{Re}^{\frac{9}{4}}$. Bei wandgebundenen Strömungen müssen zusätzlich die wandnormalen Geschwindigkeitsgradienten in der dünnen viskosen Unterschicht der Wandgrenzschicht aufgelöst werden.

Eine an die lokale Ortsschrittweite Δx angepaßte Zeitschrittweite Δt wird üblicherweise unter Verwendung der Courant-Friedrichs-Lewy[23]-Zahl $\mathrm{CFL} = |u|\Delta t/\Delta x$ bestimmt, wobei damit sichergestellt wird, daß räumlich aufgelöste Schwankungen auch zeitlich erfaßbar sind. Die so errechneten Zeitschritte erfüllen in den meisten Fällen die Stabilitätskriterien expliziter Zeitschrittverfahren.

Das Zeitintervall der DNS ist proportional zur turbulenten Zeitskale der größten Skalen τ_0, während der Zeitschritt aufgrund der räumlichen Anforderungen von der Größenordnung des Zeitmaßes der kleinsten Skalen τ_η ist. Das Verhältnis beider Zeitskalen liefert dementsprechend die Größenordnung für die Anzahl der Zeitschritte, welche der Beziehung (2.4 c) folgend wiederum von der Reynolds-Zahl abhängt, $N_T \sim \mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}$.

2.4.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Die unumgängliche Verwendung endlicher Integrationsgebiete zur Strömungssimulation führt zu künstlichen Schnitten durch das Strömungsfeld. Auf einer beliebigen Fläche eines turbulenten Strömungsfeldes kann aber die einzig „richtige“ Randbedingung die Lösung selbst sein. Im Rahmen der DNS müssen aufgrund des Verzichts auf jegliches Turbulenzmodell deshalb bei Rand- und Anfangsbedingungen alle Skalenbereiche berücksichtigt werden.

Bei statistisch homogenen Richtungen, wie z. B. der lateralen Ausdehnung einer zweidimensionalen Grenzschicht, werden periodische Randbedingungen eingesetzt. Das Hauptproblem der Randbedingungsdefinition ergibt sich bei inhomogenen Richtungen am Ein- und Ausströmrand, während Wandrandbedingungen (Stokessche Haftbedingung) zumindest bei den finiten Approximationsverfahren nahezu trivial sind.

Im Falle des Ausströmrandes sind stromaufwärts laufende Störungen durch eine geeignete Approximation der Strömungsgrößen zu vermeiden. Zusätzlich wird dieser Rand idealerweise so positioniert, daß keine Rückströmung im Schnitt auftritt und die Stromlinien nahezu parallel verlaufen. Um die störungs- und reflektionsfreie Passage des Ausströmrandes zu gewährleisten, wird bei den finiten Verfahren eine konvektive Ausflußrandbedingung (FERZIGER & PERIĆ, 1999) verwendet. Die zusätzliche Beziehung folgt aus einer vereinfachten und linearisierten eindimensionalen Transportgleichung für die Strömungsgröße ϕ, mit der randnormalen Richtung n und einer mittleren Konvektionsgeschwindigkeit u_m zur Erhaltung des Massenstromes.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_m \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \tag{2.47}$$

[23] Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl: Anzahl der Zellen die pro Zeitschritt durchströmt werden; benannt nach den Mathematikern Richard Courant (1888 – 1972), Kurt Friedrichs (1901 – 1982) und Hans Lewy (1904 – 1988), die sie in ihrem Artikel COURANT, FRIEDRICHS, LEWY (1928) *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Mathematische Annalen 100, 32–74 definierten.

Eine Herausforderung bei den hochauflösenden Simulationsverfahren besteht in der Spezifikation der Einströmdaten, welche in Form von Dirichlet-Randbedingungen benötigt werden. Da bei der DNS das Spektrum der turbulenten Längenskalen direkt durch Lösung der Erhaltungsgleichungen berechnet wird, ist eine realistische, also instationäre und wirbelbehaftete, Beschreibung der Strömung am Einströmrand notwendig. Dabei müssen die Einströmdaten mindestens charakteristische Korrelationen der Geschwindigkeitskomponenten untereinander erfüllen. Nachstehend sind einige Möglichkeiten zur Generierung von Einströmdaten aufgeführt.

- Homogenität: Die Annahme der Homogenität in Strömungsrichtung führt zu periodischen Randbedingungen, so daß am Einströmrand die Daten des Ausströmrandes vorgegeben werden. Die Zweipunktkorrelation der turbulenten Schwankungen muß hierbei innerhalb der halben Länge des Integrationsgebietes nahezu auf null abfallen.

- Speichern von Zeitreihen: Simulationsdaten einer zusätzlichen hochauflösenden Simulation, z. B. einer Kanalströmung, können nach ggf. notwendiger Interpolation oder Anpassung der Grenzschichtdicke und unter Berücksichtigung der Turbulenzstruktur am Einströmrand vorgegeben werden. Um die notwendigen zusätzlichen Ressourcen (z. B. Speicherplatz) begrenzt zu halten, können die Einströmdaten sukzessiv, etwa alle zehn konvektiven Einheiten, wiederholt werden. Dies führt zu Unstetigkeiten, von denen zumindest bisher keine signifikanten negativen Einflüsse auf die Simulation bekannt sind (BREUER, 2002).

- Taylor-Hypothese: Unter Verwendung der Taylor-Hypothese $\frac{\partial}{\partial t} = -\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}$ kann ein räumliches Turbulenzfeld zur Erzeugung zeitlich variabler Turbulenzfelder benutzt werden. Es wird hierbei davon ausgegangen, daß Charakteristika zeitlicher Fluktuationen an einem festen Punkt den räumlichen Fluktuationen zu einer festen Zeit entsprechen, $u_i(x_i, t) \approx u_i(x_i - \overline{u}\Delta t, t + \Delta t)$. Indem mit der Geschwindigkeit $\overline{u}$ durch das Feld geschritten wird, und der Zeitschritt der Simulation mit den Gitterebenen über $\Delta t = \frac{\Delta x}{\overline{u}}$ verknüpft ist, lassen sich die Einströmdaten erzeugen. Da die Taylor-Hypothese unter der Bedingung $\overline{u} \gg \sqrt{\overline{u'^2}}$ gilt, hängt die Qualität der Einströmdaten von der Gültigkeit für den betrachten Strömungsfall ab.

- Zeitreihen für die Fluktuationen: Mit der in Gleichung (2.11 b) angegebenen Zerlegung des Strömungsfeldes in mittlere Bewegung $\overline{u}_i$ und überlagerte turbulente Schwankung u'_i kann die Generierung von Einströmdaten auf die Zeitreihen für die Fluktuationen beschränkt werden. Die Erzeugung physikalisch sinnvoller Fluktuationen ist noch immer Forschungsgegenstand; einige Möglichkeiten sind hier stichpunktartig genannt.
  - Zufallszahlen: Fluktuationen als „weißes Rauschen“, z. B. durch eine Gauß-Verteilung mit Vorgabe des RMS-Wertes, wobei keinerlei Zweipunktkorrelation eingehalten werden kann.
  - Selbsterzeugung: Sich einstellende räumlich-zeitlich fluktuierende Daten werden von einer Ebene stromab zum Einströmrand transferiert und angepaßt.
  - Stochastische Fluktuationen mit gegebenem Energiespektrum: Näherung aus einer statistisch stationären Strömung mit einem Übergangsbereich für die räumliche Korrelierung.

– ARMA-Modelle: Modellierung unter Verwendung von Parametern aus bekannten Autokorrelationsfunktionen, wobei die räumlichen und Kreuzkorrelationen unberücksichtigt bleiben.

– Linear Stochastic Estimation (LSE): Rekonstruktion des Geschwindigkeitsfeldes aus DNS-Zeitreihen an ausgewählten Monitorpunkten.

– Laminare Einströmdaten: Im Falle der (weit) stromab des Einströmrandes stattfindenden Transition ist die Vorgabe laminarer, also nur räumlich variabler Einströmdaten in guter Näherung möglich.

– etc.

Für die Anfangsbedingungen ist eine Unterscheidung nach dem Ziel der Simulation sinnvoll. Wenn ein statistisch stationärer Zustand von Interesse ist, spielen die Anfangsbedingungen eine untergeordnete Rolle, da sich ein von den Startwerten unabhängiger statistischer Strömungszustand einstellt. Sobald jedoch die zeitliche Entwicklung einer Strömung interessiert, sind die Anfangsbedingungen zwangsläufig entscheidend. Bei Inkompressibilität der Strömung ist beispielsweise die Einhaltung der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes (Kontinuität) zu empfehlen. Darüber hinaus sollten bei symmetrischen Strömungskonfigurationen idealerweise auch symmetrische Anfangsbedingungen gewählt werden, wobei eine gezielt gewählte Asymmetrie im Laufe der zeitlichen Strömungsentwicklung verschwinden sollte. Von speziellem Interesse ist die gezielte Anregung von Fluktuationen durch geeignete Schwankungsgrößen, deren aktueller Erforschung im Hinblick auf hybride Verfahren eine wichtige Rolle zukommt.

2.4.4 Limitierungen

Die Vergrößerung der Reynolds-Zahl führt zu einer Vergrößerung des $\kappa^{-5/3}$-Bereiches im Energiespektrum, damit zum Anstieg des Verhältnisses von größter zu kleinster Längenskale mit $\mathrm{Re}^{3/4}$ und letztlich zum mehr als quadratischen Anstieg der notwendigen Anzahl an Gitterpunkten mit $\mathrm{Re}^{9/4}$. In Verbindung mit der ebenfalls zusätzlich notwendigen Anzahl an Zeitschritten entsprechend $\mathrm{Re}^{1/2}$ besteht eine Proportionalität der zu berücksichtigenden zeitlich-räumlichen Punkte (Operationen) von $N_{OP} \sim \mathrm{Re}^{11/4}$. Die Steigerung der Reynolds-Zahl beispielsweise um den Faktor 10 führt demnach zu einer Vergrößerung von N_{OP} um mehr als den Faktor 500. Mit dieser notwendigen höheren zeitlich-räumlichen Auflösung geht ein extremer Anstieg benötigter Rechenzeit einher. Abgesehen von der Tatsache das derzeit keine Möglichkeit besteht, Simulationsgitter mit mehreren Milliarden Gitterpunkten zu handhaben, wäre das Simulationsergebnis erst in mehreren hundert Jahren verfügbar und damit nicht mehr interessant.

Die DNS verbleibt ein Forschungswerkzeug, um bessere Einblicke in die Strömung, Skalierungsgesetze und Turbulenzmodelle zu erhalten. Unübertroffen sind die Möglichkeiten der Bestimmung von Größen, die im Experiment schlecht oder gar nicht zugänglich sind. Nach dem heutigen Stand verfügbarer Computerressourcen können diese Untersuchungen aber nur sinnvoll und physikalisch exakt für Reynolds-Zahlen im Bereich 10^4 durchgeführt werden.

2.5 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Zur quantitativen Beschreibung turbulenter Strömungen werden aufgrund des stochastischen Charakters üblicherweise irgendwie geartete Statistiken benutzt. Dies wird besonders deutlich bei der Betrachtung von Turbulenzmaßen, wie im Abschnitt 2.2.7. Insbesondere für technische Anwendungen ist oftmals lediglich das statistische Mittel einer Strömung von Interesse anstelle ihres vollständigen instationären Verhaltens. Es scheint daher naheliegend, numerische Verfahren zu verwenden, die auf einer statistischen Beschreibung der Größen im Strömungsfeld basieren.

Die Zerlegung der Strömungsgrößen ϕ in einen Mittelwert $\overline{\phi}$ und einen Schwankungsanteil ϕ' geht auf REYNOLDS (1895) zurück. Für den inkompressiblen Fall entspricht diese Zerlegung den Beziehungen (2.11 a,b,c).

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \qquad \text{inkompressibel:} \quad u_i = \overline{u}_i + u_i' \qquad p = \overline{p} + p'$$

Der Mittelwert $\overline{\phi}$ eines Punktes x_i zur Zeit t ist im Allgemeinen durch eine Ensemble-Mittelung über N Momentanaufnahmen bzw. Realisierungen definiert.

$$\overline{\phi}(x_i, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x_i, t) \tag{2.48}$$

Für statistisch stationäre Strömungen ist aufgrund der anzunehmenden Ergodizität[24] turbulenter Prozesse (FIEDLER, 2003) der Ensemble-Mittelwert identisch mit dem zeitlichen Mittelwert nach Gleichung (2.12). Die Anzahl der Momentanaufnahmen N bzw. die Mittelungszeit T müssen genügend groß sein, um in beiden Fällen statistische Konvergenz zu gewährleisten.

Einsetzen der Größenzerlegung für die Geschwindigkeiten u_i und den Druck p in die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (2.40) und (2.46) und anschließende zeitliche Mittelung führt auf die inkompressible Form der sog. Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (engl. Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS). Durch die Mittelung entfallen die Mittelwerte der einzelnen Schwankungsgrößen, jedoch nicht solche mit Produkten von Schwankungsgrößen. Die Rechenregeln für Mittelwerte sind im Anhang B.1 aufgeführt.

$$\frac{\partial \overline{(\overline{u}_j + u_j')}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{(\overline{u}_i + u_i')}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{(\overline{u}_i + u_i')(\overline{u}_j + u_j')}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \overline{(\overline{p} + p')}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{(\overline{u}_i + u_i')}}{\partial x_j^2}$$

Die sich ergebenden inkompressiblen Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen haben den gleichen Charakter wie die ursprünglichen Gleichungen, beinhalten jedoch einen Zusatzterm aus der Nichtlinearität der Konvektion.

[24]Ergodizität beschreibt die Eigenschaft, daß der Mittelwert über alle Phänomene eines Zeitpunktes (Scharmittel) identisch mit dem aller Realisationen eines Einzelphänomens über einen langen Zeitraum (Zeitmittel) ist.

$$\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \tag{2.50}$$

Der turbulenzbedingte zusätzliche Term hat diffusiven Charakter und beschreibt analog zum molekülbedingten Impulstransport im diffusiven Term (räumlicher Gradient des Spannungstensors) den turbulenten Impulstransport durch Schwankungsbewegungen. Die Geschwindigkeits-Doppelkorrelation $\overline{u_i' u_j'}$ wird gewichtet mit der Dichte auch als Reynolds-Spannungstensor $\tau_{ij}^{\mathrm{turb}} = -\varrho \overline{u_i' u_j'}$ bezeichnet. Dieser ist in einer vollständig turbulenten Strömung deutlich größer als der molekulare Spannungstensor, $\tau_{ij}^{\mathrm{turb}} \gg \tau_{ij}$ (BREUER, 2002). Aufgrund der Kommutativität der Schwankungsgrößen in der Korrelation ist dieser Spannungstensor symmetrisch und führt (auch wenn nur als räumlicher Gradient) entsprechend sechs neue Unbekannte in die Impulsgleichungen ein. Anwendung der Reynolds-Mittelung auf die Energiegleichung würde zu drei weiteren Unbekannten führen, den Reynoldsschen Wärmeströmen.

2.5.1 Schließungsproblem

Die Nichtlinearität der Impulsgleichungen führt auf statistische Momente zweiter Ordnung in Form des symmetrischen Reynolds-Spannungstensors. Zur Beschreibung der drei unbekannten Geschwindigkeiten, des Druckes sowie der sechs neuen Unbekannten stehen aber nur die Massenbilanz und drei Impulsgleichungen zur Verfügung. Um das Strömungsproblem zu lösen, müssen die zusätzlichen statistischen Momente auf die ursprünglichen Strömungsgrößen zurückgeführt werden, zusätzliche Gleichungen bereitgestellt oder ein Turbulenzmodell etabliert werden. Die Tatsache, daß die erste Variante nicht algebraisch exakt realisiert werden kann und die ableitbaren Transportgleichungen für die Reynolds-Spannungskomponenten wiederum noch mehr Unbekannte (z. B. Tripelkorrelationen) beinhalten, wird allgemein als Schließungsproblem bei turbulenten Strömungen bezeichnet.

Zur Schließung des Gesamtsystems können direkt die Reynolds-Spannungen in den Impulsgleichungen durch ein Modell ersetzt werden. Dies geschieht in der Regel mit sog. Wirbelviskositätsmodellen oder auch direkt über Reynolds-Spannungsmodelle. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, die statistischen Momente aus den abzuleitenden Transportgleichungen zu bestimmen, die dann wiederum durch ein geeignetes Modell zu schließen sind.

2.5.2 Wirbelviskositätsmodellierung

Die Aufgabe eines Turbulenzmodelles für die Reynolds-gemittelten Gleichungen besteht darin, den Einfluß der durch die Mittelung entfallenden turbulenten Schwankungsbewegungen auf die mittlere Strömung zu modellieren. Der gängigste Ansatz basiert auf der Beobachtung, daß turbulente Strömungen erhöhter Diffusion unterliegen bzw. eine scheinbar stark erhöhte Viskosität aufweisen. Die Einführung einer turbulenten Viskosität oder Wirbelviskosität μ_t führt zur Wirbelviskositätsmodellierung. In Analogie zu den molekularen Spannungen nach Gleichung (2.43) wird für den Reynolds-Spannungstensor mit Hilfe der Boussinesq[25]-Hypothese (SCHLICHTING, 1968) ein Ansatz proportional zur Scherung, aus der die Turbulenz produziert wird, gewählt.

$$-\varrho\overline{u_i'u_j'} \sim \mu_t\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{u_i'u_j'} \sim -\nu_t\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.51}$$

Die fundamentalen Eigenschaften des Reynolds-Spannungstensors sind die Symmetrie des Tensors sowie die sog. Kontraktionsbedingung. Diese Bedingung basiert auf der Definition der turbulenten kinetischen Energie k nach Beziehung (2.16), wonach die Spur des Korrelationstensors durch diese ausgedrückt werden können muß.

$$\text{Kontraktion: } \overline{u_i'u_i'} = 2k \qquad \text{Symmetrie: } \overline{u_i'u_j'} = \overline{u_j'u_i'} \tag{2.52}$$

Im allgemeinen Fall kann die Wirbelviskosität einen Tensor vierter Stufe zur Beschreibung anisotroper Turbulenzeigenschaften darstellen, allerdings ist es für die meisten Modelle ausreichend, eine skalare und isotrope Wirbelviskosität zu verwenden. Insbesondere die Einhaltung von Kontraktion und Symmetrie erfordert eine skalare sowie isotrope Wirbelviskosität. Da der Geschwindigkeitsgradiententensor $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ aufgrund rotatorischer Strömungskomponenten im Allgemeinen unsymmetrisch ist, bedingt die Symmetrie der Reynolds-Spannungen eine Beschränkung der Modellierung auf den Scherratentensor S_{ij}, der nur den symmetrischen Anteil der Geschwindigkeitsgradienten darstellt. Der antimetrische Anteil, als Wirbeltensor Ω_{ij} bezeichnet, kann auf tensorieller Ebene nicht explizit verwendet werden (RUNG, 2002).

$$-\varrho\overline{u_i'u_j'} \approx 2\mu_t S_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \overline{u_i'u_j'} \approx -2\nu_t S_{ij} \quad \text{mit} \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.53}$$

Im Hinblick auf die Modellierung der Turbulenz durch zwei der wichtigsten Eigenschaften, nämlich Intensität und Struktur der Turbulenz, wird die Kontraktionsbedingung aus dem Scherratentensor abgespalten und gesondert behandelt. Durch das Abspalten des Spuranteils ergibt sich nun eine Zerlegung des Scherratentensors in einen kugelsymmetrischen und einen spurfreien deviatorischen Anteil. Der Kugelanteil wird anschließend separat mit Hilfe von k modelliert, so daß die Intensität in Form der Turbulenzenergie und die Turbulenzstruktur gesondert behandelt werden können.

$$\begin{aligned} -\varrho\overline{u_i'u_j'} &= 2\mu_t\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) \\ \tau_{ij}^{\text{turb}} &\cong \underbrace{-\frac{2}{3}k\varrho\delta_{ij}}_{Kugeltensor} + \underbrace{2\mu_t\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right)}_{symm.\ Deviator} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Die Analogie zwischen der Wirbelviskositätsmodellierung für den Reynolds-Spannungstensor (2.54) und dem molekularen Spannungstensor Newtonscher Fluide (2.43) wird an dieser Stelle deutlich. Der isotrope Anteil des Kugeltensors hat dabei eine dem Druck vergleichbare Wirkung und wird deshalb numerisch mit diesem zusammen als $\overline{P} = \overline{p} + \frac{2}{3}k\varrho$ behandelt. Für den Fall

[25] Joseph Valentin Boussinesq (1842 – 1929), französischer Mathematiker und Physiker; lieferte wichtige Beiträge zum Verständnis von Turbulenz sowie der hydrodynamischen Grenzschicht.

der inkompressiblen Strömungen ist zum einen der Scherratentensor aufgrund der Massenbilanz immer spurfrei und zum anderen wird im Allgemeinen übergegangen zur kinematischen Wirbelviskosität $\nu_t = \mu_t/\varrho$.

Einsetzen des linearen Wirbelviskositätsansatzes (2.54) in die inkompressiblen Reynolds-gemittelten Gleichungen (2.50) zeigt die Wirkungsweise dieser Modellierung auf.

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \nu_t)\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right] \tag{2.55}$$

Das Schließungsproblem der RANS-Gleichungen ist nunmehr auf die Definition der Wirbelviskosität verlagert worden. Je nach Art des Schließungsansatzes für diese werden die Turbulenzmodelle unterschieden nach algebraischen Modellen und Transportgleichungsmodellen, wobei die letzteren als Ein- oder Zweigleichungsmodelle klassifiziert werden. Mit Hilfe der Dimensionsanalyse für die Wirbelviskosität ν_t läßt sich feststellen, daß diese durch charakteristische Geschwindigkeitsmaße U_c, Längenmaße L_c oder Zeitmaße T_c beschrieben werden kann.

$$\nu_t \sim U_c L_c \sim U_c^2 T_c \sim L_c^2/T_c \tag{2.56}$$

Die Definition dieser charakteristischen Turbulenzeigenschaften bestimmt, welche Parameter zur Berechnung von μ_t bzw. ν_t verwendet werden und welche Modellklasse vorliegt. Bei den algebraischen oder Nullgleichungsmodellen wird eine explizite Berechnungsvorschrift für die Wirbelviskosität verwendet bzw. die jeweiligen zwei charakteristischen Maße algebraisch definiert; als Beispiel sei die von Prandtl[26] formulierte Mischungsweghypothese (PRANDTL, 1942) genannt. Die Klasse der Eingleichungsmodelle zeichnet sich dadurch aus, daß genau eine zusätzliche Transportgleichung zu lösen ist und i. A. eine weitere algebraische Schließungsannahme notwendig ist. So läßt sich z. B. eine Transportgleichung für die Turbulenzenergie k als U_c^2 formulieren mit algebraischer Berechnung von L_c oder T_c. Ein etabliertes Eingleichungsmodell ist das auch in dieser Arbeit benutzte Spalart-Allmaras-Modell (SPALART & ALLMARAS, 1992), bei dem eine Transportgleichung für die modifizierte Wirbelviskosität $\tilde{\nu}_t$ gelöst wird.

Modell	U_c^2	T_c	$\nu_t = c_\mu U_c^2 T_c$	Referenz
k-ε	k	$\frac{k}{\varepsilon}$	$c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$	JONES & LAUNDER (1972)
k-ω	k	$\frac{1}{c_\mu \omega}$	$\frac{k}{\omega}$	WILCOX (1988)
k-τ	k	τ	$c_\mu k \tau$	SPEZIALE *et al.* (1992)
k-l	k	$\frac{l}{c_\mu \sqrt{k}}$	$\sqrt{k} l$	ROTTA (1968)

***Tab.** 2.3:* Zusammenfassung der Standard-Zweigleichungsmodelle für RANS

Bei den Zweigleichungsmodellen wird zur Beschreibung von Intensität und Struktur der Turbulenz jeweils eine zusätzliche Transportgleichung formuliert. In der Regel wird für die Intensität die turbulente kinetische Energie k (auch in Potenzen) verwendet. Der zweite Parameter ergibt

[26] Ludwig Prandtl (1875 – 1953), deutscher Physiker; war ein bedeutender Grundlagenforscher der Strömungsmechanik und entwickelte die Grenzschichttheorie.

sich im Allgemeinen aus dem Modellierungsansatz sowie der Dimensionsanalyse und unterscheidet die Standardmodelle. Neben anderen Ansätzen haben sich besonders die auf der Dissipationsrate ε bzw. der spezifischen Dissipationsrate ω basierenden k-ε Modelle und k-ω Modelle aufgrund ihrer Vielseitigkeit durchgesetzt. Einen Überblick über die wichtigsten Modelle, die Modellkonstanten und deren Kalibrierung an Referenztestfällen wie auch die Überführung einzelner Modelle ineinander findet sich bei RUNG (2002). In Tabelle 2.3 sind die Standard-Zweigleichungsmodelle kurz zusammengefaßt.

Um die Proportionalität zwischen der Wirbelviskosität und ihren charakteristischen Größen nach (2.56) in eine Berechnungsvorschrift zu überführen ist eine Konstante einzuführen. Diese als Anisotropieparameter c_μ bezeichnete Konstante wird in der Regel aus dem Gleichgewichtsbereich einer Wandgrenzschicht bestimmt RUNG (2000) und wurde u. a. von KIM *et al.* (1987) zu 0.09 kalibriert.

Die Modellierung der zusätzlichen Transportgleichungen sei hier ausgespart, da sie nicht relevant für die Diskussion ist. Die in dieser Arbeit verwendeten Turbulenzmodelle – das SA-Modell und das LLR k-ω Modell – sind im Anhang B.2 aufgeführt.

2.5.3 Anisotropie der Turbulenz

Der Reynolds-Spannungstensor entsprechend der Wirbelzähigkeitsmodellierung in der Definition (2.54) erlaubt wie bereits erwähnt die gesonderte Modellierung von Turbulenzintensität und -struktur. Die Einführung eines Anisotropietensors b_{ij} der Reynolds-Spannungen erlaubt nicht nur ein besseres Verständnis, sondern auch, die Struktureigenschaften der Turbulenz unabhängig, weil normiert und spurfrei, von der Intensität zu betrachten.

$$\tau_{ij}^{\mathrm{turb}} = -\varrho\overline{u_i'u_j'} = -2k\varrho\left(b_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \tag{2.57}$$

Mit der Beziehung (2.57) erfolgt die Aufteilung der Reynolds-Spannungen in Intensität (Energie) pro Raumrichtung $\frac{2}{3}k$ und intensitätsbereinigte Turbulenzstruktur b_{ij}.

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i'u_j'}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \approx -\frac{\nu_t}{k}\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{2.58}$$

Der Anisotropietensor kann dazu benutzt werden, den lokalen Turbulenzzustand entsprechend der Struktur der Schwankungsgrößen zu charakterisieren. In der Art können z. B. Gebiete isotroper Turbulenz, verstärkter Scherung bzw. Turbulenzquellgebiete identifiziert werden. Diese Methodik ist nicht auf RANS beschränkt, sondern setzt im Gegenteil voraus, daß das Simulationsverfahren überhaupt fähig ist anisotrope Eigenschaften der Turbulenz zu erfassen (Anhang A.2).

Einen Anhaltspunkt für den Anisotropiegrad der lokalen Strömung liefert z. B. das Produkt aus skalarem Scherratenparameter $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ und dem charakteristischen Zeitmaß T_c. Da dieses Produkt das Verhältnis isotroper zu anisotroper Zeitmaße beschreibt, muß bei vernachlässigbarer Anisotropie $ST_c \ll 1$ gelten (RUNG, 2000). Im Umkehrschluß kann darüber die Güte der linearen isotropen Modellierung beurteilt werden.

Für die Konstruktion eines anisotropen Wirbelviskositätsmodells wird typischerweise ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen den Reynolds-Spannungen und den Scherraten formuliert. Dazu ist es üblich, Invarianten der Scherraten und auch den Wirbeltensor hinzuzunehmen. Eine umfassende Übersicht über diese, hier nicht verwendeten Modelle, findet sich bei RUNG (2000).

2.5.4 Unsteady RANS (U-RANS)

Im ursprünglichen Sinne erfolgt die Reynolds-Mittelung der Strömungsgrößen über das gesamte Spektrum der turbulenten Schwankungen, so daß als Ergebnis der gemittelten Gleichungen ein stationäres Strömungsfeld vorliegt. Da jedoch ein instationärer Term in den Reynolds-Gleichungen enthalten ist, sind zeitliche Änderungen dieser Hauptströmung durchaus zulässig. Die Mittelung nach (2.48) erfolgt in diesem Fall nur über einen zusammenhängenden Teil der Momentanaufnahmen, so daß sich langsame bzw. langwellige Hauptströmungsänderungen ergeben. Es ist daher bei instationären Simulationen üblich, die Aufteilung in Mittelwert und Schwankungsgröße nach (2.11) als eine Aufteilung in langwellige und kurzwellige Strömungsvorgänge zu verstehen. Insbesondere für die Auswertung ist es sinnvoll zu verdeutlichen, daß diese Zerlegung den Verbleib eines transienten Terms im Mittelwert bedeutet. Entsprechend ist im Rahmen der instationären RANS (engl. Unsteady RANS, U-RANS) eine Aufteilung in Mittelwert $\overline{\phi}$, aufgelösten Anteil $\widetilde{\phi}$ und zu modellierende Schwankungsgröße ϕ' sinnvoll.

$$\phi = \overline{\phi} + \widetilde{\phi} + \phi' \tag{2.59}$$

Die Trennung der aufgelösten Anteile $\widetilde{\phi}$ und der zu modellierenden Anteile ϕ' setzt die spektrale Trennbarkeit dieser beiden Strömungsanteile, z. B. in langwellig und kurzwellig oder breitbandig und harmonisch, voraus, was nicht in jeder Strömung möglich ist (RUNG, 2000). Die Forderung nach einer spektralen Lücke (zur Unterscheidung von langwellig und kurzwellig) führt u. a. zu einer unteren Schranke für die Zeitschrittgröße, so daß modellierte Anteile nicht simuliert werden. Das Nichteinhalten der spektralen Lücke muß jedoch nicht zwangsläufig zu schlechten Ergebnissen führen, da die Numerik mitunter die dominierendere Rolle spielt (siehe dazu BUNGE, 2004).

2.5.5 Diskretisierung und Numerische Verfahren

Einschränkungen bei der Auswahl des grundlegenden Diskretisierungsverfahrens bestehen bei RANS fast nicht. Am häufigsten werden auch hier die Finite-Verfahren FVM und FDM eingesetzt. Auch für die räumliche Diskretisierung eines Strömungsproblems zur Simulation mit RANS gibt es wenige Restriktionen. Bei wandgebundenen Strömungen ist eine dem Turbulenzmodell angepaßte wandnormale Auflösung zu gewährleisten, die je nach wandnaher Modellierung den ersten Gitterpunkt in der zähen Unterschicht („low-Reynolds“) oder im logarithmischen Bereich („high-Reynolds“) postiert. Die Aufweitung des Gitters in der wandnormalen Richtung sollte moderat (Faktor $1.1 \ldots 1.3$) sein, allerdings wird üblicherweise der Übergang ins Fernfeld mit relativ wenigen Punkten vollzogen. Die wandtangentialen Auflösungen sind im Grunde nur durch den gewünschten Grad der Detailerfassung oder das numerische Verfahren limitiert. Im Allgemeinen finden sich bei typischen RANS-Gitternetzen in Wandnähe Zellen, deren wandnormale Ausdehnung mehrere Größenordnungen kleiner ist als in den tangentialen Richtungen. Die zeitliche Diskretisierung wird oft angepaßt für die aufzulösenden Frequenzen – selten ohne Berücksichtigung der möglichen spektralen Überlappung.

Eine geringe räumliche Auflösung führt in den meisten Gebieten zu lokal hohen Zell-Reynolds-Zahlen. Das zusätzliche Vorhandensein stark unterschiedlicher Gitterweiten resultiert dann auch noch in stark unterschiedlichen Koeffizientenanteilen. Als Folge können bei der Verwendung wenig dissipativer Diskretisierungsschemata numerische Instabilitäten auftreten und die Lösung bzw. deren Konvergenz verhindern. Deshalb werden für RANS aufwindbasierte, idealerweise auch implizite Konvektionsschemata benötigt, die entscheidend zur Stabilisierung der Simulation beitragen. Gerade auch die zeitliche Approximation muß fast ausschließlich auf implizite Zeitschrittverfahren zurückgreifen, um Stabilitätskriterien expliziter Verfahren nicht zu verletzten.

2.5.6 Rand- und Anfangsbedingungen

Rand- und Anfangsbedingungen für Geschwindigkeits- und Druckfeld sind bei RANS-Simulationen von untergeordneter Rolle. Die Randbedingungen sind zwangsläufig abhängig vom Strömungsproblem, während die Anfangsbedingungen das Finden der Strömungslösung vereinfachen und beschleunigen können. Besonders wichtig für die Turbulenzmodellierung ist zumindest die Vorgabe von einströmenden Turbulenzgrößen. Im Rahmen der Wirbelviskositätsmodellierung ist der Produktionsterm in den Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen direkt proportional zur Wirbelviskosität ν_t, welche wiederum über die Turbulenzgrößen berechnet wird (vgl. Tabelle 2.3). Die fehlende Vorbelegung von null verschiedener turbulenter Transportgrößen hat aufgrund deaktivierter Produktion laminaren Strömungscharakter zur Folge. Eine derart reduzierte Diffusion kann auch in numerischen Instabilitäten enden.

Eine Schließung der Turbulenzgleichungen ist an allen physikalischen Rändern notwendig, wobei nicht immer eine Nullgradientenrandbedingung oder explizites Nullsetzen ausreichend ist. Während Letzteres für die Turbulenzintensität (meistens k) genügt, existieren standardisierte wandnahe Abschätzungen für die Turbulenzstruktur, z. B. beschrieben durch ε und ω, die auf Basis des logarithmischen Wandgesetzes, der Geschwindigkeit im wandnächsten Punkt und dessen wandnormalen Abstand entsprechende Randwerte berechnen lassen (siehe dazu z. B. SCHATZ, 2003). Eine Abschätzung einströmender Turbulenzgrößen ist im Abschnitt 6.5.5 angegeben.

2.5.7 Limitierungen

Im Gegensatz zur DNS, bei der alle Skalen simuliert werden, müssen im Rahmen der RANS alle turbulenten Skalen modelliert werden. Auch wenn für U-RANS großskalige Schwankungen möglicherweise simuliert werden, gilt dies vor allem für die industriell weit verbreiteten stationären RANS-Simulationen. Die Unterschiedlichkeit großer und kleiner Skalen und die

Folgen für die Modellierung wurden bereits in Tabelle 2.2 angesprochen. Es ist daher nicht verwunderlich, daß eine lineare und isotrope Wirbelzähigskeitsmodellierung, die sich industriell etabliert hat, eine Reihe starker konzeptioneller Defizite aufweist. Zu diesen gehören vor allem Anisotropie, Stromlinienkrümmung, Prallstrahleffekte, aber auch das mögliche Auftreten negativer Normalspannungen (RUNG, 2002). Bis auf wenige Spezialanwendungen ist auch die Vorhersage von Transition nur eingeschränkt möglich.

Wie bereits im Abschnitt 2.5.3 angedeutet, kann die Turbulenzmodellierung durch Hinzunahme weiterer Potenzen von S_{ij} oder auch Ω_{ij} zur Erfassung anisotroper Effekte, die typisch für Scherströmungen sind, verbessert werden. Die Limitierung von RANS verringert sich mit ansteigender Darstellbarkeit fundamentaler Strömungszustände des benutzten Turbulenzmodells. Fragwürdig bleibt jedoch weiterhin die Mittelung über das gesamte turbulente Spektrum, sowie die bei instationären Simulationen oft auftretende Zeitskalenüberlappung. Letztere führt zur Vermischung von bzw. Mehrfachberücksichtigung durch Modell und Simulation turbulenter Skalenbereiche. Abschließend muß außerdem konstatiert werden, daß übliche Turbulenzmodelle relativ komplex sind und über eine Reihe zu kalibrierender Parameter / Konstanten verfügen. Die Kalibrierung ist oftmals nicht unabhängig vom Strömungslöser und der verwendeten Diskretisierung. So ist es nicht verwunderlich, daß Gitterkonvergenzstudien speziell mit U-RANS nicht erfolgreich sind, da die Kalibrierung den für industrielle Belange angepaßten Gültigkeitsbereich verläßt.

2.6 Large-Eddy Simulation

Die Qualität von Simulationen turbulenter Strömungen steigt mit der physikalisch korrekten Vorhersage. Im Rahmen der DNS kann durch Auflösung aller Skalen aber unter extensivem Einsatz von Rechenkapazität die Physik realistisch wiedergegeben werden. Bei RANS-Simulationen ist aufgrund der Modellierung des gesamten turbulenten Spektrums lediglich eine ingenieurtechnisch ausreichende Vorhersage zu realisieren. Bei moderater Reynolds-Zahl stellt die Grobstruktursimulation (engl. Large-Eddy Simulation, LES) einen industriell zwar wenig verwendeten, aber dennoch akzeptablen Kompromiß zwischen Vorhersagequalität und Ressourceneinsatz dar. Die LES basiert auf der unterschiedlichen Behandlung von großen und kleinen Skalen. Da die großen Skalen ganz besonders von der Strömungskonfiguration abhängen, werden diese turbulenten Grobstrukturen und ihre räumlich-zeitliche Entwicklung durch Lösung der Grundgleichungen direkt berechnet. Die durch zunehmende Isotropie und Universalität gekennzeichneten kleinen Skalen werden als turbulente Feinstruktur durch ein Modell approximiert. Die Limitierung auf kleine Reynolds-Zahlen (im Falle von DNS) als Folge der Aufweitung des Skalenspektrums schwindet bei der LES. Dabei beschränkt sich die Modellierung auf den Anteil des Turbulenzspektrums, der aufgrund der Eigenschaften kleinskaliger Turbulenz einfacher zu beschreiben ist. Dahingegen wird der Teil des Spektrums, der stark von Geometrie und Randbedingungen abhängt, als Grobstrukturfeld direkt berechnet, was die genaueste Möglichkeit darstellt (BREUER, 2002).

Die Grundidee von LES wurde von Meteorologen in den 1960er Jahren entwickelt, um ein globales Modell zu Wettervorhersage aufzustellen. Die erste dreidimensionale Simulation wurde von SMAGORINSKY (1963) durchgeführt, während in der Folge lediglich verschiedene Modelle entwickelt wurden. Als erste Ingenieuranwendung simuliert DEARDORFF (1970) die turbulente Kanalströmung bei hoher Reynolds-Zahl. Die weitere Evaluierung und Entwicklung von Feinstrukturmodellen und wandnaher Modellierung diente hiernach dazu, das Verständnis turbulenter Strömungen zu verbessern und die LES immer höherer Reynolds-Zahlen zu ermöglichen.

2.6.1 Konzept und Anforderungen

Bei niedrigen Wellenzahlen hängt das Energiespektrum stark vom untersuchten Strömungsproblem und der Reynolds-Zahl ab. Bei hohen Wellenzahlen hingegen laufen die Energiespektren zusammen und sind damit nahezu unabhängig vom Strömungsproblem und der Reynolds-Zahl. Diese Eigenschaften dienen als Startpunkt für die Zerlegung des Strömungsfeldes in zu simulierende Grobstruktur und zu modellierende Feinstruktur. Mit Hilfe eines Modells wird der Einfluß der nicht aufgelösten, kleinskaligen Turbulenz auf das Grobstrukturfeld berücksichtigt, wobei der wichtigste Effekt die Energiedissipation in den kleinen Skalen ist (Abbildung 2.7).

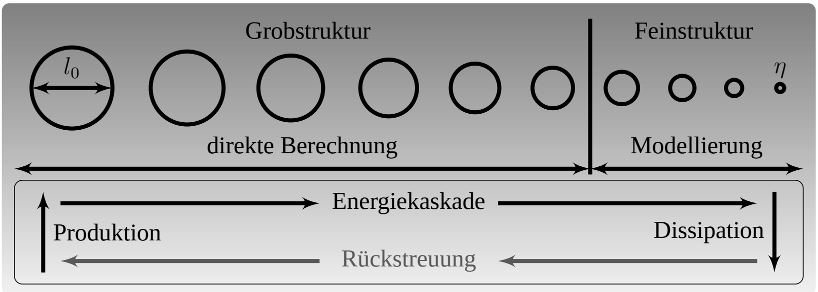


Abb. *2.7:* Konzept der Large-Eddy Simulation

Um die energietragenden und dissipativen Skalen klar separieren zu können, ist idealerweise ein deutliche Ausprägung des Inertialbereiches Voraussetzung. Der Inertialbereich ist i. A. nur bei hohen Reynolds-Zahlen ausgeprägt, und seine Breite steigt mit der Reynolds-Zahl an. Nun erfolgt die Skalentrennung klassischerweise derart, daß die kleinsten Grobstrukturskalen zum Inertialbereich gehören. Bei sehr großen Reynolds-Zahlen führt diese Anforderung wiederum schnell zu nicht realisierbaren Auflösungen. Aus diesem Grund wird die Trennung alternativ so gewählt, daß der größte Teil ($80\% - 90\%$) der turbulenten kinetischen Energie im Grobstrukturfeld enthalten ist und der Hauptteil der viskosen Dissipation in der Feinstruktur modelliert wird (FRÖHLICH, 2006).

2.6.2 Filterung und Filtertypen

Um aus den vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen die LES-Grundgleichungen, welche nur das Grobstrukturfeld charakterisieren, abzuleiten, existieren zwei unterschiedliche Ansätze: der

Deardorff-Schumann-Ansatz und der Filterungsansatz (BREUER, 2002). In der vorliegenden Arbeit wird sich auf den Filterungsansatz beschränkt, da dieser im Rahmen der CFD als gängigster LES-Ansatz etabliert ist.

Beim Filterungsansatz wird als erstes eine formale Zerlegung jeder Strömungsgröße ϕ in Grobstrukturanteil $\widetilde{\phi}$ und Feinstrukturkomponente ϕ' angenommen.

$$\phi(x_i,t) = \widetilde{\phi}(x_i,t) + \phi'(x_i,t) \tag{2.60}$$

Die Grobstrukturvariable ist entsprechend der Idee, einzelne Teile des Turbulenzspektrums zu separieren, über eine Filteroperation mit der Filterfunktion G definiert (LEONARD, 1974).

$$\widetilde{\phi}(x_i,t) = \int_V G(x_i,x_i';\Delta)\,\phi(x_i',t)\,\mathrm{d}V' \tag{2.61}$$

Die Filterfunktion ist dabei so normiert, daß die Erhaltungseigenschaften des numerischen Verfahrens gewährleistet werden.

$$\int_V G(x_i,x_i';\Delta)\,\mathrm{d}V' = 1 \tag{2.62}$$

Die Filterfunktion $G(x_i,x_i';\Delta)$ hat eine charakteristische Filterweite Δ und nimmt für Koordinaten $x_i' \to x_i$ große Werte an. Die Integration erfolgt über das gesamte Strömungsgebiet mit dem Volumen V'. In der Art werden große energietragende Wirbelstrukturen (Grobstrukturen) mit einem Netz der Maschenweite Δ „eingefangen“, während die kleinen Wirbel (Feinstrukturen) durch das Netz „fallen“.

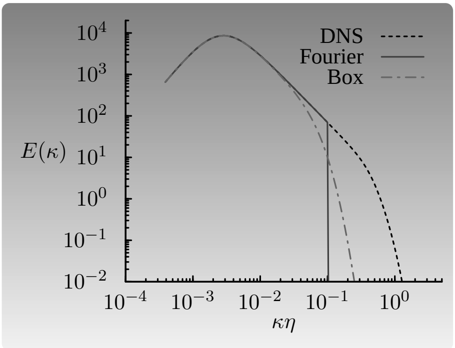
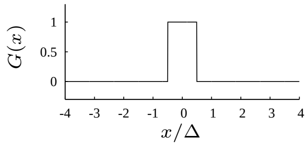
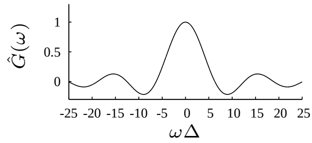
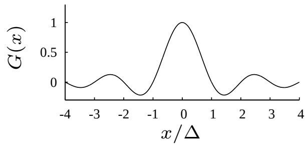
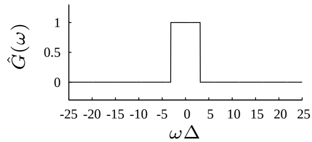


***Abb.** 2.8:* Wirkungsweise von Box- und Fourier-Filter auf das Energiespektrum

Als typische Filterfunktionen werden in den meisten Fällen „Box“-, „Fourier“- oder „Gauß“-Filter eingesetzt. Der Box-Filter, auch als „Top-Hat“-Filter bezeichnet, führt zur Integration der Strömungsgröße ϕ im Bereich Δ. Diese Mittelwertbildung entspricht einer scharfen Trennung der turbulenten Skalen im physikalischen Raum, wobei die Mehrfachanwendung zur sukzessiven Eliminierung der kleinsten Skalen führt. Beim Fourier-Filter oder „Cut-Off“-Filter werden Frequenzanteile oberhalb einer Grenzwellenzahl (Cut-Off-Wellenzahl) abgeschnitten. Dieser Filter entspricht einer scharfen Trennung im Wellenraum, und die Mehrfachanwendung verändert die gefilterte Größe nicht. Die Definitionen und Darstellungen der Filterfunktionen für Box- und Fourier-Filter sind in Tabelle 2.4 sowohl für physikalischen als auch Fourier-Raum zusammengestellt. Ihre Wirkungsweise auf das Frequenzspektrum bzw. ihre Anwendung im Wellenraum ist in Abbildung 2.8 skizziert.

Filtertyp	Physikalischer Raum	Fourier-Raum
Box-Filter	$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{für } \lvert x \rvert \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\hat{G}(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}$
		
Fourier-Filter	$G(x) = \frac{1}{\Delta} \frac{\sin \frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}$	$\hat{G}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lvert \omega \rvert \leq \frac{\pi}{\Delta} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
		

Tab. *2.4:* Definitionen von Box- und Fourier-Filter

Um den Modelleinfluß zu minimieren, ist die Filterweite Δ idealerweise möglichst klein zu wählen, wobei dann auch die direkte Berechnung kleiner turbulenter Längenskalen ermöglicht wird. Da die kleinsten vom Gitter noch erfaßten Längenskalen großen numerischen Fehlern unterworfen sind, sollte die Filterweite allerdings deutlich größer als die Gitterweite h sein, um eine Trennung von Physik und verwendetem numerischen Verfahren zu erreichen. Eine Vergrößerung oder Verringerung der Filterweite hat sehr starken Einfluß auf den notwendigen numerischem Aufwand aufgrund der räumlichen Dreidimensionalität. Als Kompromiß werden in der Praxis häufig Filterweiten im Bereich $h \leq \Delta \leq 2h$ verwendet (BREUER, 2002). Für den Grenzfall verschwindend kleiner Filterweite strebt die Grobstrukturvariable gegen die ursprüngliche Strömungsgröße.

Bei der Verwendung von Finite-Volumen- oder Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung der notwendigen Erhaltungsgleichungen werden alle Strömungsgrößen zellweise konstant vorausgesetzt (FERZIGER & PERIĆ, 1999). Die explizite Anwendung eines Box-Filter mit einer Filterweite identisch der Gitterweite $\Delta = h$ ändert die Strömungsgrößen nicht, so daß die explizite Filterung obsolet ist. In diesem Fall ist die Filterung *implizit* durch das numerische Verfahren und die Filterweite durch die Gitterweite vorgegeben. Inbesondere die einfache Anwendbarkeit bei krummlinigen, körperangepaßten Gittern führt zum häufigen Einsatz dieser impliziten Filterung, obwohl numerisches Verfahren und Physik gekoppelt sind (BREUER, 2002).

2.6.3 Die LES-Grundgleichungen

Bei der formalen Filterung der inkompressiblen Massenbilanz (2.40) und Impulsbilanz (2.46) werden Differentiation und Filteroperation vertauscht, $\widetilde{\partial \phi} = \partial \widetilde{\phi}$. Der hierbei zusätzlich verursachte Kommutationsfehler ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta^2)$ (GHOSAL & MOIN, 1995) und kann bei impliziter Filterung im Rahmen des in dieser Arbeit verwendeten Verfahrens mit $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ vernachlässigt werden.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \\
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{u_i u_j}) &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial x_j^2}
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Der konvektive Term der gefilterten Impulsbilanz $\widetilde{u_i u_j}$ kann nicht direkt berechnet werden. An dieser Stelle werden die zu modellierenden Feinstrukturanteile in das System eingebracht. Die Addition von ‚null' in diesem Term der Art $\widetilde{u_i u_j} = \widetilde{u_i u_j} + \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j$ erlaubt eine Umformulierung der Impulsgleichung.

$$
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j) = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial x_j x_j} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau_{ij}^{sgs}}{\partial x_j}
\tag{2.64}
$$

Die neue Größe $\tau_{ij}^{sgs} = \varrho(\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j)$ auf der rechten Seite wird als Feinstrukturspannungstensor (engl. subgrid scale stress tensor, sgs) bezeichnet. Dieser Spannungstensor ist im Rahmen einer LES zu modellieren, um den Einfluß der vom Gitter nicht aufgelösten Feinstruktur auf den Grobstrukturanteil zu berücksichtigen.

2.6.4 Der Feinstrukturspannungstensor

Anstatt der oben angegebenen Berechnungsvorschrift für den Spannungstensor τ_{ij}^{sgs} kann eine weitere Darstellung formuliert werden, die besser zu interpretieren ist. Zu diesem Zweck wird in den gefilterten konvektiven Term $\widetilde{u_i u_j}$ die Zerlegung für die Geschwindigkeiten $u_i = \widetilde{u}_i + u_i'$ eingesetzt und umgeformt. Aufgrund der Rechenregeln für die Filterung (siehe Anhang C.1) bleiben dabei i. A. alle Einzelterme erhalten.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{u_i u_j} &= \widetilde{(\widetilde{u}_i + u_i')(\widetilde{u}_j + u_j')} \\
&= \widetilde{\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j} + \widetilde{\widetilde{u}_i u_j'} + \widetilde{\widetilde{u}_j u_i'} + \widetilde{u_j' u_i'} \\
&= \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j + \underbrace{\underbrace{\widetilde{\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j} - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j}_{L_{ij}} + \underbrace{\widetilde{\widetilde{u}_i u_j'} + \widetilde{\widetilde{u}_j u_i'}}_{C_{ij}} + \underbrace{\widetilde{u_j' u_i'}}_{R_{ij}}}_{\tau_{ij}^{sgs}}
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

Nach dem Ausmultiplizieren läßt sich in Gleichung (2.65) eine Zerlegung des Spannungstensors in Leonard-Spannungen L_{ij}, Kreuz-Spannungen C_{ij} und Reynolds-Spannungen R_{ij} vornehmen[27]. Die einzelnen Anteile von $\tau_{ij}^{sgs} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$ lassen sich aufgrund der beteiligten Größen (Grob- und/oder Feinstruktur) hinsichtlich ihrer Bedeutung und damit bezüglich der Modellierung einordnen (vgl. BREUER, 2002):

[27] In der Herleitung von Gleichung (2.65) ist die Dichte ϱ aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht enthalten, so daß eigentlich L_{ij}/ϱ, C_{ij}/ϱ, R_{ij}/ϱ und τ_{ij}^{sgs}/ϱ notiert sind.

- Leonard-Spannungen $L_{ij} = \varrho(\widetilde{\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j} - \widetilde{u}_i\widetilde{u}_j)$
  Dieser Spannungsterm beinhaltet nur Grobstrukturgrößen und kann bei expliziter Filterung direkt berechnet werden, während bei impliziter Filterung eine Näherungslösung aus einer Taylor-Reihenentwicklung existiert. Beschrieben wird die Interaktion zwischen Turbulenzstrukturen des Grobstrukturfeldes, wobei kleinskalige Turbulenz produziert wird. Weil der Leonard-Spannungsanteil von der Größenordnung $\mathcal{O}(\Delta^2)$ ist, wird er bei Verwendung eines numerischen Verfahrens zweiter Ordnung sinnvollerweise vernachlässigt, da sonst mitunter unphysikalischer Energietransfer auftreten kann.

- Kreuz-Spannungen $C_{ij} = \varrho(\widetilde{\widetilde{u}_i u'_j} + \widetilde{\widetilde{u}_j u'_i})$
  Dieser Spannungsterm repräsentiert die Interaktionen zwischen Turbulenzstrukturen der willkürlich getrennten Grob- und Feinstrukturfelder. Da in der Bestimmungsgleichung nicht berechenbare Feinstrukturgrößen enthalten sind, kann dieser Term lediglich modelliert werden. Beschrieben wird der Energietransfer zwischen Grob- und Feinstrukturen, wobei im Mittel die Energie in Richtung Feinstruktur transferiert wird.

- Feinstruktur-Reynolds-Spannungen $R_{ij} = \varrho(\widetilde{u'_i u'_j})$
  In Analogie zu den Leonard-Spannungen beschreibt dieser Spannungsterm die Wechselwirkung von Turbulenzstrukturen im nicht aufgelösten Feinstrukturfeld, wobei großskalige Turbulenz produziert wird. Aufgrund der Definition ausschließlich über Feinstrukturgrößen ist dieser Term zu modellieren.

Eine der fundamentalen Symmetrieeigenschaften (OBERLACK, 2000) der Bilanzgleichungen für Masse und Impuls ist die Unabhängigkeit vom Bezugssystem (Galilei[28]-Invarianz). Da die Einzelterme für L_{ij} und C_{ij} nicht Galilei-invariant sind, sondern nur deren Summe $L_{ij} + C_{ij}$, würde eine unabhängige Behandlung beider Terme, z. B. direkte Berechnung von L_{ij} und Modellierung von C_{ij}, die Eigenschaften des Gesamtsystems verletzen. Die Definition modifizierter Größen mit Galilei-Invarianz aller Einzelterme stammt von GERMANO (1986).

$$\begin{aligned}
L^*_{ij} &= \varrho(\widetilde{\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j} - \widetilde{\widetilde{u}}_i\widetilde{\widetilde{u}}_j) \\
C^*_{ij} &= \varrho(\widetilde{\widetilde{u}_i u'_j} + \widetilde{\widetilde{u}_j u'_i} - \widetilde{\widetilde{u}}_i\widetilde{u}'_j + \widetilde{\widetilde{u}}_j\widetilde{u}'_i) \\
R^*_{ij} &= \varrho(\widetilde{u'_i u'_j} + \widetilde{u}'_i\widetilde{u}'_j)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Die Definition dieser Größen stellt außerdem sicher, daß die ursprünglichen Spannungsanteile in ihrer Gesamtheit nicht verändert werden.

$$\tau^*_{ij} = L^*_{ij} + C^*_{ij} + R^*_{ij} \equiv \tau_{ij} \qquad L^*_{ij} + C^*_{ij} = L_{ij} + C_{ij} \qquad R^*_{ij} = R_{ij}$$

2.6.5 Feinstrukturmodellierung

Analog zu den RANS-Gleichungen existiert das Schließungsproblem, wie im Abschnitt 2.5.1 beschrieben, auch bei den LES-Gleichungen. Deshalb wird üblicherweise die Schließung der

[28]Galileo Galilei (1564 – 1642), italienischer Mathematiker, Physiker und Astronom; herausragender Naturwissenschaftler mit zahlreichen revolutionären Entdeckungen.

Erhaltungsgleichungen mit Hilfe eines Feinstrukturmodells vollzogen. Dabei muß der Einfluß der nicht aufgelösten Feinstruktur auf die simulierte Grobstruktur und insbesondere der Energietransfer zwischen diesen Skalen in der richtigen Größenordnung modelliert werden. Da die Energiekaskade künstlich beschnitten wird, sollte das Feinstrukturmodell idealerweise die Fortsetzung, also den richtigen Energieentzug gewährleisten.

Die Klassifizierung der Feinstrukturmodelle nach Null-, Ein- oder Zweigleichungsmodellen ist identisch mit den Turbulenzmodellen bei RANS. Bei LES (wie auch bei RANS) gibt es eine Reihe von Modellen, deren Einordnung in diese Klassen schwer fällt, die aber aufgrund ihrer Wichtigkeit genannt werden müssen. Hierzu zählen die Ähnlichkeitsmodelle z. B. von BARDINA *et al.* (1980), das dynamische Modell nach GERMANO *et al.* (1991) wie auch das Approximate-Deconvolution-Modell (ADM) nach STOLZ & ADAMS (1999).

Die Wirbelviskositätsmodellierung wie im Abschnitt 2.5.2 bei RANS erläutert, wird bei LES ebenfalls meistens als Schließungsansatz verwendet. Für die Bestimmung der Wirbelviskosität oder Feinstrukturviskosität ν_{sgs} wird allerdings nur das Geschwindigkeitsmaß benötigt, weil das Längenmaß in der Regel durch die Filterweite Δ vorgegeben ist. Das Geschwindigkeitsmaß wird analytisch wie beispielsweise beim Modell von SMAGORINSKY (1963) oder mittels einer Transportgleichung für die turbulente Feinstrukturenergie k_{sgs} bestimmt.

Im Rahmen der LES wurde in dieser Arbeit ausschließlich das Standard-Smagorinsky-Modell verwendet. Die Definition dieses Modells ist im Anhang C.2 angegeben.

2.6.6 Numerische Verfahren

Die Strömungsvorhersage mit LES liefert ein mit zunehmender Reynolds-Zahl ständig breiter werdendes Spektrum verschiedener (turbulenter) Skalen. Nahezu alle bekannten numerischen Approximationsmethoden wurden bereits bei LES-Berechnungen eingesetzt, wobei aufgrund der herausragenden Erhaltungseigenschaften und der einfachen Formulierung für beliebige Rechennetze die FVM einer der häufigsten Vertreter ist (BREUER, 2002).

Die Approximation von Gradienten und anderen Terme mittels zentralen Differenzenapproximationen gerader Ordnung ist Grundvoraussetzung bei der hochauflösenden Turbulenzsimulation. Die Approximationen ungerader Ordnung enthalten Abbruchfehler mit dissipativ wirkenden Termen; dies gilt besonders für aufwindbasierte Konvektionsschemata. Zur Auflösung des breiten Skalenbereiches ist diese Dissipation inakzeptabel, weil das numerische Verfahren die physikalische Modellierung überlagern kann und der führende Abbruchfehler des Verfahrens dann den Energieentzug der Strömung zu stark bestimmt. Dieser Effekt kann wiederum gezielt bei der impliziten Feinstrukturmodellierung ausgenutzt werden.

Im Vergleich zu spektralen Approximationstechniken haben auch die zentralen Differenzenapproximationen gerader Ordnung den Nachteil, daß nur der Teil des Spektrum kleiner bis mittlerer Wellenlänge gut repräsentiert wird. Die Genauigkeit bei den hochfrequenten Anteilen, die einen mehr als erheblichen Teil des turbulenten Spektrums einnehmen, fällt mit steigender Wellenzahl sehr stark ab. Abhilfe können hier nur Verfahren erhöhter Ordnung oder starke Gitterverfeinerungen schaffen. Einen umfassenden Überblick über den Einfluß der numerischen Verfahren und die Wirkung ihrer Abbruchfehler gibt BREUER (2002). Der Autor weist auch auf den schnell variierenden Charakter turbulenter Strömungsfelder hin, der dazu führt, daß der hochfrequente Bereich des Spektrums eine wichtige Rolle spielt.

Das Zusammenwirken von turbulenten Längen- und Zeitskalen stellt zusätzlich hohe Anforderungen an das Zeitschrittverfahren. Das gewählte Zeitschrittverfahren und der Zeitschritt sollten einen zugehörigen Diskretisierungsfehler ermöglichen, der von ähnlicher Größe wie derjenige der räumlichen Diskretisierung ist.

2.6.7 Diskretisierung

Für die räumliche Diskretisierung einer adäquat aufgelösten LES ohne Wandmodellierung gibt es mehrere Kriterien, die eingehalten werden müssen. Die Forderung nach Auflösung der steilen Geschwindigkeitsgradienten in direkter Wandnähe führt dazu, daß für den ersten wandnormalen Gitterpunkt i. A. $y^+ \leq 1$ gefordert wird, sowie mindestens fünf Punkte in der zähen Unterschicht ($0 \leq y^+ \leq 5$) positioniert sein sollten (BREUER, 2002). Da bei der LES die wandnahe Turbulenz mit zugehörigen kohärenten Strukturen erfaßt werden soll, ist eine ähnlich feine Auflösung auch in den wandtangentialen Richtungen notwendig. Als ausreichend für die meisten LES-Anwendungen gelten als Empfehlungen für die Strömungsrichtung $\Delta x^+ = 50...150$ und die Spannweitenrichtung $\Delta z^+ = 10...40$ (KRAJNOVIĆ & DAVIDSON, 2004).

$$y^+ = y\frac{u_\tau}{\nu} \;\; ; \;\; \Delta x^+ = \Delta x\frac{u_\tau}{\nu} \;\; ; \;\; \Delta z^+ = \Delta z\frac{u_\tau}{\nu} \quad \text{mit} \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}} \tag{2.67}$$

Die Gitterauflösung ist nicht nur in Wandnähe gezielt festzulegen, sondern in allen Bereichen turbulenter Strömungsgebiete. Damit wird sichergestellt, daß große energietragende Strukturen vom Gitter erfaßt, also simuliert und kleinere energieärmere Skalen modelliert werden. Wie bereits weiter oben erwähnt, ist die Auflösung bzw. Gitterweite derart zu wählen, daß die Trennung von Grob- und Feinstruktur im Inertialbereich des Energiespektrums vollzogen wird. Da die genaue Lage der Aufteilung bei noch nicht untersuchten Strömungen im Vorfeld nicht genau bekannt ist, kann für die kleinsten Gitterweiten lediglich eine Abschätzung aus bekannten Energie- oder Dissipationsspektren herangezogen werden.

In Richtung von Bereichen, in denen nahezu ausschließlich große kohärente Strukturen vorherrschen – in der Regel deutlich stromab von Turbulenzquellgebieten – bzw. in Richtung des Fernfelds, ist die Gitterweite sinnvollerweise zu vergröbern. In Gebieten verschwindender Turbulenz kann die Aufweitung des räumlichen Gitters dabei groß sein oder auch durch hängende Knoten erfolgen.

Da Turbulenz ein zeitabhängiges Phänomen ist, muß die räumliche Auflösung mit einer entsprechenden zeitlichen Diskretisierung einhergehen. Bei der Verwendung von expliziten Zeitschrittverfahren wird der Zeitschritt über das Stabilitätskriterium $\mathrm{CFL} \leq 1$ vorgegeben. Da die dadurch bestimmten Zeitschritte oftmals sehr klein sind und implizite Zeitschrittverfahren unbegrenzt stabil für beliebig große Zeitschritte sind, kann diese Forderung bei Verwendung eines impliziten Verfahrens etwas gelockert werden. Üblicherweise wird sichergestellt, daß in den Bereichen hoher Geschwindigkeit eine Zelle nicht innerhalb eines Zeitschrittes durchströmt wird (Abschnitt 6.4.2). In allen Fällen ist zu gewährleisten, daß räumliche und zeitliche Diskretisierung zueinander passen, wobei dies auch die Fehlerordnung einschließt.

2.6.8 Rand- und Anfangsbedingungen

Im Rahmen der LES wird mit hoher räumlicher und zeitlicher Auflösung Turbulenz simuliert, die immer dreidimensional, rotationsbehaftet und instationär ist. Gegenüber einer DNS können dabei hochfrequente Anteile in Raum und Zeit aufgrund der Filterung nicht beschrieben werden. Entsprechend gelten die für DNS angegebenen Randbedingungen im Abschnitt 2.4.3 nach Ersetzen der Strömungsgröße ϕ durch ihre Grobstrukturgröße $\widetilde{\phi}$ bei LES analog.

Bezüglich der Wandrandbedingungen gilt natürlich die Stokessche Haftbedingung auch bei Grobstruktursimulationen, dabei sind jedoch einige Aspekte zu beachten. Wie bereits dargelegt müssen zur Realisierung dieser Randbedingungen die Geschwindigkeitsgradienten bis in die zähe Unterschicht hinein aufgelöst werden. Weiterhin sind in Wandnähe die energietragenden, von der LES zu simulierenden Wirbelstrukturen sehr klein, sie skalieren näherungsweise mit dem Wandabstand. Dementsprechend ist die Anzahl der Gitterpunkte im Rahmen einer wandaufgelösten LES etwa $N_G \sim \mathrm{Re}^2$ und damit DNS-ähnlich. Die Mehrheit der Gitterpunkte ist dabei nur für einen kleinen Teil des Integrationsgebietes notwendig, womit zwangsläufig wandaufgelöste LES inbesondere für hohe Reynolds-Zahlen unrentabel werden. Die notwendige Anpassung der zeitlichen Auflösung an die räumliche verschärft diesen Aspekt noch. Die nicht ausreichende Auflösung des Wandbereiches resultiert in zu gering vorhergesagter Turbulenzproduktion. Darin resultiert eine Unterschätzung der Reynolds-Spannungen und zu geringe Wandreibung.

Ein weiterer wichtiger Aspekt folgt aus der Grundidee einer LES. Im wandnahen Bereich ist die Turbulenzstruktur i. A. durch ein hohes Maß an Inhomogenität und Anisotropie gekennzeichnet. Ein allgemeingültiges Feinstrukturmodell zu formulieren, das diese Eigenschaften und jene im Fernfeld wiedergeben kann, ist entsprechend schwierig. Dennoch ist gerade der Wandbereich extrem sensibel und wichtig bezüglich einer guten Modellierung.

Die numerische Auflösung im Wandbereich kann unter Verwendung einer geeigneten Approximation mit einem Wandmodell ersetzt werden. Die typischen Wandmodelle erlauben den ersten Gitterpunkt deutlich entfernt von der Wand im logarithmischen Bereich des Geschwindigkeitsprofils ($30 \leq y^+ \leq 500$) zu positionieren. Grobe Gitter wiederum führen zu starken numerischen Fehlern, z. B. bei Verfahren zweiter Ordnung zu starken Dispersionsfehlern (BREUER, 2002). Dementsprechend ist eine Wandmodellierung nicht unabhängig vom numerischen Verfahren und der Feinstrukturmodellierung. Da alle gängigen Wandmodelle Probleme bei Ablöse- und Wiederanlegegebieten zeigen, wird auf den Einsatz in dieser Arbeit und die weitere Darlegung der Modellierungsarten verzichtet.

Die Anpassung der Feinstrukturmodellierung in Wandnähe kann im einfachsten Fall mit einer Van-Driest-Dämpfungsfunktion als Faktor für das charakteristische Längenmaß L_c realisiert werden (BREUER *et al.*, 1996), so daß sich ein wandgedämpftes Maß L_c^{WD} ergibt.

$$L_c^{WD} = L_c \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-y^+}{25}\right)^3} \tag{2.68}$$

Eine derartige Dämpfungsfunktion dämpft jedoch nicht nur die Feinstrukturspannungen, sondern auch ggf. vorhandene Störungen, die zur Transition einer wandnahen Grenzschicht führen sollten. Aus diesem Grund wird auf den generellen Einsatz einer Dämpfungsfunktion ebenfalls verzichtet.

Einen Lösungsansatz für die Wandproblematik stellen hybride Ansätze aus RANS und LES, wie z. B. im Abschnitt 2.7 beschrieben, dar.

2.6.9 Limitierungen

Auf die Problematik sehr hoher räumlicher Auflösung in Wandnähe und Lösungsansätze wurde bereits eingegangen. Obwohl eine wandaufgelöste LES auch als „Quasi-DNS“ bezeichnet wird, sind verglichen mit einer DNS die notwendigen Ressourcen bezüglich Gitterpunkten und Rechenzeit um Faktoren der Größenordnung $30 \ldots 50$ kleiner (BREUER, 2002). Aufgrund der Verwendung sehr kleiner Zeitschritte sowie der Auflösung stochastisch verteilter Turbulenz im Rahmen der LES wird i. A. ein Großteil der Rechenzeit für die Mittelung der Statistiken über sehr lange Zeiträume benötigt.

Die Auswahl eines numerischen Verfahrens schließt bei der LES die Wahl des Filtertyps mit ein, da diese nicht unabhängig voneinander gewählt werden sollten. Gleichwohl ist es mitunter sinnvoll bzw. nicht ausgeschlossen, verschiedene Filtertypen in verschiedenen Raumrichtungen zu verwenden. Der Box-Filter wird typischerweise bei den Finite-Volumen- und Finite-Differenzen-Verfahren verwendet, während der Fourier-Filter überwiegend im Zusammenhang mit Spektralverfahren verwendet wird. In jedem Fall stellt die räumliche Diskretisierung eine implizite Filteroperation dar. Die Trennung von Filteroperation und numerischem Verfahren ist über eine explizite Filterung möglich. Da die gerade noch von der Diskretisierung erfaßten Skalen hohe numerische Fehler beinhalten, können durch explizites Filtern numerische Fehler im aufgelösten Feld gedämpft werden. Dies erscheint umso sinnvoller, da oft die kleinsten noch aufgelösten Skalen zur Modellierung herangezogen werden. Bei expliziter Filterung besteht die Herausforderung i. A. in der Festlegung der Filterweite besonders bei nicht-äquidistanten krummlinigen Gittern sowie in der Konstruktion eines Modells für die Subfilterskalen (CHOW *et al.*, 2005).

2.7 Detached-Eddy Simulation

Die Verwendung des RANS-Ansatzes ermöglicht es, schnell eine Strömungsvorhersage zu generieren. Allerdings ist das Ergebnis nicht nur bei komplexen Konfigurationen aufgrund der

Mittelung über das gesamte turbulente Spektrum und des Fehlens eines universellen Turbulenzmodells oft nicht mehr als eine grobe Schätzung. Besonders die Kalibration der meist isotropen Modelle mit Hilfe von sehr einfachen Grundströmungen führt i. A. zu schlechter Vorhersagequalität bei abgelösten Strömungen.

Sehr gute Strömungsvorhersagen mit den fast ausschließlich isotropen Modellen können mit LES erzielt werden. Aufgrund des hohen Ressourcenaufwandes bei einer wandgebundenen Strömung mittlerer Reynolds-Zahl infolge DNS-ähnlicher Auflösungen an der Wand ist LES von der Praxistauglichkeit aber noch Jahrzehnte entfernt. So ist die LES einer Tragflügelumströmung bei $\mathrm{Re} = 10^7$ mit Wandmodellierung und idealer Gitterauflösung nach Schätzung von SPALART (2000) etwa erst im Jahre 2045 im industriellen Kontext möglich, die wandaufgelöste LES etwa 2090.

Im Rahmen der hybriden Ansätze, zu denen auch die Detached-Eddy Simulation (DES) gehört, werden nun die besten Eigenschaften von RANS und LES, möglichst in einer Einzellösung, kombiniert. Vom RANS-Ansatz sind die moderaten Anforderungen an Auflösung (aufgrund geringer Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl) sowie die feine Abstimmung der Modelle für anliegende Grenzschichten auszunutzen, während der LES-Ansatz der einzig brauchbare Ansatz bei massiv abgelösten Strömungen ist und die Modellabhängigkeit bei adäquater Auflösung gering ist. Durch eine Kompromißlösung sollen die Nachteile der beiden Basisansätze möglichst umgangen werden. Bei RANS sind dies besonders die schlechte Vorhersagequalität in abgelösten Bereichen und bei LES die hohen Anforderungen an die Auflösung (hohe Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl) und der hohe Ressourcenbedarf bei aufgelösten anliegenden Grenzschichten.

Die hybriden Methoden basieren nun darauf, RANS in den Bereichen zu verwenden, die vom Turbulenzmodell gut wiedergegeben werden können bzw. von geringem physikalischen Interesse sind (z. B. das Fernfeld) oder zu hoher Ressourcen bedürfen, also besonders an festen Wänden. Die Bereiche, die mit LES behandelt werden, sind dann i. A. solche mit physikalischer Relevanz und durch moderate Auflösung erfaßbare, z. B. große Ablösegebiete.

Die Motivation bei der Formulierung des DES-Ansatzes basiert auf der Kenntnis, daß abgelöste Wirbel (engl. detached eddies) stark von der betrachten Konfiguration abhängen und demnach in hohem Maße geometriespezifisch sind. Bei der Mittelung im Rahmen von RANS wird jedoch über das gesamte turbulente Spektrum gemittelt, eben auch über die großen anisotropen bzw. geometriesensitiven Eddies. Zusätzlich wirkt die Problematik möglicher Frequenzskalenüberlappung bei RANS und die damit verbundene ungeklärte Konsistenz des Ansatzes motivierend. Durch die Verbindung von RANS und LES wird zudem eine LES wandgebundener Strömungen mit stark reduziertem Ressourcenbedarf aber etablierter Modellierung ermöglicht.

2.7.1 Die DES-Modifikation

Die Schwächen der industriell fast ausschließlich eingesetzten RANS-Methoden bei abgelösten Strömungen erforderten eine grundlegende Anpassung der Modelle im abgelösten Bereich. SPALART *et al.* (1997) stellten fest, daß mit zunehmender Entfernung zu Wandflächen der Dissipationsterm in der Turbulenzgleichung für die intensitätsbezogene Wirbeltransportgröße (z. B. ν_t oder k) rapide an Einfluß verliert. Der Dissipationsterm D^ϕ ist neben der Wirbeltransportgröße ϕ auch eine Funktion eines charakteristischen Längenmaßes l_{RANS}, das immer reziprok und mitunter in Potenzen von n vorkommt.

$$D^\phi = f\left(\phi, \frac{1}{l_{RANS}^n}\right) \tag{2.69}$$

Es ist unmittelbar einsichtig, daß bei großem RANS-Längenmaß, die Dissipation, also Vernichtung, der Wirbeltransportgröße entsprechend klein ist. Besonders deutlich wird dies bei Verwendung eines Eingleichungsmodells für die Wirbelviskosität, wo offenbar in Bereichen großer charakteristischer Längenmaße nicht genügend Wirbelviskosität vernichtet wird und demzufolge Strukturen in diesen Bereichen übermäßig gedämpft werden. Als klassisches Beispiel zum Verständnis wird beim Spalart-Allmaras-Modell eine modifizierte Wirbelviskosität transportiert und der Wandabstand als charakteristisches Längenmaß verwendet, so daß alle Strukturen entfernt von der Wand (also auch im abgelösten Nachlauf) stark gedämpft werden.

Nach dem Vorschlag von SPALART *et al.* (1997) kann durch Limitierung des charakteristischen Längenmaßes bzw. einer Umdefinition unter Verwendung der Gitterweite der Deaktivierung des Dissipationstermes entgegengewirkt werden.

$$l_{DES} = \min(l_{RANS}, C_{DES}\Delta) \tag{2.70}$$

Mit Hilfe der simplen Limitierung in Gleichung (2.70) wird nun das Längenmaß l_{RANS} im Dissipationsterm (2.69) durch l_{DES} ersetzt. Dabei ist C_{DES} ein Modellparameter, der zur Kalibrierung verwendet werden kann. Die Länge Δ kann nach der ursprünglichen Definition die größte lokale Gitterabmessung $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ sein oder entsprechend neuerer Ansätze auch mit dem lokalen Zellvolumen verknüpft sein, $\Delta = \sqrt[3]{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z}$. In Tabelle 2.5 sind die charakteristischen Längenmaße, die durch Beziehung (2.70) zu ersetzen sind, für die wichtigsten Hintergrundmodelle aufgeführt.

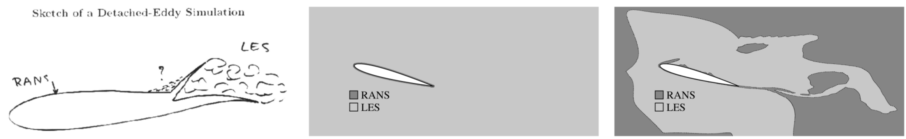
Hintergrundmodell		Dissipationsterm	l_{RANS}
SPALART & ALLMARAS (1992)	SA	$D^{\tilde\nu} = (\ldots)\left(\frac{\tilde\nu}{l_{RANS}}\right)^2$	d_w
WILCOX (1988)	k-ω	$D^k = \frac{k^{3/2}}{l_{RANS}}$	$\frac{\sqrt{k}}{c_\mu \omega}$
JONES & LAUNDER (1972)	k-ε	$D^k = \frac{k^{3/2}}{l_{RANS}}$	$\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$
RUNG & THIELE (1996)	LLR k-ω	$D^k = \frac{k^{3/2}}{l_{RANS}}$	$\frac{\sqrt{k}}{\beta_k \omega}$

Tab. *2.5:* Charakteristische Längenmaße im Dissipationsterm einiger Turbulenzmodelle

Aus der Ersetzung des Längenmaßes ergibt sich ein dreidimensionaler und instationärer Ansatz mit Verwendung eines einzelnen Hintergrundmodells. Dieses fungiert als Feinstrukturmodell (LES-Modus) in Bereichen genügender Auflösung und als Turbulenzmodell (RANS-Modus) wo die Auflösung nicht ausreichend ist. Der Übergang zwischen den beiden Bereichen ist i. A. abhängig von der Strömungslösung (nicht bei Wandabstands-basierten Modellen wie z. B. dem

SA-Modell) und dem verwendeten Gitter, so daß DES einen nicht-zonalen hybriden Ansatz, im Gegensatz zu zonalen Ansätzen mit fixierter Schnittstelle von RANS und LES, darstellt (vgl. Abbildung 2.9).

Im LES-Bereich ist der Modelleinfluß analog zu LES gering, und abgelöste, anisotrope und geometrieabhängige Wirbelstrukturen werden direkt simuliert. Das Hintergrundmodell paßt sich selbständig an die lokale Gitterweite an, so daß durch Verfeinerung der simulierte Skalenbereich bzw. die Genauigkeit erweitert werden könnte. Demgegenüber ergibt sich im RANS-Bereich ein starker Einfluß des Modells auf die aber immer dreidimensionale und instationäre Strömungslösung. Inbesondere in anliegenden Grenzschichten oder dünnen Scherschichten, bei denen LES eine hohe Gitterauflösung benötigt, ist RANS bezüglich Stabilität, Robustheit und Ressourcenbedarf nicht zu übertreffen.



(a) nach SPALART *et al.* (1997) (b) $l_{RANS} = d_w$ (c) $l_{RANS} = \frac{\sqrt{k}}{\beta_k \omega}$

Abb. *2.9:* Bereiche von RANS und LES bei Einsatz von DES[29]

Typischerweise wird das turbulente Längenmaß bei Verwendung von Zweigleichungsmodellen nur im Dissipationsterm der k-Gleichung verwendet. Für diesen Fall reduziert sich für alle Hintergrundmodelle bei lokalem Gleichgewicht von Produktion und Dissipation sowie dem Grenzfall hoher Reynolds-Zahlen die Feinstrukturvariante zu einem Smagorinsky-ähnlichen Feinstrukturmodell (TRAVIN *et al.*, 2002). Im Abschnitt 2.5.2 wurde dargelegt, daß aus der Wirbelviskosität ebenfalls ein charakteristisches Längenmaß abgespalten werden kann. Eine zusätzliche Ersetzung dieses Längenmaßes in ν_t führt direkt zu verringerter turbulenter Diffusion und Produktion von turbulenter kinetischer Energie k, da ν_t in diesen beiden Termen als linearer Faktor auftaucht. Die Charakteristik der Feinstrukturvariante für diese doppelte Längenmaßersetzung entspricht dann einem Eingleichungsmodell (YAN *et al.*, 2005) und erlaubt eine Reduktion des Übergangsbereiches von RANS zu LES (grey area). Dieser Übergangsbereich ist unscharf charakterisiert, da hier die vollständig modellierte Turbulenz im RANS-Bereich auf die mit LES aufgelöste Turbulenz trifft.

2.7.2 DES-Erweiterungen

Nach der Einführung von DES wurden relativ schnell einige grundlegende Probleme, die sowohl konzeptionell als auch anwendungsbedingt sind, offenbar. Aus diesem Grund sind eine Reihe zusätzlicher Fähigkeiten bzw. Modifikationen etabliert worden. Einen Überblick über die Stärken und Schwächen sowie die Modifikationen und offenen Probleme von DES finden sich bei SPALART (2009) und MOCKETT (2009).

[29] Teilabbildungen b, c sind Simulationsergebnisse eines oszillierenden Profils aus FREDERICH *et al.* (2009*a*).

Die Modellsensitivität bei DES ist stark ausgeprägt bei Strömungssimulationen mit dominanten RANS-Bereichen (z. B. in Grenz- und Scherschichten), während bei Dominanz von LES diese gering ist (analog zu einer „richtigen" LES). In Folge der oftmals besonderen Anpassung von RANS-Turbulenzmodellen auf Grenzschichtströmungen beinhalten eine Reihe dieser Modelle (z. B. SA-Modell) zusätzliche Dämpfungsterme, die das wandnahe Verhalten (siehe Abschnitt 2.2.8) korrekt wiedergeben sollen. Begünstigt durch geringe Gitterabstände und niedrige Wirbelviskosität können diese Terme fälschlicherweise im abgelösten LES-Bereich aktiviert werden und dämpfen so die Feinstrukturviskosität ähnlich dem wandnahen Verhalten auf sehr kleine Werte. Eine Korrekturfunktion Ψ, eingeführt durch SPALART *et al.* (2006), verhindert die irrtümliche Dämpfung von Wirbelviskosität, so daß der Energieentzug aus der Strömung wiederum ähnlich zum Smagorinsky-Feinstrukturmodell im gesamten LES-Bereich gewährleistet ist. Die Funktion Ψ wird im ersetzten turbulenten Längenmaß (2.71) integriert und ist abhängig vom verwendeten Hintergrundmodell. Diejenige für das Spalart-Allmaras-Modell ist im Anhang D.2 angegeben. Bei Modellen, die keine Dämpfungsterme enthalten, z. B. Wilcox k-ω, wird die Funktion ‚1' gesetzt (MOCKETT, 2009).

$$l_{DES}^{\Psi} = \min(l_{RANS}, C_{DES}\Psi\Delta) \tag{2.71}$$

Bei der Einführung von DES wurde davon ausgegangen, daß die anliegenden Grenzschichten vollständig im RANS-Modus zu behandeln sind. Bei feinen wandnahen Auflösungen, die sich bei strukturierten Gittern aus der LES-fähigen Diskretisierung des abgelösten Bereiches ergeben können, kann bereits in der noch anliegenden Grenzschicht der LES-Modus über Δ aktiviert werden. Da im Rahmen der DES die Grenzschichtauflösung typischerweise nicht für LES ausgelegt wird, können turbulente Strukturen / Schwankungen in der Grenzschicht nicht adäquat aufgelöst werden und haben eine lokal zu gering vorhergesagte Feinstrukturviskosität zur Folge. Daraus folgt eine fälschliche Verminderung der modellierten Spannungen (engl. modelled stress depletion, MSD), die zu verringerter Wandreibung und im schlimmsten Fall zu gitterinduzierter Ablösung (engl. grid-induced separation, GIS) führen kann. Um diesem Problem zu begegnen, führen SPALART *et al.* (2006) eine weitere Funktion f_d ein, die die turbulente Grenzschicht ($f_d = 0$) vom LES-Bereich ($f_d \to 1$) trennt. Die Schutzfunktion f_d (siehe Anhang D.3) wird wiederum im DES-Längenmaß integriert und enthält zwangsläufig Informationen über die Strömungslösung. Dadurch wird sich von dem ursprünglichen Längenmaß für den LES-Bereich $C_{DES}\Delta$, das nur Gitterinformationen enthält, deutlich entfernt. Diese Tatsache rechtfertigt eine neue Bezeichnung „Delayed-DES" (D-DES), welche der verspäteten (engl. delayed) Aktivierung des LES-Modus Rechnung trägt.

$$l_{D-DES}^{\Psi} = l_{RANS} - f_d \max(0, l_{RANS} - C_{DES}\Psi\Delta) \tag{2.72}$$

Eine herausragende Eigenschaft von DES ist die Behandlung der vollständigen Grenzschicht mit RANS. Damit stellt der Ansatz natürlich auch ein einfaches Wandmodell für LES dar, obwohl DES dafür nicht konzipiert ist. Die Ergebnisse die NIKITIN *et al.* (2000) bei der wandmodellierten LES verschiedener Kanalströmungen auf Basis von DES erzielt hat, verdeutlichen die Robustheit dieser Modellierung. Es waren weder statistische Mittelungen wie bei vielen anderen LES-Wandmodellierungen notwendig, noch zeigten sich numerische Artefakte wie negative Feinstrukturviskosität. Obwohl hohe Reynolds-Zahlen mit wenig zusätzlichem Aufwand erzielt werden konnten und die aufgelöste Turbulenz einer typischen LES entsprach (SPALART, 2009), wurde jedoch festgestellt, daß die wandnahen gemittelten Geschwindigkeitsprofile im logarithmischen Bereich deutlich abwichen (engl. log-layer mismatch, LLM). Diese Beobachtung ist nicht unbedingt verwunderlich, zumal andere Wandmodelle eine explizite Anpassung des wandnahen Profils beinhalten.

Durch die Reduktion des Längenmaßes Δ in Wandnähe mittels dynamischer Konstanten und einem verbessertem Übergang zwischen RANS und LES ist aus der ursprünglichen DES ein hybrider RANS-LES-Ansatz entstanden, der als wandmodellierte LES (engl. wall-modelled LES, WM-LES) bezeichnet und verwendet werden kann (TRAVIN *et al.*, 2006). Die Modellierung basiert dabei auf einer Reihe von Sensoren für bestimmte Grenzschichtbereiche und Übergangsfunktionen und ist das wenig intuitive Ergebnis zahlreicher theoretischer Überlegungen und empirischer Abstimmung (MOCKETT, 2009). Die reduzierte Filterweite $\widetilde{\Delta}$, die Verstärkungsfunktion $f_{restore}$ und die Wichtungsfunktion f_{step} sind die neuen Zutaten für das zu ersetzende Längenmaß (2.73). Die Definition der Funktionen ist im Anhang D.4 angegeben.

$$l^{\Psi}_{WM-LES} = f_{step}(1 + f_{restore})l_{RANS} + (1 - f_{step})C_{DES}\widetilde{\Delta} \tag{2.73}$$

Die Erweiterung der Standard-DES um die Fähigkeiten der Wandmodellierung für LES ermöglicht die Auflösung von Grenzschichtfluktuationen (MOCKETT *et al.*, 2008). Dennoch ist die WM-LES nicht als eigenständiger Ansatz publiziert worden, sondern in Kombination mit D-DES. Die überarbeitete Version dieser kombinierten DES-Erweiterung nach SHUR *et al.* (2008) bekommt natürlich mit „Improved-Delayed-DES“ (ID-DES) eine eigenständige Bezeichnung. Zur Formulierung beider Funktionalitäten in einem gemeinsamen Ansatz wird in die Schutzfunktion f_d geschickt die Wichtungsfunktion f_{step} integriert, so daß eine modifizierte Schutzfunktion $\widetilde{f}_d$ entsteht (siehe Anhang D.5).

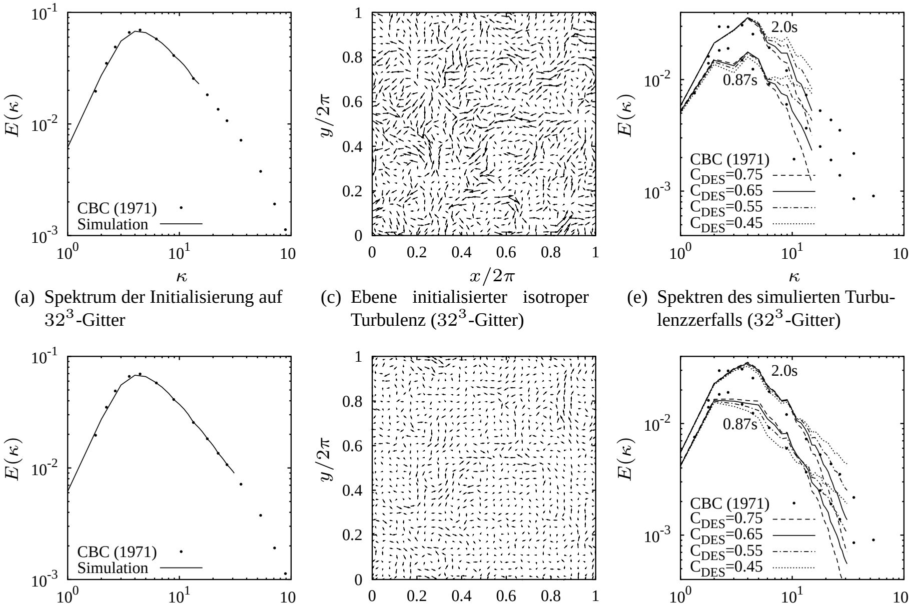
$$l^{\Psi}_{ID-DES} = \widetilde{f}_d(1 + f_{restore})l_{RANS} + (1 - \widetilde{f}_d)C_{DES}\widetilde{\Delta} \tag{2.74}$$

Die dargestellten Erweiterungen erlauben nunmehr die Simulation turbulenter Strömungen ohne eine wissenschaftliche Anpassung der räumlichen Diskretisierung, so daß der Weg für eine industrienahe Anwendung bereitet ist. Es ist dabei von Vorteil, daß die einzelnen Methoden bei Ausscheiden einzelner Kriterien ineinander übergehen. Im Falle aufgelöster Turbulenz in der Grenzschicht geht die ID-DES in eine reine WM-LES über, während bei nicht aufgelöster Turbulenz eine reine D-DES durchgeführt wird. Im schlimmsten Fall reduziert sich die ID-DES analog zur DES auf eine einfache RANS.

2.7.3 Numerische Aspekte

Der Modellparameter C_{DES} wird einzig im LES-Modus der DES verwendet. Entsprechend kann er zur Kalibrierung der Feinstrukturvariante des Modells verwendet werden. Die Kalibrierung erfolgt typischerweise auf Basis der spektralen Charakteristik beim Zerfall homogener isotroper Turbulenz. Experimentell ermittelte Charakteristika für verschiedene Zeitpunkte sind für diesen Fall von COMTE-BELLOT & CORRSIN (1971) ermittelt worden. Auf Basis der experimentell ermittelten Spektren werden isotrope turbulente Geschwindigkeitsfelder in kubischen Simulationsgittern der Abmessungen 2^nx2^nx2^n initialisiert und anschließend der Turbulenzzerfall simuliert. Dabei arbeitet der zu kalibrierende DES-Strömungslöser ausschließlich im

LES-Modus. Zu den durch das Experiment vorgegebenen Zeitpunkten werden die Strömungsfelder spektral ausgewertet und mit experimentellen Daten verglichen. Der kalibrierte Wert von C_{DES} offenbart dann gute Übereinstimmung von Experiment und Numerik auf Gittern verschiedener Feinheiten, typischerweise mit $n = 4, 5, 6$ (Abbildung 2.10). Die für den verwendeten Strömungslöser ermittelten Konstanten sind für die benutzten Hintergrundmodelle in Tabelle 3.1 zusammengestellt.



(a) Spektrum der Initialisierung auf 32^3-Gitter

(c) Ebene initialisierter isotroper Turbulenz (32^3-Gitter)

(e) Spektren des simulierten Turbulenzzerfalls (32^3-Gitter)

(b) Spektrum der Initialisierung auf 64^3-Gitter

(d) Ebene zerfallener Turbulenz nach 2.0s (32^3-Gitter)

(f) Spektren des simulierten Turbulenzzerfalls (64^3-Gitter)

***Abb.** 2.10:* Initialisierung und Simulationsergebnisse des Zerfalls homogener isotroper Turbulenz zur Kalibrierung des DES-Parameters C_{DES} (Referenzdaten von COMTE-BELLOT & CORRSIN (1971, CBC), SA-E Hintergrundmodell)

Wie bereits im Abschnitt 2.5.5 für RANS und im Abschnitt 2.6.6 für LES dargestellt, sind für die beiden Ansätze ganz bestimmte numerische Verfahren besonders vorteilhaft oder zwingend notwendig. Eine wesentliche Unterscheidung bezieht sich dabei auf die Art des zu verwendenden Konvektionsschemas – bei RANS eher aufwindbasiert und bei LES wenig dissipativ auf zentralen Schemata basierend. Aufgrund des hybriden Charakters von DES mit RANS- und LES-Regionen ist dementsprechend idealerweise auch eine hybride Numerik mindestens für die konvektiven Terme zu verwenden. Zusätzlich sollte aus Stabilitätsgründen von einem hybriden Konvektionsschema sichergestellt werden, daß in nicht-viskosen Bereichen ohne rotatorische Strömungsanteile (z. B. im Fernfeld) ein dissipatives also aufwindbasiertes Schema in dort typischerweise groben Gittern verwendet wird. Die Verwendung eines dissipativen Schemas bei der DES führt nicht zu instabilen und fast nie zu unrealistischen Strömungsvorhersagen, allerdings kann die Diskretisierung nicht voll ausgeschöpft werden. In diesem Fall würde die Energiekaskade durch numerische Dissipation vorzeitig beendet.

Da die beiden genannten Kriterien nicht immer gleichzeitig eingehalten werden können, bietet sich ein Kompromiß an, der sich an das Überblenden von RANS zu LES anlehnt. Als Einflußparameter für eine Wichtungsfunktion zum hybriden Einsatz von aufwindbasiertem und zentralendifferenzen-basiertem Konvektionsfluß lassen sich nach der gegebenen Motivation die lokale Längenskale l_{DES}, die Geschwindigkeitsgradientenanteile für Scherung S_{ij} und Rotation Ω_{ij} und die Wirbelviskosität ν_t identifizieren. Eine solche Funktion die im Rahmen der DES zur Formulierung eines hybriden Konvektionsschemas fast ausschließlich verwendet wird, wurde von TRAVIN *et al.* (2002) vorgeschlagen und ist im Anhang D.1 angeben.

2.7.4 Diskretisierung

Die ursprüngliche Formulierung von DES ist gedacht als dreidimensionale instationäre numerische Strömungslösung unter Verwendung eines einzigen Turbulenzmodells. Dieses fungiert in Regionen mit ausreichend feiner Gitterpunktdichte für LES als Feinstrukturmodell und als RANS-Modell in Bereichen, wo dies nicht der Fall ist (SPALART, 2009). Diese Deklaration verdeutlicht, daß eine DES nicht als LES auf grobem Gitter zu verstehen ist. Vielmehr erfordert der LES-Modus eine nach Maßstäben der LES generierte Diskretisierung (Abschnitt 2.6.7). Einzig die Bereiche mit RANS-Modus sind als Vergröberungen gegenüber einer LES zugänglich gedacht. Einen Überblick zu den einzelnen Bereichen eines Strömungsfeldes und beispielhafte DES-fähige Gitter gibt SPALART (2001).

Der exzessive Einsatz von DES in den letzten Jahren hat jedoch offenbart, daß einzig die dem Ansatz zugrundeliegende Reduktion von Wirbelviskosität im abgelösten Bereich eine deutlich bessere Strömungsvorhersage erlaubt als mit U-RANS-Verfahren. Mit dieser unorthodoxen Verwendung von DES können Defizite von Turbulenzmodellen ausgeblendet werden oder aber Regionen speziellen Interesses durch Einbringen lokaler Verfeinerungen implizit ausgewählt werden. In diesem Zusammenhang ist besonders die Fortsetzung von RANS-Simulationen mittels DES und stark verfeinerten Regionen für hoch aufgelöste instationäre Physik interessant. Auch wenn durch dieses Vorgehen oft die Definition von DES verletzt wird, ist für den Ingenieur meist jedoch das bessere Ergebnis als Entschuldigung greifbar. Ein Beispiel der erfolgreichen Verbesserung von vorhergesagten Kraftbeiwerten bei nicht angepaßter Diskretisierung bezüglich DES findet sich bei FREDERICH (2003).

Mit den vielfältigen Erweiterungen von DES (siehe Abschnitt 2.7.2), die sich hauptsächlich im Hinblick auf die industrielle Anwendbarkeit etabliert haben, können die starken Anforderungen an die Auflösung eingeschränkt werden. Allerdings ist dann damit zu rechnen, daß bei unzureichender Diskretisierung automatisch die schlechtest mögliche Modellvariante (meist RANS) aktiviert wird. Dennoch kann beispielsweise durch Einsatz von WM-LES (bzw. ID-DES) bei Innenströmungen die starke Reynolds-Zahl-Abhängigkeit der räumlichen Auflösung aufgeweicht werden.

2.7.5 Bemerkungen und Limitierungen

Aufgrund des nicht-zonalen Ansatzes von DES stehen als Ergebnis zusammenhängende Strömungsfelder zur Verfügung, ohne daß die Schnittstelle zwischen RANS und LES berücksichtigt werden müßte. Diese Tatsache ist dem schlecht zu charakterisierenden Übergangsbereich geschuldet, in dem fließend modellierte in simulierte Turbulenz übergeht.

Im Hinblick auf extreme Anwendungsbereiche sei angemerkt, daß die DES bei anliegender Grenzschicht und stabiler RANS-Lösung ebenfalls diese Lösung liefert. Mit einem Gitter, das in allen Bereichen inklusive der anliegenden Grenzschichten fein genug für LES ist, entspricht die DES einer LES. Dennoch ist dabei zu beachten, daß jetzt ein RANS-Turbulenzmodell als Feinstrukturmodell (auch in der Grenzschicht) fungiert. Diese Modelle enthalten oftmals angepaßte Skalierungen der wandnahen Größen, welche im LES-Modus womöglich fälschlich aktiv werden können. Dadurch können gegebenenfalls natürliche Instabilitäten gedämpft werden. Außerdem wurde im Rahmen dieser Arbeit dokumentiert, daß die Behandlung laminarer Grenzschichtbereiche ohne expliziten Eingriff in den Ansatz problematisch ist (Abschnitt 7.5). Theoretisch ist jedoch bei weiterer Gitterverfeinerung auch der Übergang zur DNS realisierbar.

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die ursprüngliche Definition von DES auf Außenströmungen angepaßt ist und für diese auch nahezu ausnahmlos eingesetzt werden kann. Für Innenströmungen ist der Ansatz nur bedingt geeignet, kann aber durch aktuelle Erweiterungen (WM-LES) auch hier erfolgreich angewandt werden.

2.8 Entdimensionierung und Normierung

Im Falle inkompressibler Strömungen besteht bei der Simulation sehr einfach die Möglichkeit direkt mit dimensionslosen Größen zu rechnen, da nur eine Ähnlichkeitskennzahl, die Reynolds-Zahl einzuhalten ist. Als Bezugsgrößen für die Entdimensionierung bieten sich dabei die charakteristischen Maße für Länge L und Geschwindigkeit U einer Strömung an. Ohne eine vollständige Dimensionsanalyse durchführen zu müssen, kann eine Aufteilung für Ortskoordinaten x_i, Zeit t und Geschwindigkeitskomponenten u_i in dimensionsfreien Zahlenwert (z. B. $\widehat{t}$) und dimensionsbehaftete Bezugsgröße aus L und U vorgenommen werden. Typischerweise wird auch die Dichte ϱ noch mittels einer Referenzdichte ϱ_0 zerlegt.

$$x_i = \widehat{x}_i L \quad t = \widehat{t}\,\frac{L}{U} \quad u_i = \widehat{u}_i U \quad \varrho = \widehat{\varrho}\varrho_0 \tag{2.75}$$

Aufgrund der Konstanz der Bezugsgrößen können nach Einsetzen der Aufteilung (2.75) in die inkompressible Impulsbilanz (2.46) die Bezugsgrößen ohne Berücksichtigung der Differentiationen zusammengefaßt werden (für die Massenbilanz ergibt sich ein triviales Ergebnis).

$$\frac{U^2}{L}\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial \widehat{t}} + \frac{U^2}{L}\frac{\partial \widehat{u}_i\widehat{u}_j}{\partial \widehat{x}_j} = -\frac{1}{\varrho_0 L}\frac{1}{\widehat{\varrho}}\frac{\partial p}{\partial \widehat{x}_i} + \nu\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 \widehat{u}_i}{\partial \widehat{x}_j^2} \tag{2.76}$$

Die Zusammenfassung der konstanten Größen liefert anschließend nicht nur die dimensionslose Form der inkompressiblen Impulsbilanz, sondern auch die Normierungsgröße für den Druck p.

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial \widehat{t}} + \frac{\partial \widehat{u}_i\widehat{u}_j}{\partial \widehat{x}_j} = -\frac{1}{\widehat{\varrho}}\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_i} + \frac{\nu}{UL}\frac{\partial^2 \widehat{u}_i}{\partial \widehat{x}_j^2} \tag{2.77}$$

$$p = \widehat{p}\;\varrho_0 U^2 \tag{2.78}$$

Den Vorfaktor des Diffusionsterms von (2.77) bildet nun die reziproke Reynolds-Zahl Re^{-1}. Die unmittelbare Erkenntnis ist, daß mit zunehmender Reynolds-Zahl die Diffusion an Einfluß verliert. Um eine vorgegebene Reynolds-Zahl bei Verwendung frei wählbarer dimensionsloser Größen $\widehat{x}_i(L) = \widehat{L}$ und $\widehat{u}_i(U) = \widehat{U}$ sicherzustellen, muß der dimensionsfreie Zahlenwert der Viskosität $\widehat{\nu}$ angepaßt werden.

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\widehat{U}\widehat{L}}{\widehat{\nu}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\nu} = \frac{\nu}{UL} \tag{2.79}$$

Durch die geschickte Wahl der Bezugsgrößen zu 1 liefert die Berechnung des Strömungsfeldes mit normierten Koordinaten direkt auch normierte Strömungsgrößen. Es verbleibt lediglich die Sorgfalt, implizit verwendete Normierungen abzuleiten. Beispielhaft sei hier die Normierungsgröße der skalaren Wandschubspannung τ_w abgeleitet.

$$\tau_w = \nu\varrho\frac{\partial u}{\partial y} = \widehat{\nu}UL\,\widehat{\varrho}\varrho_0\;\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}}\frac{U}{L} = \widehat{\nu}\widehat{\varrho}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}}\;\varrho_0 U^2 = \widehat{\tau}_w\;\varrho_0 U^2 \tag{2.80}$$

Die Berechnungen dieser Arbeit wurden dimensionslos durchgeführt. Aus Gründen der Einfachheit wird jedoch nirgendwo eine besondere Kennzeichnung der Strömungsgrößen vorgenommen, da es unerheblich ist, ob die Normierung vorab oder nachträglich durchgeführt wurde. Vorteilhaft an der dimensionsfreien Berechnung stellt sich z. B. die Berechnung von Frequenzen heraus, wonach direkt die Strouhal-Zahl $\mathrm{St} = \frac{fL}{U_\infty}$ (dimensionslose Frequenz) das Ergebnis ist.

3 Numerische Simulationsmethodik

Die numerische Umsetzung der diskretisierten und in Teilen approximierten Bilanzgleichung ist im vorliegenden Abschnitt beschrieben. Dazu werden kurz die wichtigsten Diskretisierungsverfahren beschrieben, um dann die favorisierte Finite-Volumen-Diskretisierung ausgehend von einer repräsentativen Transportgleichung vorzustellen. Die im Detail ausgeführten Aspekte und Verfahren stellen nur die benutzten Funktionalitäten des eingesetzten Strömungslöser dar und geben die programmspezifische Implementierung wieder. Zusätzlich werden zusammenfassend Diskretisierungsfehler bezüglich ihres Einflußes auf die Strömungslösung charakterisiert.

3.1 Numerische Strömungsmechanik

Der gebräuchliche englischsprachige Begriff *Computational Fluid Dynamics (CFD)* ist ein Sammelbegriff für numerische Analysen strömungsmechanischer Problemstellungen unter Verwendung einer computergestützten Simulation. Da das System der strömungsmechanischen Bilanzgleichungen nur für wenige Sonderfälle analytisch lösbar ist, hat die numerische Approximation der Strömungslösung eine besondere Bedeutung im Hinblick auf technische Strömungsuntersuchungen, deren Zuordnung zu Sonderfällen fast immer auszuschließen ist. Im Vergleich zu kostspieligen Experimenten ist CFD dabei bezüglich des Ressourcenbedarfs deutlich bevorteilt und kann darüber hinaus beliebig korrelierte Strömungsgrößen bereitstellen.

Die technischen Anwendungsmöglichkeiten numerischer Strömungssimulation sind nahezu unbegrenzt – erlauben vielmehr die Untersuchung strömungsphysikalischer Phänomene in experimentell kaum zugänglichen Konfigurationen (z. B. Turbinen, Erdatmosphäre, Mikrokreisläufe, etc.). Mit Hilfe der industriell typischerweise eingesetzten RANS-Simulationen können bei technischen Anwendungen kostengünstig und schnell Voruntersuchungen, Auslegungen, Optimierungen bzw. Validierungen durchgeführt werden. Allerdings wird die kontinuierlich wachsende Leistungsfähigkeit der Rechensysteme in den letzten Jahren nicht zur besseren Strömungsvorhersage (z. B. höher aufgelöst) verwendet, sondern zur Vergrößerung der Konfiguration bzw. Detailliertheit.

Die numerische Strömungssimulation mit einem beliebigen Programm, ob kommerziell mit grafischer Benutzeroberfläche oder individuell, beinhaltet dabei mindestens drei wesentliche Elemente bzw. Schritte: den Präprozessor, den Strömungslöser und den Postprozessor. Während die vorbereitenden und nachbereitenden Schritte i. A. problemspezifisch sind, ist die eigentliche Numerik zur Lösung des spezifischen Problems allgemeingültig und bedarf lediglich weniger Modifikationen zur Adaption an die Fragestellung. Die nachfolgenden Abschnitte widmen sich überblickgebend den eingesetzten numerischen Verfahren im Strömungslöser *ELAN*[30], während die vorbereitenden Schritte (Präprozessor) dieser Arbeit im Abschnitt 6 und die Nachbereitung bzw. Auswertung im Abschnitt 7 zusammengefaßt sind.

3.2 Räumliche Diskretisierungsverfahren

Aufgrund des Fehlens einer allgemeingültigen analytischen Lösung für das System partieller Differentialgleichungen wird in einem ersten Schritt die zu untersuchende Strömungskonfiguration durch ein numerisches Gitter diskretisiert. Darauf aufbauend soll das Gleichungssystem in ein System algebraischer Gleichungen überführt werden, das sich auf die diskreten Punkte in Raum und Zeit stützt. Die wichtigsten Methoden zur Diskretisierung der kontinuierlichen Erhaltungsgleichungen sind die Finite-Differenzen-Methode, die Finite-Elemente-Methode und die Finite-Volumen-Methode.

Finite-Differenzen-Methode Die Finite-Differenzen-Methode (FDM) gilt als älteste Methode zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen und wird Euler[31] zugeordnet (FERZIGER & PERIĆ, 1999). In der differentiellen Form der Erhaltungsgleichungen werden die benötigten Ableitungen durch Differenzenquotienten, basierend auf Gitterpunktwerten und deren Abständen, ersetzt. Die Approximation bzw. Ableitung der Differenzenquotienten kann über Taylor-Reihenentwicklung oder Polynomverfahren realisiert werden. Die sich ergebenden algebraischen Gleichungen für jeden Gitterpunkt enthalten die unbekannte Feldgröße in einer Reihe benachbarter Gitterpunkte. Entscheidende Nachteile von FDM sind grundsätzlich fehlende Konservativität und die Beschränkung auf einfache Geometrien wegen der Anpassung an strukturierte Gitter.

Finite-Elemente-Methode Die Zerlegung des Untersuchungsgebietes in diskrete, finite Elemente im Zusammenhang mit der Verwendung von Ansatzfunktionen für die gesuchten Größen wird als Finite-Elemente-Methode (FEM) bezeichnet. Die Bestimmung der gesuchten Größenverteilung wird durch ein Minimierungsproblem für die Residuen auf die Bestimmung der Koeffizienten der Ansatzfunktion verschoben. Dabei wird die Differentialgleichung mit Hilfe der Ansatzfunktionen formuliert und vor Integration nochmals mit dieser gewichtet. Vorteil der FEM ist ihre grundsätzlich unstrukturierte Anlage, womit die Anwendbarkeit auf beliebige Konfigurationen sowie leichte Verfeinerung möglich sind. Da die Matrizen des Gleichungssystems dann jedoch ebenfalls unstrukturiert sind, ist es schwierig, effiziente Lösungsmethoden zu finden (FERZIGER & PERIĆ, 1999).

[30] *ELAN – ELliptic Analysis of the Navier-Stokes equations*

[31] Leonhard Euler (1707 – 1783); schweizer Mathematiker; stellte in seiner extremen Produktivität viele heutzutage etablierte Grundlagen in Mathematik und angewandter Mechanik bereit.

Finite-Volumen-Methode Die Finite-Volumen-Methode ist aufgrund ihrer einfachen Umsetzung und der erkennbaren physikalischen Bedeutung der Einzelterme in der numerischen Strömungsmechanik am weitesten verbreitet. Das Verfahren benötigt mehrere Approximationsstufen (Interpolation, Differentiation und Integration) und ist deshalb für Verfahren höherer Ordnung schwieriger abzuleiten als beispielsweise die FDM. Dennoch ist bei konsequenter Umsetzung und Anwendung die lokale und globale Konservativität gewährleistet und physikalisch sinnvolle Ergebnisse beinahe garantiert. Aus diesem Grund wurde die FVM im verwendeten Löser *ELAN* und der vorliegenden Arbeit eingesetzt. Eine detaillierte Beschreibung findet sich im Abschnitt 3.4.

Generell sollte allen Diskretisierungsverfahren Konsistenz gemein sein, so daß mit verschwindendem Gitterabstand die Diskretisierung gegen die kontinuierlichen Gleichungen strebt. Stabilität des Verfahrens ist gewährleistet, wenn Fehler während der Simulation nicht angefacht werden bzw. Iterationen nicht divergieren. Weitere wichtige Kriterien wie Konvergenz, Beschränktheit, Realisierbarkeit und Genauigkeit sind ausführlich von FERZIGER & PERIĆ (1999) beschrieben.

3.3 Eine generische Transportgleichung

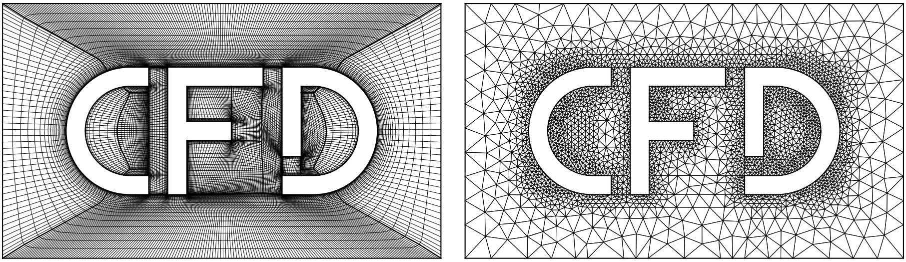
Ausgehend von der zeitlichen Änderung einer extensiven Größe Φ, beschrieben durch die intensive Größe ϕ in einem beliebigen Volumen V^*, kann unter Verwendung des Reynoldsschen Transporttheorems und Einführung eines Gradientendiffusionsansatzes eine generische Transportgleichung abgeleitet werden (PATANKAR, 1980). Diese Transportgleichung für ϕ beschreibt die Erhaltungseigenschaften von Φ und ist repräsentativ für alle in der Strömungsmechanik verwendeten Erhaltungsgleichungen. Die Darstellung der Gleichungen (2.37) – (2.39) verdeutlicht, daß die unterschiedlichen Bilanzen erhebliche Gemeinsamkeiten bezüglich der Form und Bedeutung der Einzelterme aufweisen. Nach Umformung entsprechen diese Bilanzgleichungen für inkompressible Strömungen und weitere (z. B. typische Turbulenzgleichungen) in ihrer Form der generischen Transportgleichung (3.1).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (\phi u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \tag{3.1}$$

Diese Gleichung beinhaltet auf der linken Seite die Terme für zeitliche Änderung und Konvektion sowie auf der rechten Seite Diffusion und Quelle von ϕ. Die nicht einheitlich darstellbaren Terme der Erhaltungsgleichungen werden im Quellterm zusammengefaßt. Durch das Ersetzen von ϕ durch ϱ, ϱu_i bzw. ϱh und Verwendung der entsprechenden Diffusionskoeffizienten Γ_ϕ und Quellen S_ϕ ergeben sich wieder die strömungsmechanischen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Die differentielle Form der generischen Transportgleichung (3.1) stellt den Ausgangspunkt der numerischen Diskretisierung dar. Die Ansätze, Approximationstechniken und Herleitungen werden direkt auf diese Differentialgleichung angewandt und erlauben damit ein einheitliches Prozedere bei der numerischen Lösung verschiedener Bilanzgleichungen. Einzig die Bestimmung des Diffusionskoeffizienten und des Quellterms unterscheiden sich.

3.4 Finite-Volumen-Methode

Bei der Finite-Volumen-Methode (FVM) wird das Strömungsgebiet mittels einer endlichen Zahl an Kontrollvolumina (KV) diskretisiert. Das dabei entstehende Rechengitter stellt die Berandungen der Kontrollvolumina dar. Dabei wird nach strukturierten und unstrukturierten Gittern unterschieden (Abbildung 3.1). Da die numerischen Ergebnisse dieser Arbeit ausschließlich mit in Blöcken strukturierten (block-strukturierten) Gittern erzeugt wurden, soll die hier dargestellte Herleitung der Diskretisierungsgleichung auf strukturierte, aber allgemein krummlinige Gitter beschränkt bleiben.



(a) block-strukturiert (b) unstrukturiert

Abb. *3.1:* Beispiele für ein block-strukturiertes und ein unstrukturiertes Gitter

Bei der Ableitung der Diskretisierungsgleichung für jedes einzelne KV wird typischerweise die sog. Kompaßnotation verwendet. Demnach werden die benachbarten Kontrollvolumenzentren des zentralen Kontrollvolumenzentrums (KVZ) P mit W, E, N, S, T, B bezeichnet und die einzelnen Flächen des KV mit w, e, n, s, t, b. Entsprechend wird z. B. der Flächenvektor der Kontrollvolumenfläche e hier mit A_i^e bezeichnet. Einen Überblick über die vereinbarte Notation sowie Anordnung der Nachbarn und Flächen gibt Abbildung 3.2. Alle Werte der Strömungsgrößen während der Diskretisierung bzw. Simulation werden im geometrischen Zentrum P des Kontrollvolumens (collocated variable arrangement) abgelegt.

Ausgangspunkt der Diskretisierung ist die Integration der generischen Transportgleichung (3.1) über das Kontrollvolumen, so daß sich eine integrale Bilanzgleichung ergibt, mit welcher im Verlaufe des Verfahrens der mittlere Wert jeder Transportgröße ϕ im jeweiligen Kontrollvolumen errechnet werden kann. Mit Hilfe dieser integralen Form werden die verschiedenen Flußanteile[32] von ϕ in und aus dem Kontrollvolumen bilanziert. Deshalb ist es sinnvoll, einzelne Terme mit Hilfe des Gaußschen[33] Integralsatzes $\int \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathrm{d}V = \oint \phi \, \mathrm{d}A_i$ in Oberflächenintegrale umzuwandeln. Diese Umformung erlaubt außerdem eine flächenbasierte Behandlung der entsprechenden Einzelterme, womit die konsistente Bestimmung des Flußes an der Trennfläche

[32] Der Begriff Fluß beschreibt im Kontext der Bilanzierung von Strömungsgrößen den Strom der Transportgröße pro Flächeneinheit bzw. die Änderung über die Fläche.

[33] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855); deutscher Universalwissenschaftler mit starker Fokussierung auf Mathematik und Physik; zu den unzähligen von ihm entwickelten und nach ihm benannten Methoden und Ideen gehört der Integralsatz, mit dessen Hilfe ein Zusammenhang zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes und dem Fluß durch die begrenzende Oberfläche hergestellt wird.

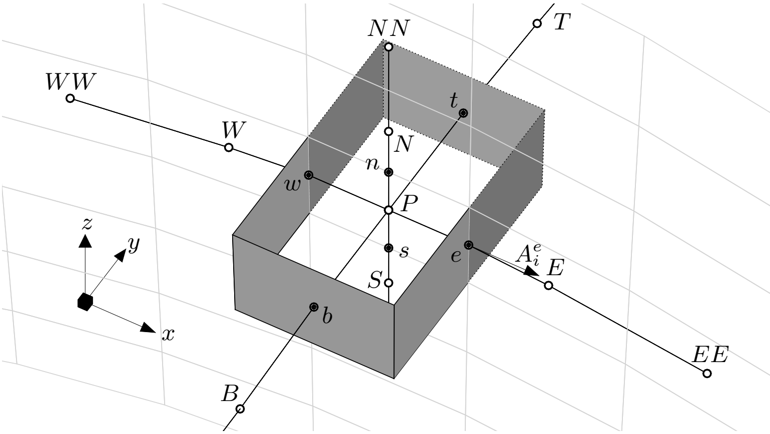


Abb. *3.2:* Kontrollvolumen mit der vereinbarten Kompaßnotation

zweier Kontrollvolumina gewährleistet wird. Für die Diskretisierung werden massenspezifische Transportgrößen bevorzugt, so daß zusätzlich aus der intensiven Größe ϕ die Dichte ϱ abgespalten wird[34].

$$\int\limits_V \frac{\partial \varrho \phi}{\partial t} \mathrm{d}V + \oint\limits_A \varrho \phi u_j \mathrm{d}A_j = \oint\limits_A \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathrm{d}A_j + \int\limits_V S_\phi \mathrm{d}V \tag{3.2}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Folgenden die Diskretisierung der einzelnen Terme gesondert ausgeführt. Zur Approximation der integralen Terme in (3.2) werden dazu geeignete Profile für den Verlauf der Transportgröße im Kontrollvolumen bzw. des Gradienten auf den Flächen angenommen. Ziel ist es, die Koeffizienten a und den Quellterm b einer linearen algebraischen Diskretisierungsgleichung (3.3) für ein einzelnes Kontrollvolumen zu bestimmen.

$$a^P \phi^P = \sum_{nb} a^{nb} \phi^{nb} + b \qquad nb = W, E, N, S, T, B\,(, ...) \tag{3.3}$$

3.4.1 Instationärer Term

Die zeitliche Ableitung von ϕ wird im Rahmen der FVM als unabhängig vom Ort angenommen, was einer räumlichen Approximation zweiter Ordnung entspricht. Dementsprechend ist der Integrand für die Volumenintegration bezüglich des KV mit dem Zentrum P konstant. Im inkompressiblen Fall konstanter Dichte ϱ verbleibt nun lediglich die Approximation bzw. Diskretisierung des Gradienten $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. Dazu wird ein rückwärtiger Differenzquotient erster oder zweiter Ordnung Genauigkeit bezüglich der Zeit verwendet. Dieser bezieht sich neben der aktuellen

[34] Zur Vereinfachung wird auf die Einführung einer gesonderten Kennzeichnung für die massenspezifischen Transportgröße ϕ bzw. den Quellterm S_ϕ verzichtet.

Zeitebene t auf ein oder zwei zusätzliche, nämlich zurückliegende Zeitebenen t-1 $= t{-}\Delta t$ und t-2 $= t{-}2\Delta t$, welche äquidistant mit dem Zeitschritt Δt sind.

$$\int\limits_V \frac{\partial \varrho\phi}{\partial t}\mathrm{d}V \approx \varrho^P \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|^P V^P \approx \begin{cases} \varrho^P \dfrac{\phi^{P,t} - \phi^{P,t\text{-}1}}{\Delta t} V^P & +\mathcal{O}(\Delta t) \\ \varrho^P \dfrac{3\phi^{P,t} - 4\phi^{P,t\text{-}1} + \phi^{P,t\text{-}2}}{2\Delta t} V^P & +\mathcal{O}(\Delta t^2) \end{cases} \tag{3.4}$$

Die im Strömungslöser *ELAN* implementierte Numerik berücksichtigt darüber hinaus den Zusatzterm zeitlich variabler Dichte (XUE, 1998), der sich aus der Anwendung der Produktregel bei der Differentiation ergibt. Zur Approximation dieses Terms wird die diskretisierte Massenbilanz (3.5) verwendet. Um diese abzuleiten, wird in Gleichung (3.2) ϕ=1 und S_ϕ=0 gesetzt sowie die Flächenintegration in einer räumlichen Approximation zweiter Ordnung durch eine diskrete Summe ersetzt.

$$\left.\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right|^P V^P + \sum_f \varrho^f u_i^f A_i^f = 0 \qquad f = w, e, n, s, t, b \tag{3.5}$$

Dadurch kann über den zeitlichen Gradienten der Dichte (auch im inkompressiblen Fall) die Massenerhaltung direkt in die lokale Diskretisierungsgleichung eingebracht werden, so daß eine weitere Zwangsbedingung für physikalisch realistische Ergebnisse existiert. Der zusätzliche Term beinhaltet die bilanzierten Massenflüsse $F^f = \varrho^f u_i^f A_i^f$ und erhält nach Multiplikation mit ϕ^P die gleiche Form wie der Konvektionsfluß.

$$\int\limits_V \frac{\partial \varrho\phi}{\partial t}\mathrm{d}V \approx \varrho^P \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|^P V^P + \phi^P \left.\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right|^P V^P \approx \varrho^P \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|^P V^P - \sum_f F^{f,t}\phi^{P,t} \tag{3.6}$$

Es erscheint sinnvoll, bereits bei der Approximation des instationären Terms das zu verwendende Zeitschrittverfahren festzulegen, obwohl besonders dieser Term nahezu unbeeinflußt von der Wahl bleibt. Auf Grund der begrenzten Stabilität expliziter Verfahren wird die voll implizite Formulierung verwendet. Dies hat jedoch den Nachteil, daß auf jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem zu lösen ist, wobei aufgrund von Vereinfachungen und Linearisierungen dabei iterativ vorzugehen ist. Die weiteren auszuwertenden Größen, insbesondere in Konvektion und Diffusion, werden beim voll impliziten Verfahren nur auf der aktuellen Zeitebene t ausgewertet.

3.4.2 Konvektion

Für den Konvektionsterm wird der Fluß über die Teiloberfläche f eines Kontrollvolumens konstant angenommen. Die Oberflächenintegration kann anschließend in eine Summe über alle Teile der Oberfläche umgeformt werden.

$$\oint\limits_A \varrho\phi u_j \mathrm{d}A_j \approx \sum_f \varrho^{f,t}\phi^{f,t}u_i^{f,t}A_i^f = \sum_f F^{f,t}\phi^{f,t} \qquad f = w, e, n, s, t, b \tag{3.7}$$

Der Massenfluß F^f wird im Sinne einer Linearisierung der Impulsbilanz während der iterativen Lösung ständig aus den Werten der vorhergehenden Iteration aktualisiert (Abschnitt 3.4.6).

Damit bezieht sich dieser auf die aktuelle Zeitebene, ist aber bekannt. Der Flächenwert der Transportgröße ϕ^f wird über das sog. Konvektionsschema bestimmt. Die geeignete Interpolation des Flächenwertes hat mitunter entscheidenden Einfluß auf die Qualität der vorhergesagten Strömungslösung, weshalb unzählige verschiedene Konvektionsschemata publiziert sind (siehe z. B. FERZIGER & PERIĆ, 1999). Im Folgenden werden nur die wichtigsten bzw. verwendeten Schemata kurz erläutert.

CDS Die lineare Interpolation von ϕ^f aus den Werten der direkt benachbarten Kontrollvolumina wird als Zentrales Differenzenschema (engl. central differencing scheme - CDS) bezeichnet. Die Berechnung erfolgt über die Hebelarme ϑ des zentralen Kontrollvolumenzentrums P und des jenseits der Fläche befindlichen Zentrums F, wobei aufgrund der Redundanz $\vartheta^P + \vartheta^F = 1$ lediglich einer der beiden benötigt wird ($\vartheta = \vartheta^F$).

$$\phi^f_{CDS} = (1-\vartheta)\phi^P + \vartheta\phi^F \tag{3.8}$$

Die Verwendung von CDS bei konvektionsdominierten Strömungen – bei großen Zell-Reynolds-Zahlen bzw. für den Fall nicht isothermer Strömungen Zell-Péclet[35]-Zahlen – offenbart die Möglichkeit negativer Nachbarkoeffizienten. Dadurch besteht die Möglichkeit, daß das iterative Lösungsverfahren divergiert oder die erzielte konvergierte Lösung physikalisch unrealistisch ist. Obwohl CDS eine von zweiter Ordnung genaue Approximation darstellt, werden deshalb im Strömungsfeld bei zu grobem Gitter typischerweise Oszillationen der Lösung sichtbar. Die zwangsläufig richtungsabhängige Stabilität ist z. B. für die Hauptströmungsrichtung x unterhalb einer Zell-Péclet-Zahl von $\left|\mathrm{Pe} = \frac{\varrho u \Gamma_\phi}{\Delta x}\right| = 2$ gewährleistet.

Eine Implementierung des CDS, welche Divergenz des Lösers vermeidet, wird durch die Aufteilung von ϕ^f_{CDS} in einen impliziten Anteil und einen expliziten Anteil erreicht. Der implizite Anteil wird zum Aufbau der Koeffizienten des Gleichungssystems verwendet und basiert auf dem Flächenwert von UDS. Der explizite Anteil stellt den verbleibenden Anteil dar und wird auf Basis der Feldgrößen der letzten Iteration dem Quellterm zugeschlagen.

$$\phi^f_{CDS} = \phi^f_{UDS} + \phi^f_{Korr.} = \underbrace{\phi^f_{UDS}}_{\text{implizit}} + \underbrace{(1-\vartheta)\phi^P + \vartheta\phi^F - \phi^f_{UDS}}_{\text{explizit}} \tag{3.9}$$

Unphysikalische Schwankungen bzw. Oszillationen der Lösung bei großen Zell-Péclet-Zahlen sind bei dieser Aufteilung nicht immer ausgeschlossen. Allerdings ist die Konvergenz gesichert.

UDS Eine Möglichkeit, die Schwachstellen von CDS zu umgehen, stellt der Einsatz aufwindbasierter Differenzen (engl. upwind differencing scheme - UDS) dar. Dabei wird in Abhängigkeit von der Strömungsrichtung bzw. dem Vorzeichen des Massenstroms F^f der Wert des stromauf zur Fläche befindlichen Kontrollvolumenzentrums verwendet.

$$F^f > 0 \;\Rightarrow\; \phi^f_{UDS} = \phi^P \qquad \text{oder} \qquad F^f < 0 \;\Rightarrow\; \phi^f_{UDS} = \phi^F \tag{3.10}$$

[35] Jean Claude Eugène Péclet (1793 – 1857); französischer Physiker; die nach ihm benannte Ähnlichkeitskennzahl beschreibt das Verhältnis von konvektiv zu diffusiv transportierter Wärme. Im Weiteren wird der Begriff Péclet-Zahl als das Verhältnis von Konvektion zu Diffusion verwendet, ohne die Beschränkung auf Wärmeleitung.

Eine kompakte Schreibweise, die zur einfachen Implementierung geeignet ist, läßt sich unter Hinzunahme des Massenflußes realisieren.

$$F^f \phi^f_{UDS} = \phi^P \underbrace{\max(F^f, 0)}_{F^{f+}} - \phi^F \underbrace{\max(-F^f, 0)}_{-F^{f-}} \tag{3.11}$$

Dieses Verfahren kann nicht zu negativen Koeffizienten aufgrund der Konvektionsbehandlung führen und liefert demnach immer physikalisch sinnvolle Ergebnisse. Diesem Vorteil steht jedoch der Nachteil einer Genauigkeit erster Ordnung gegenüber. Der führende Fehlerterm von UDS ist in seiner Gestalt dem diffusiven Term sehr ähnlich, weshalb unter Verwendung von reinem UDS die Diffusion stark überschätzt wird. Dieser als numerische Diffusion bezeichnete Fehler führt zu einer deutlich eingeschränkten Vorhersagegenauigkeit der Strömungssimulation.

Flux Blending Ein Kompromiß zwischen der Genauigkeit des CDS und der Stabilität des UDS kann durch die Kombination beider Verfahren erzielt werden. Zu diesem Zweck wird ein Parameter β zur Gewichtung (Blending engl. für Vermischung) beider Standardverfahren verwendet.

$$\phi^f_{FB} = \beta\phi^f_{CDS} + (1-\beta)\phi^f_{UDS} \tag{3.12}$$

Diese einfach zu implementierende Vermischung von CDS und UDS erlaubt sehr gute Ergebnisse bei mäßig groben Gitterweiten.

Verfahren höherer Ordnung Die bisher beschriebenen Verfahren CDS und UDS verwenden zur Bestimmung von ϕ^f die beiden direkt benachbarten Kontrollvolumenzentren der jeweiligen Fläche. Um eine höhere Genauigkeit der Approximation (engl. high order convection - HOC) zu erreichen, sind weitere Punkte stromauf bzw. stromab der Fläche zu verwenden. Insbesondere bei großen Péclet-Zahlen kann dadurch das Maß der numerischen Diffusion adäquat gehalten bzw. reduziert werden. Typischerweise werden die Schemata höherer Ordnung in Form der Aufteilung nach implizitem und explizitem Anteil auf Basis von UDS implementiert.

$$\phi^f_{HOC} = \phi^f_{UDS} + \phi^f_{Korr.} \tag{3.13}$$

TVD Die Verwendung zusätzlicher Stützstellen für ein Konvektionsschema höherer Ordnung ist gleichbedeutend mit einer Interpolation durch Polynome höherer Ordnung. Die Anzahl der lokalen Extremwerte eines Polynoms nimmt proportional mit der Ordnung zu, so daß bei Verwendung eines Verfahrens höherer Ordnung, das angenommene Profil vorgegebene Randwerte überschreiten kann. Durch die lokalen Extrema können in der Lösung Schwankungen und Oszillationen auftreten, welche besonders durch steile Gradienten begünstigt werden. Dieser Effekt stellt unnötigerweise Anforderungen an den Gitterabstand, die im Rahmen von RANS oft schwierig zu gewährleisten sind.

Durch die Limitierung von Differenzenschemata höherer Ordnung werden die lokalen Extremwerte begrenzt. Die Limitierung erzwingt stabile Ergebnisse, reduziert jedoch lokal die Ordnung des Verfahrens und wird von der Strömungslösung bestimmt. Bei den sog. TVD-Verfahren (total variation diminishing) wird die *Totale Variation* der Größe ϕ über einem gegebenen Intervall limitiert. Die Forderung nach Monotonie der zweiten Ableitung ist identisch mit einer kontinuierlichen Verminderung der totalen Variation. Eine ausführliche Beschreibung des im Programm *ELAN* implementierten aufwindbasierten TVD-Schemas findet sich bei XUE (1998). Das Verfahren ist maximal von dritter Ordnung genau, wobei durch Limitierung die lokale Ordnung reduziert wird.

Um die Vergrößerung des Differenzensterns bei höherer Ordnung zu vermeiden, verwendet die Implementierung die Gradienten der beiden benachbarten Kontrollvolumina zur Approximation nicht zur Fläche benachbarter Punkte.

$$\phi^f_{TVD} = \phi^f_{UDS} + \frac{1}{2}(\phi^F - \phi^P)\left[\frac{F^{f+}}{F^f}\varphi(r^P) - \frac{F^{f-}}{F^f}\varphi(r^F)\right] - \phi^f_{UDS} \tag{3.14}$$

Die Parameter r^P, r^F und die Limitierungsfunktionen $\varphi(r)$ sowie $\psi(\beta, r)$ werden entsprechend der Beschreibung von XUE (1998) verwendet. Der wählbare Parameter $\varkappa$ bestimmt dabei die Form des Limiters.

$$\begin{aligned}
r^P &= \frac{2(x_i^F - x_i^P)\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^P}{\phi^F - \phi^P} - 1 \qquad r^F = \frac{2(x_i^F - x_i^P)\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^F}{\phi^F - \phi^P} - 1\\
\varphi(r) &= \frac{1+\varkappa}{2}\psi(\beta_1, r) + \frac{1-\varkappa}{2}\psi(\beta_2, \frac{1}{r})\\
\psi(\beta, r) &= \max[0, \min(1, \beta r)] \qquad \beta_1 = \frac{3+\varkappa}{1+\varkappa} \qquad \beta_2 = \frac{3-\varkappa}{1-\varkappa}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.4.3 Diffusion

Analog zum Vorgehen bei dem konvektiven Term wird der diffusive Fluß über die Fläche f als konstant angenommen. Dadurch kann wiederum die Überführung des Integrals in die Summe der Teilflächen mit einem Fehlerterm zweiter Ordnung vollzogen werden.

$$\oint_A \Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\mathrm{d}A_j = \sum_f \Gamma^f_\phi \left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^f A_i^f \tag{3.16}$$

Zur Bestimmung des diffusiven Terms bedarf es bei Kenntnis des Flächenvektors, der Berechnung des Diffusionskoeffizienten sowie des Gradienten auf der Fläche. Der Diffusionskoeffizient Γ^f_ϕ wird im Programm *ELAN* über die lineare Interpolation der angrenzenden Zellwerte mit dem Hebelarm ϑ bestimmt.

$$\Gamma^f_\phi = (1-\vartheta)\Gamma^P_\phi + \vartheta\Gamma^F_\phi \tag{3.17}$$

Um die räumliche Ableitung von ϕ auf der Fläche zu approximieren, werden die räumlichen Gradienten in den Kontrollvolumenzentren benötigt. Ein eleganter Weg, diese komponentenweise zu berechnen, basiert auf dem diskretisierten Gaußschen Integralsatz mit der Annahme eines konstanten Gradienten im Volumen. Zur Berechnung des Flächenwertes ϕ^f wird dabei die gleiche lineare Interpolation wie in (3.8) verwendet.

$$\int \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathrm{d}V = \oint \phi\,\mathrm{d}A_i \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\sum_f \phi^f A_i^f}{V^P} \tag{3.18}$$

Bei der Approximation der Gradienten auf der Fläche muß die erlaubte allgemeine Krummlinigkeit des Simulationsgitters berücksichtigt werden. Dies kann durch Ableitung der Transportgröße nach den krummlinigen Koordinaten mit anschließender Gewichtung durch die entsprechenden Metrikterme realisiert werden. Um jedoch unnötige Interpolation von Knotenwerten zu vermeiden, verwendet XUE (1998) eine lineare Interpolation des Gradienten auf die Fläche und leitet zur Berücksichtigung der Krummlinigkeit eine Gradientenkorrektur ab.

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^f = \underbrace{\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\rangle^f}_{\text{interpoliert}} + \underbrace{\left((\phi^F-\phi^P) - \underset{1}{g_j}\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\rangle^f\right)\overset{1}{g_i}}_{\text{Korrektur}} \tag{3.19}$$

$$\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\rangle^f = (1-\vartheta)\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^P + \vartheta\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^F \tag{3.20}$$

Für die Korrektur wird im Grunde eine Drehung der Gradientenanteile in das krummlinige Koordinatensystem vorgenommen. Zur Beschreibung eines nicht-orthonormierten Bezugssystems werden üblicherweise die ko- und kontravarianten Basisvektoren $\underset{1}{g_i}$, $\underset{2}{g_i}$, $\underset{3}{g_i}$ bzw. $\overset{1}{g_i}$, $\overset{2}{g_i}$, $\overset{3}{g_i}$ verwendet. Nach deren Berechnung (siehe Anhang E) sind alle Größen im Diffusionsterm bekannt, und die Approximation kann zusammengefaßt werden. Die kovarianten Basisvektoren repräsentieren darin den Abstandsvektor der zur Fläche benachbarten Zellzentren und den Flächenvektor.

$$\sum_f \Gamma_\phi^f \left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^f A_i^f = \underbrace{\Gamma_\phi^f(\phi^F-\phi^P)\frac{A_i^f A_i^f}{\underset{1}{g_j}A_j^f}}_{\text{implizit}} - \underbrace{\Gamma_\phi^f\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\rangle^f\left(\underset{1}{g_i}\frac{A_j^f A_j^f}{\underset{1}{g_k}A_k^f} - A_i^f\right)}_{\text{explizit}} \tag{3.21}$$

Die als Kreuzdiffusion bezeichneten Terme mit $\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\rangle^f$ müssen dem Quellterm zugeschlagen werden, da ansonsten weitere Punkte ins Gleichungssystem aufgenommen werden. Bei lokaler Orthogonalität der Koordinatenrichtungen sind ko- und kontravariante Basis identisch und der zusätzliche Term verschwindet. Die Normaldiffusion wird zum Aufbau der Koeffizienten des impliziten Gleichungssystems verwendet.

3.4.4 Physikalische Quelle

Unter der Annahme eines diskreten Wertes der Quellstärke für das vollständige Kontrollvolumen hängt diese nicht vom Ort ab, und die mit einem Fehler zweiter Ordnung approximierte Volumenintegration kann getrennt ausgeführt werden.

$$\int_V S_\phi \mathrm{d}V = S_\phi^P V^P \tag{3.22}$$

Im Falle, daß S_ϕ von der Transportgröße ϕ direkt abhängt, ist eine sinnvolle Linearisierung durchzuführen. Der Vorfaktor von ϕ in dieser Linearisierung muß stets negativ sein, um die Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix zu stärken.

3.4.5 Zusammenfassung der Diskretisierungsgleichung

Die numerische Approximation der generischen Transportgleichung wird in Form der allgemeinen Diskretisierungsgleichung (3.3) dargestellt. Um diese vollständig zu beschreiben, sind sieben Koeffizienten und der Quellterm anzugeben. In den nachstehenden Definitionen sind die vereinigten Terme für Instationarität, Konvektion, Diffusion und Quelle entsprechend aufgeteilt worden, wobei der diskretisierte Term zeitlich-variabler Dichte (3.6) mit eingeflossen ist.

$$a^{nb} = -F^{f-,t} + \Gamma_\phi^f \frac{A_i^f A_i^f}{\underset{1}{g_j} A_j^f} \tag{3.23}$$

$$a^P = \frac{3}{2} \frac{\varrho^P V^P}{\Delta t} + \sum_{nb} a^{nb} \tag{3.24}$$

$$b = S_\phi^P + \frac{4\phi^{P,t-1} + \phi^{P,t-2}}{2\Delta t} \varrho^P V^P \dots$$
$$\dots + \sum_f F^{f,t} \phi_{Korr.}^{f,t} - \Gamma_\phi^f \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle^f \left(\underset{1}{g_i} \frac{A_j^f A_j^f}{\underset{1}{g_k} A_k^f} - A_i^f \right) \tag{3.25}$$

Die noch fehlenden Berechnungsvorschriften der geometrischen Eigenschaften des Simulationsgitters, wie Hebelarme, Flächen und Volumina, sind im Anhang E angegeben.

3.4.6 Geschwindigkeits- und Druckfeld

Die konsequente Diskretisierung der Impulsgleichungen entsprechend vorheriger Abschnitte würde dazu führen, daß die diskretisierte Gleichung des Kontrollvolumens mit dem Zentrum P den Druck p^P an diesem Zentrum selbst nicht mehr enthält. Als Folge können oszillierende Druckfelder nicht mehr wahrgenommen werden, und es tritt eine Entkoppelung von Geschwindigkeits- und Druckfeld auf. Zusätzlich steht im Rahmen der Problemformulierung über Massenbilanz, Impulsbilanz etc. keine Gleichung zur (expliziten) Berechnung des Druckes zur Verfügung. Die Massenerhaltung wird genau dann gewährleistet, wenn der Druck, der in den Impulsbilanzen nur als Gradient auftritt, korrekt eingestellt / vorhergesagt ist. Im Falle inkompressibler Strömungen ist die Koppelung von Dichte und Druck mit Hilfe einer Zustandsgleichung nur künstlich möglich und soll deshalb nicht weiter betrachtet werden.

Der eingeschlagene Lösungsweg für beide Probleme (Entkoppelung und Druckgleichung) basiert auf einem Druckkorrekturverfahren vom Typ SIMPLE[36] kombiniert mit einer geänderten Interpolation der Flächengeschwindigkeiten u_i^f zur Berechnung der Massenflüsse F^f. Da der Massenfluß für jede Erhaltungsgleichung verwendet wird, ist er ein idealer Kandidat, das Entkoppelungsproblem nicht in weitere Gleichungen zu übertragen.

[36] SIMPLE – *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations* (PATANKAR & SPALDING, *1972)*

Ausgehend von der inkompressiblen Massenbilanz für die beiden wichtigen Fälle, daß Geschwindigkeits- und Druckfeld korrekt zueinander passen oder nicht, kann eine diskrete Form mit Massenflußkorrekturen F'^f abgeleitet werden.

$$\sum_f F'^f = R_m^P = -\sum_f F^f \tag{3.26}$$

Der Massendefekt R_m^P im Kontrollvolumen P verschwindet bei korrekter Zugehörigkeit von Geschwindigkeits- und Druckfeld. Zur Berechnung des Massendefekts bzw. der Massenflüsse $F^f = \varrho^f u_i^f A_i^f$ wird nun die Interpolation von u_i^f derart spezifiziert, daß eine Entkoppelung nicht auftreten kann. Nach RHIE & CHOW (1983) werden dazu druckbereinigte Pseudogeschwindigkeiten auf die Flächen interpoliert und anschließend ein physikalisch motivierter Druckterm verwendet. Der durch dieses Vorgehen zusätzlich eingebrachte Fehler glättet unphysikalisch stark oszillierende Druckfelder (BREUER, 2002). Die ausführliche Ableitung der Interpolationsvorschrift für u_i^f mit Verwendung der Gradientenkorrekturformel (3.19) für den Druckgradienten findet sich bei XUE (1998).

$$u_i^f = \langle u_i \rangle^f - \frac{A_i^f}{\underset{1}{g_j} A_j^f} \left\langle \frac{V}{a^P} \right\rangle^f \left(p^F - p^P - \underset{1}{g_k} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\rangle^f \right) \tag{3.27}$$

In dieser Berechnungsvorschrift ist der Druck eine bekannte Größe, dessen Berechnung mit Hilfe der Druckkorrekturgleichung erfolgen kann. Um diese abzuleiten, werden die Massenflußkorrekturen F'^f basierend auf der Koppelung von Geschwindigkeit und Druck (3.27) abgeschätzt.

$$F'^f = \varrho_f A_i^f u_i'^f \quad \text{mit} \quad u_i'^f = -\frac{A_i^f}{\underset{1}{g_j} A_j^f} \left\langle \frac{V}{a^P} \right\rangle^f (p'^F - p'^P) \tag{3.28}$$

Die somit gewonnene Massenflußänderung infolge einer Druckkorrektur p' liefert, gemeinsam mit der Berechnung des Massendefektes über die Interpolation (3.27) eingesetzt in (3.26), die gesuchte diskretisierte Druckkorrekturgleichung für inkompressible Strömungen. Entsprechend der allgemeinen Diskretisierungsgleichung (3.3) mit $\phi = p'$ ergibt sich nach Sortieren von Koeffizienten und Quellterm wiederum ein lineares Gleichungssystem, wobei zur Berechnung der neuen Koeffizienten die zentralen Koeffizienten a_{IB}^P der Impulsbilanzen verwendet werden.

$$a^{nb} = \varrho^f \frac{A_i^f A_i^f}{\underset{1}{g_j} A_j^f} \left\langle \frac{V}{a_{IB}^P} \right\rangle^f \tag{3.29}$$

$$a^P = \sum_{nb} a^{nb} \tag{3.30}$$

$$b = R_m^P = -\sum_f F^{f,t} \tag{3.31}$$

Als Ergebnis der numerisch gelösten Druckkorrekturgleichung steht für jedes Kontrollvolumenzentrum eine Druckkorrektur p'^P bereit. Diese wird verwendet, um Geschwindigkeiten, Drücke und Massenflüsse iterativ zu korrigieren. Aufgrund der Vernachlässigung von Geschwindigkeitskorrekturen in Nachbarpunkten bei der Herleitung der Druckkorrekturgleichung (siehe

z. B. PATANKAR, 1980) muß bei der Korrektur des Druckes mit $\alpha_P < 0.8$ relaxiert werden, während die Geschwindigkeiten nach jeder Iteration die Massenbilanz erfüllen. Das System ist auskonvergiert, wenn der Massendefekt R_m^P ein vorgegebenes Residuum unterschreitet.

$$u_i^{P,\mathrm{neu}} = u_i^P - \frac{V^P}{a^P} \left.\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right|^P \tag{3.32}$$

$$p^{P,\mathrm{neu}} = p^P + \alpha_P \, p'^P \tag{3.33}$$

$$F^{f,\mathrm{neu}} = F^f - \varrho^f \frac{A_i^f A_i^f}{\underset{1}{g_j} A_j^f} \left\langle \frac{V}{a^P} \right\rangle^f (p'^F - p'^P) \tag{3.34}$$

Das hier benutzte Vorgehen vermeidet die Entkoppelung von Geschwindigkeits- und Druckfeld. Einem weiteren möglichen Entkoppelungsproblem zwischen Geschwindigkeiten und Reynolds-Spannungen wurde hier nicht Rechnung getragen, da dieses bei der in *ELAN* vorliegenden Formulierung nur bei Reynolds-Spannungsmodellen sowie algebraischen Spannungsmodellen auftreten kann. In dieser Arbeit wird nur lineare Wirbelviskositätsmodellierung eingesetzt, bei der dieses Problem aufgrund der impliziten Verwendung von Geschwindigkeitsgradienten nicht auftritt (XUE, 1998).

3.4.7 Randbedingungen

Im Rahmen der dokumentierten Untersuchungen werden vier unterschiedliche physikalische Randbedingungstypen – Einströmrand, Ausströmrand, Symmetrierand und Wandrandbedingung – verwendet. Zusätzlich sind aufgrund der block-strukturierten Gittertopologie Blockgrenzen zu berücksichtigen.

Einströmrand Die Zuströmung wird ausnahmlos durch die Vorgabe flächenweise konstanter Geschwindigkeiten und Turbulenzgrößen an den Randflächen der involvierten Kontrollvolumina realisiert. Die vorgeschriebenen Geschwindigkeitswerte werden explizit in die jeweiligen Diskretisierungsgleichungen eingearbeitet und verbleiben unverändert während der gesamten Simulation. Die Gradienten werden konstant aus den angrenzenden Zellen auf die Einströmflächen übertragen. Die Turbulenz der Anströmung wird in Form von turbulenter kinetischer Energie k und Energiedissipationsrate ε analog den Geschwindigkeiten quantifiziert und direkt verwendet.

Ausströmrand Um den störungs- und reflektionsfreien Transport von Turbulenz aus dem Strömungsfeld zu gewährleisten, wird an allen Ausströmrändern die konvektive Ausflußrandbedingung (2.47) in diskreter Form angewandt. Dabei wird der zeitliche Gradient $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ analog zu (3.4) diskretisiert, der räumliche Gradient $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ mit Hilfe einer Gradientenkorrektur bestimmt und die mittlere Geschwindigkeit u_m aus einströmendem Impuls und Austrittsfläche berechnet. Die aus der gewonnenen Diskretisierungsgleichung explizit berechenbare Geschwindigkeit wird zur Beschleunigung der Konvergenz und zur Erhaltung der globalen Massenbilanz zusätzlich mit einem Korrekturfaktor multipliziert, der sich aus ein- und austretendem Massenstrom berechnet, so daß beide Massenströme übereinstimmen (siehe z. B. BUNGE, 2004). Die Turbulenzgrößen werden konstant aus dem Feld extrapoliert.

Wandrandbedingung Die physikalische Randbedingung an undurchlässigen und in den vorliegenden Untersuchungen stets ruhenden Wänden ist durch die Wandhaftbedingung $u_i = 0$ beschrieben. Die Bestimmung der Koeffizienten und Quelltermanteile für diese Randbedingung mit verschwindendem Massenstrom wird von XUE (1998) basierend auf der wirkenden Flächenkraft gegeben und in der dort beschriebenen Form verwendet.

Bei Einsatz eines RANS-Turbulenzmodells als Hintergrundmodell, z. B. bei DES, wird für die Turbulenzgrößen an der Wand eine hybride, adaptive Wandrandbedingung nach RUNG *et al.* (2000) verwendet. Je nach Positionierung des ersten Gitterpunktes über der Wand wird dadurch eine universelle Formulierung mit oder ohne Wandfunktion benutzt. Da bei den erstellten Simulationsgittern der erste Gitterpunkt immer zu $y^+ \leq 1$ abgeschätzt und realisiert wurde, wird typischerweise die sog. *low-Reynolds*-Formulierung aktiv.

Symmetrierandbedingung Die Symmetrieränder können als Wand ohne Haftbedingung verstanden werden. Allerdings wird nun der zugehörige Geschwindigkeitsvektor mit dem randparallelen Anteil des Geschwindigkeitsvektors aus dem direkt benachbarten Kontrollvolumen gleichgesetzt und wiederum über die wirkende Flächenkraft die Anteile für zentralen Koeffizienten und Quellterm bestimmt (XUE, 1998).

Blockgrenze Alle Werte an den Blockgrenzen werden bei der sukzessiven Lösung der einzelnen Gleichungssysteme nach jeder Iteration und Transportgröße zwischen den Blocknachbarn ausgetauscht.

Druck und Druckkorrektur Die Werte für den Druck p und dessen Korrektur p' werden in der verwendeten Variante des Lösers *ELAN* auf alle physikalischen Ränder linear aus dem Feld extrapoliert. Dabei ist eigentlich für die Druckkorrekturgleichung unabhängig vom Randbedingungstyp eine Nullgradientenrandbedingung formuliert. Das Druckniveau wird in einem Druckreferenzpunkt fixiert, welcher idealerweise weitab relevanter Strömungsphänomene lokalisiert ist.

3.4.8 Strömungslöser

Die bisher beschriebenen numerischen Diskretisierungs- und Approximationsschritte sind neben anderen im Strömungslöser *ELAN* von XUE (1998) umgesetzt. Bei dem Ableiten der einzelnen Schritte wurde stets das Erzielen physikalisch sinnvoller Ergebnisse und globale Erhaltung einschränkend berücksichtigt. Die Konservativität der Methodik wird hierbei durch konsistente Formulierung der Flächenanteile und die direkte Berechnung der zentralen Koeffizienten über durchgängig positive Nachbarkoeffizienten gewährleistet. Die sich ergebenden linearen Gleichungssysteme der Form $A_{ij}\phi_j = S_i$ mit der Koeffizientenmatrix A_{ij}, dem Vektor der Unbekannten ϕ_j und der rechten Seite S_i werden unter Verwendung des SIP-Verfahrens von STONE (1968) iterativ gelöst. Die Parameter für Iteration, Konvergenz und Relaxation lassen sich sehr einfach extern und auch während der Simulation modifizieren.

Die Beschreibung der notwendigen Matrizen für beliebig strukturierte Mehrblocktopologien sowie der Einsatz unstrukturierter Blockverbindungsflächen findet sich wiederum detailliert bei

XUE (1998). Der Strömungslöser ist parallelisiert, nutzt eine flächenbezogene Berechnung der Koeffizientenanteile und die Unbekannten und Koeffizienten werden in eindimensionalen Vektoren gespeichert. Die gezielte lokale Verfeinerung bzw. Vergröberung des Simulationsgitters kann sprungweise erfolgen, da die Implementierung unterschiedliche Flächenteilungen an benachbarten Gitterblöcken, sog. *hängende Knoten*, erlaubt. Hierbei ist einzig zu beachten, daß eine einzelne Blockverbindungsfläche auf dem angrenzenden Block durch ein gerades Teilungsverhältnis mit kleineren Flächen kongruent abgebildet wird.

3.5 Diskretisierungsfehler

Als Diskretisierungsfehler wird die Differenz zwischen den exakten Lösungen der Bilanzgleichungen und der durch Diskretisierung daraus entstandenen algebraischen Gleichungssysteme definiert (FERZIGER & PERIĆ, 1999). Den Einfluß und die Größenordnung dieser Fehler zu kennen, erlaubt eine bessere Beurteilung der Simulationsergebnisse bezüglich der eingesetzten Modellierung. Die durch Approximationen bei der Diskretisierung eingeführten Fehler nehmen mit verfeinerter Auflösung ab – in welchem Maß gibt die Fehlerordnung des Verfahrens an. Eine genaue Bestimmung der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers kann eigentlich nur durch den Vergleich sukzessive verfeinerter Auflösungen bestimmt werden. Dazu müßten dann aber die anderen Fehlertypen, wie Modellfehler oder Iterationsfehler gleich bleiben bzw. vernachlässigbar sein. Wegen des notwendigen Aufwandes ist eine derartige Abschätzung nicht vorgenommen worden. Es soll hier vielmehr kurz der Einfluß von Diskretisierungsfehlern auf die Physik diskutiert werden. Problematische Gitterkonstruktionen, die Diskretisierungsfehler begünstigen und Möglichkeiten diese Probleme und Fehler im Strömungslöser *ELAN* zu verringern, werden von MAUß (2005) vorgestellt.

Bei den Diskretisierungsfehlern können zwei wesentliche Formen nach ihrer Wirkung unterschieden werden: Dispersion und Dissipation. Als Unterform der dissipativen Fehler soll hier außerdem noch die Diffusion angeführt werden.

Dispersion Fehler mit dispersivem Charakter verursachen eine Phasenverschiebung der approximierten Wellenlängen bzw. Frequenzen. Dabei bleibt die Amplitude nahezu unbeeinflußt. Dispersive Fehler treten auf, wenn der Approximationsfehler gerade Ableitungen[37] enthält (BREUER, 2002). Während bei Approximationen zweiter und vierter Ordnung (z. B. CDS) der führende Fehlerterm betroffen ist, enthalten auch Verfahren anderer Ordnung dispersive Fehleranteile in den höheren Termen. Dispersion beschreibt hier die Abhängigkeit einer Strömungsgröße von der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle im Medium. Diese nimmt normalerweise mit der Wellenlänge ab. Physikalisch interpretiert muß unter anderem eine Wechselwirkung zwischen Dispersion bzw. Dispersionsfehler und den (An-)Isotropie-Eigenschaften der Turbulenz existieren. Einschlägige Modifikationen letzterer Eigenschaften konnten in der Literatur nicht lokalisiert werden.

[37] Fehleruntersuchungen werden häufig mit FDM durchgeführt, wo dispersive Fehler bei ungeraden Ableitungen auftreten. Aufgrund der Integration über das Kontrollvolumen reduziert sich bei FVM die Ableitungsordnung um eins, und folglich sind die geraden Ableitungen betroffen.

Dissipation Numerische Dissipation tritt für Fehlerterme mit ungeraden Ableitungen auf. Dieser Fehler beeinflußt (dämpft) einzig die Amplitude einer Welle. Für dritte und höhere ungerade Ableitungen ist der wesentliche Einfluß auf die kurzwelligen Lösungsanteile beschränkt. Dies ist eine Folge der Abhängigkeit der Amplitudenänderung von der Wellenzahl und hat dafür auch den Begriff Hochfrequenzdämpfung etabliert (BREUER, 2002). Die zentralen Schemata zweiter und vierter Ordnung enthalten keine ungeraden Ableitungen und sind demzufolge nicht von numerischer Dissipation betroffen. Wie bereits im Abschnitt 2.2 offenbar, führt Dissipation zum Energieentzug und muß deshalb in übermäßiger, unerwünschter Größe vermieden werden.

Diffusion Der Diffusionterm der Impulsbilanz enthält nach der Integration über das Kontrollvolumen Ableitungen erster Ordnung. Eine Approximation erster Ordnung (z. B. UDS) enthält im führenden Fehlerterm ebenfalls Ableitungen dieser Ordnung. Die physikalische Wirkung des Abbruchfehlers hat dann die gleiche Wirkung wie der Reibungsterm der Impulsbilanz. Diese als numerische Diffusion bezeichnete Wirkung muß im Rahmen der Turbulenzsimulation wegen der stark dämpfenden und glättenden Wirkung auf das Strömungsfeld vermieden werden. Aufgrund der Struktur des führenden Fehlerterms ist die zuordenbare numerische Viskosität von der Ordnung der Gitterweite (BREUER, 2002). Die dämpfende Wirkung eines Verfahrens erster Ordnung kann allerdings in Teilen zur numerischen Stabilisierung des Gesamtverfahrens beitragen – wie in dieser Arbeit eingesetzt (Abschnitt 6.2.2).

3.6 Diskrete Filteroperation bei LES

Wie bereits im Abschnitt 2.6.2 ausgeführt ist bei Einsatz der FVM mit zellweise konstanten Strömungsgrößen bereits ein impliziter Gitterfilter aktiv. Auch im Strömungslöser *ELAN* wird bei der LES-Funktionalität auf einen expliziten Filter verzichtet, so daß aufgrund der i. A. nicht äquidistanten Gitter ein Filter mit lokal unterschiedlicher Filterweite verwendet wird. Die Filterung ist in diesem Fall identisch mit der Volumenmittelung über das entsprechende Kontrollvolumen.

$$\widetilde{\phi}(x_i, t) = \frac{1}{V^P} \int\limits_{V^P} \phi(\xi_i, t) \, \mathrm{d}\xi_i \tag{3.35}$$

Zur Approximation dieses Integrals entsprechend der FVM werden die linearen Profilannahmen für die Transportgröße ϕ zwischen zwei benachbarten Kontrollvolumenzentren verwendet. Mit Hilfe der Trapezregel und den linearen Interpolationsfaktoren ϑ^f der einzelnen Flächen f kann daraus eine diskrete Form der benutzten Filteroperation abgeleitet werden. Um die Wirkungsweise zu verdeutlichen, soll es an dieser Stelle genügen, die Filterung nur in der Hauptströmungsrichtung x mit Beteiligung der Flächen w und e durchzuführen. Die vollständige räumliche Filterung ist aufgrund der i. A. nicht äquidistanten Gitter nicht prägnant bzw. übersichtlich darstellbar.

$$
\begin{aligned}
\overset{x}{\widetilde{\phi}}(x,t) &= \frac{1}{\Delta x^P} \int\limits_{-\Delta x^P/2}^{\Delta x^P/2} \phi(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\Delta x^P}\left[\int\limits_{-\Delta x^P/2}^{0} \phi(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_{0}^{\Delta x^P/2} \phi(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi\right] \\
&\approx \frac{1}{\Delta x^P}\left[\frac{\Delta x^P}{4}(\phi^w+\phi^P) + \frac{\Delta x^P}{4}(\phi^e+\phi^P)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(4-\vartheta^w-\vartheta^e)\phi^P + \vartheta^w\phi^W + \vartheta^e\phi^E\right]
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

3.7 Spezifische Numerik für DES

Die Notwendigkeit, im Rahmen der Detached-Eddy Simulation eine hybride Numerik für die Konvektion zu verwenden, ist im Abschnitt 2.7.3 dargelegt. In der von TRAVIN *et al.* (2002) vorgeschlagenen Variante wird analog zum Flux Blending (Abschnitt 3.4.2) ein Parameter σ zur Gewichtung zweier Standardverfahren für die Interpolation des Flächenwertes ϕ^f definiert. Im verwendeten Strömungslöser *ELAN* wird diese Vermischung basierend auf CDS zweiter Ordnung und TVD maximal dritter Ordnung vollzogen. Der Parameter σ wird entsprechend der im Anhang D.1 angegebenen Funktionen lokal an die Strömungssituation angepaßt.

$$
\phi^f = (1-\sigma)\phi^f_{CDS} + \sigma\phi^f_{TVD} \tag{3.37}
$$

Auch dieses hybride Konvektionsschema ist mittels der Zerlegung in implizit für die Koeffizienten verwendeten UDS-Anteil und expliziten Korrekturanteil auf dem numerischen Quellterm implementiert. Das Schema wird bei allen eingesetzten DES-Modifikationen aktiviert.

Hintergrundmodell		C_{DES}
EDWARDS & CHANDRA (1996)	SA-E	0.65
RUNG & THIELE (1996)	LLR k-ω	0.75

***Tab.** 3.1:* DES-Modellparameter C_{DES} kalibriert für den Strömungslöser *ELAN*

Der DES-Modellparameter C_{DES} hängt von den eingesetzten numerischen Verfahren ab. Für den verwendeten Strömungslöser ist die Kalibrierung auf Basis des Zerfalls isotroper Turbulenz (Abschnitt 2.7.3) durchgeführt worden. Dabei wurde das CDS-Verfahren von zweiter Ordnung Genauigkeit benutzt. Die ermittelten Konstanten für die benutzten Modelle sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt und basieren auf den Arbeiten von MOCKETT (2009).

4 Methoden zur Analyse turbulenter Zeitreihen

Die Analyse instationärer Strömungsfelder benötigt neben der visuellen Inspektion irgendwie geartete Automatismen, um Strukturen und ihre Dynamik zu identifizieren – besonders im Kontext komplexer Turbulenz. Die in dieser Arbeit eingesetzten Methoden, die nach Ansicht des Autors nicht zum Standard gehören bzw. erwähnenswert scheinen, werden nachstehend in ihren theoretischen und teilweise auch numerischen Details beleuchtet. Von der Beschreibung ausgeschlossen sind Verfahren zur einfachen Frequenzanalyse von Zeitreihen sowie Kriterien zur Identifikation kohärenter Strukturen. Aus Gründen der Vielschichtigkeit und nur beschränkt vorhandener Ergebnisse wird auch der Komplex der Lagrangeschen Statistiken ausgelassen.

4.1 Kontinuierliche Wavelet-Transformation

Eine bewährte Methode zur Analyse von spektralen Eigenschaften turbulenter Zeitschriebe ist die Wavelet-Transformation. Die herausragende Eigenschaft des Ansatzes ist die kombinierte Auswertung bezüglich Zeit und Frequenz. Mit Hilfe der sog. Wavelets[38] wird die in einem eindimensionalen zeitlichen Signal enthaltene Information mittels eines zweidimensionalen Feldes redundant erweitert, um die Mustererkennung zu erleichtern (FRÖHLICH, 2006). Dies gilt analog für jeden räumlichen Punkt bei Anordnung mehrerer lokaler Zeitsignale z. B. in Form eines Gitters. Bei der Signalanalyse kommt typischerweise die Kontinuierliche Wavelet-Transformation (engl. continuous wavelet transform, CWT) in diskretisierter Form zum Einsatz, während im Rahmen von Kompressionsmethoden für Bild und Ton die Diskrete Wavelet-Transformation (DWT) verwendet wird. Zur harmonischen Analyse von Zeitschrieben aus turbulenten Strömungssimulationen wird hier die CWT-Implementierung in *Matlab* eingesetzt. Die CWT wird praktisch über eine Reihe zeitdiskreter Filter berechnet. Dies entspricht genau der Art, wie in der Regel die DWT implementiert ist.

[38] Der Ausdruck Wavelet geht auf GROSSMANN & MORLET (1984) zurück und ist basierend auf dem französischen Wort *ondelette* (kleine Welle) frei ins Englische übertragen worden.

4.1.1 Definition der Transformation

Das zu berechnende zweidimensionale Feld für das Zeitsignal $\mathrm{f}(t)$ wird durch die zugehörigen Wavelet-Koeffizienten $W^{\mathrm{f}}(s,\tau)$ beschrieben. Diese sind durch Wichtung des Zeitsignals mit einem dilatierten und translatierten Wavelet $\Psi(t)$ und anschließender Integration über das Zeitintervall definiert.

$$W^{\mathrm{f}}(s,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(t)\,\sqrt{s}\,\Psi^*(s[t-\tau])\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

Die Dilatation des konjugiert-komplex verwendeten Wavelets Ψ^* wird üblicherweise mit einem stets positiven Skalenparameter a erreicht, welcher hier jedoch durch einen Skalierungsparameter $s = \frac{1}{a}$ ersetzt wurde. Die Translation erfolgt durch die Positionsvariable bzw. Zeitverschiebung τ. Dementsprechend beschreibt ein einzelner Wavelet-Koeffizient die zeitliche Korrelation des Signals mit dem Wavelet bei fixierter Dilatation s und Translation τ. Die grafische Darstellung der Wavelet-Koeffizienten in einer Zeit-Frequenz-Ebene erlaubt bereits die Detektion dominanter Frequenzbänder im Zeitintervall (siehe Abbildung 4.1).

Die untersuchten Frequenzen f können direkt aus dem Skalierungsparameter s bzw. die Skalierungen aus den zu untersuchenden Frequenzen berechnet werden. Dadurch kann die gezielte Auswahl eines Frequenzbandes bei der CWT im Vorfeld erfolgen. Die Faktoren der Umrechnung sind der Zeitschritt Δt des Signals sowie die zentrale Frequenz f_c des verwendeten Wavelets.

$$f(s) = \frac{f_c\ s}{\Delta t} \qquad \text{bzw.} \qquad s(f) = \frac{f\,\Delta t}{f_c} \tag{4.2}$$

Auf Basis der Wavelet-Transformation an sich oder dem Skalogramm $|W^{\mathrm{f}}(s,\tau)|^2$ im Speziellen können vielfältige Eigenschaften des Zeitsignals abgeleitet werden. Das Skalogramm als Analogon zum Spektrogramm einer Fourier-Transformation ermöglicht energetische Betrachtungen, wie z. B. die Berechnung der Gesamtenergie E^{f} des Signals.

$$E^{\mathrm{f}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{f}(t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} |W^{\mathrm{f}}(s,\tau)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{4.3}$$

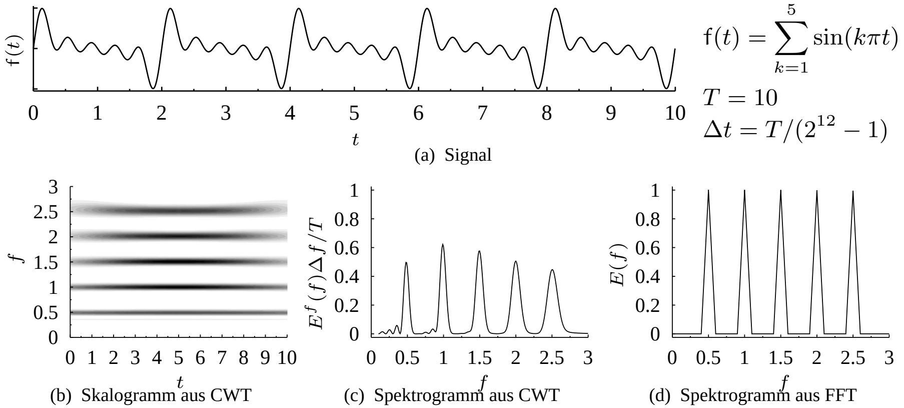
Indem nur eine der beiden Integrationen in (4.3) ausgeführt wird, ergibt sich eine Energiedichte in Abhängigkeit des nicht-integrierten Parametervektors. Die Integration über den Skalierungsparameter s bzw. die Frequenz f nach (4.2) ergibt demnach die zeitliche Verteilung der Energiedichte (BUESSOW, 2007).

$$E^{t}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |W^{\mathrm{f}}(s,\tau)|^2\,\mathrm{d}s = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |W^{\mathrm{f}}(f,\tau)|^2\,\frac{f_c}{\Delta t}\,\mathrm{d}f \tag{4.4}$$

Durch Integration über die Zeit bzw. die Zeitverschiebung τ kann analog eine spektrale Verteilung der Energiedichte berechnet werden, welche als eine Art Spektrogramm verwendet werden kann.

$$E^{f}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |W^{\mathrm{f}}(f,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \tag{4.5}$$

Beispielhafte Ergebnisse für ein konstruiertes Testsignal sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Das einfache Signal aus diskreten Frequenzen kann akzeptabel mit der kontinuierlichen Wavelet-Transformation zerlegt werden. Neben den typischen Randeffekten ist ein leichtes Verschmieren der Frequenzen erkennbar, dem durch Anpassen des Bandbreitenparameters (siehe nächster Abschnitt) entgegengewirkt wurde. Das Ergebnis der Fast-Fourier-Transformation (FFT) ist in diesem Fall genauer, allerdings gilt dies i. A. nicht für beliebig turbulente Signale.



(a) Signal

(b) Skalogramm aus CWT

(c) Spektrogramm aus CWT

(d) Spektrogramm aus FFT

***Abb.** 4.1:* Beispielergebnisse einer kontinuierlichen Wavelet-Transformation (durchgeführt mit dem komplexen Morlet-Wavelet und $f_c = 1.5$; $f_b = 20$)

4.1.2 Verwendete Wavelet-Basisfunktion

In der Literatur sind eine Vielzahl verschiedener Mutter-Wavelets als Basisfunktionen für die Wavelet-Transformation beschrieben. Ein Überblick über Wavelet-Familien und spezifische Definitionen findet sich beispielsweise bei MALLAT (1999) oder DAUBECHIES (1992). Generell gilt, daß die Wavelet-Funktion, ob reell oder komplex, die sog. Admissibilitätsbedingung (engl. admissibility condition), definiert in (4.6), erfüllt. Diese Forderung erlaubt nur mittelwertfreie Wavelet-Funktionen, $\hat{\Psi}(0) = 0$ bzw. $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)\mathrm{d}t = 0$.

$$c_\Psi = \int\limits_0^\infty \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega < \infty \tag{4.6}$$

Für die vorliegenden Untersuchungen wird ausschließlich das komplexe Morlet-Wavelet verwendet, das eine modulierte Gauß-Funktion darstellt. Für die Definition dieses Wavelets finden sich in der Literatur leicht abweichende Notationen (z. B. TEOLIS, 1998; FRÖHLICH, 2006). Die Originaldefinition nach Goupillaud, Grossman & Morlet (1984) verwendet eine Konstante $\kappa_{\omega_0} = \mathrm{e}^{-\omega_0^2/2}$, subtrahiert von einer ebenen Welle $\mathrm{e}^{\imath\omega_0 t}$ und Lokalisierung durch eine Gauß-Funktion e^{-t^2/f_b}.

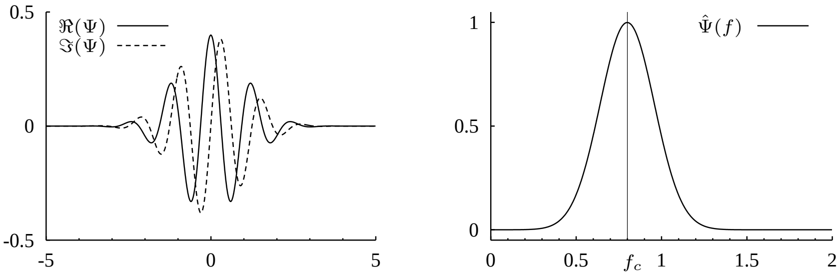
$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} \left(\mathrm{e}^{\imath\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0^2}{2}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{f_b}} \qquad \text{mit} \qquad \omega_0 = 2\pi f_c \tag{4.7}$$

In der hier notierten Form besitzt das Morlet-Wavelet mit der zentralen Frequenz f_c und dem Bandbreitenparameter f_b zwei freie Parameter. Durch f_c bzw. ω_0 wird die Zeit- und Frequenzauflösung[39] miteinander abgeglichen. Zur Vermeidung von Problemen bei hoher zeitlicher Auflösung wird typischerweise $\omega_0 \geq 5$ festgelegt, weshalb der damit verschwindende Wert κ_{ω_0} oftmals vernachlässigt wird. Der Parameter f_b zur Bestimmung der Bandbreite ist in der Originalveröffentlichung nicht als Parameter ausgeführt, sondern mit $f_b = 2.0$ festgelegt. Allerdings kann mit moderat ansteigendem Wert für f_b einem Verschmieren der Frequenzen vorgebeugt werden. In Versuchen wurden für die vorliegende Arbeit sinnvolle Werte $f_b = 2...40$ ermittelt, wobei die zentrale Frequenz $f_c = 0.8$ als Resultat von $\omega_0 \approx 5$ festgeschrieben ist.

Die Fourier-Transformierte des komplexen Morlet-Wavelets $\hat{\Psi}(f)$ kann analytisch berechnet werden und ermöglicht die Darstellung des wirksamen Filters im Frequenzbereich.

$$\hat{\Psi}(f) = \mathrm{e}^{-\pi^2 f_b (f - f_c)^2} \tag{4.8}$$

In Abbildung 4.2 ist das komplexe Morlet-Mutter-Wavelet im Zeit- und Frequenzbereich dargestellt. Aufgrund der komplexen Darstellung können Betrag und Phase im Zeitbereich gesondert betrachtet werden. Die Darstellung im Frequenzbereich verdeutlicht den Bandpaßcharakter des Wavelets um die zentrale Frequenz f_c. Mit zunehmendem f_b wird die Bandbreite schmaler.



(a) Zeitbereich (b) Frequenzbereich

Abb. *4.2:* Komplexes Morlet-Wavelet im Zeit- und Frequenzbereich ($f_c = 0.8$, $f_b = 2.0$)

4.2 Proper Orthogonal Decomposition

Mit Hilfe der bekannten Methode *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) wird üblicherweise eine optimale Basis zur Rekonstruktion eines Datensatzes bestimmt, deren Analyse das Verständnis physikalischer Phänomene in stochastischen Prozessen erleichtert. Je nach vorliegender Disziplin werden oftmals auch die Bezeichnungen Karhunen-Loève-Zerlegung, Hauptkomponentenanalyse etc. verwendet. Die ursprüngliche Idee des Ansatzes – einen stochastischen Prozeß mittels linearer Kombination orthogonaler Funktionen wiederzugegeben – geht

[39] Bei der Wavelet-Transformation kann nicht gleichzeitig beliebig genau in Zeit und Frequenz aufgelöst werden. Dieser Umstand wird durch die Heisenbergsche Unschärferelation beschrieben.

auf die Arbeiten von KARHUNEN (1946) und LOÈVE (1945) zurück. Der Einsatz im Rahmen der Turbulenzuntersuchung bzw. -modellierung, für den die Bezeichnung *POD* etabliert ist, wurde von LUMLEY (1967) eingeführt. An dieser Stelle werden die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften der POD zusammengefaßt und die Separation von räumlichem und zeitlichem Verhalten einer beliebigen, feldweise vorliegenden Strömungsgröße dargelegt.

4.2.1 Theorie der Methode

Ausgangspunkt der Überlegungen ist eine Sequenz von N numerischen und / oder experimentellen Momentaufnahmen bzw. Schnappschüssen einer Strömungsgröße $\phi(x_i, t_n)$ zu den Zeitpunkten $t_n = t_1 ... t_N$.

$$\phi^n(x_i) = \phi(x_i, t_n) \qquad \text{mit} \qquad n = 1...N \tag{4.9}$$

Das Ziel der POD besteht darin, die Feldgröße mit Hilfe der Galerkin-Approximation (4.10) zu beschreiben. Dazu werden die Schnappschüsse in $M{=}N$ zeitunabhängige Basisfunktionen ϕ_m und zeitabhängige Amplitudenkoeffizienten a_m aufgespalten.

$$\phi(x_i, t_n) = \sum_{m=0}^{M} a_m(t_n)\phi_m(x_i) \qquad \text{mit} \qquad m, n = 1...N \tag{4.10}$$

Die Rekonstruktion der Schnappschüsse nach (4.10) wird mit POD derart bestimmt, daß der gemittelte quadratische Abschneidefehler (4.11) minimal (optimal) für die verwendeten $k \leq M$ orthogonalen Basisfunktionen ist.

$$\epsilon_k = \int_V \int_T \left[\phi(x_i, t_n) - \sum_{m=0}^{k} a_m(t_n)\phi_m(x_i) \right]^2 \mathrm{d}t \, \mathrm{d}V \qquad \text{mit} \qquad k \leq M \tag{4.11}$$

Die Basisfunktionen ϕ_m werden als kohärente Strukturen, empirische Eigenfunktionen oder POD-Moden bezeichnet. Die POD-Mode ϕ_0 beschreibt den zeitlichen Mittelwert der Schnappschußsequenz, womit sich die Analyse auf Schwankungsgrößen $\phi' = \phi - \phi_0$ reduziert. Konsequenterweise ist dann auch bereits der Koeffizient $a_0 = 1$ festgelegt.

$$\phi_0(x_i) = \overline{\phi}(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \phi(x_i, t_n) \tag{4.12}$$

Für die Bedingung optimaler Eigenschaften (4.11) können verschiedene Äquivalente gefunden werden, die letztlich auf ein Eigenwertproblem unter Beteiligung einer mittleren Korrelationsfunktion führen (BERKOOZ *et al.*, 1993). Die Problemstellung kann hierbei wahlweise im räumlichen Bereich mit der Korrelationsfunktion $\mathsf{R}(x_i, y_j)$ oder im zeitlichen Bereich mit $\mathsf{C}(t, s)$ für die zeitlichen Instanzen t und s formuliert werden (siehe z. B. NOACK, 2006). Als Lösung des Eigenwertproblems stehen die gesuchten Moden bzw. Zeitkoeffizienten zur Verfügung.

4.2.2 Numerische Umsetzung

Die Beschreibung einer Strömungsgröße liegt gewöhnlich nur an diskreten räumlichen Punkten zu diskreten Zeitpunkten vor, so daß jeder Schnappschuß $\phi(x_i, t_n)$ eher als Vektor vorliegt denn als kontinuierliche Funktion. Diese Eigenschaft wird von der sog. Schnappschußmethode, als gängiger Methode, das Eigenwertproblem zu lösen, ausgenutzt. Sie stammt von SIROVICH (1987) und kann als diskretisierte Form der POD im zeitlichen Bereich verstanden werden. Die Effizienz des Ansatzes kommt besonders zum Tragen, wenn die räumliche Auflösung deutlich höher ist als die Anzahl der Schnappschüsse.

Ausgehend von der Tatsache, daß die Schnappschußvektoren $\phi(x_i, t_n)$ und die Eigenvektoren bzw. POD-Moden ϕ_m den gleichen linearen Raum aufspannen, können die Moden als Linearkombination der mittelwertfreien Schnappschüsse mit den Gewichten w_n^m dargestellt werden (SIROVICH, 1987). Voraussetzung ist jedoch, daß die Schnappschüsse linear unabhängig bzw. wenig korreliert sein müssen.

$$\phi_m(x_i) = \sum_{n=1}^{N} w_n^m [\phi(x_i, t_n) - \phi_0] \qquad \text{mit} \qquad m = 1 \ldots M{=}N \tag{4.13}$$

Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren aus (4.14) bildet die Grundlage zur Bestimmung der POD-Gewichte und Zeitkoeffizienten. Dabei involviert das zu lösende Eigenwertproblem der POD eine Korrelationsmatrix C_{nm} als diskretisierte Form einer zeitlichen Korrelationsfunktion.

$$\mathsf{C}_{nm} v_m^k = \lambda^k v_n^k \tag{4.14}$$

Die Einträge der Korrelationsmatrix werden über das Produkt (bei Vektoren über das innere Produkt) zweier Schwankungsgrößen zu unterschiedlichen Zeiten und nachfolgender räumlicher Integration berechnet. Die Integration wird in diskreter Form entsprechend der FVM über alle Kontrollvolumina KV mit zellweise konstanten Werten als Summe ausgewertet.

$$\begin{aligned} \mathsf{C}_{nm} &= \frac{1}{M} \int\limits_V [\phi(x_i, t_n) - \phi_0(x_i)] \, [\phi(x_i, t_m) - \phi_0(x_i)] \, \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{M} \sum_{P=1}^{N_{KV}} \left[\phi^P(t_n) - \phi_0^P\right] \left[\phi^P(t_m) - \phi_0^P\right] V^P \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Berechnung von C_{nm} ist bereits für weniger als tausend, aber räumlich hoch aufgelöste numerische Schnappschüsse sehr zeitaufwendig. Allerdings kann durch die Zerlegung in räumliche Teilgebiete die Integration mittels Summation parallelisiert werden. Die anschließende Lösung des Eigenwertproblems liefert die Eigenwerte λ^m und die Eigenvektoren v_n^m. Die letzteren sind per Definition orthogonal und werden üblicherweise, erlaubt durch die Symmetrie der Korrelationsmatrix, noch normiert, so daß $v_n^k v_n^l = \delta_{kl};\ k, l = 1 \ldots M$. Grundsätzlich stellen die Eigenvektoren bereits die POD-Gewichte und die Zeitkoeffizienten dar. Da aber auch für die Zeitkoeffizienten eine Normierungsbedingung (4.21) eingeführt wird, ist noch der reziproke Vorfaktor $\sqrt{N\lambda^m}$ bei der Berechnung der POD-Gewichte $w_n^m = \frac{v_n^m}{\sqrt{N\lambda^m}}$ und der einzelnen

POD-Moden ϕ_m zu berücksichtigen. Dadurch sind die Moden gemäß (4.20) automatisch normiert.

$$\phi_m(x_i) = \sum_{n=1}^{N} w_n^m [\phi(x_i, t_n) - \phi_0] = \frac{1}{\sqrt{N\lambda^m}} \sum_{n=1}^{N} v_n^m [\phi(x_i, t_n) - \phi_0] \tag{4.16}$$

Nach Berechnung der zugehörigen Zeitkoeffizienten a_m sind alle Komponenten der Zerlegung (4.10) bekannt.

$$a_m(t_n) = v_n^m \sqrt{N\lambda^m} \tag{4.17}$$

Im Endeffekt liefert auch die Formulierung im räumlichen Bereich die gleichen Moden und Koeffizienten – der Aufwand zur Lösung des Eigenwertproblems wäre jedoch von gleicher Ordnung wie die Anzahl der Gitterpunkte. Daher wird fast ausschließlich die Variante für den zeitlichen Bereich verwendet.

4.2.3 Einige Eigenschaften

Aufgrund der Symmetrie bzw. Selbstadjungiertheit der Korrelationsmatrizen, z. B. der räumlichen $\mathsf{R}(x_i, y_j)$, kann eine Diagonalzerlegung mit Hilfe der Eigenwerte und POD-Moden erfolgen.

$$\mathsf{R}(x_i, y_j) = \sum_{k,l=1}^{M} \overline{a_k(t_n) a_l(t_n)}\ \phi_k(x_i)\phi_l(y_j) = \sum_{m=1}^{M} \lambda^m\ \phi_m(x_i)\phi_m(y_j) \tag{4.18}$$

Diese Zerlegung kann zur Berechnung der Korrelationsfunktion oder zur analytischen Bestimmung der POD-Moden eingesetzt werden. Die zeitlichen Koeffizienten würden dann als Projektion der Schnappschüsse auf die POD-Moden berechnet werden.

$$a_m(t_n) = \phi(x_i, t_n)\phi_m(x_i) \qquad \text{mit} \qquad m = 1...M \tag{4.19}$$

Die POD-Zerlegung liefert Zeitkoeffizienten und Moden, die untereinander vollständig unkorreliert in der Zeit bzw. dem Raum sind (HOLMES *et al.*, 1996). Diese Tatsache geht direkt aus den bereits erwähnten Normierungs- bzw. Orthogonalitätsbedingungen hervor.

$$\phi_k(x_i)\phi_l(x_i) = \delta_{kl} \tag{4.20}$$

$$\overline{a_k(t_n) a_l(t_n)} = \lambda^k \delta_{kl} \tag{4.21}$$

Die Korrelationsbedingung für Zeitkoeffizienten (4.21) folgt direkt aus dem Vergleich der skalaren Vorfaktoren der Dyade in der Diagonalzerlegung (4.18). Da alle Eigenwerte infolge der Eigenschaften der Korrelationsfunktion positiv sind, können diese nach ihrer Größe absteigend geordnet werden. Sinnvollerweise müssen die Moden der gleichen Sortierung unterzogen werden.

$$\lambda^1 \geq \lambda^2 \geq ... \geq \lambda^m \geq 0 \tag{4.22}$$

Im statistischen Sinne repräsentiert der Eigenwert λ^m die Varianz der Schnappschußdatenbasis in Richtung der zugehörigen POD-Mode ϕ_m. Eine physikalische Deutung ergibt sich erst dann, wenn die beliebige Strömungsgröße ϕ beispielsweise explizit als Geschwindigkeitsvektor u_i festgelegt wird. In diesem Fall gibt der Eigenwert an, welcher Anteil der kinetischen Fluktuationsenergie durch die zugehörige Mode erfaßt wird. Bei turbulenten Geschwindigkeitsfeldern ist der (halbe) Eigenwert λ^m also ein Maß für den Anteil turbulenter kinetischer Energie E^m_{TKE} der Mode $\phi_m = u_i^m$ an der Strömungsdynamik. Der Betrag der kinetischen Energie von Mode m selbst ist $\lambda^m/2$.

$$E^m_{TKE} = \frac{\lambda^m}{\sum_{n=1}^{N} \lambda^n} \equiv \Lambda^m \tag{4.23}$$

Aus den Einzelanteilen der nach energetischer Dominanz sortierten Moden kann eine kumulative Summe berechnet werden, womit die Güte einer Rekonstruktion der Schnappschüsse mit weniger als N beurteilt werden kann.

4.2.4 Physikalische Relevanz

Für die POD-Zerlegung in zeitlichen und räumlichen Anteil besteht prinzipiell keine Einschränkung an die Art der Strömungsgröße. Typischerweise bietet sich der Geschwindigkeitsvektor an, da hier der Zusammenhang mit der Turbulenzenergie und eine Optimierung diesbezüglich hergestellt werden kann. Dennoch kann ϕ eine beliebige, üblicherweise skalare oder vektorielle, Strömungsgröße sein, wie z. B. der Druck oder aber auch die Konzentration. Die physikalische Interpretation der Eigenwerte ist in diesen Fällen oft nicht naheliegend oder nur bedingt herstellbar. Gesichert ist jedoch die Zerlegung der Fluktuationen in energetisch optimale Vorzugsrichtungen mittels POD, d. h. der Energiegehalt einer Mode ausgedrückt über den Eigenwert ist maximal.

Bei der ursprünglichen Methode von SIROVICH (1987) wird davon ausgegangen, daß die Moden strömungstypische Strukturen beinhalten. Durch die zeitliche Korrelation und die räumliche Integration bei POD kann den extrahierten Strukturen physikalische Relevanz zugeschrieben werden. Durch die Schnappschußmethode werden die zeitlichen Informationen zusammengefaßt, um eine statistisch existierende Struktur zu erzeugen. Bei der Interpretation von Moden als realistische Strömungsstrukturen ist genau wegen der Statistik Vorsicht geboten. So beschreiben RÉGERT *et al.* (2005) das Auftreten kleiner mathematisch bedingter Strukturen in höheren Moden bei der Überlagerung von Wirbelstrukturen im Schnappschußensemble. Von denselben Autoren wird darauf hingewiesen, daß dahingegen die Filterung der Ergebnisse mittels POD und anschließende Analyse der verbleibenden Strukturen im Strömungsfeld unproblematisch sei.

Während die POD-Mode eine räumliche und vor allem statische Verteilung der Strömungsgröße darstellt, beschreibt der zugehörige Zeitkoeffizient eine zeitliche Modulation dieser räumlichen Verteilung mit einer an die Schnappschußsequenz angepaßten Amplitude. Neben der bedingten Extraktion realer Strukturen aus den Moden liefert die Analyse einzelner Zeitkoeffizienten bzw. ihres Verhaltens zueinander die zeitlichen Eigenschaften, z. B. harmonische Bewegungen und deren spektrale Eigenschaften.

Bei ablösedominierten Strömungen mit geringer Reynolds-Zahl und einfacher Geometrie, also idealerweise einer Körperumströmung bei laminarem Regime, treten fast ausschließlich Paare harmonischer und deren höher-harmonischer Moden auf (siehe z. B. NOACK *et al.*, 2003). Die Größe des Eigenwertes als Maß für den Energiegehalt der beiden Moden eines Paares ist ähnlich und fällt mit zunehmender Modennummer entsprechend der Sortierung ab. Bei komplexeren Strömungen, etwa turbulenten, sind im Strömungsfeld unterschiedliche Frequenzen vorhanden, die bei entsprechenden Amplituden neben der dominanten Frequenz subharmonische Modenpaare ausbilden können. Eine Trennung verschiedener Frequenzen ist im POD-Ansatz per Definition nicht integriert, so daß bei anwendungsnahen turbulenten Strömungen eine starke Vermischung von Wellenlängen und Frequenzen zu beobachten ist (z. B. FREDERICH *et al.*, 2007*b*). Darüber hinaus sind auch singuläre Moden ohne harmonischen Partner denkbar, die meist mit der mittleren Strömung bzw. deren Änderung assoziiert sind. Prominentes Beispiel ist die von POD obligatorisch berechnete Mode der mittleren Strömung ϕ_0.

Durch die Berechnung der Moden als Linearkombination der Schnappschüsse werden viele grundlegend physikalische Eigenschaften des momentanen Strömungsfeldes auf die Moden übertragen. Dazu zählen vor allem die Randbedingungen, aber auch die Divergenzfreiheit (Inkompressibilität). Generell kann in den Moden nur wiedergespiegelt werden, was bereits in den Momentanaufnahmen vorhanden ist. Die Optimalität der Moden ist bezüglich einer linearen Basis gegeben, so daß die Trennung nichtlinearer Interaktionen schwerlich möglich ist. Aus diesem Grund sollten nur dominante Moden in Bezug auf ihre Repräsentation als kohärente Strukturen interpretiert werden. Eine Obergrenze für relevante Moden läßt sich nicht allgemeingültig angeben, jedoch ist die relative Größe des Eigenwertes ein Indiz für die Relevanz. Moden mit Eigenwerten, die numerisch null sind, können von vornherein ausgeschlossen werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die Dimension der Strömungsgröße typischerweise auf den Koeffizienten übertragen wird und die Mode dann dimensionslos ist (HOLMES *et al.*, 1996). Dieses Vorgehen erlaubt die dimensionsbehaftete Auswertung der Energie über den Eigenwert bzw. die Eigenkorrelation der Zeitkoeffizienten. In diesem Sinne ist die hier verwendete Bezeichnung der Moden mit dem gleichen Symbol, wie dasjenige der Schnappschußgröße, nicht ideal, wird aber aus Gründen der späteren Zuordnung verwendet.

4.3 Harmonisch gefilterte POD

Die Anwendung von POD auf Strömungsdaten produziert eine energetisch optimale Zerlegung der Schwankungsgrößen, mit deren Hilfe Datenreduktion ohne spezielle Auswahl einzelner Moden sinnvoll möglich ist. Die Dynamik des Systems bzw. die Bedeutung der Moden für diese werden jedoch bei der Extraktion der Moden genauso wenig berücksichtigt wie die zeitliche Ordnung der Schnappschüsse. Natürlich ist die Annahme gerechtfertigt, daß die energiereichsten Moden auch eine dominante Rolle im vorliegenden Strömungsproblem spielen. Aber eine Synchronisierung instationärer Wirbelstrukturen bezüglich der Ähnlichkeit von räumlichen oder zeitlichen Frequenzen bleibt außen vor. Aus diesem Grund wird schon bei relativ einfachen Strömungskonfigurationen eine Vermischung verschiedenster Wellenlängen und Frequenzen einzelner Moden und Zeitkoeffizienten festgestellt. Mit dem Ziel, nur spezifische Moden einer zeitlich (schwach) veränderlichen Harmonik zu selektieren bzw. zu extrahieren, ist eine Kombination von Frequenzfilterung und POD erstrebenswert. Ein solcher Algorithmus, der zugleich auch die energetische Sortierung der Zerlegung involviert, wurde von TADMOR *et al.* (2008) vorgestellt. Die von den Autoren als *Temporal Harmonic Specific POD Mode Extraction* (hier abgekürzt durch TH-POD) bezeichnete Methode ist im notwendigen Aufwand einer Prozeßkette aus POD-Zerlegung, Filterung der Zeitkoeffizienten, Rekonstruktion und erneuter POD-Zerlegung deutlich überlegen. Im Folgenden soll die spezifische Durchführung der eingesetzten TH-POD vorgestellt werden.

Vor dem Entschluß, eine harmonische Filterung mit POD zu kombinieren, steht i. A. die Kenntnis der Ergebnisse basierend auf einer gewöhnlichen POD. Ausgangspunkt für die TH-POD ist deshalb eine bereits vorhandene Zerlegung bzw. eine niederdimensionale Beschreibung des Schnappschußensembles.

4.3.1 Bestimmung der Harmonik

Idealerweise wird die Filterung bezüglich einer speziellen Wellenlänge oder Frequenz zur Bestimmung der zugehörigen turbulenten Einzelphänomene verwendet, sofern eine derartige Trennung möglich ist. Im einfachsten Szenario wird eine fixe Frequenz für die Filterung verwendet. Diese kann auf Zielwerten, spektralen Spitzenwerten oder einfach auf Erwartungswerten, z. B. aus der Literatur, fußen. Die Verwendung zeitlich unveränderlicher Frequenzen kann zu schlechten Filterergebnissen führen, wenn die tatsächlich vorhandenen Frequenzen abweichen oder eine zeitliche Variation der Frequenz vorliegt. Deshalb empfiehlt es sich, die Grundlage der Filterung direkt dem dynamischen Strömungssystem zu entnehmen. Damit werden auch die allgemein immer vorhandenen Frequenzschwankungen erfaßt.

Eine Zusammenfassung und Interpretationen von den zahlreichen Bestimmungs- oder besser Schätzmethoden momentaner Frequenzen einer dominanten Harmonik, sowie Richtlinien dazu, finden sich bei BOASHASH (1992). Dort werden Methoden wie Differenzierung der Phase mit anschließender Glättung, adaptive Frequenzschätzung mit Phasenregelschleifen, Extraktion des Spitzenwertes aus zeitvariierenden Spektren oder die Modellierung der Phase als Polynom bewertet. Die Ideen und Schwierigkeiten dieser Methoden fassen TADMOR *et al.* (2008) nochmals zusammen, bevor ein anderer, einfacher, aber robuster Weg für Strömungen mit periodischer Dominanz vorgeschlagen wird. Durch die direkte Verwendung des Phasenwinkels $\Phi = \omega t$ anstelle von Frequenz und Zeit ωt müssen bei der Integration im Rahmen der lokalen Filterung keine veränderlichen Fensterweiten berücksichtigt werden. Stattdessen ist die eigentlich instantan veränderliche Periodendauer ersetzt durch den fixen Phasenbereich 2π und nun der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels $\Phi(t)$ direkt zu bestimmen.

Bei vielen Strömungen, vorwiegend denjenigen mit stark dreidimensionalen Effekten, sind verschiedene Frequenzen in den Zeitkoeffizienten höherer Moden vermischt. Dennoch wird über das dominante Modenpaar, typischerweise [1,2], in den meisten Fällen eine nahezu rein amplitudenmodulierte Frequenz beschrieben (TADMOR *et al.*, 2008). Die Zeitkoeffizienten a_1 und a_2 repräsentieren dann eine Paarung nach Art von Cosinus- und Sinus-Funktion.

$$a_1(t) = A_1(t)\cos[\Phi(t)] \qquad a_2(t) = A_2(t)\sin[\Phi(t)] \tag{4.24}$$

Für den üblichen Fall, daß die Zeitkonstanten der zeitlich variierenden Amplituden $A_1(t)$ und $A_2(t)$ sowie der Frequenz $\omega(t) = \dot{\Phi}(t)$ deutlich größer sind als die instantane Periodendauer, kann der Phasenwinkel aus dem eingeschlossenen Winkel der komplexen Repräsentation der Zeitkoeffizienten $a_1(t) + \imath a_2(t)$ bestimmt werden.

$$\Phi(t) = \arctan\left[\frac{a_2(t)}{a_1(t)}\right] \tag{4.25}$$

Nach Umwandlung in einen kontinuierlich und monoton steigenden Phasenwinkel kann diese Form der zeitlich variablen Harmonik bei Bedarf noch Tiefpaß-gefiltert werden. Die Frequenz $\omega(t)$ kann zur Vervollständigung über eine lokale Geradenapproximation der zeitlichen Ableitung von Φ berechnet werden (Beispiel in Abbildung 4.3).

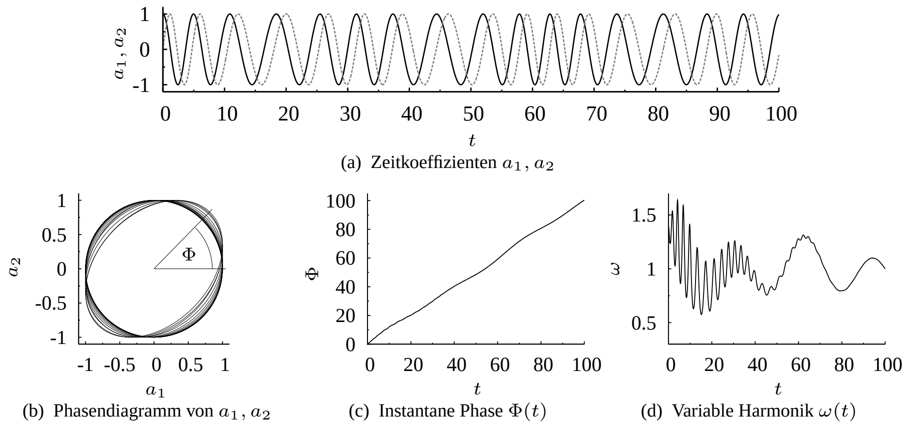


***Abb.** 4.3:* Beispielergebnisse für eine dominante, zeitlich variable Harmonik (Zeitkoeffizienten künstlich konstruiert)

4.3.2 Harmonische Filterung

Durch die bereits vorhandene POD-Zerlegung in Zeit und Raum sind einzig die Zeitkoeffizienten zu filtern. Die Filterung bezüglich des Phasenwinkels $\Phi(t)$ soll durch Integration über ein zentriertes, mitbewegtes Fenster der Breite 2π approximiert werden. Zu diesem Zweck wird die zeitliche Abhängigkeit der Koeffizienten $a_m(t)$ durch eine Abhängigkeit vom Phasenwinkel $a_m(\Phi)$ substituiert. Außerdem bietet es sich an, die Zeitkoeffizienten mit einem Interpolationsverfahren auf ein äquidistantes Gitter für den Phasenwinkel mit den Phaseninkrementen $\Delta\Phi$ zu übertragen.

$$\begin{aligned} & a_m(t_n) \;\mapsto\; a_m(\Phi_n) \;\mapsto\; a_m(\Phi_l) \\ & \qquad \text{mit} \qquad \Phi_n = \Phi(t_n) \;\mapsto\; \Phi_l = \Phi_1, \Phi_1 + \Delta\Phi, ..., \Phi_N - \Delta\Phi, \Phi_N \\ & \qquad \text{und} \qquad n = 1...N,\; m = 1...M,\; l = 1...\frac{\Phi_N - \Phi_1}{\Delta\Phi} = L \end{aligned} \tag{4.26}$$

Koeffizienten $b_m^k(\Phi)$ und $c_m^k(\Phi)$, zugehörig einer Harmonik k und Mode m sind in der Approximation der Zeitkoeffizienten a_m mit Hilfe einer begrenzten harmonischen Expansion enthalten, hier über dem bewegten Fenster $\Theta \in [-\pi : \pi]$ (TADMOR *et al.*, 2008).

$$a_m(\Phi{+}\Theta) \approx b_m^0(\Phi) + \sum_{k=1}^{K} b_m^k(\Phi)\cos(k\Theta) + c_m^k \sin(k\Theta) \tag{4.27}$$

Bei Auswertung dieser Reihe im Zentrum des Fensters $\Theta = 0$ verbleibt ein stark vereinfachter Ausdruck, der neben dem Mittelwert $b_m^0(\Phi)$ auch die gesuchten gefilterten Koeffizienten $b_m^1(\Phi)$ enthält.

$$a_m(\Phi) \approx b_m^0(\Phi) + \sum_{k=1}^{K} b_m^k(\Phi) \tag{4.28}$$

Die Berechnung des Mittelwertes ist trivial, und die Definition der Koeffizienten ergibt sich aus Fourier-Projektion der Zeitkoeffizienten auf die jeweilige Harmonik (LUCHTENBURG, 2008).

$$b_m^0(\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_m(\Phi{+}\Psi)\;\mathrm{d}\Psi \tag{4.29}$$

$$b_m^k(\Phi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_m(\Phi{+}\Psi)\cos(k\Psi)\;\mathrm{d}\Psi \tag{4.30}$$

Durch Setzen von $k = 1$ in (4.30) lassen sich die gefilterten Zeitkoeffizienten für die Moden $m = 1...M$ berechnen. Aufgrund der Ergebnisse der gewöhnlichen POD liegt bereits eine niederdimensionale Beschreibung des Datenensembles vor, so daß nur die ersten $M_F \leq M$ relevanten Moden im Weiteren berücksichtigt zu werden brauchen.

4.3.3 Spezifische Zerlegung zur Harmonik

Mit der Filterung soll erreicht werden, daß aus den bisherigen Moden die nicht zur spezifizierten Harmonik gehörigen Anteile eliminiert werden. Damit diese wieder im Sinne energetischer Optimalität bereit stehen, wird idealerweise eine weitere POD-Zerlegung durchgeführt. Die Eingangsdaten dafür sind jetzt die gefilterten Zeitkoeffizienten $b(m, \Phi_l)$, so daß deren Zerlegung in Koeffizient $\alpha_p(\Phi_l)$ und Mode $\beta_p(m)$ gesucht wird.[40]

$$b(m, \Phi_l) = \sum_{p=1}^{M_F} \alpha_p(\Phi_l)\;\beta_p(m) \tag{4.31}$$

[40] Der Index m am Zeitkoeffizienten b wird hier in die Abhängigkeitenliste gezogen, da jetzt das Ensemble aus $m = M_F$ gefilterten Koeffizienten gemeint ist und nicht mehr der zur Mode m gehörige.

LUCHTENBURG (2008) benutzt die Singulärwertzerlegung (engl. singular value decomposition, SVD) um die Aufteilung zu berechnen. Während POD für kontinuierliche Probleme bzw. unendlich viele Datensätze geeignet ist, ist SVD die Entsprechung für endliche Dimensionen (CHATTERJEE, 2000). Mit ihrer Hilfe wird eine Matrix, hier die Matrixform der gefilterten Koeffizienten $b(m, \Phi_l)$, als Produkt von drei speziellen Matrizen dargestellt. Im vorliegenden Fall liefert die SVD ein Produkt aus den beiden orthogonalen Matrizen U und V sowie der reellen Diagonalmatrix Σ mit den Singulärwerten.

$$b(m, \Phi_l) = U_{mq}\Sigma_{qr}V_{lr} \qquad \text{mit} \qquad b(m, \Phi_l) = \begin{bmatrix} b_1(\Phi_l) \\ \vdots \\ b_m(\Phi_l) \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

$$\text{und} \qquad m, q, r = 1...M_F,\ l = 1...L$$

Durch Multiplikation der Koeffizientenmatrix mit sich selbst wird abermals eine Art Korrelationsmatrix C_{mn} erschaffen, womit nach geringer Umformung das Eigenwertproblem formuliert ist.

$$\begin{aligned} b(m, \Phi_l)b(n, \Phi_l) = \mathsf{C}_{mn} &= U_{mq}\Sigma_{qr}V_{lr}V_{sl}\Sigma_{ts}U_{tn} \qquad \text{mit} \qquad n, s, t = 1...M_F \\ &= U_{mq}\Sigma_{qr}\Sigma_{tr}U_{tn} \\ &= U_{mq}\Lambda_{qt}U_{tn} \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\mathsf{C}_{mn}U_{nt} = U_{mq}\Lambda_{qt} \tag{4.34}$$

Die Gleichung (4.34) stellt das zu lösende Eigenwertproblem mit der Diagonalmatrix der Eigenwerte Λ und der Matrix der Eigenvektoren U dar. Nach dessen Lösung können die Matrizen Σ und V leicht berechnet werden. Der Vergleich von (4.31) und (4.32) liefert den Zusammenhang zwischen den Zeitkoeffizienten bzw. Moden der zweiten Zerlegung und den SVD-Matrizen.

$$\alpha_p(\Phi_l) = \Sigma_{pq}V_{lq} \tag{4.35}$$

$$\beta_p(m) = U_{mp} \tag{4.36}$$

Abschließend verbleibt die Berechnung der gefilterten Moden der ursprünglichen Strömungsgröße ϕ. Dafür werden die Zeitkoeffizienten $a_m(t_n)$ der POD-Zerlegung des Schnappschußensembles (4.10) durch die POD-Zerlegung der gefilterten Zeitkoeffizienten (4.31) ersetzt. Selbstverständlich kann das Ergebnis nur eine Dekomposition eines harmonisch gefilterten Schnappschußfeldes $\breve{\phi}(x_i, \Phi_l)$ sein, welches auch noch niederdimensional beschrieben ist ($M_F < M$).

$$\breve{\phi}(x_i, \Phi_l) = \phi_0(x_i) + \sum_{m=1}^{M_F} \alpha_m(\Phi_l) \sum_{p=1}^{M_F} \beta_{mp}\ \phi_p(x_i) \tag{4.37}$$

Während α_p bereits die neuen Zeitkoeffizienten beschreibt, können die neuen Moden $\breve{\phi}_m(x_i)$ mit (4.16) auf die Schnappschüsse $\phi(x_i, t_n)$ zurückgeführt werden (LUCHTENBURG, 2008).

$$\breve{\phi}_m(x_i) = \sum_{p=1}^{M_F} \beta_{mp}\, \phi_p(x_i) \tag{4.38}$$

$$= \sum_{p=1}^{M_F} \beta_{mp} \sum_{n=1}^{N} w_n^p\, [\phi(x_i, t_n) - \phi_0]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{M_F} \beta_{mp}\, w_n^p\, [\phi(x_i, t_n) - \phi_0]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \breve{w}_n^m\, [\phi(x_i, t_n) - \phi_0] \tag{4.39}$$

Die POD-Gewichte für die Moden des harmonisch gefilterten Ensembles berechnen sich aus den Moden $\beta_{mp} = \beta_m(p)$ und den ursprünglichen Gewichten w_n^m zu $\breve{w}_n^m = \sum_p \beta_{mp} w_n^p$. Offenbar ändert die harmonische Filterung nichts an der Linearität des Gesamtsystems, denn der Vektor β_{mp} für die neue Mode m gibt an, wieviel additiven Anteil diese jeweils an den alten Moden p hat. Dennoch gelten die Moden $\breve{\phi}_m(x_i)$ nur noch für die zur Filterung verwendete Harmonik, sind dann aber energetisch sortiert. Für jede weitere Frequenz von Interesse müssen wieder mindestens M_F neue Moden berechnet und gespeichert werden, was die Anwendung von TH-POD auf wenige Frequenzen limitiert.

Die räumliche Orthogonalität der Moden ist je nach verwendeter Harmonik nicht garantiert. Bei Verwendung dominanter Frequenzen, welche immer eng an kohärente Strukturen gekoppelt sind, ist sie aber meist doch gegeben (TADMOR *et al.*, 2008).

4.4 Phasenmittelung

Die Phasenmittelung ist eine der gebräuchlichsten Methoden zur Analyse von Strömungsfeldern mit dominierenden Frequenzen. Die Unterteilung einer sich periodisch wiederholenden Schwingung in eine endliche Anzahl Intervalle des Phasenwinkels und anschließende Ensemblemittelung derjenigen Schnappschüsse im gleichen Intervall offeriert eine Art Frequenzselektion der Strömungsstrukturen. Für die Bestimmung der Harmonik gelten die Ausführungen im Abschnitt 4.3.1 analog. In den meisten Fällen wird die dominante Frequenz des Systems aus einer Spektralanalyse ermittelt und für die Phasenmittelung verwendet. Erst in neueren Arbeiten wird konsequent auch eine zeitlich variable Frequenz berücksichtigt bzw. eine dem dynamischen System direkt über POD entnommene Frequenz verwendet (siehe z. B. PERRIN *et al.*, 2007; JENSCH *et al.*, 2009).

Bei den vorliegenden Untersuchungen wurden zwei verschiedene Ansätze verfolgt. Zum einen werden die dominante Frequenz und die Phasenlagen aus einem global oder lokal aufgezeichneten Signal ermittelt und zum anderen die Phasenlagen aus dem Phasendiagramm der Zeitkoeffizienten des dominanten POD-Modenpaares verwendet.

4.4.1 Verwendung der Spektralanalyse

Während der Simulation können globale Größen, z. B. Kraftbeiwerte oder lokale Strömungsgrößen wie Geschwindigkeit und Druck in ihrem zeitlichen Verlauf punktuell verfolgt werden. Bei Vorhandensein einer dominanten Frequenz kann diese mit einer Spektralanalyse ermittelt werden. Da besonders bei turbulenten Strömungen oftmals eher ein dominantes Frequenzband vorzufinden ist, ist die Entscheidung über den exakten Wert nahezu willkürlich. Es empfiehlt sich, das mittelwertfreie Signal mit einem nicht zu breiten Bandpaß zu filtern, um die überlagerten Schwingungen weitestgehend zu eliminieren. Anschließend wird das gefilterte Signal idealerweise normiert und die lokale Periodendauer basierend auf den Nullstellen bestimmt. Die Periode kann nun in eine endliche Anzahl an Phasenintervallen geteilt werden und die Momentanaufnahmen des Strömungsfeldes je nach Phasenlage einsortiert werden. Bei hochaufgelösten Strömungsdaten ist das abgedeckte Gesamtzeitintervall oftmals nicht beliebig groß, so daß eher eine kleine Zahl (z. B. 16 oder 32) an Phasenlagen N_P gewählt wird, um eine ausreichende Statistik für die phasengemittelten Felder $\langle\phi(x_i,\Phi^p)\rangle$ zu erzielen. Gemittelt wird jeweils über die N_S^p Schnappschüsse $\phi(x_i,t_n^p)$ mit der Phasenlage bzw. im Phasenintervall Φ^p.

$$\langle\phi(x_i,\Phi^p)\rangle = \frac{1}{N_S^p}\sum_{n=1}^{N_S^p}\phi(x_i,t_n^p) \qquad \text{mit} \qquad p = 1 ... N_P \tag{4.40}$$

Abbildung 4.4 zeigt an einem Beispiel die Erzeugung der Phasenintervalle sowie das Ergebnis der Phasenmittelung für ein beispielhaftes Drucksignal. Die mit dieser Art der Mittelung erzielten Ergebnisse sind auch bei größerer Anzahl an Datensätzen suboptimal, weil die dominante Frequenz zeitlich variiert. Eine Alternative ist im nächsten Abschnitt beschrieben.

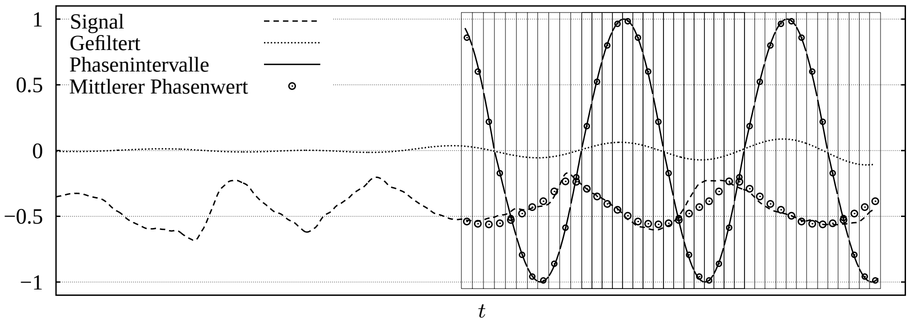


***Abb.** 4.4:* Durchführung der Phasenmittelung an einem Beispiel (Drucksignal aus LES, schmaler Bandpaßfilter, Phasenaufteilung $N_P = 16$, Schnappschußanzahl $N_S^p = 26...41$)

4.4.2 Verwendung von dominantem POD-Modenpaar

Um die Phasenmittelung auf Basis der Zeitkoeffizienten des dominanten Modenpaares durchzuführen, wird analog der Beschreibung im Abschnitt 4.3.1 die Phasenlage jedes instantanen Schnappschusses bestimmt. Allerdings verbleibt die Phase hier im Intervall $[0, 2\pi]$ und wird nicht kontinuierlich erweitert. Nach der Unterteilung in verschiedene Phasenlagen kann wiederum die Mittelung der Schnappschüsse mit gleicher Phasenlage nach (4.40) erfolgen. Idealerweise ist diese Vorgehensweise für unterabgetastete Strömungsfelder bzw. zeitlich nicht korrelierte Datensätze geeignet. Letzterer Umstand erlaubt die Vereinigung verschiedener Simulationsdaten bzw. experimenteller Messungen im Rahmen einer Phasenmittelung.

4.5 Partikelverfolgung

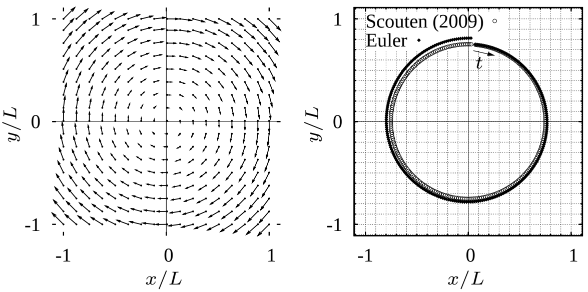
Die Beobachtung und Simulation von Strömungen erfolgt im einfachen Anwendungsfall hauptsächlich in raumfesten Volumina. Eine Strömungsgröße wird bei ihrem Transport durch das Volumen sondiert, wobei der Fokus auf fixierten Ortskoordinaten liegt und Strömungspartikel die Volumengrenzen passieren (Euler-Betrachtungsweise). Demgegenüber liefert die Betrachtung eines mit der Strömung mitbewegten Volumens bestehend aus Fluidpartikeln (Lagrange-Betrachtungsweise) ein kinematisch bereinigtes Bild der Strömung. Durch die Verfolgung einzelner Partikel auf ihrem Weg lassen sich Bahnlinien (Trajektorien) bestimmen, mit deren Hilfe die Interaktionen und Übergänge zwischen verschiedenen Wirbelstrukturen analysiert werden können. Bahnlinien erlauben vor allem direkt den zeitlichen Verlauf aufeinanderfolgender Strömungsphänomene sichtbar zu machen.

Da für die Simulation einphasiger Strömungen meist keine Informationen über Fluidteilchen notwendig oder verfügbar sind, werden die Bahnlinien für räumlich beliebig eingesetzte, masselose Partikel berechnet. Bei dem einfachsten Ansatz schreitet die Bahnlinie in Richtung des lokalen Gradienten fort (Euler-Verfahren). Überführt auf das Strömungsproblem erfolgt die Integration des Partikelpfades für das Partikel ξ^p über Zuwächse $u_i(\xi^p)\Delta t$ mit der lokalen Partikelgeschwindigkeit $u_i(\xi^p)$ im Zeitintervall Δt. Die Partikelgeschwindigkeit wird basierend auf der aktuellen Position aus den umliegenden Zellwerten geeignet (z. B. linear) interpoliert.

$$x_i^{k+1}(\xi^p) = x_i^k(\xi^p) + u_i(\xi^p)\Delta t \tag{4.41}$$

Die einzelnen Punkte der Bahnlinie x_i^k entsprechen hier exakt der Zeitebene k. Dieser einfache und robuste Ansatz ist jedoch nur von erster Ordnung genau, weshalb die approximierte Bahnlinie schnell von der physikalisch existenten stark abweicht. Für zeitlich hochaufgelöste Datensätze, wie etwa im Rahmen einer LES, sind die Abweichungen allerdings noch vertretbar (siehe Abbildung 4.5).

Für die weitere Verwendung der Bahnlinien, z. B. bei der Auswertung von Lagrangeschen Statistiken oder der dynamischen Glättung (siehe Abschnitt 4.6.1), ist ein Verfahren höherer Ordnung für die räumlich-zeitliche Integration einzusetzen. Die hier favorisierte Methode basiert auf einer den vorliegenden Untersuchungen zugeordneten Arbeit von SCOUTEN (2009). Für die Integration der Bahnlinie wurde ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren nach FEHLBERG (1969) mit den Koeffizienten von CASH & KARP (1990) benutzt. Die Methoden dieser Art zeichnen sich dadurch aus, daß sich aus unterschiedlicher Kombination der Einzelgleichungen für die Stützstellen mindestens zwei Integrationsvorschriften benachbarter Fehlerordnung ergeben. Der Unterschied beider Integrationsergebnisse dient zur Abschätzung des Fehlers und weiterhin zur Schrittweitenadaption. Das eingesetzte Verfahren basiert auf sechs Stützstellen und ist



Rechengebiet, Gitterweite:
$x_\alpha = -L \ldots L\,,\, \Delta x_\alpha = 2L/127$
Geschwindigkeitsfeld:
$u_\alpha(x_\alpha) = x_\alpha \frac{U_\infty}{L}\ ,\ \alpha = 1, 2$
Zeitschritt, Zeitbereich:
$\Delta t = 0.025 \frac{L}{U_\infty}\ , T = 250 \Delta t$
Partikel-Startposition:
$x_\alpha^0 = (0.05, 0.75)^{\mathrm{t}} L$

(a) Stationäre Wirbelströmung (b) Partikeltrajektorien (c) Strömungskonfiguration

***Abb.** 4.5:* Partikelverfolgung in einer stationären Wirbelströmung

von fünfter Ordnung genau, während das eingebettete Verfahren von vierter Ordnung ist. Vorteilhaft für die numerische Umsetzung ist, daß alle Integrationszwischenschritte k_r nur einmal berechnet werden müssen. Die Integrationsvorschrift fünfter Ordnung für die Partikelbahn ist in den nachstehenden Gleichungen (4.42) angegeben. Darin sind h^k die aktuelle Schrittweite, α_r die Integrationsstützstellen, β_{rl} die Integrationskoeffizienten und γ_r die Integrationsgewichte. Zur Vereinfachung wird für die Partikelkoordinaten $x_i^k(\xi^P) = x_i^k$ benutzt sowie die funktionale Abhängigkeit $k_{1\ldots 6}(t^k, x_i^k)$ vorausgesetzt.

$$
\begin{aligned}
x_i^{k+1} &= x_i^k + h^k \left(\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + \gamma_3 k_3 + \gamma_4 k_4 + \gamma_5 k_5 + \gamma_6 k_6\right) \\
k_1 &= u_i \left(t^k \qquad\qquad , \ x_i^k\right) \\
k_2 &= u_i \left(t^k + \alpha_2 h^k,\ x_i^k + h^k \beta_{21} k_1\right) \\
k_3 &= u_i \left(t^k + \alpha_3 h^k,\ x_i^k + h^k \beta_{31} k_1 + h^k \beta_{32} k_2\right) \\
k_4 &= u_i \left(t^k + \alpha_4 h^k,\ x_i^k + h^k \beta_{41} k_1 + h^k \beta_{42} k_2 + h^k \beta_{43} k_3\right) \\
k_5 &= u_i \left(t^k + \alpha_5 h^k,\ x_i^k + h^k \beta_{51} k_1 + h^k \beta_{52} k_2 + h^k \beta_{53} k_3 + h^k \beta_{54} k_4\right) \\
k_6 &= u_i \left(t^k + \alpha_6 h^k,\ x_i^k + h^k \beta_{61} k_1 + h^k \beta_{62} k_2 + h^k \beta_{63} k_3 + h^k \beta_{64} k_4 + h^k \beta_{65} k_5\right)
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Die eingebettete Methode vierter Ordnung (4.43) benutzt lediglich andere Gewichte γ_r^*.

$$
x_i^{k+1} = x_i^k + h^k \left(\gamma_1^* k_1 + \gamma_2^* k_2 + \gamma_3^* k_3 + \gamma_4^* k_4 + \gamma_5^* k_5 + \gamma_6^* k_6\right) \tag{4.43}
$$

Weil eine vollständige Implementierung des angegebenen Runge-Kutta-Verfahrens inklusive Schrittweitensteuerung aus *Numerical Recipes* (PRESS *et al.*, 2007) verwendet wurde, ist die Validierung obsolet. Die weiteren Feinheiten sowie die Angabe des Koeffizientensatzes (in Form des Butcher-Diagramms) werden im Weiteren nicht benötigt und bleiben der zitierten Literatur vorbehalten. Für die Integration bleibt anzumerken, daß das Gesamtverfahren von vierter Ordnung genau ist, weil die Vorschrift fünfter Ordnung lediglich zur Fehlerabschätzung benutzt wird. Dadurch können alle Schritte innerhalb einer vorgegebenen Genauigkeit durchgeführt werden.

Im Gegensatz zum simplen Euler-Verfahren müssen die Geschwindigkeiten an zeitlichen und räumlichen Zwischenebenen interpoliert werden. Zu diesem Zweck benutzt SCOUTEN (2009) ein kubisches Interpolationsverfahren, das jeweils vier Stützstellen für die Raumrichtungen und die Zeit benötigt. Diese Stützstellen sind zumindest zeitlich so verteilt, daß der zu interpolierende Wert immer zwischen den beiden mittleren lokalisiert ist. Die Interpolationsvorschrift bezüglich der Zeit ist in (4.44) angegeben und in Abbildung 4.6 beispielhaft dargestellt. Für die einzelnen Raumrichtungen gilt diese analog. Für die vollständige räumlich-zeitliche Interpolation müssen die vier einzelnen Vorschriften ineinander geschachtelt werden, so daß im Allgemeinen eine einzelne Geschwindigkeit aus $4^4 = 256$ räumlich-zeitlichen Gitterpunkten interpoliert wird. Die programmtechnische Umsetzung erfolgt mittels Abbildung auf ein 4^4-Referenzgitter, wodurch keine Unterscheidung der Interpolationskoeffizienten nach Raumrichtung oder Zeit notwendig ist. Aufgrund der gewählten Bereichsgrenzen -1 und 1 für das Referenzgitter wird zusätzlich der numerische Fehler optimal.

$$
\begin{aligned}
u_i(t, a_0, a_1, a_2, a_3) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\
a_0 &= u_i^t \\
a_1 &= \frac{1}{\Delta t}\left(-\frac{1}{3}u_i^{t-1} - \frac{1}{2}u_i^t + u_i^{t+1} - \frac{1}{6}u_i^{t+2}\right) \\
a_2 &= \frac{1}{\Delta t^2}\left(\frac{1}{2}u_i^{t-1} - u_i^t + \frac{1}{2}u_i^{t+1}\right) \\
a_3 &= \frac{1}{\Delta t^3}\left(-\frac{1}{6}u_i^{t-1} + \frac{1}{2}u_i^t - \frac{1}{2}u_i^{t+1} + \frac{1}{6}u_i^{t+2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

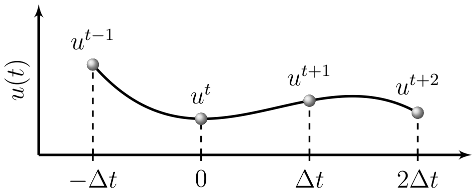


***Abb.** 4.6:* Beispiel für die kubische Interpolation bezüglich der Zeit für eine Geschwindigkeitskomponente nach (4.44)

Die Integration der Bahnlinie erfolgt abschnittsweise innerhalb der Zeitintervalle Δt des Schnappschußensembles. Die dem Verfahren inhärent zugehörige Schrittweitensteuerung wird hier zur Berechnung von zeitlichen Zwischenebenen benutzt, um die vorgegebene Genauigkeit kontinuierlich zu gewährleisten. Die benötigten Geschwindigkeiten zu den Zwischenschritten werden mit der kubischen Interpolation bestimmt. Letztlich wird die Partikelposition und die interpolierte Geschwindigkeit nur für die extern über Δt vorgegebenen Zeitebenen gespeichert. Die Auswirkungen der hohen Genauigkeit des Gesamtverfahrens sind in Abbildung 4.5 offensichtlich.

4.6 Strukturverfolgung

Die Überlagerung verschiedener turbulenter Phänomene in einem räumlich engen Bereich des Strömungsfeldes, z. B. in stark dreidimensional vermischten Ablösegebieten, verhindert eine eindeutige Differenzierung der Einzelphänomene. Eine der Ursachen dafür ist die Vermischung der Wellenlängen und Frequenzen aufgrund von (nichtlinearer) Interaktion. Die gezielte Verfolgung separierter Turbulenzballen verspricht ein besseres Verständnis für die Ordnung im instationären Gewirr. Aus diesem Grund wurde die Entwicklung eines Algorithmus zur Strukturverfolgung angestoßen und fachlich begleitet. Die detaillierte Beschreibung und Anwendung dieser neuen, als *Coherent Structure Tracking (CST)* bezeichneten Methode findet sich bei SCOUTEN (2009). Im Folgenden werden die wesentlichen Bestandteile des Verfahrens bezüglich physikalischer Gesichtspunkte beleuchtet, ohne auf die Art der Implementierung einzugehen.

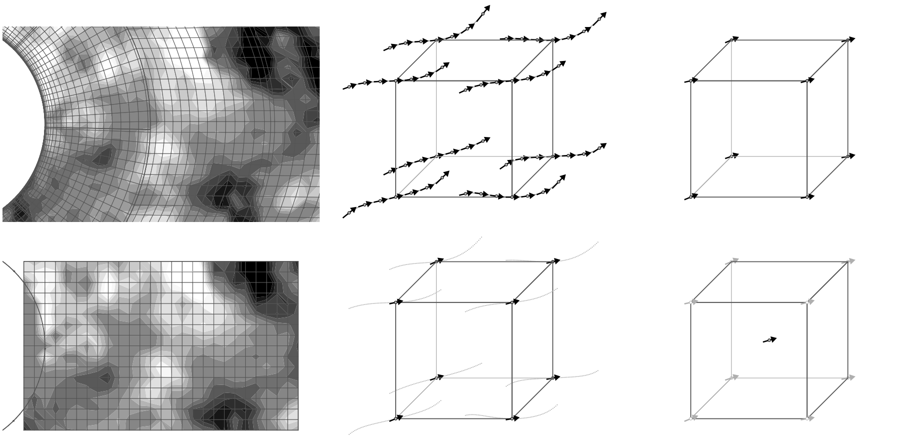
4.6.1 Aufbau des Algorithmus

Grundidee der Strukturverfolgung CST ist die Extraktion zusammenhängender Gebiete aus den Strömungsdaten. Beispiele für die Suche derartiger Gebiete sind die Levelset-Methode (OSHER & FEDKIW, 2001) und Lagrangesche, kohärente Strukturen (HALLER, 2002). Im vorliegenden Fall soll die Extraktion kohärenter Turbulenzgebiete basierend auf einem Wirbelkernkriterium erfolgen. Für die erfolgreiche Verfolgung der Wirbelgebiete in Zeit und Raum sind mindestens fünf Teilschritte notwendig, die schematisch in Abbildung 4.7 dargestellt sind.

Abb. *4.7:* Schematischer Arbeitsablauf der Strukturverfolgung CST

Glättung und Filterung des Geschwindigkeitsfeldes Im Lauf der Entwicklungsphase von CST hat sich herausgestellt, daß die Glättung und Filterung des Strömungsfeldes die Strukturverfolgung, speziell die Korrelation zwischen Zeitschritten, erleichtert. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, werden alle Geschwindigkeitsfelder räumlich auf ein kartesisches, äquidistantes Gitter (idealerweise nur ein relevanter Ausschnitt des Strömungsfeldes) linear interpoliert. Obwohl die neue räumliche Auflösung für den überwiegenden Nachlaufbereich in der gleichen Größenordnung sein sollte wie diejenige des allgemein krummlinigen Simulationsgitters, findet durch die Interpolation bereits eine Glättung statt. Die explizite Glättung und Filterung sind ein einheitliches Konzept, das auf dem vorgestellten, höherwertigen Verfahren zur Partikelverfolgung mit anschließender Mittelung basiert (Abschnitt 4.5). Die Mittelung wird entlang von Partikelbahnlinien durchgeführt, wobei zwei Teilschritte benutzt werden.

Zuerst werden Partikel an den Eckpunkten der kartesischen Gitterzellen eingesetzt und ihre Bahnlinie drei Zeitschritte vorwärts und drei rückwärts integriert. Die berechneten Bahnlinien werden abschließend über die sieben Zeitschritte und die acht Eckpunkte (insgesamt 56 Werte) zu einem neuen Geschwindigkeitsvektor im zentralen Punkt und Zeitschritt gemittelt (Skizze der Glättungsschritte in Abbildung 4.8). Der Vorteil dieses Glättungsansatzes ist die Verwendung des Lagrangeschen Geschwindigkeitsfeldes, um die Filterung kleiner Skalen dynamisch durchzuführen, wobei die kohärente Bewegung in den größeren Skalen erhalten bleibt (vgl. Abbildung 4.9).

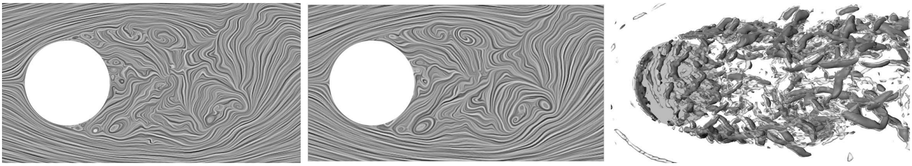


(a) Räumliche Interpolation (b) Zeitliche Mittelung (c) Räumliche Mittelung

***Abb.** 4.8:* Sukzessive Glättung und Filterung des Geschwindigkeitsfeldes durch (a) Interpolation auf räumlich reduziertes, kartesisches Gitter und (b) anschließender Mittelung entlang von Partikelbahnlinien sowie (c) räumlicher Mittelung bezüglich der Zellzentren

Berechnung Wirbelkernkriterium λ_2 im gefilterten Feld Für die Identifikation der kohärenten Strukturen wird das Wirbelkernkriterium von JOENG & HUSSAIN (1995) benutzt. Ohne auf die mathematische Definition einzugehen, wird dabei ein Eigenwertproblem gelöst, aus dessen Ergebnis der zweite Eigenwert λ_2 benutzt wird. Für lokale Werte $\lambda_2 < 0$ dominiert die Rotation über die Scherung, so daß Stromlinien in erster Näherung kreisförmig verlaufen. Durch die Anwendung auf das Vektorfeld der Geschwindigkeiten – hier bereits geglättet und gefiltert – wird ein Skalarfeld erzeugt, das als Grundlage der Strukturidentifikation ausgewählt wurde.

Strukturidentifikation im Raum In jedem zeitlichen Schnappschuß werden Strukturen einheitlich mit einem Isowert für λ_2 räumlich eingegrenzt. Die extrahierten Strukturen werden nochmals mit einem minimalen Strukturvolumen gefiltert, um eine Einschränkung auf die größeren Skalen zu gewährleisten. Zusätzlich wird gefordert, daß die Distanz zwischen benachbarten Punkten eines Wirbelgebietes innerhalb einer kritischer Länge zu finden ist, womit die Separation von Wirbelstrukturen begünstigt wird. Für die Umströmung des Zylinderstumpfes mit dem Durchmesser D (Abschnitt 5) sind die für den derzeitigen Algorithmus sinnvoll gewählten Werte und Grenzen: $\lambda_2 = -30$, minimales Volumen $3 \cdot 10^{-4} D^3$ (22 Gitterzellen) und kritische Distanz $0.03D$.



(a) Räumlich interpoliertes Geschwindigkeitsfeld
(b) Räumlich und zeitlich gefiltertes (gemitteltes) Feld
(c) λ_2-Wirbelstrukturen vor (hell) und nach Filterung (dunkel)

***Abb.** 4.9:* Wirkungsweise der dynamischen Filterung des Geschwindigkeitsfeldes am Beispiel der Zylinderstumpfumströmung (Schnittebene bzw. Ansicht von oben)

Korrelation in Raum und Zeit Die räumlich-zeitliche Zuordnung der identifizierten Strukturen eines jeden Zeitpunktes wird mit Hilfe der Korrelation der topologischen Strukturvolumina im zeitlichen Verlauf berechnet. Zwei Strukturen werden einander zugehörig betrachtet, wenn ein minimales, relatives Korrelationvolumen beidseitig mindestens erreicht wird. Für das mittels LES vorhergesagte, zeitlich hochaufgelöste instationäre Strömungsfeld um den Zylinderstumpf wurde dieser Minimalwert zu 20% gewählt.

Verfolgung von Strukturereignissen Durch die Zuordnung aller Strukturen aufeinanderfolgender Zeitschritte können korrelierte Volumina auch zwischen drei und mehr Wirbelgebieten auftreten. Der Verlust jeglicher erfolgreicher Korrelation ist ebenfalls denkbar. Je nach Zahl beteiligter Volumina einer Zuordnung werden verschiedene Strukturereignisse unterschieden. Die beobachtbaren Ereignisse können im Sinne der turbulenten Energiekaskade interpretiert werden, wobei jedoch die Einschränkung auf große Skalen im Zusammenhang mit den verschiedenen Filterstufen eine deutliche Relativierung fordert. Mit Hilfe der Strukturbahnlinie als zeitlicher Bewegung des geometrischen Strukturmittelpunktes lassen sich unterscheiden: Geburt (Produktion bzw. Formation), einfache Bewegung (Konvektion), Vereinigung oder Aufteilung (Energietransfer) und Tod (Dissipation) einer bzw. mehrerer Strukturen.

4.6.2 Eigenschaften des Ansatzes

Die vorgestellten Teilschritte von CST erlauben die modulare Ausstattung des Ansatzes mit unterschiedlichen Algorithmen für jeden Zwischenschritt. Die aktuelle Implementierung nutzt ein topologisches Modell zur Darstellung der Strömungsstrukturen, das auf dem Eulerschen Geschwindigkeitsfeld basiert. Obwohl die Glättung auf einer Lagrangeschen Partikelverfolgung basiert, involvieren die identifizierten Wirbel in ihrer zeitlichen Entwicklung nicht die gleichen Partikel.

Die Qualität der verfolgten Strukturen kann beispielsweise über die Kontinuität im repräsentierten Strukturvolumen beurteilt werden. Hier zeigen sich noch ungewünscht starke Variationen (vgl. Abbildung 7.113 b), wenngleich bereits sprunghafte Änderungen auf Strukturereignisse wie Vereinigung und Aufteilung hinweisen. Bisher reicht das Verfahren nur für ein qualitatives Bild verschiedener dynamischer Regionen in der Strömung. Für eine quantitative Analyse, z. B. basierend auf Konvektionsgeschwindigkeiten und vorhandener Frequenzen, sind unbedingt Verbesserungen hinsichtlich Glattheit der Strukturen notwendig. Die derzeitige Verwendung des

Kriteriums λ_2 ist zu sensitiv bezüglich des gewählten Isowertes und ermöglicht eine detektierbare Separation der Einzelstrukturen nur für relativ kleine Werte. Trotzdem etabliert dessen Einsatz die Fähigkeit Wirbelformation festzustellen, was im Abschnitt 7.7.3 zielführend genutzt werden kann. Außerdem assistiert die inhärente Filterung sowie die Extraktion von Bahnlinien bei der Erkundung dreidimensionaler Strömungsfelder.

4.7 Berechnung statistischer Momente

In erster Linie werden instationäre Daten auf statistischen Größen, wie z. B. mittleren Größen und Korrelationen, basierend ausgewertet. Neben der einfachen Mittelung während einer Simulation bedarf die Summation von Fluktuationsgrößen n-ter Ordnung bezüglich der Hauptströmung zusätzlicher Arbeit, da die Mittelwerte im Vorfeld nicht bekannt sind. Um beispielsweise eine Doppelkorrelation von ϕ' und ψ' zu berechnen, wird die Zerlegung einer Strömungsgröße $\phi = \overline{\phi} + \phi'$ benutzt, um die Fluktuationen durch vorhandene Mittelwerte auszudrücken.

$$\begin{aligned}\overline{\phi'\psi'} &= \overline{(\phi - \overline{\phi})(\psi - \overline{\psi})} \\ &= \overline{\phi\psi} - \overline{\phi}\,\overline{\psi}\end{aligned} \tag{4.45}$$

Die Terme $\sum \phi\psi$ und $\sum \phi$ werden während der Simulation aufsummiert und gemeinsam mit der Anzahl der Realisierungen n gespeichert. Dadurch können die Doppelkorrelationen bei der Ausgabe berechnet werden sowie die statistische Basis erweitert werden.

$$\overline{\phi\psi} = \frac{1}{n}\sum \phi\psi - \frac{1}{n}\sum \phi \, \frac{1}{n}\sum \psi \tag{4.46}$$

Die gleiche Prozedur ist für die Berechnung von Tripelkorrelationen geeignet zu erweitern.

$$\begin{aligned}\overline{\phi'\chi'\psi'} &= \overline{(\phi - \overline{\phi})(\chi - \overline{\chi})(\psi - \overline{\psi})} \\ &= \overline{\phi\chi\psi} - \overline{\overline{\phi}\chi\psi} - \overline{\phi\overline{\chi}\psi} + \overline{\overline{\phi}\,\overline{\chi}\psi} - \overline{\phi\chi\overline{\psi}} + \overline{\overline{\phi}\chi\overline{\psi}} + \overline{\phi\overline{\chi}\,\overline{\psi}} - \overline{\overline{\phi}\,\overline{\chi}\,\overline{\psi}} \\ &= \overline{\phi\chi\psi} - \overline{\phi}\,\overline{\chi\psi} - \overline{\chi}\,\overline{\phi\psi} + \overline{\phi}\,\overline{\chi}\,\overline{\psi} - \overline{\psi}\,\overline{\phi\chi} + \overline{\phi}\,\overline{\chi}\,\overline{\psi} + \overline{\phi}\,\overline{\chi}\,\overline{\psi} - \overline{\phi}\,\overline{\chi}\,\overline{\psi} \\ &= \overline{\phi\chi\psi} - \overline{\phi}\,\overline{\chi\psi} - \overline{\chi}\,\overline{\phi\psi} - \overline{\psi}\,\overline{\phi\chi} + 2\,\overline{\phi}\,\overline{\chi}\,\overline{\psi}\end{aligned} \tag{4.47}$$

Trotz der Berücksichtigung von Symmetrien und Kombinationen verschiedener Komponenten, benötigt die Berechnung der Tripelkorrelationen eines Strömungsvektors die Summation von zehn weiteren Termen $\sum \phi\chi\psi$.

Eine der wichtigsten Doppelkorrelationen einer Strömung sind die Reynolds-Spannungen $\overline{u_i'u_j'}$. Die Bilanzgleichungen der beiden wichtigsten Simulationsansätze, RANS und LES, verdeutlichen, daß die diffusiven Terme neben den viskosen Spannungen auch die modellierten turbulenten Reynolds- bzw. Feinstrukturspannungen beinhalten. Die Statistik der aufgelösten Skalen muß deshalb um die modellierten Spannungen erweitert werden. Im Weiteren werden diese Terme jedoch vernachlässigt, da sie auf der einen Seite in einer hochaufgelösten LES vergleichsweise klein sind und auf der anderen Seite nicht alle Terme in einer Simulation berechenbar sind. Diese Problematik verschärft sich bei der Auswertung von Tripelkorrelationen, für welche modellierte Fluktuationen (Doppelkorrelationen) separiert und neu kombiniert werden müßten. Dennoch ist der Effekt der modellierten Spannungen nicht verloren, weil das entsprechende Modell den Einfluß der nicht-aufgelösten Skalen auf die aufgelösten Skalen berücksichtigt.

4.8 Zusätzliche Hilfsmittel

Bei der Inspektion beliebiger Strömungsfelder ist es mitunter sinnvoll, die Informationen auf einfache Weise zu reduzieren, zu zerlegen oder geeignet zusammenzufassen.

4.8.1 Der mitbewegte Beobachter

Die bereits mehrfach angeführte Unterteilung einer Strömungsgröße in Mittelwert und überlagerte Schwankungsbewegung impliziert, daß die Schwankungsgrößen gesondert ausgewertet werden (können). Ein noch einfacheres Vorgehen als die Subtraktion des mittleren Strömungsfeldes ist die Verminderung einer Momentanaufnahme um ein konstantes Niveau. Bei der Anwendung auf ein Geschwindigkeitsfeld wird dann nicht ein Wirbelstärke-behaftetes Strömungsfeld subtrahiert, sondern ein Wirbelstärke-freies, z. B. die mittlere Anströmgeschwindigkeit U_∞. Dadurch können mit Hilfe von Stromlinien dominante kohärente Strukturen sofort sichtbar gemacht werden. Auch wenn nicht unbedingt als physikalische Strukturen erklärbar, liefert die sukzessive Erhöhung des zu subtrahierenden Niveaus ($0 \ldots U_\infty \ldots$) mit begleitender Visualisierung einen Eindruck über die Dynamik des Gesamtsystems (vgl. Abbildung 7.7).

4.8.2 Symmetrisch-antimetrische Zerlegung

Eine Möglichkeit, periodische Vorgänge bei einer turbulenten Umströmung deutlicher zu extrahieren, besteht in der symmetrisch-antimetrischen Zerlegung bezüglich einer geometrischen Symmetrie der Strömungskonfiguration. Die Aufteilung (4.48) definiert den symmetrischen und antimetrischen Anteil u_i^s bzw. u_i^a eines Geschwindigkeitsfeldes u_i bei einer Symmetrie bezüglich der Ebene $y = 0$ (bei dem Zylinderstumpf genauso vorhanden).

$$u_i^s(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u(x,y,z) + u(x,-y,z) \\ v(x,y,z) - v(x,-y,z) \\ w(x,y,z) + w(x,-y,z) \end{bmatrix}$$

$$u_i(x,y,z) = u_i^s(x,y,z) + u_i^a(x,y,z) \tag{4.48}$$

$$u_i^a(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u(x,y,z) - u(x,-y,z) \\ v(x,y,z) + v(x,-y,z) \\ w(x,y,z) - w(x,-y,z) \end{bmatrix}$$

Ergebnisse einer solchen Zerlegung finden sich in Abbildung 7.8.

4.8.3 Bedingte Mittelung

Eine eher historische Methodik zur Extraktion dominanter periodischer Turbulenzphänomene ist die bedingte Mittelung (ROBINSON, 1991). Dabei werden Extremlagen (Minima oder Maxima) eines Signals benutzt, um für die zugehörigen Schnappschüsse den Ensemblemittelwert zu berechnen. Diese Art der Mittelung stellt in gewisser Weise eine Filterung bezüglich dominanter Ereignisse dar. Als Basis kann jedwedes dem dynamischen System entnommenes Signal, ob Zeitschrieb des Druckes oder Zeitkoeffizient der POD, benutzt werden. Im Unterschied zur Phasenmittelung wird nicht über einen extremalen Phasenwinkel gemittelt, sondern über eine theoretisch unabhängig vom Wellencharakter beobachtbare Periode. Es kann eine dynamisch variierende Frequenz berücksichtigt oder ein intermittentes Phänomen erfaßt werden.

4.9 Visualisierung turbulenter Strömungsfelder

Zur Visualisierung nicht nur turbulenter Strömungsfelder existieren zwei grundlegende Konzepte (LANE, 1995): die nachträgliche Visualisierung (Post-Visualisierung) und die gleichzeitige Visualisierung (Co-Visualisierung). Während die Co-Visualisierung parallel zur Simulation durchgeführt wird und die Strömungslösung nicht abgespeichert wird, hat sich die Post-Visualisierung in den letzten Jahren, vermutlich aufgrund zunehmender Speicherkapazitäten, durchgesetzt. Besonders die Möglichkeit, nachträglich verschiedenste Auswerteverfahren auf instationäre Zeitreihen anzuwenden, offeriert die Chance, im Vorfeld nicht bekannte Details zu untersuchen. Allerdings werden bei hochauflösenden Simulationen mit mehreren Millionen Gitterpunkten und Hunderten von Zeitschritten schnell einige TeraByte Speicherkapazität benötigt. Hier kommt der Kompression mittels Wavelet-basierten Verfahren (siehe dazu SCHÄFER, 2007) oder einer Reduktion, z. B. POD-basiert, eine wichtige Rolle zu.

Visualisierung turbulenter Strömungsfelder meint fast ausschließlich die Darstellung kohärenter Wirbelstrukturen. Die Einschränkung auf den kohärenten Anteil umfaßt zwar nur einen geringen Anteil aller Wellenlängen und Frequenzen, vereint aber beispielsweise in den Analysen von SCHÄFER (2007) in homogener isotroper Turbulenz 99.6% der kinetischen Energie bei nur 4.7% der Wavelet-Koeffizienten. Für die Turbulenzdarstellung werden im Dreidimensionalen, neben planaren Vektorrepräsentationen des Geschwindigkeitsfeldes meistens Skalarfelder in Kombination mit Isoflächen verwendet. Die Skalarfelder stellen meist eine kriterienbasierte Reduktion des Geschwindigkeitsvektorfeldes dar und basieren typischerweise auf den Gradienten des Vektorfeldes. Zu den wichtigsten zählen das Q-Kriterium von HUNT *et al.* (1988) und das λ_2-Kriterium von JOENG & HUSSAIN (1995). Ein Überblick über die wichtigsten Wirbelkernkriterien findet sich bei MIELKE (1999). Auch der statische Druck, Druckfluktuationen oder Komponenten der Wirbelstärke ω_i können zur Darstellung kohärenter Wirbelstrukturen benutzt werden (z. B. Abbildung 7.5). Darüber hinaus ist die Darstellung von Stromlinien, in Lagrangescher Darstellung Bahnlinien und Streichlinien, sowie die flächige Farbwertvisualisierung weit verbreitet. In neuerer Zeit wird verstärkt die Linienintegralfaltung (engl. Line Integral Convolution, LIC, nach CABRAL & LEEDOM, 1993) auf bzw. in beliebigen Flächen anstatt der Vektordarstellungen bevorzugt (vgl. z. B. Abbildung 7.7).

5 Der Zylinderstumpf mit Endscheibe

Wie bereits einführend ausgeführt, haben sich die Partner des SPP-1147 darauf geeinigt, den durchzuführenden Untersuchungen eine gemeinsame Konfiguration zugrunde zu legen. Als sog. Leitexperiment *ist ein endlicher Zylinder mit Grundplatte ausgewählt worden. Diese Auswahl basierte im Wesentlichen auf der Tatsache, daß es in der Projektgruppe für das zentrale Experiment Erfahrungen mit dieser Konfiguration gab* (LEDER, 2003).

Nachstehend werden die ausgewählte Konfiguration sowie vorhandene Erkenntnisse über die Phänomenologie der Strömung beschrieben. Ein weitreichender Literaturüberblick vermittelt zudem eine Vorstellung davon, wie die Auswahl der Basisparameter die Strömung beeinflussen kann. Abschließend werden relevante parallele Projekte im SPP-1147 aufgeführt.

5.1 Die Leitkonfiguration

Der endliche Kreiszylinder repräsentiert eine einfache Geometrie, deren Umströmung jedoch sehr komplex ist. Die beobachteten Strömungsphänomene sind typischerweise dreidimensional und zeichnen sich durch einen hohen Grad an Instationarität aus. Insbesondere für kleine Seitenverhältnisse des Zylinders weist das Strömungsfeld kaum die charakteristischen Wirbelstrukturen unendlich langer Zylinder auf, wobei Relikte des alternierenden Wirbelablösens im unteren Zylinderbereich erkennbar sind. Derartige Strömungen, die Grenzschichtablösungen, Scherschichtinstabilitäten und anschließende Formation komplexer Wirbel beinhalten sind typisch für viele technische Anwendungen. Die detaillierte Untersuchung einer dementsprechend repräsentativen Konfiguration nutzt dem Verständnis von Mischprozessen und den turbulenten Bewegungen, welche verantwortlich für erhöhten Widerstand, Lärm oder Vibrationen sind.

Der endliche Zylinder mit Wandeinfluß kann als vereinfachte Geometrie zahlreicher praxisrelevanter Konfigurationen, z. B. Fahrzeuganbauten oder Gebäude, angesehen werden. Die verwendete Geometrie eines relativ kurzen Zylinderstumpfes mit dem Seitenverhältnis $L/D = 2$ ist in Abbildung 5.1 zusammen mit allen notwendigen Abmessungen und Strömungsparametern dargestellt. Die Reynolds-Zahl der Anströmung U_∞ ist $\mathrm{Re}_D = 200\,000$ basierend auf dem Zylinderdurchmesser D und der kinematischen Viskosität ν. Um den Einfluß der Plattengrenzschicht zu minimieren ist der Zylinder nahe der Plattenvorderkante positioniert. Zusätzlich ist mit Hilfe eines Transitionsdrahtes sichergestellt, daß die Grenzschicht der Platte in einem definierten turbulenten Zustand ist. Die Abmaße der Grundplatte sind aus den begleitenden Experimenten vorgegeben (Abschnitt 5.4).

Plattengeometrie				**Transitionsdraht**			
Länge	l	=	1300 mm	Durchmesser	d	=	0.4 mm
Dicke	t	=	15 mm	Position	x_d	=	$-1.5D$
Zylindergeometrie				**Strömungsparameter**			
Durchmesser	D	=	120 mm	Reynolds-Zahl	Re_D	=	200 000
Seitenverhältnis	L/D	=	2	Anströmung	U_∞	=	26.0 m/s
Plattenvorderkante	x_d	=	$-1.5D$	Turbulenzgrad	Tu	=	0.5 %

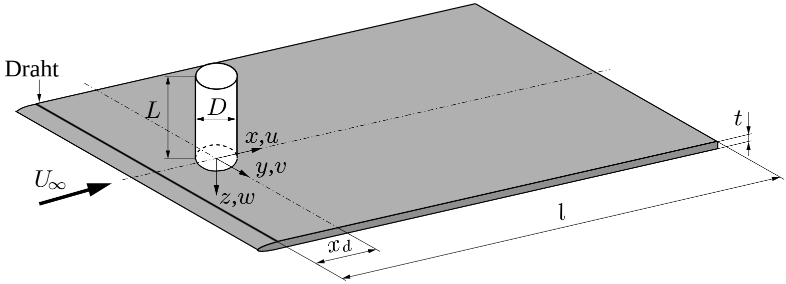


***Abb.** 5.1:* Skizze der untersuchten Strömungskonfiguration

5.2 Phänomenologie

Die Umströmung von im Allgemeinen unbegrenzt langen Zylindern kann entsprechend des laminar-turbulenten Umschlags der Grenzschicht an der Zylindermantelfläche unterschieden werden. Ein unterkritischer Zustand ist dabei durch die Transition in der bereits abgelösten freiden Scherschicht gekennzeichnet. Diese Strömungsform tritt in der Regel für Reynolds-Zahlen zwischen 350 und 200 000 auf. Unterhalb von $\mathrm{Re}_D = 350$ findet die Transition nicht zylindernah statt, sondern erst im Nachlauf. Bei höheren Reynolds-Zahlen findet sich der laminar-turbulente Umschlag der Strömung bereits in der anliegenden Grenzschicht. Diese Strömungsformen werden als überkritisch bezeichnet (Abbildung 5.2).

TrW=**Tr**ansition in **W**ake, **TrSL**=**Tr**ansition in **S**hear **L**ayer, **TrBL**=**Tr**ansition in **B**oundary **L**ayer, (**L**=Laminar, **T**=Turbulent, **S**=Separation)

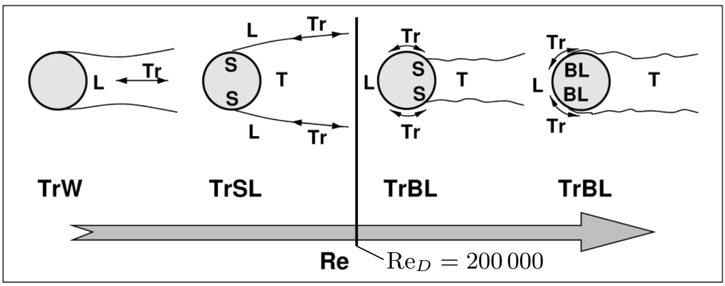
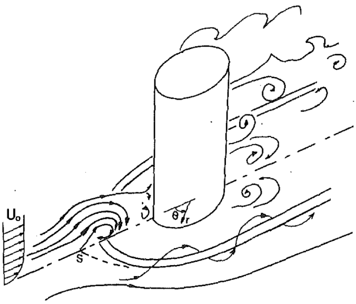


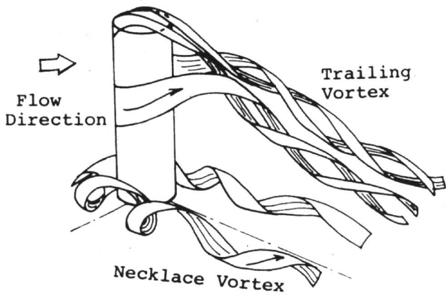
***Abb.** 5.2:* Verschiedene turbulente Strömungszustände bei der Kreiszylinderumströmung unter Einfluß der Reynolds-Zahl (ZDRAVKOVICH, 1997)

Die vorliegende Reynolds-Zahl von $\mathrm{Re}_D = 200\,000$ stellt gerade den Grenzfall zwischen unter- und überkritischer Strömungsform dar. Für die durchzuführenden Simulationen ist dies von besonderer Bedeutung, da in guter Näherung davon auszugehen ist, daß die Transition für diesen Fall mit der Ablösung fixiert ist. Diese Annahme ermöglicht es, die numerische Auflösung zweier Probleme (Transition und Ablösung) auf das Problem der Ablösung zu reduzieren.

Im Gegensatz zum zweidimensionalen Charakter der Strömung um einen langen Kreiszylinder kommt es bei der Umströmung des Kreiszylinderstumpfes mit Endplatte zu ausgeprägten dreidimensionalen Strömungsphänomenen. Die Strömung wird durch Endeffekte beeinflußt, die zu einem komplizierten Wirbelsystem führen (vgl. Abbildung 1.1). Auf der einen Seite gibt es die Umströmung bzw. Überströmung des freien Endes und auf der anderen Seite die Wechselwirkung mit der Plattengrenzschicht. Die Umströmung bei der ausgewählten Reynolds-Zahl $\mathrm{Re}_D = 200\,000$ und dem Seitenverhältnis $L/D = 2$ führt zu einem Wirbelsystem, das in der Literatur skizzenhaft beschrieben ist (Abbildung 5.3).



(a) AGUI & ANDREOPOULUS (1992)



(b) KAWAMURA *et al.* (1984)

***Abb.** 5.3:* Skizzen schematischer Strömungstopologien am kurzen Zylinderstumpf

Für die mittlere Strömung läßt sich eine globale Klassifizierung der vorhandenen Strömungsphänomene vornehmen – hier beginnend von der Plattenvorderkante. Aus dem Aufstau und der Verdrängung der Plattengrenzschicht am Zylinder bildet sich ein Hufeisenwirbelsystem, das aufgrund der Positionierung des Zylinders in der Nähe der Plattenvorderkante und der damit geringen Grenzschichtdicke auf den unmittelbaren Wandbereich beschränkt bleibt. Während die Strömung an der Zylinderschale vorerst anliegt, findet an der Vorderkante des stumpfen Endes die obligatorische geometrieinduzierte Ablösung statt. Auf der Zylinderoberseite bildet sich daran anschließend ein komplexes Rezirkulationsgebiet aus, wobei die Möglichkeit besteht, daß die Strömung auf der Deckfläche wieder anlegt (z. B. LEDER, 2003). An den seitlichen Kanten des stumpfen Zylinderendes lösen beidseitig Kopfwirbel ab, die wegen ihrer Form oft auch als Zopf- oder Tütenwirbel bezeichnet werden. Diese Wirbel entstehen aufgrund der Interaktion der seitlichen Zylinderumströmung und der Zylinderkappenumströmung.

Wie bereits erwähnt ist davon auszugehen, daß bei $\mathrm{Re}_D = 200\,000$ eine druckinduzierte, laminare Ablösung von der Zylinderschale mit anschließender Transition vorliegt. Typischerweise würde diese Ablösung zu einem periodisch alternierenden Wirbelabwurf, der sog. Wirbelstraße führen. Allerdings wird diese infolge des relativ kleinen Seitenverhältnisses von der Kopfüberströmung gestört, und außerdem wird durch den Einfluß der Kopfwirbel die periodische Ablösung in den oberen Bereichen des Zylinders nahezu vollständig unterdrückt. So können allenfalls im unteren Zylinderbereich Relikte einer Wirbelstraße beobachtet werden, zumal das über den Kopf strömende Fluid durch die Druckverhältnisse hinter dem Zylinder zum Wiederanlegen auf der Platte gezwungen wird. Der weitere Nachlauf ist bis auf das Vorhandensein von Nachlaufwirbel nicht hinreichend beschrieben.

Ein von LEDER (2003) herausgehobenes Ergebnis ist, daß die abgelöste Strömung durch die Superposition von drei Wirbelsystemen gebildet wird, deren Achsen orthogonal zu einander sind. Diese drei Hauptwirbelsysteme sind die Rezirkulationsgebiete auf der stromabgewandten Seite des Zylinders und dem freien Ende (y-Achse), die seitlich an der Zylinderkappe ablösenden Kopfwirbel (x-Achse) und die in Plattennähe auftretenden Wirbelstrukturen aus der seitlichen Zylinderumströmung (z-Achse). FRÖHLICH & RODI (2004) können in ihren numerischen Ergebnissen erstmals einen bogenförmigen Rezirkulationswirbel für die gemittelte Strömung identifizieren. Außerdem zeigen sie die Existenz von Nachlaufwirbeln auf und verdeutlichen die Komplexität der instantanen Strömung.

Weitere feingranulare Details zur Strömungsphänomenologie und -topologie sind im nachstehenden Abschnitt 5.3 enthalten. Dort wird auch die teilweise Widersprüchlichkeit der bisherigen Erkenntnisse deutlich.

5.3 Literaturüberblick

Die Literatur zu endlichen Zylinderkonfigurationen reicht in der Quantität bei weitem nicht an diejenige über zweidimensionale bzw. unendliche Zylinder heran. Dennoch gibt es eine Reihe veröffentlichter experimenteller und in neuerer Zeit auch numerischer Ergebnisse. Eine Zusammenstellung der ab den 1970er Jahren verstärkt auftretenden Meßkampagnien findet sich beispielsweise bei PATTENDEN *et al.* (2005). Daraus geht hervor, daß nur sehr wenige Experimente für die untersuchte Reynolds-Zahl und das Seitenverhältnis vorliegen. Numerische Untersuchungen beschränken sich meist auf schlankere Zylinder und geringere Reynolds-Zahlen aufgrund des notwendigen Simulationsaufwandes eines Testfalles, der ungeeignet für Vorhersagen mittels RANS ist. Im Folgenden werden die wichtigsten Aspekte aus der Literatur bezüglich endlicher Zylinder vorgestellt, um weitere Details zur Phänomenologie, besonders auch den Einfluß der Geometrie- und Strömungsparameter zu beleuchten. Darüber hinaus sind einige relevante Arbeiten basierend auf Vergleichbarkeit selektiert worden, deren wichtigste Parameter in Tabelle 5.1 angegeben sind. Die aktuellsten Meßergebnisse an der identischen Zylinderkonfiguration durch Projektpartner im SPP-1147 sind im nächsten Abschnitt 5.4 angegeben.

Die frühesten Arbeiten zur dreidimensionalen Strömungscharakteristik eines endlichen Zylinders auf einer Grundplatte gehen auf WIESELSBERGER & BETZ (1923) zurück. Die Autoren konnten feststellen, daß die Widerstandskraft bei kleinen Seitenverhältnissen geringer ist als bei größeren. Außerdem konnte der formale Zusammenhang zwischen Widerstandskraft und

Autor(en)	Re_D	L/D	Typ
KAWAMURA *et al.* (1984)	32 000	2	exp.: P, SV
AGUI & ANDREOPOULUS (1992)	220 000	2	exp.: P, SV
OKAMOTO & SUNABASHIRI (1992)	47 000	2	exp.: P, SV
FRÖHLICH & RODI (2004)	43 000	2.5	num.: LES
LEDER (2003)	200 000	2	exp.: LDA
ROH & PARK (2003)	148 000	1.25	exp.: SV
PATTENDEN *et al.* (2005)	200 000	1	exp.: P, PIV, SV
RICHTER (2005)	200 000	2	exp.: LDA
JENSCH *et al.* (2008)	200 000	2	exp.: TR-PIV
Aktuelle Studie	200 000	2	num.: LES, DES

Zusätzliche Abkürzungen: exp. – experimentell, num. – numerisch,
P – Druckmessungen, SV – Strömungsvisualisierung

Tab. *5.1:* Für die Vergleichbarkeit relevante Literaturreferenzen

Reynolds-Zahl gefunden werden. Ein erster Vorschlag, wie die vom unendlichen Zylinder bekannte Wirbelstraße, welche sich nicht über das freie Ende hinaus ausdehnen kann, gestört bzw. abgeschlossen wird, stammt von TANEDA (1952). Auf der Basis von Strömungsvisualisierungen bei Reynolds-Zahlen kleiner 100 entspringt die Idee, daß jeder Wirbel in einer Reihe sich mit den beiden gegenüberliegenden Wirbeln der anderen Reihe verbindet. Daß dieses Phänomen bei höheren Reynolds-Zahlen wesentlich diffiziler ist, wurde in weiteren Arbeiten gezeigt. BRADSHAW (1971) wird in diesem Zusammenhang zu der in Abbildung 1.1 sichtbaren Aussage verleitet, daß die Strömung hinter dem Zylinder hochgradig kompliziert ist.

Als Ursache und Resultat der seitlich am Zylinder vorhandenen Ablösung sind die lokalen Oberflächenkräfte aus Druck und Reibung von ACHENBACH (1968) an endlichen Zylindern für Reynolds-Zahlen von $60\,000$ bis $5 \cdot 10^6$ und einem Seitenverhältnis $L/D = 10/3$ $(20/3)$ vermessen worden. Da festgestellt wurde, daß Turbulenzgrad der Anströmung und die Oberflächenrauigkeit signifikanten Einfluß auf die Strömung haben, wurden polierte Zylinder sehr geringer Rauigkeit und ein geringer Turbulenzgrad von 0.7% benutzt. Die Arbeiten sind von der Verstärkung des Wärmetransfers motiviert, weshalb eine Strömungstemperatur von $60\,^\circ\mathrm{C}$ eingestellt wurde. Aus den Meßdaten berechnete der Autor die Anteile des Druck- und Reibungswiderstandes bezüglich eines stationären Zustandes. Für die untersuchten Reynolds-Zahlen ergaben die Rechnungen, daß die Größe des Reibungsbeiwerts in keinem Fall 2.5% des Gesamtwiderstands übersteigt. Für die Reynolds-Zahl $200\,000$ liegt der Reibungsanteil bei etwa 1%. Im Vergleich verschiedener Reynolds-Zahlen erweist sich die Repräsentation der Reibung von ACHENBACH (1968) über den aus der Grenzschichttheorie abgeleiteten dimensionslosen Ausdruck $\frac{\tau_w}{\varrho U_\infty^2}\sqrt{\mathrm{Re}}$ als vorteilhaft. Dadurch stellt der Autor fest, daß im vorderen Zylinderbereich die normierte Druck- und Reibungsverteilung nahezu unabhängig von der Reynolds-Zahl ist. Die Ablösung wird für $\mathrm{Re}_D = 100\,000$ bei etwa 78° detektiert, sowie bei 105° eine Ablöseblase interpretiert. Diese verschwindet für größere Reynolds-Zahlen ($> 1.5 \cdot 10^6$).

Mit Hilfe von Oberflächendruckmessungen entlang verschieden langer Zylinder mit Endscheibe stellen OKAMOTO & YAGITA (1973) fest, daß sich die Ablösung mit abnehmendem Seitenverhältnis stromauf (zu kleineren Winkeln) verschiebt. Die Autoren beobachteten Variationen der Ablösefrequenz in spannweitiger Richtung, wobei diese bei relativ langen Zylindern zum Zylinderkopf hin abfällt und sowohl von den untersuchten Reynolds-Zahlen (13 300…150 000) als auch vom Seitenverhältnis abhängt. Die Untersuchungen bestätigen, daß der Widerstand mit reduziertem Seitenverhältnis sinkt, weil der Druckrückgewinn infolge in den Nachlauf einströmenden Fluids beim endlichen Zylinder größer ist als beim unendlichen Gegenstück. In Verbindung mit zusätzlichen Geschwindigkeitsmessungen im Nachlauf wird geschlußfolgert, daß eine periodische Wirbelablösung bzw. Wirbelstraße unterhalb von $L/D = 6$ nicht existiert. Die Argumentation stützt sich auf den Einfluß der Kopfüberströmung, welcher bei diesem Seitenverhältnis die Zylinderbasis erreicht.

Aus ihren Strömungssichtbarmachungen an unterschiedlich schlanken Zylindern (L/D=1…10) leiten ETZOLD & FIEDLER (1976) eine Strömungstopologie für die untersuchte Reynolds-Zahl 30 000 ab. Demnach besteht die Nachlaufstruktur aus im Schaftbereich vorherrschender periodischer Wirbelablösung, überlagert von einem stationären Wirbelsystem am freien Zylinderende. Letzteres würde aus vier konisch aufrollenden Wirbelelementen bestehen und die stationäre Abwärtsströmung hinter dem Zylinder verursachen. Zusätzlich induziert die Kopfüberströmung eine anliegende Rückströmung am Zylinder bis nahe an die primäre Ablösung, welche in einer aufwärts gerichteten, vom Betrag starken (bis zu $0.4U_\infty$) Sekundärströmung parallel und entlang der seitlichen Ablöselinie mündet. Erstmals wird auch beschrieben, daß die Strömungsablösung bei etwa $85°$ in einem aufwärtigen Winkel zur Ablöselinie bzw. Zylinderachse erfolgt, womit auch spannweitige Kräfte auftreten. Im Hinblick auf die Randbedingungen stellen ETZOLD & FIEDLER (1976) fest, daß eine große Sensitivität der Strömung bezüglich der Endbedingungen des Zylinders vorliegt, dafür aber der Turbulenzgrad keinen Einfluß hat. Aus ihren Untersuchungen leiten sie außerdem ab, daß der Querschnitt des Körpers die Skale des Nachlaufes bestimmt, aber nicht dessen Hauptstruktur. Dabei ist die Nachlauflänge für endliche Zylinder länger als bei unendlichen, bei $L/D = 2$ wenig kürzer als $x/D = 3$ ausgedehnt. Obwohl die Autoren am Kopf ein stationäres Wirbelsystem sichtbar machen, messen Sie doch eine stark fluktuierende Seitenkraft im oberen Zylinderbereich.

Die Druckmessungen von FARIVAR (1981) bei $\mathrm{Re}_D = 70\,000$ für unterschiedliche Seitenverhältnisse offenbaren ebenfalls periodische Phänomene entlang der gesamten Zylinderachse. Allerdings lassen sich aufgrund der experimentell ermittelten, stufenartigen Reduktion der Strouhal-Zahl in Richtung des freien Endes mindestens drei nahezu abgegrenzte, spannweitige Wirbelregionen für relativ lange Zylinder ($L/D \approx 10$) unterscheiden. Die Strouhal-Zahl im unteren Bereich des Zylinders entspricht dabei derjenigen klassischen Wirbelablösens. Der Autor gibt an, daß das reguläre Wirbelablösen wohl unterhalb von $L/D = 7.5$ verschwindet, aber eine Region geschwächten zweidimensionalen Strömungscharakters existiert. Am Zylinderkopf hingegen liegt eine dreidimensionale Nachlaufströmung, verursacht durch die Überströmung vor. Durch die hervorragende Übereinstimmung direkt gemessener Widerstandskraft und dem durch Integration von Druckmessungen erzielten Widerstand bestätigt FARIVAR (1981) die Dominanz des Druckwiderstands über den Reibungswiderstand. Die Druckverteilung ist dabei nur schwach abhängig von der Reynolds-Zahl im abgedeckten Bereich 20 000…130 000.

AYOUB & KARAMCHETI (1982) beobachten bei simultanen Messungen von Oberflächendruck und Geschwindigkeitsfluktuationen im Nachlauf eines schlanken Zylinders ($L/D \approx 12$) getrennte Ablöseregionen am Zylinderkopf und am Mantel für die über- und unterkritische Umströmung. Besonders das Kopfwirbelsystem kann instabil und intermittent sein. Es treten Frequenzspektren mit Gruppen prominenter Spitzen auf, die von Seitenspitzen begleitet werden. Obwohl keine isolierten Einzelfrequenzen auftreten, ist die Wirbelablösung am Kopf im Bereich um $22 - 24$ Hz zentriert. Der Nachlauf oszilliert vor allem in spannweitiger Richtung. Als Ursache werden Fluktuationen in der Stärke der zylindernahen Abwärtsströmung angegeben. In der Folge treten in der Nähe der Zylinderkappe lokal zeitabhängige Freistromgeschwindigkeiten auf, die zur Instabilität des Ablöseprozesses führen und schließlich zum Vorhandensein mehrerer Frequenzbänder.

Ähnlich wie OKAMOTO (1982) bei $L/D = 1$ bogenförmiges Wirbelablösen des symmetrischen, in Reihen angeordneten Typs ermittelt, stellen SAKAMOTO & ARIE (1983) ebenfalls bei Prismen und Zylindern unabhängig dieses Wirbelsystem fest. Bei Reduktion des Seitenverhältnisses ändert sich der Typ des Wirbelablösens vom Kármán-Typ zum bogenförmigen Typ, wobei die Grenze etwa bei $L/D = 2.5$ zu finden wäre. Das Auftreten symmetrischen Ablösens wird auch von späteren Publikationen beschrieben, jedoch durchweg für deutlich unterkritische Reynolds-Zahlen – hier bis maximal $57\,000$.

KAWAMURA *et al.* (1984) weisen darauf hin, daß die Formation eines bogenförmigen Wirbels im Nachlauf bei Vorhandensein von Kopfwirbeln bzw. Nachlaufwirbeln unwahrscheinlich ist. Dennoch stellen auch diese Autoren fest, daß unterhalb von $L/D = 6$ bei $\mathrm{Re}_D = 32\,000$ die Bestimmung einer dominanten Frequenz Schwierigkeiten bereitet. Ein Grund dafür ist die starke Deformation der abgelösten Wirbel im oberen Zylinderbereich, so daß keine typische Wirbelstraße für kleinere Seitenverhältnisse existiert. Durch die Abwärtsströmung hinter dem Zylinder ist der Basisdruck gegenüber dem unendlichen Zylinder erhöht, was zu reduzierter Separationsgeschwindigkeit und früherer Ablösung führt. KAWAMURA *et al.* (1984) detektieren so wie ETZOLD & FIEDLER (1976) ein Wiederanlegen der rezirkulierenden Sekundärströmung an der Rückseite. Das Fluid steigt bis auf kleine Bereiche in Plattennähe am Zylinder auf, während die Kopfwirbel aus seitlich aufwärts und oberhalb abwärts gerichteter Strömung entstehen. Die abgelöste Sekundärströmung auf dem Kopf legt teilweise wieder an, wobei das Wiederanlegen der Strömung für kleine Seitenverhältnisse angezweifelt wird. Neben dem Seitenverhältnis wird die Grenzschichtdicke auf der Platte als wichtiger Einflußparameter identifiziert.

Die Untersuchungen von ZDRAVKOVICH *et al.* (1989) konzentrieren sich auf Zylinder mit zwei freien Enden. Dabei offenbaren sie, daß das Konzept der universellen Strouhal-Zahl nicht nutzbar ist für endliche Zylinder mit Regionen stark dreidimensionaler Strömung. Das beobachtete irreguläre und intermittente Wirbelablösen bei $L/D = 2$ führt zu zeitlich variierender Frequenz der Wirbelablösung.

Durch simultane Messungen der instationären Kräfte und der Nachlaufgeschwindigkeit können BABAN & SO (1991) zeigen, daß der fluktuierende Widerstand die dominante instationäre Kraft ist. Dessen charakteristische Frequenz wäre größer als die des seitlichen Wirbelablösens. Die Experimente wurden bei $\mathrm{Re}_D = 46\,000$ sowie in einem engen Windkanal durchgeführt und damit bei hoher Verblockung. Die Druckverteilung weist eine ähnliche Charakteristik für verschiedene L/D auf – mit steigendem Basisdruck bei sinkendem Seitenverhältnis. Damit wäre die fehlende Kohärenz im alternierenden Wirbelablösen indiziert. Dieses wird durch die instationäre Kopfablösung gestört und führt zur Oszillation des Rezirkulationgebietes. Daraus folgt eine Oszillation in Strömungsrichtung und letztlich im Widerstand, dabei oszilliert der Nachlauf als Ganzes. Die Autoren stellen fest, daß der Widerstand sich mit dem Seitenverhältnis verringert, sein spannweitiges Maximum aber bei etwa $D/3$ unterhalb des freien Endes hat. Diese Position ist identisch mit der vertikalen Ausdehnung des Rezirkulationgebietes und dem maximalen Effekt der abgelösten Strömung. Der instationäre Widerstand ist etwa zwei- bis dreimal größer als der Auftrieb und scheint eine bestimmte Frequenz zu haben, die größer ist als diejenige des Auftriebs. Er spielt damit eine entscheidende Rolle für die Strukturauslegung.

Auch OKAMOTO & SUNABASHIRI (1992) untersuchen den abgelösten Nachlauf an endlichen Zylindern bei unterkritischen Reynolds-Zahlen ($25\,000$, $47\,000$). Ihre Strömungsvisualisierungen zeigen für kleine Verhältnisse $L/D = 1,2$ symmetrische Wirbelablösung, während antimetrische Nachläufe oberhalb von $L/D = 4 - 7$ auftreten. Für $L/D < 5$ erreicht der Einfluß der Kopfüberströmung die Zylinderbasis, wobei der Effekt der Abwärtsbewegung auf Geschwindigkeitsverlust und Turbulenzintensität besonders stark für $L/D = 1,2$ ausgeprägt ist. Die Turbulenzintensität in vertikaler Richtung wird teilweise größer als in Strömungsrichtung. Die Autoren zeigen, daß die Frequenzspektren zum Kopf hin breiter und flacher werden. Die dominante Frequenz wird in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis angegeben und ist am geringsten für $L/D = 4$. Breitere Spektren finden sich auch für geringere Seitenverhältnisse, womit impliziert würde, daß die Ablösung nicht vollständig kohärent ist. Zusätzlich reduziert sich die Rezirkulationslänge mit abnehmendem Seitenverhältnis.

Im Fokus der Arbeiten von AGUI & ANDREOPOULUS (1992) steht die Grenzschichtströmung auf der Platte in unmittelbarer Nähe endlicher Zylinder. Die Oberflächenvisualisierungen und Druckmessungen bei $\mathrm{Re}_D = 100\,000$ und $220\,000$ verdeutlichen, daß instantane Wirbelstrukturen existieren, die nicht durch die mittlere Strömung oder deren Messung wiedergegeben werden können. Es wurde festgestellt, daß sich das in den Nachlauf ausdehnende Hufeisenwirbelsystem nicht mit den dortigen Wirbeln schneidet. Im Nachlauf existieren keine nennenswerten Druckgradienten, wodurch der voll turbulente Charakter mit starker Durchmischung reflektiert wird. Das Wirbelfeld im Nachlauf induziert ein instationäres Druckfeld, das die Strömung stromauf des Zylinders moduliert. Dabei lassen sich die Frequenzen schlecht trennen. Die Autoren benennen für den untersuchten Fall $L/D = 2$ zwei die Strömung dominierende Phänomene: die instationäre Ablösung an der Platte und das quasi reguläre Wirbelablösen am Zylinder.

UEMATSU & YAMADA (1994) untersuchen den Einfluß der Oberflächenrauigkeit bei der unterkritischen Umströmung und geben an die Meßergebnisse angepaßte, analytische Funktionen für die Druckverteilung, deren Einzelkomponenten, den Widerstand und die Strouhal-Zahl an.

Die umfangreichen Experimente von PARK & LEE (2000) für endliche Zylinder mit $L/D = 6, 10, 13$ bei $\mathrm{Re}_D = 20\,000$ konzentrieren sich vorerst auf die Effekte am freien Ende. Es wurden gegensinnig rotierende Kopfwirbel beobachtet, die durch die aufrollende Bewegung der an den Kanten ablösenden Scherströmung entstehen. Die Abwärtsbewegung der Kopfwirbel ist in

Phase mit dem nahen Nachlauf, bei einer charakteristischen Frequenz um 24 Hz. Die Frequenz ist dominant am freien Ende und unabhängig von der Wirbelablösefrequenz der Mantelfläche.

Bei der Fortsetzung ihrer Arbeiten heben PARK & LEE (2002) den starken Unterschied zur Umströmung endlicher Zylinder hervor. Als Grund wird das starke Entrainment nicht-rotierenden Fluids durch die abwärtsgerichteten Kopfwirbel, begünstigt durch ungleichmäßige Anströmung und geringes Seitenverhältnis, benannt. Eine dicke Plattengrenzschicht verkleinert dabei die Wirbelformationslänge und die Nachlaufbreite. Letztere ist aufgrund der Abwärtsbewegung größer als beim unendlichen Zylinder. Dies kommt auch durch die stark erhöhte Turbulenzintensität im mittleren Nachlauf infolge der Interaktion von Abwärtsbewegung und seitlicher Ablösung zum Ausdruck. Die Frequenzspektren sind deshalb sehr breit und weisen geringe Amplituden auf. Die dominanten Frequenzen selbst sind deutlich kleiner als für den zweidimensionalen Fall (47 bzw. 66 Hz). Mit Annäherung an die Platte beobachten die Autoren zunehmende Dominanz regulärer und periodischer Wirbelablösung, sowie den Abfall des mittleren Druckes auf der Rückseite mit Annäherung an den Zylinderkopf. Die Frequenzkomponente um 24 Hz (vom Kopf) läßt sich im hinteren Nachlauf kaum identifizieren. Bezüglich der Kopfform stellen PARK & LEE (2004) schließlich fest, daß die Modifikation bzw. Abweichung von der scharfen Kante die Nachlauflänge und auch leicht die Ablösefrequenz reduzieren kann.

Erste quantitative Messungen des dreidimensionalen Strömungsfeldes um einen Zylinderstumpf bei $\mathrm{Re}_D = 200\,000$ und $L/D = 2$ stammen von LEDER (2003). Mittels LDA wurde der Nachlauf und speziell Bildung und Zerfall der Kopfwirbel untersucht. Dabei kam eine relativ kleine Endscheibe und zwei unterschiedliche Kopfformen zum Einsatz. Aufgrund der unbedingten Relevanz für die vorliegende Arbeit werden die Ergebnisse des Autors zu quantitativen Vergleichen verwendet.

Die Strömungstopologie am Zylinderkopf wurde auch von ROH & PARK (2003) mittels verschiedener Strömungsvisualisierungen bei $\mathrm{Re}_D = 59\,200, 148\,000$ untersucht. Wichtigstes Ergebnis ist die Beobachtung eines zweiten, inneren Kopfwirbelpaares, das sich über die Hinterkante hinaus ausdehnt. Dieses Resultat ist aber aufgrund der Abwärtsbewegung und der Auslöschung gegensinniger Rotation fragwürdig und tritt wenn überhaupt nur bei kleinen Seitenverhältnissen (hier $L/D = 1.25$) auf. Anstrichbilder ermöglichen die Identifikation topologischer Punkte, wobei die zwei Foki im vorderen Kappenbereich als virtuelle Startpunkte des zweiten Wirbelpaares angegeben werden.

SUMNER *et al.* (2004) untersuchten den Nachlauf unterschiedlich schlanker Zylinderstümpfe bei $\mathrm{Re}_D = 60\,000$. Daneben geben die Autoren eine Zusammenfassung der verschiedenen widersprüchlichen Folgerungen bei bisherigen Untersuchungen am Zylinderstumpf. In den Messungen beobachten sie Kopfwirbel für alle Seitenverhältnisse, deren Stärke mit dem Zylinderabstand abnimmt. Darüber hinaus findet sich ein zweites Paar Längswirbel nahe der Platte für $L/D \geq 5$ mit gegensätzlichem Drehsinn bezüglich der Kopfwirbel. Letztere werden mit den deformierten, seitlich abgelösten Wirbeln assoziiert. Um aussagekräftige Frequenzspektren zu erhalten wurden jeweils 250 Einzelspektren gemittelt, womit die Dominanz von $\mathrm{St} = 0.16$ verdeutlicht werden konnte.

In den Experimenten von KAPPLER (2002) wurde festgestellt, daß die Kopfüberströmung praktisch nur von der Grenzschichtdicke auf der Platte abhängt, erstere aber entscheidend die Kopfwirbel beeinflußt. So ist deren Drehrichtung bei ausgedehnter Grenzschicht jeweils nach außen gerichtet, bei geringer Grenzschichtdicke aber nach innen. Damit ist auch ihre Ankopplung an die Wirbelstraße völlig unterschiedlich. Überwiegend wurde antimetrische Ablösung beobachtet und selten symmetrische, dann aber im Zusammenhang mit der Verbreiterung des Nachlaufes durch Auftreffen der Abwärtsströmung auf die Platte. Während im Außenbereich des Nachlaufes durchgängig aufwärtige Bewegungen vorzufinden sind, tritt nahe der Symmetrieebene eine abwärtige auf. Diese Tatsache wäre die Erklärung für die Unterdrückung einer regelmäßigen Wirbelstraße. Die Experimente bestätigen wiederum, daß die momentane Strömung weitaus komplexer als die gemittelte ist und entsprechend Herausforderungen an die Simulation aufgrund von Rechengitter und Strömungskomplexität stellt.

Angelehnt an die Experimente von KAPPLER (2002) untersuchten FRÖHLICH *et al.* (2003) den Zylinderstumpf mit $L/D = 2.5$ bei $\mathrm{Re}_D = 43\,000$ numerisch mittels LES, ähnlich dem gemeinsamen Vorgehen im SPP-1147. Bei der Simulation von grobem und feinerem Gitter wurde die Grenzschicht der Platte nicht berücksichtigt und ein stationäres laminares Einströmprofil verwendet. Bei der Feinstrukturmodellierung stellte sich das dynamische Modell trotz Relaxation als instabil heraus, wobei stark deformierte Zellen als Grund vermutet wurden. Gute Ergebnisse wurden mit dem Smagorinsky Modell und $C_S = 0.1$ erzielt. Die vorhergesagte Strömungstopologie stimmt global mit dem Experiment überein. Dennoch wurden instantan symmetrische, bogenförmige Wirbel im oberen Bereich des Zylindernachlaufes gefunden. Die Achse der aus der seitlichen Ablösung entstehenden Wirbel neigt sich alsbald zur Mitte und stromauf.

In ihren weiteren Auswertungen stellen FRÖHLICH & RODI (2004) heraus, daß der Turbulenzgrad der Anströmung sehr wichtig ist und untersuchen den Einfluß der Plattengrenzschicht mit. Aufgrund der geringen Grenzschichtdicke ist deren Einfluß wohl gering und führt im Wesentlichen zur Deformation der Nachlaufwirbel. Im Vergleich räumlicher Diskretisierungen zeigt sich, daß ungenügende Auflösung im Strömungsfeld drastische Effekte hat, z. B. verspätete Ablösung. Die hochauflösende Simulation produziert relativ irreguläre Kräfte infolge irregulärer Ablösung und Wirbelkonstitution, dabei findet sich im Auftrieb die dominante Frequenz bei $\mathrm{St} = 0.16$ und im Widerstand bei doppelter Frequenz. Die Autoren weisen darauf hin, daß auftretende starke Amplitudenänderungen im Auftrieb zu Mittelwerten ungleich null über mehrere Perioden führen, weshalb lange Mittelungszeiten benötigt werden. Weitere Ergebnisse sind ein etwa mittiges Wiederanlegen der Strömung auf der Kappe sowie der bogenförmige Rezirkulationswirbel und die Nachlaufwirbel als Merkmale der Hauptströmung. Die Nachlaufwirbel sind keine Fortsetzung der Kopfwirbel und stehen auch nicht im Zusammenhang mit dem Hufeisenwirbel. Die Kopfwirbel selbst reichen nur bis etwa einen Durchmesser hinter den Zylinder.

Die experimentell-numerischen Untersuchungen von PATTENDEN *et al.* (2003) konzentrieren sich auf den Zylinderstumpf mit $L/D = 1$, zuerst bei $\mathrm{Re}_D = 290\,000$. Bei relativ kleinem Rechengebiet und schwacher Auflösung für LES zeigt sich deutlich deren Überlegenheit gegenüber RANS. Im Vergleich mit dem Experiment wird die Wiederanlegelänge von LES sehr gut, die Lage der seitlichen Ablösung aber verspätet vorhergesagt. Die RANS basierten Simulationen versagen fast vollständig.

Die späteren Untersuchungen von PATTENDEN *et al.* (2005) sind auf die geringere Reynolds-Zahl von $196\,000$ fokussiert, mit dem Ziel, eine Datenbasis für numerische Simulationen bereitzustellen. Mit Hilfe von Oberflächenvisualisierungen, PIV- und Druckmessungen wurde die Topologie der mittleren Hauptströmung bestimmt. Diese besteht aus drei Regionen: dem Hufeisenwirbelsystem, der abgelösten Strömung über das freie Ende und der Nachlaufströmung. Wichtige identifizierte Elemente sind ein Bogenwirbel, die Kopfwirbel und der hochgradig instationäre Nachlauf. Bei der geringen Zylinderhöhe ist die Strömung vollständig durch die Abwärtsströmung beeinflußt. Die seitliche Ablösung wurde bei circa 70° gefunden; mit Verzögerung in Kopfnähe um etwa 5°. Das Rezirkulationsgebiet ist von den abgelösten Scherschichten eingeschlossen und bildet einen rezirkulierenden Wirbel mit stromab stattfindendem Wiederanlegen auf der Grundplatte. Am Zylinderkopf findet sich ein komplexes Wirbelsystem mit Wiederanlegen der Strömung auf der Deckfläche. Die Kopfwirbel sind im Strömungsfeld nur kurz hinter dem Zylinder sichtbar und können weiter stromab nur im Wirbelstärkefeld detektiert werden, weil die globale Strömung überlagert ist. Im weiteren Nachlauf finden sich durch Entrainment verursachte Nachlaufwirbel. Die Autoren weisen darauf hin, daß die starken Unterschiede zwischen gemittelter Hauptströmung und dem instantanen Feld zeitgemittelte Modellansätze für die Simulation in Frage stellen. Zusätzlich wurden Unsymmetrien in der Hauptströmung bemerkt, die möglicherweise ein Indiz für großskalige Oszillationen sind.

Die nachfolgenden Simulationen von PATTENDEN *et al.* (2007) wurden mittels LES und DES durchgeführt. Für LES wurde das Strukturfunktionsmodell verwendet, welches in Scherströmungen dissipativer ist als andere Modelle. Die DES zur Reduktion notwendiger Ressourcen basierte auf dem SA-Modell. Am Einströmrand, der identisch mit der Plattenvorderkante ist, wurden keine turbulenten Fluktuationen spezifiziert. In beiden Simulationen wurde die Länge des Rezirkulationsgebietes um circa 30% überschätzt. Als Grund wird eine ungenügende Gitterauflösung angegeben, welche beispielsweise durch Wandabstände der Größenordnung $y^+ \approx 7$ am Zylinder charakterisiert ist. Einzelne Ränder des Rechengebietes sind außerdem so nahe am Zylinder lokalisiert, daß Reflektionen nicht ausgeschlossen sind. Der Hufeisenwirbel wird mit LES zu groß vorhergesagt, was mit DES verbessert werden konnte. Die seitliche Ablösung wird gegenüber dem Experiment verspätet zwischen 81° und 84° bestimmt, während das Rezirkulationsgebiet auf dem Kopf gut erfaßt wurde – von LES etwas besser. Die DES liefert einen 15% niedrigeren Widerstandsbeiwert aufgrund geringeren Basisdruckes im abgelösten Bereich.

Es existiert eine Reihe weiterer Literaturstellen, die aufgrund der Redundanz hier nicht berücksichtigt wurden. Andere wie z. B. die Arbeiten von BAKER (1980) zum Hufeisenwirbel erscheinen für die vorliegende Konfiguration etwas zu speziell.

5.4 Begleitende Projekte

Im Rahmen des bereits benannten Schwerpunktprogrammes (SPP) wird die Strömung um und nach dem Zylinder sowie ihr Einfluß auf diesen mit verschiedensten, in der Mehrheit experimentellen Methoden untersucht. Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit stellen die einzigen numerischen im Schwerpunktprogramm dar. Die begleitenden bzw. begleiteten Experimente werden von Projektpartnern anderer Institute und Universitäten durchgeführt. Da diese Messungen die zentrale Basis der numerisch-experimentellen Vergleiche darstellen, sind in Tabelle 5.2 die einzelnen Projektgruppen mit ihrem Tätigkeitsfeld im SPP kurz aufgeführt. Auf die wichtigsten zugehörigen Publikationen wird zusätzlich verwiesen. Weil sich die Erkenntnisse der Projektpartner im Wesentlichen in den eigenen Untersuchungen widerspiegeln, wird auf die Inhaltsangabe der Literaturstellen verzichtet.

Projektgruppe	Meßgröße / Methodik	Referenzen
Universität Rostock Lehrstuhl Strömungsmechanik AG Prof. A. Leder	Geschwindigkeiten mit laseroptischen Verfahren LDA und TR-PIV	LEDER (2003) RICHTER (2005) JENSCH *et al.* (2009)
Technische Universität Berlin Microsensor & Actuator Technology AG Prof. E. Obermeier	Druck und -schwankungen mit MEMS-Drucksensoren	BERNS *et al.* (2008) BERNS *et al.* (2009)
Technische Universität Berlin Aerodynamik AG Prof. W. Nitsche	Konventioneller Druck, Wandschubspannung mit Wandhitzdrähten	DOBRILOFF & NITSCHE (2009)
Technische Universität Berlin Aerodynamik AG Dr. M. Reyer	Wandschubspannung, Messung, Visualisierung mit Infrarotthermographie	RUDOLPH *et al.* (2009)
Technische Universität Berlin Aerodynamik AG Dr. I. Peltzer	Druckschwankungen mit Pressure Sensitive Coating (PSC)	DOMHARDT *et al.* (2009)

***Tab.** 5.2:* Projektgruppen im SPP-1147 mit Messungen am Zylinderstumpf

Neben den experimentell ausgerichteten Partnern wurden auch Auswertungen und Visualisierungen von weiteren Projektgruppen begleitet, diese sind in Tabelle 5.3 zusammengestellt.

Projektgruppe	Methodik	Referenzen
Universität Stuttgart Visualisierung & Interaktive Systeme AG Prof. T. Ertl / Prof. U. Rist	Visualisierung, Merkmalsbasierte Strömungsanalyse	BOTCHEN *et al.* (2006) SCHAFHITZEL *et al.* (2007) BOTCHEN *et al.* (2008)
Universität Heidelberg Bild- & Musteranalyse AG Prof. C. Schnörr	Globale Variationsansätze zur Vektorfeldberechnung	VLASENKO & SCHNÖRR (2009)

***Tab.** 5.3:* Projektpartner im SPP-1147 mit Arbeiten zur Datenauswertung

6 Spezifische Modellbildung

Die Dokumentation der testfallspezifischen Modellbildung ist die Grundlage für die Bewertung der Qualität der Simulationsergebnisse. Aus diesem Grund werden Überlegungen zur Auswahl des Simulationsansatzes genauso dargelegt wie Abschätzungen zur räumlichen und zeitlichen Diskretisierung. Die Angabe verwendeter Randbedingungen vervollständigt die numerischen Konfigurationen, welche abschließend zusammengefaßt werden.

6.1 Vorüberlegungen

Die Umströmung des Zylinderstumpfes bei der vorliegenden Reynolds-Zahl beinhaltet zahlreiche Strömungsphänomene, deren grundlegender Charakter instationär ist und die auf verschiedenste Weise miteinander wechselwirken. Darüber hinaus muß das Strömungsgebiet zwangsläufig laminare und turbulente Bereiche sowie Transition beinhalten. Hervorstechendstes Merkmal der Umströmung ist der massiv abgelöste Nachlauf mit der Ausbildung turbulenter Skalen in einem breiten Wellenzahlbereich. Die qualitativ und quantitativ hochwertige Vorhersage von Ablösung, Nachlauf wie auch der turbulenter Mischprozesse ist essentiell, um deren Rückwirkung auf den Zylinder als Störkörper erfassen zu können. Durch die Mittelung über das gesamte turbulente Spektrum und die Modellierung aller turbulenten Schwankungen ist RANS zur Auflösung von abgelösten Wirbelstrukturen ungeeignet. Eine zumindest teilweise Auflösung von Turbulenz kann mit LES und DES erfolgen, während mit DNS die vollständige Erfassung realisierbar wäre.

Bei der betrachteten Strömungskonfiguration werden zur adäquaten Auflösung des Rechengebietes im Rahmen einer DNS in etwa $35 \cdot 10^9$ Gitterpunkte benötigt. Die DNS ist daher kein geeignetes Simulationsverfahren für die Umströmung des Zylinderstumpfes, weil der damit verbundene Bedarf an Rechnerressourcen nicht einmal auf heutigen Höchstleistungsrechnern realisiert werden kann. Entsprechend kommen als Simulationsverfahren nur LES und DES in Frage. Um den Einfluß der modellierten Skalenanteile einzugrenzen kann allenfalls noch eine LES ohne Feinstrukturmodell – auch als „grobe DNS“ bezeichnet – durchgeführt werden. In diesem Fall wird kein explizites Modell verwendet, sondern der Energieentzug aus den großen Skalen über den Diskretisierungsfehler gewährleistet.

Für die hochauflösende, LES-fähige Diskretisierung sind vorab Untersuchungen notwendig, um z. B. die räumliche Anordnung der Strömungsstruktur und damit die Fokussierung des räumlichen Gitters zu kennen. Außerdem können durch die Voruntersuchungen Abmessungen des Simulationsgebietes bestimmt, verschiedene Gittertopologien verglichen und eine angepaßte zeitliche Diskretisierung bestimmt werden. Nicht zuletzt lassen sich Zuström- und Randbedingungen gezielt auswählen.

6.2 Simulationsverfahren

Aus der Historie der durchgeführten Simulationsarbeiten lassen sich diese in drei wesentliche Kategorien mit unterschiedlichem Modellierungsaufwand einteilen. In der Gruppe der Voruntersuchungen mit geringer Vorhersagequalität stehen Gittertopologie, Strömungsstruktur, Randbedingungen und Parameter im Mittelpunkt. Darauf aufbauend werden hochauflösende Simulationen mit unterschiedlichen Modellansätzen durchgeführt, um die turbulente Umströmung so genau wie möglich zu erfassen und die Qualität der jeweiligen Ansätze zu beurteilen. Die dritte Gruppe umfaßt im Wesentlichen eine Simulation mit nennenswert reduzierter Auflösung, aber stark problemangepaßter Modellierung. Damit soll der Aufwand für eine Strömungsvorhersage hoher Qualität gemindert werden, um die simulierte Realzeit an typische experimentelle Meßzeiten im Bereich mehrerer Sekunden anzunähern.

6.2.1 Voruntersuchungen

Im Rahmen der Voruntersuchungen kam fast ausschließlich die ursprüngliche Variante der Detached-Eddy Simulation zum Einsatz. Einzig zur Generierung von Startlösungen wurden RANS bzw. U-RANS benutzt. Der hybride Ansatz DES verwendet im Wandbereich RANS und im abgelösten Bereich LES mit einem Feinstrukturmodell äquivalent zum Smagorinsky-Modell und ermöglicht so wenigstens teilweise die Erfassung von Turbulenz (Abschnitt 2.7). Als Hintergrundmodell wurde das LLR k-ω Turbulenzmodell von RUNG & THIELE (1996) benutzt. Bei diesem, auf Nichtgleichgewichtszustände angepaßten Modell (Abschnitt B.2.2) wird das turbulente Längenmaß aus lokalen Strömungsgrößen berechnet.

Um kurze Antwortzeiten zu gewährleisten ist die Diskretisierung für die Voruntersuchungen zur genauen Erfassung der Strömung nicht ausreichend. Im ungünstigsten Fall kehrt die DES in ungenügend aufgelösten Regionen in den RANS-Modus zurück, womit eine qualitativ hochwertige Strömungsvorhersage ausgeschlossen ist.

6.2.2 Hochauflösende Simulationen

Wie bereits erwähnt, kommen für die Simulation von Turbulenz über einen weiten Wellenzahlbereich bei relativ hohen Reynolds-Zahlen nur LES, DES und eine „grobe DNS“ (cDNS) in Betracht. Diese drei Verfahren sind in den vorliegenden Untersuchungen eingesetzt worden.

Large-Eddy Simulation Die hiesige LES nutzt den impliziten Gitterfilter basierend auf der Finite-Volumen-Diskretisierung. Aufgrund der sehr hohen Auflösung in Raum und Zeit reicht es aus, daß das Feinstrukturmodell für den angemessenen Energieentzug sorgt, anstatt auch die Struktur der vernachlässigten kleinskaligen Turbulenz zu modellieren. Deshalb wird das einfache Smagorinsky-Feinstrukturmodell mit der Modellkonstanten $C_S = 0.1$ verwendet. Der theoretisch, auf Basis isotroper Turbulenz, ableitbare Wert der Konstanten 0.18 (LILLY, 1967) stellte sich als übermäßig dissipativ heraus. Darüber hinaus nutzen FRÖHLICH & RODI (2004) in ihrer LES auch den Wert 0.1 und berichten außerdem von übermäßiger Produktion an Feinstrukturviskosität bei Einsatz des dynamischen Ansatzes von GERMANO *et al.* (1991). Der reduzierte Wert für die Modellkonstante trägt ihrer Abhängigkeit vom untersuchten Strömungstyp und dem verwendeten Filter Rechnung und berücksichtigt das in einer Scherströmung veränderte Spektrum (SAGAUT *et al.*, 2008).

Da eine wandaufgelöste LES durchgeführt wurde, sollte vorerst auf die Dämpfung der Feinstrukturviskosität mit Hilfe der Van-Driest-Funktion (2.68) verzichtet werden. Dennoch ist der Einfluß einer solchen Funktion auf das Strömungsfeld und besonders auf die mögliche Unterdrückung von natürlichen Instabilitäten untersucht worden.

Neben den Standardverfahren des Strömungslösers *ELAN* werden die konvektiven Terme vordergründig mit dem CDS-Verfahren zweiter Ordnung behandelt. Um numerische Stabilität in allen Zellen zu gewährleisten wird zusätzlich 5% UDS mittels Flux Blending eingekoppelt. Für die transitionellen Bereiche im Strömungsfeld wird kein zusätzliches Modell verwendet, einzig der Transitionsdraht auf der Platte wird geometrisch modelliert (Abschnitt 6.3.4).

Detached-Eddy Simulation Der DES-Ansatz könnte allgemein als eine Art wandmodellierte LES interpretiert werden, so daß hauptsächlich die wandnormale Gitterauflösung gegenüber einer wandaufgelösten LES reduziert werden kann. Tendenziell kann dann eine DES unter Verwendung des voll aufgelösten LES-Rechengitters als LES mit alternativem Feinstrukturmodell verstanden werden. In der Literatur ist ein derartiges Unterfangen bisher nicht dokumentiert. Gegenüber dem numerischen Modell von LES wird hier einfach der DES-Ansatz basierend auf dem LLR k-ω Hintergrundmodell (Anhang B.2.2) anstatt der Smagorinsky-LES benutzt. Einzige Änderung bei den eingesetzten numerischen Verfahren betrifft das Konvektionsschema; hier wird wie empfohlen das hybride Konvektionsschema (Anhang D.1) verwendet.

Grobe DNS Der Begriff „grobe DNS“ findet sich in der Literatur im Zusammenhang mit nicht ausreichend aufgelösten Rechengebieten bei DNS. Die fehlende Berücksichtigung der kleinsten turbulenten Skalen in Wandnähe führt in den Untersuchungen von VAN REEUWIJK *et al.* (2008) zu unterschätzten Wandgradienten und damit unterschätzter Wandschubspannung. Demgegenüber berichten die gleichen Autoren von Überschätzung der mittleren Geschwindigkeit, der Schwankungsgrößen in den großen Skalen und der Dissipation in Wandnähe. Die Überschätzung von Geschwindigkeitsprofilen und Schwankungsintensitäten wird auch von anderen Autoren (z. B. GARNIER *et al.*, 1999; PELLER & MANHART, 2006) im Rahmen der groben DNS dokumentiert. Nach SAGAUT *et al.* (2008) darf eine in der Simulation etablierte Feinstrukturmodellierung niemals die Ergebnisse einer groben DNS verschlechtern; im Umkehrschluß kann aber die grobe DNS in einigen speziellen Fällen zu exakten Vorhersagen typischer Testparameter wie Wandreibung oder Hauptströmungsgeschwindigkeit führen.

Die grobe DNS verwendet in den vorliegenden Untersuchungen die gleiche Diskretisierung wie LES und DES. Weil das räumliche und zeitliche Gitter auf LES angepaßt ist, kann damit zwangsläufig keine belastbare, exakte Strömungsvorhersage generiert werden. Dennoch stellt der Unterschied zwischen LES und grober DNS eine Möglichkeit dar, den Einfluß des Feinstrukturmodells zu untersuchen und letztlich zu quantifizieren. Allerdings benötigt die grobe DNS aufgrund stark reduzierter Dissipation im System zusätzliche Stabilisierung des numerischen Verfahrens. Der Anteil des UDS an der Approximation der konvektiven Terme ist deshalb für die Simulationen ohne jegliches explizites Feinstrukturmodell auf 15% (gegenüber 5% bei LES) erhöht worden.

6.2.3 Reduktion des numerischen Aufwands

Eine Reduktion des numerischen Aufwandes verlangt in erster Linie die Verringerung der Auflösung im Strömungsfeld. Der damit einhergehende Verlust an aufgelöster Physik soll durch eine höherwertigere Modellierung auszugleichen versucht werden. Die wandmodellierte LES (WM-LES) als Derivat der DES-Modellierung (Abschnitt 2.7.2) ermöglicht in diesem Zusammenhang die Erfassung von Fluktuationen in der Grenzschicht trotz gröberer Diskretisierung. Aufgrund der gewonnenen Erkenntnisse bei der hochauflösenden DES bedarf die Transition im Zylinderbereich zusätzlicher Berücksichtigung.

Als numerisches Verfahren wird der kombinierte Ansatz ID-DES verwendet, der neben der Wandmodellierung die Aktivierung des LES-Modus in zu gering aufgelösten Wandbereichen verhindert. Als Hintergrundmodell wird das etablierte Spalart-Allmaras-Eingleichungsmodell (SPALART & ALLMARAS, 1992) mit den Triptermen (siehe dazu MOCKETT, 2009) eingesetzt. Die letzteren lassen die Stabilität lokaler Bereiche ohne bzw. mit sehr geringen Niveaus an Wirbelviskosität (z. B. in der laminaren Grenzschicht) zu.

Um die fälschliche Produktion von Wirbelviskosität in laminaren Bereichen zu verhindern oder anders ausgedrückt, um Bereiche sehr geringer Wirbelviskosität zu ermöglichen, wird der sog. *Tripless*-Ansatz von SHUR *et al.* (1996) angewendet. Im Grunde handelt es sich dabei lediglich um eine gestaffelte Modifikation des turbulenten Gehalts am Einströmprofil. Beginnend mit einem turbulenten Einströmprofil ($\nu_t > 0$) stellen sich durchweg Grenzschichten mit turbulentem Charakter ein, die zu verspäteter Ablösung führen. Die Fortsetzung dieser Simulation mit einem Einströmprofil ohne turbulenten Gehalt ($\nu_t \approx 0$) soll zur Deaktivierung des turbulenten Produktionsterms ($\sim \nu_t$) in den anliegenden Grenzschichten führen. Im abgelösten Nachlauf verbleibt Wirbelviskosität aufgrund konvektiven und diffusiven Transports, so daß dort auch Turbulenz produziert werden kann. Der erzielte Effekt führt zu laminarer Grenzschichtablösung mit nahezu sofortigem Übergang in den turbulenten Zustand und entspricht damit dem gewünschten Verhalten bei der untersuchten Zylinderstumpfkonfiguration (Abschnitt 5.2). Idealerweise werden die beiden beschriebenen Rechnungen vorab stationär mit RANS ausgeführt und anschließend instationär mit ID-DES weitergerechnet. Als Nebenprodukt fällt also noch eine stationäre Vergleichslösung an.

Als weiterer Modellierungsschritt wird die Plattenanlaufkante bis zum Transitionsdraht entfernt. Um den turbulenten Zustand der Plattengrenzschicht zu gewährleisten, muß wegen der Verwendung des Tripless-Ansatzes am Einströmrand ein Profil für die Wirbelviskosität vorgegeben werden. Die Vergleichbarkeit mit dem Experiment wird noch zusätzlich erhöht, indem ein experimentell gemessenes Zuströmprofil benutzt wird. Beide Einflüsse im Zuströmprofil sind im Abschnitt 6.5 angegeben.

6.3 Räumliche Diskretisierung

Obwohl die Geometrie relativ einfach anmutet, ist sie für den Einsatz von Spektralverfahren bereits zu komplex, so daß ein Verfahren auf Basis der FVM verwendet wird. Eine Vernetzung mit in Blöcken strukturierten Gittern ist ohne Weiteres möglich, so daß die Gitterabmessungen sehr genau gesteuert werden können. Zudem ist die Unterteilung des Strömungsfeldes in mehrere Blöcke für die Durchführbarkeit der numerischen Simulationen unablässig, da aufgrund des hohen Hauptspeicherbedarfs bei angepaßtem Gitter eine Parallelisierung notwendig ist.

6.3.1 Begrenzung des Rechengebietes

Der Aufbau der untersuchten Strömungskonfiguration ist in Abschnitt 5.1 beschrieben. Obwohl neben der Länge auch die Höhe und Breite der Meßstrecke durch die Geometrie der im Experiment verwendeten Platte bzw. des Windkanals vorgegeben sind, werden die seitlichen Begrenzungen des Rechengebietes so gewählt, daß es keine Rückwirkung der Randbedingungen auf die zu untersuchenden Strömungsphänomene gibt. Aus den veröffentlichten experimentellen Daten (z. B. von LEDER, 2003) läßt sich abschätzen, in welchen Bereichen das Strömungsfeld entscheidend durch den Zylinder beeinflußt wird bzw. in welchen Turbulenz und kohärente Strukturen zu finden sind. Eine erkennbare Ablenkung der Geschwindigkeitsvektoren von der Anströmrichtung findet nur in den Bereich direkt am und hinter dem Zylinder statt. Abgesehen von der Hauptströmungsrichtung x bedeutet dies, die Phänomene bleiben seitlich fast ausschließlich auf $-1 \leq y/D \leq 1$ und vertikal auf $0 \geq z/D \geq -3$ beschränkt. Für die anschließende Gittergenerierung wird ein ausreichender Abstand zu diesen Grenzen von jeweils $4D$ gewählt. Demnach wird das zu simulierende Strömungsvolumen durch die Platte und den Zylinder sowie die Ränder $y/D = \pm 5$ und $z/D = -7$ berandet.

6.3.2 Gittertopologien

Für die zu untersuchende Strömungskonfiguration ist zu beachten, daß es im Strömungsfeld drei grundlegende Wandflächen (Platte, Zylindermantelfläche und -deckfläche) gibt. Diese Problematik bewirkt aufgrund der orthogonalen Ausrichtung der zugehörigen Grenzschichten eine Verdichtung von Gitterlinien in allen drei Raumrichtungen.

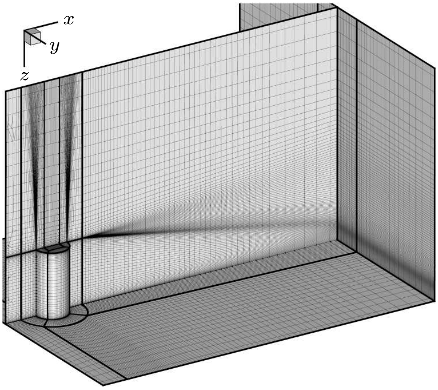


***Abb.** 6.1:* Gittertopologie mit durchgängigem O-Gitter (ca. 10^6 Gitterpunkte)

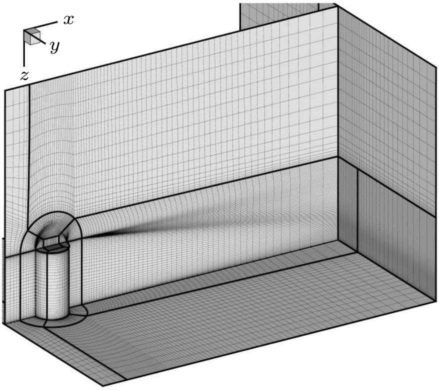


***Abb.** 6.2:* Gittertopologie mit Kuppel am Zylinder (ca. $930\,000$ Gitterpunkte)

Für den Zylinder als charakteristisches Element der Konfiguration bietet sich ein körperangepaßtes O-Gitter an. Auf der Oberseite des Zylinders ist es notwendig, eine Kreisvernetzung in das O-Gitter zu integrieren, so daß kein singulärer Punkt entsteht. Dies gelingt durch ein Quadrat in der Kreismitte und daran anschließende Kreissegmente.

Die wandnormale Auflösung der Zylindermantelfläche führt durch Verwendung einer O-Gitter-Topologie nur zur Verdichtung der Gitterpunkte oberhalb des Zylinders, während die verdichteten Gitterlinien der Zylinderdeckfläche durch das gesamte Strömungsfeld fortgesetzt werden müssen. Ähnliches gilt für die Endplatte, da diese die vollständige untere Begrenzung des Strömungsfeldes bildet. In Abbildung 6.1 und Abbildung 6.2 sind zwei realisierte Strategien für die globale Gittertopologie dargestellt. Die Fortsetzung des O-Gitters bis zur Fernfeldrandbedingung $z/D = -7$ ist eine mögliche Topologie (Abbildung 6.1), die auch bei den Simulationen von FRÖHLICH *et al.* (2003) verwendet wird. Diese Art der Gestaltung führt aber gerade zu der bereits erwähnten unerwünschten Gitterpunktverdichtung im oberen Fernfeld. Eine Auffächerung dieser Gitterlinien würde zu stark verscherten Kontrollvolumina führen, die sich nachteilig auf die Güte und Konvergenz der Lösung auswirken würden. Durch Integration einer topologischen Kuppel (Oberfläche einer Halbkugel) über dem Zylinder (Abbildung 6.2) gelingt es, die Gitterpunkte auf den Fokusbereich am Zylinderkopf zu konzentrieren. Diese Variante für ein angepaßtes, block-strukturiertes Gitter ist zu bevorzugen, da somit die Gesamtanzahl an Gitterpunkten bei verfeinertem Gitter moderat bleibt bzw. die Mehrheit sinnvoll positioniert ist.

6.3.3 Simulationsgitter für Voruntersuchungen

Um sich vor den hochauflösenden Simulationen und der Generierung eines angepaßten Gitters über wesentliche Eigenschaften des Strömungsfeldes Klarheit zu verschaffen, wurde mit dem Simulationsgitter in Abbildung 6.2 eine Detached-Eddy Simulation durchgeführt.

Das verwendete Finite-Volumen-Gitter hat ca. $902\,000$ Kontrollvolumina bzw. ca. $930\,000$ Gitterpunkte. Der dimensionslose Wandabstand y^+ der ersten Gitterlinie für die Grenzschichten am Zylindermantel und der Zylinderdeckfläche ist etwas kleiner als 1.0, während die Grenzschicht an der Platte nicht aufgelöst wurde und y^+ dort zwischen 5.0 und 10.0 variiert. Der Zylinder ist in Spannweitenrichtung mit 69 Kontrollvolumina und in Umfangsrichtung mit 100 Kontrollvolumina diskretisiert. Über den Durchmesser des Zylinders, also auf der Oberseite, sind 63 Kontrollvolumina verteilt. Im gesamten Gitter ist das Längenverhältnis benachbarter Zellen unterhalb von 1.2, und an allen Geometrieänderungen (Zylinderenden spannweitig, zum Rand der Zylinderdeckfläche usw.) im Strömungsfeld wurde eine Verdichtung der Gitterlinien zu den Kanten hin realisiert. Die verdichteten Gitterlinien zur Auflösung der Zylinderoberseite wurden im Nachlauf aufgefächert, um die interessanten Nachlaufgebiete besser erfassen zu können. Die Topologie des Gitters besteht aus 15 strukturierten Blöcken, die auf drei Rechenkerne verteilt wurden.

6.3.4 Modellierung der fixierten Transition auf der Platte

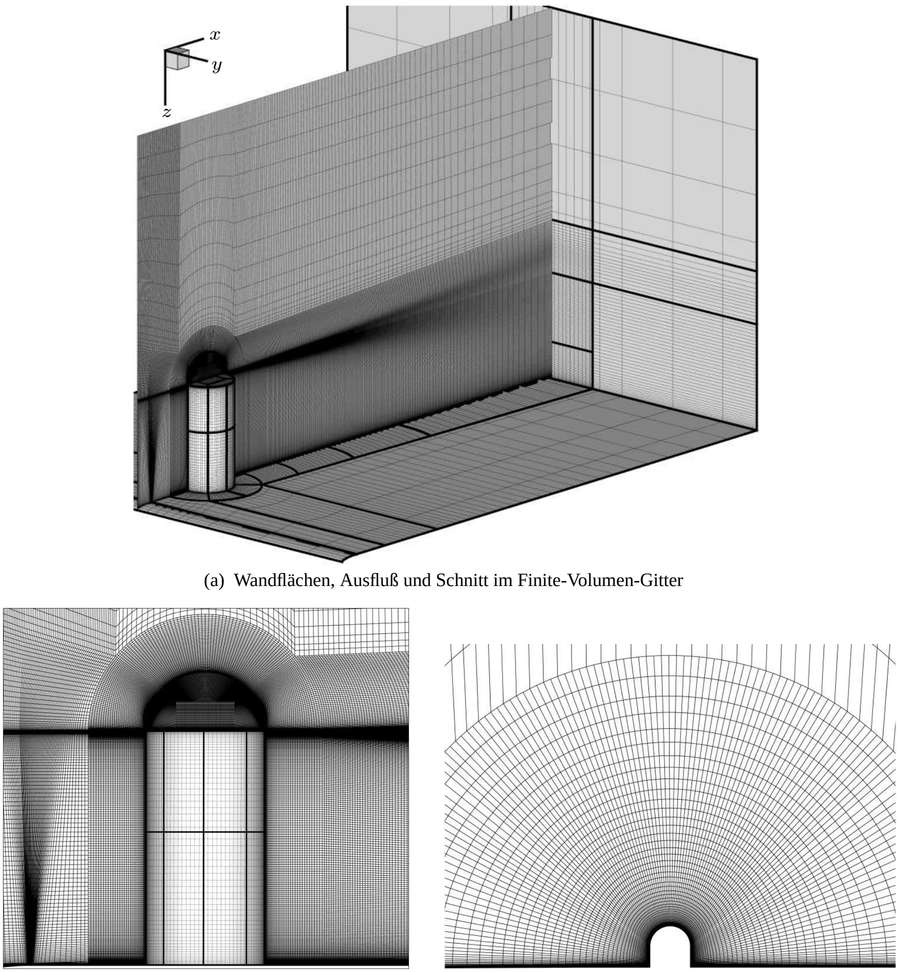
Die Vergleichbarkeit von Experiment und Numerik erhöht sich mit der Anzahl der festgelegten Strömungszustände im Rechengebiet. Zu diesem Zweck wird im Experiment durch einen Stolperdraht an der Stelle $x/D = -1.5$ die Transition der Plattengrenzschicht erzwungen. Da die freie Transition sehr sensitiv auf geringe Änderungen der Umgebungsbedingungen wäre, ist durch die Fixierung der Transition zumindest für die Plattengrenzschicht eine gewisse Unabhängigkeit von diesen gesichert.

Der Transitionsdraht befindet sich exakt an der Position des Einströmrandes für die Simulationen im Rahmen der Voruntersuchungen. Diese nachträglich etablierte, augenscheinlich kleine Modifikation erzwingt wenigstens die Integration der Plattenvorderkante in das Strömungsfeld. Da keine Daten für ein instationäres, weil turbulentes, Einströmprofil an der Position des Drahtes vorhanden sind, wird der Transitionsvorgang in die Simulation aufgenommen. Neben der Verlängerung des Simulationsgitters stromauf ist ein Mechanismus zur Transitionsfixierung zu finden. Aus der Literatur ist bisher keine allgemein gültige Lösung für die Behandlung der Transition bei LES bekannt. Daher wurden eine Reihe von numerischen Experimenten erforderlich, um den Transitionsdraht und seine Wirkung in die vorliegende Konfiguration zu integrieren. Um den Grad der Vergleichbarkeit zum Experiment weiter zu erhöhen, wird der Draht für die hochauflösenden Simulationen letztlich geometrisch modelliert.

Der Draht hat einen Durchmesser von 0.4 mm und ist damit etwa drei Größenordnungen kleiner als der Zylinderdurchmesser. Dennoch erfordert die Numerik eine gute Auflösung der Drahtgeometrie, da eine zu grobe Repräsentation der Geometrie infolge von starken Unstetigkeiten, nämlich die sprunghafte Änderung des Normalenvektors, zu Konvergenzproblemen im verwendeten Strömungslöser führt. Die finale Diskretisierung im Bereich des Transtionsdrahtes ist in Abbildung 6.3 c normal zur Drahtachse dargestellt.

6.3.5 Hochauflösendes Simulationsgitter

Für die hauptsächlich mit LES durchzuführenden, hochauflösenden Strömungssimulationen ist das Gitternetz der Voruntersuchungen deutlich zu grob. Die Generierung eines an die geometrischen und physikalischen Strukturen angepaßten Gitters für LES kann sich nicht nur auf Grenzschichtauflösung, Erfahrungen und optische Aspekte stützen. Vielmehr gibt es gängige Vorgehensweisen und Vorschriften für Gitteranforderungen bei Verwendung hochauflösender Simulationsansätze, zu denen LES zweifellos gehört.



(a) Wandflächen, Ausfluß und Schnitt im Finite-Volumen-Gitter

(b) Zylinderbereich

(c) Transitionsdraht

Abb. *6.3:* Hochaufgelöstes Simulationsgitter mit hängenden Knoten (ca. $12.3 \cdot 10^6$ Gitterpunkte, auf allen Wänden und dem Ausfluß ist nur jede dritte Gitterebene dargestellt)

Ausgehend von der topologischen Struktur entsprechend Abbildung 6.2 konnte ein Gitter mit ca. $12.1 \cdot 10^6$ Kontrollvolumina und insgesamt ca. $12.3 \cdot 10^6$ Gitterpunkten generiert werden. Die fixierte Transition auf der Platte ist äquivalent zum Experiment mit einem geometrischen Drahtmodell integriert (Abschnitt 6.3.4). Durch Verwendung lokaler Verfeinerungen einzelner Blöcke sind ca. $9.9 \cdot 10^6$ Gitterpunkte am Zylinder und in seinem Nachlauf konzentriert, während im Fernfeld die Gitterverdichtung moderat bleibt. Die Beschränkung der Verfeinerung auf einzelne Blöcke führt zu benachbarten Blockgrenzflächen mit hängenden Knoten. Da die Regionen zur Verfeinerung auf Basis der Voruntersuchungen (Abschnitt 7.1) ausgewählt wurden, befinden sich die hängenden Knotenflächen in Gebieten reduzierten strömungsmechanischen Interesses. Das generierte Gitter ist in Abbildung 6.3 ausschnittsweise dargestellt, wobei auf den Wänden und dem Ausflußrand nur jede dritte Gitterlinie gezeigt ist. Eine Vorstellung über die reale Auflösung kann mit Hilfe des Gitterschnittes bei $y = 0$ gewonnen werden.

Der Zylinder ist in seiner Spannweite mit 246 zu den Rändern stark verdichteten Zellen und im Umfang mit 248 äquidistanten Finiten Volumina diskretisiert. Im Kopfbereich sind über den Zylinderdurchmesser 178 Volumina verteilt, die von der direkt benachbarten seitlichen Grenzschichtauflösung zur Mitte moderat aufgeweitet werden. Das gesamte Gitter ist in 63 Blöcke mit strukturierten Bereichen unterteilt und wurde zu Anfang auf 42 und am Ende auf 32 Rechenkerne verteilt. Die am Zylindermantel anliegende Grenzschicht der mittleren Dicke $\delta/D = 0.00465$ (LES bei $45°$ von der Staulinie) wird wandnormal mit etwa 22 Zellen aufgelöst.

Die Verteilung und Größe der Zellen bei der Gittergenerierung folgen der gängigen Praxis für LES-Gitter und sind für die Reynolds-Zahl $\mathrm{Re}_D = 200\,000$ angepaßt. Die typischen Anforderungen sind im Abschnitt 2.6.7 dargelegt, wobei sich die Wandeinheiten auf ein lokales wandnormales Koordinatensystem mit x als Hauptströmungsrichtung, y als wandnormaler und z als zugehöriger dritter Richtung, beziehen. Da die Wandschubspannung aufgrund des unbekannten Geschwindigkeitsfeldes bei der Gittergenerierung noch nicht bekannt ist, müssen vorerst Abschätzungen verwendet werden. Dazu eignet sich die Bestimmung über den Reibungsbeiwert c_f, die für den aerodynamischen Anwendungsfall (z. B. Flügelumströmung) akzeptable Ergebnisse liefert. Nach erfolgter Rechnung ist dann nachzuprüfen, ob die angestrebten Wandeinheiten eingehalten wurden.

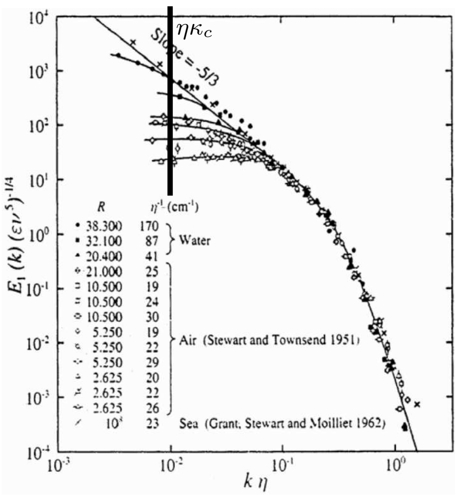


***Abb.** 6.4:* Energiespektren aus Labormessungen nach GIBSON & SCHWARZ (1963)

$$u_\tau = U_\infty \sqrt{0.5 \cdot c_f} \qquad \text{mit} \qquad c_f \cong 0.072 \cdot \mathrm{Re}_D^{-0.2} \tag{6.1}$$

Die Gitterauflösung im zu fokussierenden Freistrombereich wird mit Hilfe der zusammengetragenen Energiespektren nach GIBSON & SCHWARZ (1963) oder alternativ mit den Dissipationsspektren von POPE (2000) abgeschätzt. Dazu wird die Proportionalität zwischen Reynolds-Zahl Re_D und Kolmogorov-Längenmaß η aus (2.4a) verwendet, um eine Abschätzung für η zu erhalten: $\eta \sim \mathrm{Re}^{-\frac{3}{4}} D \approx \eta \approx 10^{-4} D$. Für eine räumlich hochaufgelöste LES sollte nun die Grenzwellenzahl κ_c (cut-off) nahe am Dissipationsbereich, aber noch im Inertialbereich zu finden sein. Letzterer erstreckt sich mit steigender Reynolds-Zahl über einen immer breiteren Wellenzahlbereich, so daß das Energiespektrum für die vorliegende Reynolds-Zahl das Diagramm in Abbildung 6.4 deutlich in Richtung kleinerer Wellenzahlen verlassen würde. Die Trennung der Skalen für $\mathrm{Re}_D = 200\,000$ bei $\eta\kappa_c = 10^{-2}$ nach diesem Diagramm entspricht damit der Definition einer hohen räumlichen Auflösung. Um zu gewährleisten, daß die energiereichen Strukturen simuliert werden, müssen sich in den relevanten Bereichen die lokalen Gitterlängen an dem zugehörigen Grenzlängenmaß l_c orientieren: $l_c = 1/\kappa_c = \eta/10^{-2} \approx 0.01D$.

Um die Anzahl der Gitterpunkte moderat zu halten, wurden die Gitteranforderungen akzeptabel am Zylinder und im Nachlauf erfüllt, in den Außenregionen und dem Anströmbereich aber weniger restriktiv. In Tabelle 6.1 sind die im Gitter realisierten Gitterabstände und Wandeinheiten für ausgewählte Bereiche zusammengestellt. Die Wandeinheiten sind als Maximalwerte aus rund $4\,500$ Datensätzen in einem Zeitintervall von etwa $130D/U_\infty$ bestimmt worden. Im Vergleich zu den im Abschnitt 2.6.7 genannten Kriterien zur Gittergenerierung ist festzustellen, daß ein guter Kompromiß zwischen Auflösung im Wand- und Freistrombereich gefunden wurde. Die Maxima, welche die Gitteranforderungen für LES deutlich überschreiten, treten in sehr kleinen, lokal stark begrenzten Gebieten an Geometrieänderungen auf, z. B. Vorder- und Hinterkante der Zylinderkappe. Aufzulösende turbulente Grobstrukturen existieren dort nur bedingt.

Region	Koordinaten	Gitterlänge / -abstand	Max. Wandeinheiten
Zylindermantel	$-2 \leq \frac{z}{D} \leq 0$	$\Delta x = 0.0114D$ $y_{j=1} = 2.5 \cdot 10^{-5} D$ $\Delta z = 2.5 \cdot 10^{-5}...0.02D$	$\Delta x^+ = 5.472...339.6$ $y^+_{j=1} = 0.012...0.815$ $\Delta z^+ = 0.012...284.2$
Zylinderkappe	$\frac{z}{D} = -2$	$\Delta x = 2.5\cdot10^{-5}...0.008D$ $y_{j=1} = 2.5 \cdot 10^{-5} D$ $\Delta z = 2.5\cdot10^{-5}...0.008D$	$\Delta x^+ = 0.093...312.6$ $y^+_{j=1} = 0.093...0.977$ $\Delta z^+ = 0.093...547.7$
Platte (am Zylinder)	$z = 0$	$\Delta x = 0.0114...0.0228D$ $y_{j=1} = 2.5 \cdot 10^{-5} D$ $\Delta z = 2.5\cdot10^{-5}...0.022D$	$\Delta x^+ = 5.472...522.3$ $y^+_{j=1} = 0.012...0.669$ $\Delta z^+ = 0.012...585.6$
Draht	$\frac{x}{D} = -1.5$	$\Delta x = 5.0 \cdot 10^{-5} D$ $y_{j=1} = 1.0 \cdot 10^{-5} D$ $\Delta z = 0.032...0.234D$	$\Delta x^+ = 0.00084...0.435$ $y^+_{j=1} = 0.00017...0.087$ $\Delta z^+ = 0.538...809.9$
Nachlauf	$0.5 \leq \frac{x}{D} \leq 9.33$	$\Delta x = 2.5 \cdot 10^{-5} D...0.2$ $y_{j=1} = 2.5 \cdot 10^{-5} D$ $\Delta z = 0.0114...0.0321D$	$\Delta x^+ = 0.020...2104$ $y^+_{j=1} = 0.020...0.686$ $\Delta z^+ = 9.120...627.1$

Tab. *6.1:* Realisierte Gitterpunktabständen und maximale Wandeinheiten (bezogen auf ein jeweilig lokales Koordinatensystems mit Δx in Hauptströmungsrichtung, $y_{j=1}$ als wandnormalem Abstand der ersten Gitterebene und Δz ergänzend)

6.3.6 Reduziertes Simulationsgitter

Wegen der Nutzung von RANS im wandnahen Bereich sind die Gitteranforderungen einer DES in wandnormaler Richtung deutlich geringer als bei einer wandaufgelösten LES. Die Diskretisierung der wandtangentialen Richtungen ist aber üblicherweise für beide Ansätze ähnlich. Der Grund ist, daß die Simulation turbulenter Strukturen unfern der Wand die Auflösung in allen drei Raumrichtungen erfordert und diese dann starken Einfluß auf die nahen Wandregionen hat.

Ausgehend von dem hochaufgelösten LES-fähigen Simulationsgitter reicht die Gitterreduktion einzig aus der Vergröberung der wandnormalen Richtungen nicht aus, um eine effektive Rechenzeitersparnis zu gewähren. Deshalb muß eine Vergröberung in allen Raumrichtungen (und der Zeit) durchgeführt werden. Das Entfernen der lokalen Verfeinerung in den Gitterblöcken am Zylinder und im Nachlauf, so daß keine hängenden Knotenflächen mehr existieren, stellt die einfachste, hier auch verfolgte Möglichkeit der Gitterreduktion dar. Da zum Zeitpunkt der Simulation ein neu gemessenes Zuströmprofil an der Position des Transitionsdrahtes zur Verfügung stand, wurde zusätzlich auf die Integration der Plattenanlaufkante verzichtet. Das finale räumliche Gitternetz ist in Abbildung 6.5 ausschnittsweise gezeigt.

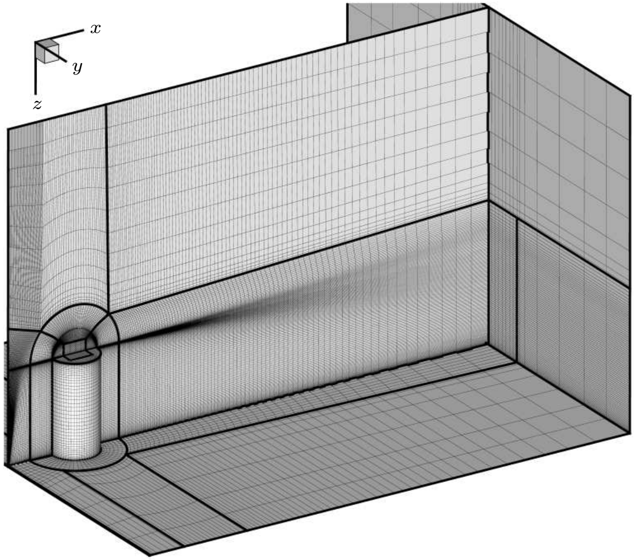


***Abb.** 6.5:* Reduziertes Simulationsgitter (ca. $2.62 \cdot 10^6$ Gitterpunkte, auf allen Wänden und dem Ausfluß ist nur jede zweite Gitterebene dargestellt)

Das reduzierte Gitternetz besteht aus ca. $2.46 \cdot 10^6$ Gitterzellen mit ca. $2.62 \cdot 10^6$ Gitterpunkten. Dabei ist der Zylinder jetzt mit der Hälfte an Zellen diskretisiert, nämlich 123 spannweitig, 124 im Umfang und über den Durchmesser mit 89. Das Rechengebiet ist in 18 strukturierte Blöcke unterteilt, die mit acht Rechenkernen parallel bearbeitet werden. Die Anzahl der Finiten Volumina wurde gegenüber dem hochauflösenden Gitter etwa um den Faktor 5 reduziert.

6.4 Zeitliche Diskretisierung

Neben der räumlichen Auflösung muß auch die zeitliche Diskretisierung des Problems eingestellt werden. Für die Auswahl einer adäquaten Zeitschrittgröße gibt es mehrere gebräuchliche Vorgehensweisen. So kann bei Kenntnis einer oder mehrerer dominanter Frequenzen ein Zeitschritt gewählt werden, der zur Auflösung dieser Frequenzen ausreichend ist.

6.4.1 Zeitschritt für Voruntersuchungen

Im numerischen Experiment von FRÖHLICH & RODI (2004) für einen Kreiszylinder endlicher Höhe mit dem Seitenverhältnis $L/D = 2.5$ wurde eine Strouhal-Zahl von $\mathrm{St} = 0.16$ detektiert. Mit diesem Ergebnis kann für die aktuelle Untersuchung zuerst die Periodendauer T abgeschätzt werden.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{D}{\mathrm{St} \cdot U_\infty} = 6.25 \frac{D}{U_\infty} \tag{6.2}$$

Um die zugehörige Frequenz aufzulösen wird angenommen, daß $n = 250$ Zeitschritte pro Periodendauer notwendig sind, die dann auch noch die Erfassung eventuell vorhandener höherer Frequenzen ermöglichen.

$$\Delta t = \frac{1}{n} T = 0.025 \frac{D}{U_\infty} \tag{6.3}$$

Unter Nutzung des abgeschätzten Zeitschrittes $\Delta t = 0.025 D/U_\infty$ wurden erste Untersuchungen mit dem relativ groben Gitter aus Abschnitt 6.3.3 durchgeführt. Die entsprechenden Ergebnisse (Abschnitt 7.1) lieferten Erkenntnisse zu einer an das Gitter angepaßten Abschätzung des Zeitschrittes.

6.4.2 Angepaßter Zeitschritt

Die Voruntersuchungen mit DES liefern das Ergebnis, daß der größte Geschwindigkeitsbetrag $U \approx 1.8 U_\infty$ an der seitlichen Zylindermantelfläche auftritt. Dort ist die lokal kleinste Gitterlänge in Hauptströmungsrichtung etwa $0.01D$ (Grenzlängenmaß l_c). Aus der Forderung, daß diese Gitterzelle nicht in einem Zeitschritt durchströmt wird, kann ein Limit für den Zeitschritt Δt berechnet werden.

$$\Delta t < \frac{0.01\, D}{1.8\, U_\infty} = 0.00555 \frac{D}{U_\infty} \tag{6.4}$$

Alle Zeitschrittgrößen die Bedingung (6.4) erfüllen sind in der Lage die vom Gitter räumlich aufgelösten turbulenten Schwankungsbewegungen auch zeitlich zu erfassen. Der gewählte Zeitschritt (6.5) ist etwas kleiner als das Limit.

$$\Delta t = 0.005 \frac{D}{U_\infty} \tag{6.5}$$

Aus dem Vergleich mit der Definition der Strouhal-Zahl $\mathrm{St} = f\frac{D}{U_\infty}$ ist ersichtlich, daß mit diesem Zeitschritt auch Frequenzen deutlich oberhalb der Strouhal-Zahl von 0.16 (Zylinderstumpfumströmung von FRÖHLICH & RODI, 2004) aufgelöst werden können.

6.4.3 Reduzierter Zeitschritt

Zur Ermittelung des Zeitschrittes für die reduzierte numerische Konfiguration ist prinzipiell nur die Gitterweite in (6.4) anzupassen. Allerdings wurde zum Zwecke einer verbesserten Abschätzung die Werte für Gitterweite und Maximalgeschwindigkeit etwas genauer (aus der RANS-Simulation auf dem reduzierten Gitter) bestimmt. Demnach ist am Ort der lokal größten Geschwindigkeit $U \approx 1.5U_\infty$ die lokale Gitterweite etwa $0.025D$. Das Limit für den reduzierten Zeitschritt ist damit etwa dreimal größer als für den hochauflösenden Fall.

$$\Delta t < \frac{0.025\,D}{1.5\,U_\infty} = 0.0167\frac{D}{U_\infty} \tag{6.6}$$

Der letztlich ausgewählte Zeitschritt für die instationäre Simulation mit ID-DES ist dreimal größer als im Falle der LES.

$$\Delta t = 0.015\frac{D}{U_\infty} \tag{6.7}$$

6.4.4 Abschätzung der Gesamtrechendauer

Um den Simulationsaufwand zu verdeutlichen wird hier eine grobe Abschätzung notwendiger Rechenzeiten angegeben. Neben Testrechnungen umfaßt die eigentliche Simulation auch einen Anteil bis zum Abklingen transienter Phänomene aus dem Anfahrvorgang. Die Erfahrungen des eigenen Instituts führen zu der Annahme, daß etwa sechs vollständige Durchströmungen des Rechengebietes notwendig sind, bis die Strömung vollständig entwickelt ist. Für eine Durchströmung des circa $11.21\,D$ langen Rechengebietes wird mit der Geschwindigkeit U_∞ eine Zeit von $t = 11.21D/U_\infty$ benötigt. Mit dem Zeitschritt von $\Delta t = 0.005D/U_\infty$ entspricht dies $2\,242$ Zeitschritten pro Durchströmung.

Für die Simulation eines Zeitschrittes der LES werden durchschnittlich etwa vier Minuten Simulationszeit auf dem IBM pSeries 690 Computer des HLRN benötigt. Die Rechnung bis zur vollständigen Entwicklung erfordert entsprechend rund 37 Tage Rechenzeit. Unter der Annahme, daß mindestens $30\,000$ Zeitschritte für die statistische Auswertung benötigt werden, addieren sich dazu nochmals mindestens 83 Tage Simulationszeit. Hinzu kommen regelmäßige Wartezeiten in der Warteschleife und Ausfallzeiten.

6.5 Randbedingungen

Das Rechengebiet muß für die numerische Simulation an allen Seiten mit entsprechenden Randbedingungen versehen werden. Die vorhandenen Gebietsgrenzen können nach ihrer Lage und

Funktion unterteilt werden in Einströmrand, Ausströmrand, seitliche und obere Fernfeldränder sowie feste Wände (Abbildung 6.6).

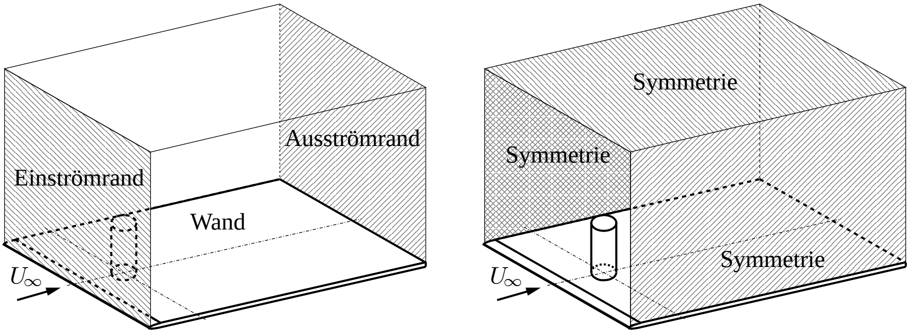


***Abb.** 6.6:* Randbedingungen des Rechengebietes

6.5.1 Feste Wände

Die Platten- und die Zylinderoberfläche als feste Wände werden mit der Stokesschen Haftbedingung behandelt. Dies bedeutet, daß direkt an der Wand die Geschwindigkeitskomponenten u, v und w zu null gesetzt werden (no-slip). Die Wandrandbedingungen werden im verwendeten Strömungslöser mit einer hybriden Wandrandbedingung behandelt, die sich bei ausreichender Auflösung auf die Low-Reynolds-Formulierung reduziert bzw. im anderen Falle eine Modellierung auf Basis des logarithmischen Wandgesetzes einsetzt (RUNG *et al.*, 2000).

6.5.2 Fernfeldränder

Für den oberen und die seitlichen Gebietsränder wird angenommen, daß ihre Entfernung zu den strömungsphysikalisch interessanten Bereichen ausreichend groß ist (Abschnitt 6.3.1). In diesem Fall liegt dort die ungestörte Strömung im Fernfeld vor, und bei kartesischer Ausrichtung der Kontrollvolumengrenzen sind die lokalen Geschwindigkeitsvektoren parallel zu den Berandungen. Entsprechend wird an diesen Rändern eine Symmetrierandbedingung (slip) verwendet.

6.5.3 Ausströmrand

Für die Simulationen stationärer Strömungen ist eine einfache Nullgradientenrandbedingung am Ausströmrand, mit der Richtung n senkrecht zum Rand, ausreichend. Bei Instationarität und Turbulenz muß zusätzlich die nicht-reflektierende Bewegung beliebiger Strukturen über den stromab befindlichen Rand gewährleistet sein. Deshalb wird der Nullgradient um einen instationären Term und eine mittlere Auströmgeschwindigkeit u_m, die notwendig ist, um die Massenstrombilanz zu erfüllen, erweitert (Abschnitt 2.4.3).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_m \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \tag{6.8}$$

Mit der sog. konvektiven Ausströmrandbedingung (6.8) können sich beliebige Strömungsstrukturen ungestört über den Ausströmrand bewegen.

6.5.4 Geschwindigkeiten am Einströmrand

Im Laufe der Simulationsarbeiten wurden am Einströmrand bezüglich der Geschwindigkeiten drei verschiedene Zuströmprofile verwendet: ein konstantes, ein numerisch ermitteltes und ein experimentell ermitteltes.

Konstantes Geschwindigkeitsprofil Für die Voruntersuchungen und die ersten hochauflösenden Simulationen wurde am Einströmrand eine räumlich-zeitlich konstante Geschwindigkeitsverteilung $U_\infty = \mathrm{const.}$ angenommen. Dieses Blockprofil ist vorerst ausreichend, führt aber im Bereich des Zylinders zu erhöhter Anströmung aufgrund der vernachlässigten Verblockung durch den Zylinder.

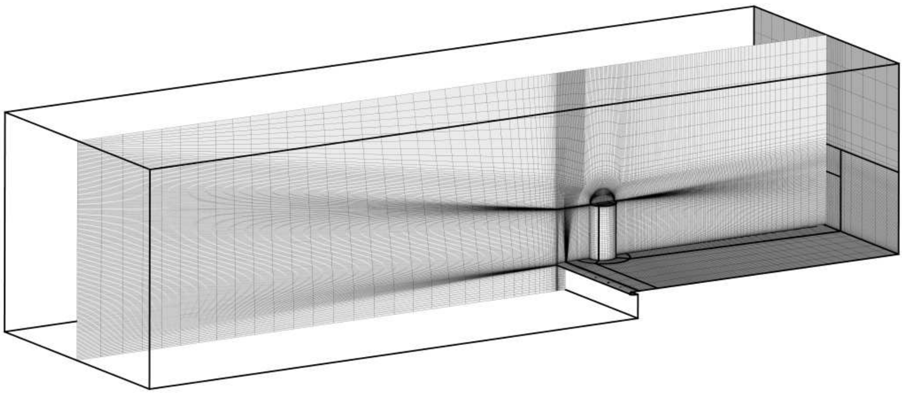
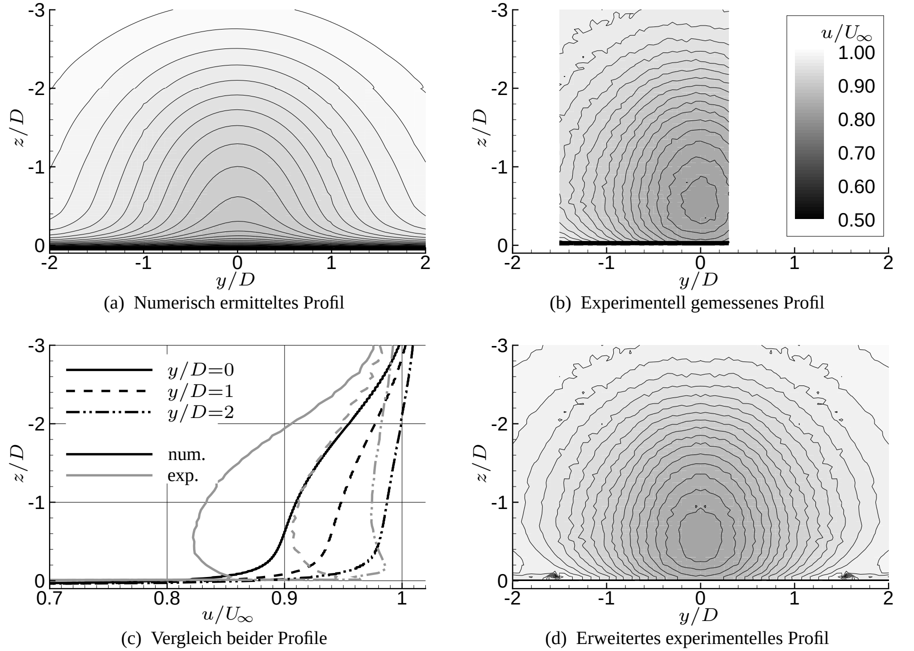


***Abb.** 6.7:* Rechengebiet und Simulationsgitter zur Erzeugung eines Zuströmprofils (ca. $3.46 \cdot 10^6$ Gitterpunkte, alle Wände und der Ausfluß zeigen nur jede zweite Gitterebene)

Numerisch ermitteltes Profil Aufgrund der räumlichen Nähe von Einströmrand und Zylinder (Abstand zur Zylindervorderkante: $1.375D$) wird mindestens ein Geschwindigkeitsprofil benötigt, das die Verblockung berücksichtigt. Ein experimentell ermitteltes Einströmprofil war jedoch vorerst nicht vorhanden, weshalb eine zusätzliche Rechnung zur Ermittelung der Einströmdaten durchgeführt wurde. Da die eigentliche Anströmung des Zylinders im Grunde laminar erfolgt, wurde diese Simulation ohne Turbulenzmodellierung und stationär durchgeführt. Um die Interpolationen zwischen verschiedenen Rechennetzen zu vermeiden, wurde dazu das hochauflösende Simualationsgitter (jetzt ohne lokale Verfeinerung) stromauf um $20D$ erweitert. Eine generelle Erweiterung der stromauf befindlichen Region, wie in Abbildung 6.7 dargestellt, wurde aufgrund der zusätzlichen Gitterpunkte und der notwendigen unteren Randbedingung verworfen.

Als Ergebnis der Simulation wurde das Zuströmprofil exakt an der Position des künftigen Einströmrandes bei $x/D = -1.875$ entnommen. Die zeitliche Variabilität des ermittelten Profils (Abbildung 6.8 a) wurde wegen des niedrigen Turbulenzgrades von 0.5% und der notwendigen Behandlung laminarer und turbulenter Bereiche vernachlässigt. Das berechnete Strömungsfeld wurde anschließend als Vorschätzung für die hochauflösenden Simulationen verwendet.

Experimentell gemessenes Profil Mit dem numerisch ermittelten Zuströmprofil können die im Rahmen der experimentellen Untersuchungen auftretenden Einflüsse des Windkanals nicht erfaßt werden. Deshalb wurde ein großer Ausschnitt der Fläche $x/D = -1.5$ (direkt über dem Transitionsdraht) experimentell mit LDA vermessen (JENSCH, 2008). Die zeitlich-gemittelte Geschwindigkeitsverteilung in der Meßebene (Abbildung 6.8 b) ist um einen Grenzschichtbereich erweitert und anschließend durch geeignete Fortsetzung von Isolinien auf die gesamte Einströmfläche interpoliert worden (Abbildung 6.8 d). Dieses Eintrittsprofil wird für die Simulationen mit reduzierter Auflösung benutzt.



(a) Numerisch ermitteltes Profil

(b) Experimentell gemessenes Profil

(c) Vergleich beider Profile

(d) Erweitertes experimentelles Profil

***Abb.** 6.8:* Räumlich variable Geschwindigkeitsprofile als Einströmrandbedingung aus zusätzlicher Simulation und LDA-Messungen von JENSCH (2008) (nur u-Komponente)

6.5.5 Turbulenz am Einströmrand

Der Turbulenzgrad der Anströmung im begleitenden Experiment ist mit $\mathrm{Tu} = 0.5\%$ relativ gering. Daher wird für die LES und die grobe DNS Turbulenz am Einströmrand nicht explizit spezifiziert, einzig das Geschwindigkeitsprofil enthält einige räumliche Schwankungen. Demgegenüber muß für die RANS-basierten Simulationen, wie DES und ID-DES, zumindest ein geringes Maß an Wirbelviskosität oder analogen Parametern vorgegeben werden. Da der Produktionsterm der Turbulenzgleichungen typischerweise proportional zur Wirbelviskosität ist, bestünde ansonsten keine Möglichkeit der Turbulenzproduktion aus dem Modell.

Der Strömungslöser *ELAN* erlaubt die Vorgabe von Intensität und Struktur der Turbulenz über die turbulente kinetische Energie k und die Energiedissipationsrate ε. Programmintern erfolgt anschließend die Umrechnung auf eine Wirbelviskosität ν_t. Aus der Definition des Turbulenzgrades (2.17) läßt sich die zugehörige Turbulenzenergie k berechnen.

$$k = \frac{3}{2}\mathrm{Tu}^2 U_\infty^2 \tag{6.9}$$

Die Dissipationsrate kann anschließend aus der Definition der Wirbelviskosität eines k-ε Modells (Tabelle 2.3) bestimmt werden. Benötigt werden dazu noch eine typische Initialisierungsannahme für die Wirbelviskosität $\nu_t = 10\nu$ und der Anisotropieparameter $c_\mu = 0.09$.

$$\varepsilon = \frac{c_\mu k^2}{\nu_t} \tag{6.10}$$

Mit den berechneten Werten $k_{in} = 3.75 \cdot 10^{-5}\, U_\infty^2$ und $\varepsilon_{in} = 2.53125 \cdot 10^{-6}\, U_\infty^3/D$ wurden der Einströmrand und die Feldinitialisierung für DES belegt. Auch die stationäre, vollturbulente Startrechnung für ID-DES mit dem Tripless-Ansatz benutzt diese Werte.

Der zweite Schritt bei dem Tripless-Ansatz ist das Entfernen des turbulenten Gehalts am Einströmrand. Analog zu den Autoren der Idee SHUR *et al.* (1996) wird $\nu_t = 10^{-3}\nu$ verwendet. Während der Wert für k_{in} unverändert bleibt, muß die Dissipationsrate um den Faktor 10^4 vergrößert werden, $\varepsilon_{tripless} = 10^4\, \varepsilon_{in}$.

Um die turbulente Grenzschicht auf der Platte zu garantieren, ist ein Profil für die Wirbelviskosität am Einströmrand vorzugeben. Für die vorliegenden Untersuchungen wurde ein Stufenprofil (6.11) für die Dissipationsrate benutzt, das für alle Zellen im Bereich des Drahtes den Wert ε_{in} und für alle anderen Kontrollvolumina $\varepsilon_{tripless}$ vorschreibt. Als Grenzkoordinate wurde $z/D = -0.01$ gewählt, so daß etwa die experimentell gemessene Grenzschichtdicke von ca. $\delta/D = 0.04$ an der Position des Zylinders $x = 0$ erreicht wird.

$$\nu_{t,in} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \begin{cases} \dfrac{z}{D} \geq -0.01 & k = k_{in}\,;\ \varepsilon = \varepsilon_{tripless} \\ \text{sonst}: & k = k_{in}\,;\ \varepsilon = \varepsilon_{in} \end{cases} \tag{6.11}$$

Die Reduktion von ν_t auf ein Niveau nahe null ist nicht zwangsläufig gleichbedeutend mit der Deaktivierung des turbulenten Produktionsterms. Die implizite Formulierung bzw. Behandlung der Turbulenzmodelle kann nicht zwischen Produktion, Diffusion oder Dissipation der Turbulenzgröße unterscheiden, so daß bei Vorhandensein von Wirbelviskosität auch immer der Produktionsterm aktiv ist. Das hier durchgängig benutzte Spalart-Allmaras-Modell stellt eine zusätzliche Dämpfungsfunktion f_{t2} zur Verfügung, welche den Übergang von laminarer zu modellierter, turbulenter Region ermöglicht. Diese Funktion dämpft genau den Produktionsterm (vgl. Anhang B.2.1).

6.6 Zusammenfassung der Simulationen

In den vorherigen Abschnitten sind verschiedene Modellierungsvariationen vorgestellt worden. Idealerweise sind dabei die räumliche und zeitliche Diskretisierung sowie die Randbedingungen auf den benutzten Simulationsansatz angepaßt. In Tabelle 6.2 wird die Zusammengehörigkeit der einzelnen Komponenten auf einen Blick gegenübergestellt. Die vorangestellte Kurzbezeichnung dient dabei zur eindeutigen Identifikation im Ergebnisüberblick. Einzelne Simulationen, wie z. B. die LES mit konstantem Zuströmprofil, sind der Projekthistorie geschuldet bzw. wurden einzig zu Vergleichszwecken durchgeführt, z. B. die LES mit Smagorinsky-Modell und Wanddämpfung nach VAN DRIEST (1956). Die Bezeichnung LES und cDNS beziehen sich nachfolgend, wenn nicht anders angegeben, auf das numerisch ermittelte Zuströmprofil.

Kurzbezeichnung	Modell	Gitternetz [10^6 Pkte.]			Zeitschritt [D/U_∞]			Zuströmprofil			Besonderheiten
		grob 0.93	fein 12.3	reduziert 2.62	grob 0.025	fein 0.005	reduziert 0.015	konstant	numerisch	experimentell	
PRE	DES, LLR k-ω	✘			✘			✘			
LES	LES, Smagorinsky		✘			✘		✘	✘		
WD-LES	LES + van Driest		✘			✘			✘		
DES	DES, LLR k-ω		✘			✘			✘		
cDNS	grobe DNS		✘			✘		✘	✘		
RANS-FT	RANS, SA			✘						✘	$\nu_{t,in} = 10\,\nu$
RANS-TL	RANS, SA			✘						✘	$\nu_{t,in}$ nach (6.11)
ID-DES	ID-DES, SA			✘			✘			✘	$\nu_{t,in}$ nach (6.11)

***Tab.** 6.2:* Liste der durchgeführten Simulationen

7 Strömungsanalyse und Methodenvergleich

Nach Durchführung der numerischen Simulationen liegt das Augenmerk im Hauptteil auf der Analyse der Strömungsphysik. Für die Auswertungen und Vergleiche wurden unterschiedlichste Methoden eingesetzt, um ein weitreichendes Bild der mittleren Strömung und vor allem der Strömungsdynamik zu skizzieren. Dabei wird, wenn nicht anders angegeben, immer Bezug auf die Ergebnisse der LES genommen. Wegen der engen Verknüpfung von Auswertung und der dazu eingesetzten Methode, umfaßt die Dokumentation teilweise auch die kritische Beleuchtung der Methoden selbst, einschließlich Variationen der eingespeisten Datenbasis und Parameter. Dabei wird nicht unbedingt in historischer Reihenfolge vorgegangen.

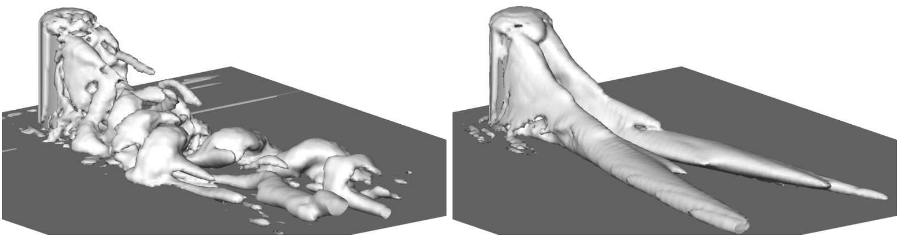
7.1 Voruntersuchungen

Ein Überblick über die wichtigsten numerischen Details für die Voruntersuchungen (PRE) findet sich in Tabelle 6.2. Die Zielstellungen der DES auf einem relativ groben Gitter waren zweiseitig. Zum einen sollte ein kurzfristig verfügbares Simulationsergebnis erste Einblicke wie auch erste Vergleiche mit bereits vorhandenen Experimenten gewähren. Auf der anderen Seite viel wichtiger, ermöglichte dieses Ergebnis räumliche und zeitliche Anforderungen für die hochauflösenden Simulationen gezielt anzupassen. Mindestens die räumliche Anordnung der Strömungsstrukturen sowie Ort und Größe der Maximalgeschwindigkeit sollten bestimmt werden. Die wichtigsten Erkenntnisse aus den Voruntersuchungen und deren Einfluß auf die Gestaltung der hochauflösenden Simulationen sind nachstehend zusammengefaßt und in FREDERICH *et al.* (2005*a*) veröffentlicht.

In Abbildung 7.1 sind Wirbelstrukturen (λ_2-Isoflächen) als Ergebnis der Simulation PRE in einer instationären Momentanaufnahme sowie basierend auf dem zeitlich gemittelten Strömungsfeld dargestellt. Für die zeitliche Mittelung wurden 7500 aufeinanderfolgende Zeitschritte verwendet. Die Momentanaufnahme offenbart eine abgelöste Nachlaufströmung mit lateraler Aufweitung aber vertikaler Höhenabnahme der kohärenten Gebiete im Nachlauf. Augenscheinlich existieren hauptsächlich lateral alternierende und in Strömungsrichtung orientierte Wirbelgebiete. Aufgrund der relativ groben räumlich-zeitlichen Auflösung erscheint die Instationarität im Nachlauf auf die konvektierten, kohärenten Strukturen begrenzt. Die zeitlich gemittelte Darstellung betont als herausragende Elemente Längswirbel, die aufgrund ihres Ursprungs am

Zylinderkopf als Kopfwirbel bezeichnet werden. Die gewählte Darstellung hebt die Kohärenz der Längswirbel im gesamten abgebildeten Nachlauf hervor, genauso wie das schnelle Absinken der Wirbelkerne zur Grundplatte. Die bereits bei der Momentanaufnahme angesprochene vertikale Reduktion der Nachlaufhöhe wird durch die über den Zylinderkopf einströmende Fluidmasse verursacht. Aufgrund der allseitigen Strömungsablösung am Zylinder existiert direkt stromab des Zylinders ein Gebiet verringerten Druckes, das die Abwärtsbewegung der Kopfüberströmung bewirkt.

Neben den charakteristischen Kopfwirbeln verdeutlicht die zeitlich gemittelte Darstellung zwei wesentliche Aspekte. Zum einen geht durch die statistische Betrachtungsweise die Einsicht verloren, daß alternierende und Längswirbel überlagert sind bzw. miteinander interagieren. Zum anderen lassen sich durchaus die wichtigsten Gebiete wirbelbehafteten Geschehens identifizieren. Zu diesen zählen Rezirkulationsgebiete auf der Zylinderoberseite und stromab des Zylinders, Einflußgebiete der seitlich ablösenden Scherschichten sowie der Längswirbel, aber auch das Aufrollen der Plattengrenzschicht vor und seitlich des Zylinders. Ein detaillierte Analyse der gemittelten Strukturen erfolgt für die hochauflösenden Simulationen im Abschnitt 7.3.



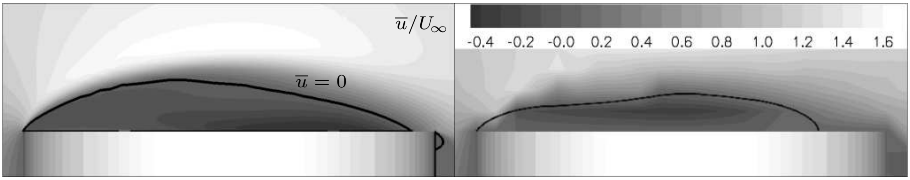
(a) instationäre Momentanaufnahme (b) zeitlich gemittelt

Abb. *7.1:* Visualisierung von Wirbelstrukturen mittels Isoflächen von λ_2 (Simulation PRE)

Aufgrund der Durchführung einer vollständig turbulenten Simulation auf grobem Gitter findet sich in den Voruntersuchungen die seitliche Ablösung an der Zylinderschale bei etwa 120° (ausgehend von der Staupunktlinie). Für die vorliegende Reynolds-Zahl wären 80° bei laminarer Ablösung adäquat (ZDRAVKOVICH, 1997), so daß hier eine turbulent ablösende Grenzschicht vorhergesagt wurde. Im initialen Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen von LEDER (2003) fällt auf, daß die räumliche Ausdehnung des Nachlaufs nur unwesentlich geringer ist, während die zylindernahe Topologie darin deutliche Diskrepanzen aufzeigt. Die Gründe für die fehlerhafte Strömungsvorhersage werden an späterer Stelle diskutiert (Abschnitt 7.5.1).

An der Vorderkante des freien Zylinderendes löst die Strömung geometrieinduziert ab und legt im Experiment von LEDER (2003) bei $0.84D$ stromab auf der Deckfläche wieder an. Die eingeschlossene Rezirkulationsblase ist in Abbildung 7.2 mittels der Geschwindigkeit in Anströmrichtung für die Symmetrieebene $y = 0$ numerisch und experimentell gegenübergestellt. Die beschriebene Simulation PRE zeigt das gleiche Wiederanlegeverhalten auf, jedoch verspätet bei $0.93D$ von der Vorderkante. Außerdem ist in der Simulation eine größere Übergeschwindigkeit oberhalb der Ablöseblase erkennbar. Die Begründung für diese Abweichung vom Experiment liegt einerseits in der Vorgabe eines konstanten Blockprofils U_∞ am Zuströmrand $1D$

stromauf vor dem Zylinder für die Simulation. Andererseits beträgt die räumliche Auflösung des Experimentes lediglich $0.05D$, so daß die dargestellte Begrenzungslinie einer antizipierten entspricht.



(a) Detached-Eddy Simulation (PRE) (b) Experiment von LEDER (2003)

***Abb.** 7.2:* Vergleich von Voruntersuchungen und Experiment: Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung und Rückströmgebiet auf der Zylinderoberseite (Schnitt bei $y = 0$)

Trotz der sichtbaren Defizite in den Simulationsergebnissen für das anfängliche numerische Modell sind diese geeignet, Hilfestellungen für die Generierung eines räumlich und zeitlich hochaufgelösten Berechnungsgitters zu geben. Abbildung 7.3 zeigt in einer vertikalen Schnittebene auf halber Höhe des Zylinders ($z/D = -1$) die Verteilung der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung. Die seitlich am Zylinder auftretende Maximalgeschwindigkeit im Strömungsfeld von $u/U_\infty = 1.8$ wurde benutzt, um den Zeitschritt für die nachfolgenden Simulationen LES, DES und cDNS anzupassen (Abschnitt 6.4.2).

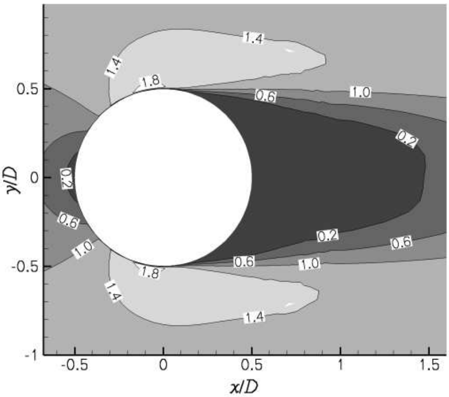
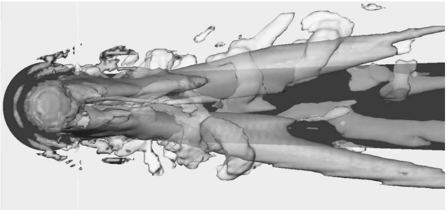


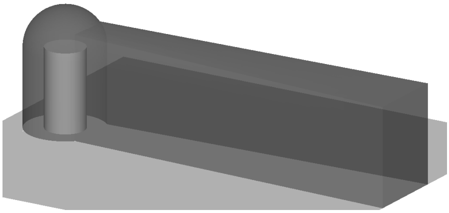
***Abb.** 7.3:* Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung $\overline{u}/U_\infty$ (Schnitt $z/D = -1$)

Weiterhin kann eine Aussage, in welchen Bereichen die räumliche Gitterauflösung konzentriert werden sollte, mittels der Voruntersuchungen gewonnen werden. Der gewählte Verfeinerungsbereich für das hochauflösende Berechnungsgitter ist in Abbildung 7.4 visualisiert. Grundlage der räumlichen Begrenzung bildeten die Wirbelstrukturen aus zeitlicher Mittelung aber auch instationären Momentanaufnahmen (vgl. Abbildung 7.4 a). Im Rahmen eines Kompromisses zwischen hoher räumlicher Auflösung und akzeptabler Gitterpunktanzahl wurde der Bereich so gewählt, daß der zylindernahe Nachlauf weitestgehend enthalten ist. Zusätzlich zu der bereits vergleichsweise hohen Gitterauflösung – auch außerhalb des Verfeinerungsbereichs – werden die Gitterzellen innerhalb des Verfeinerungsbereichs für alle Raumrichtungen halbiert. Dies erlaubt die für LES adäquate Steigerung der räumlichen Auflösung im zentralen Gebiet turbulenter Phänomene.

Abschließend bestätigen die Voruntersuchungen die bereits auf Experimenten basierend festgelegte Ausdehnung des Rechengebietes, wie im Abschnitt 6.3.1 beschrieben.



(a) Instationäre und gemittelte Wirbelstrukturen mit Verfeinerungsbereich (Draufsicht)

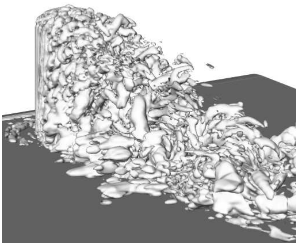


(b) Dreidimensionale Begrenzung des Verfeinerungsbereiches

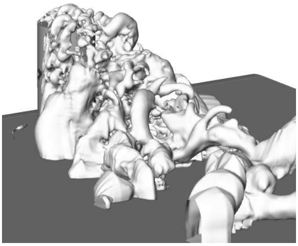
***Abb.** 7.4:* Räumlicher Verfeinerungsbereich des hochauflösenden Berechnungsgitters

7.2 Erste Eindrücke hochaufgelöster Dynamik

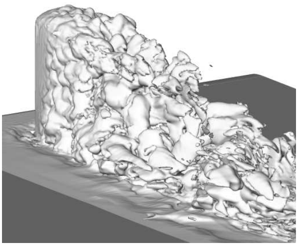
Der eigentlichen Strömungsanalyse mittels unterschiedlicher Ansätze seien an dieser Stelle einige Visualisierungen vorangestellt. Die Vielfältigkeit des untersuchten Strömungsfeldes soll damit hervorgehoben und die Notwendigkeit für die eingehende Auswertung, Verfolgung und Dekomposition von Einzelphänomenen motiviert werden. Grundlage der die Instationarität und Dynamik beleuchtenden Darstellungen sind die Ergebnisse der Large-Eddy Simulation mit numerisch generiertem Zuströmprofil.



(a) Wirbelkernkriterium $\lambda_2 = -1$



(b) Druckfluktuation $p - \overline{p} = -0.05\varrho U_\infty^2$



(c) Wirbelstärke $|\omega_i| = 3U_\infty/D$

***Abb.** 7.5:* Visualisierung instantaner Turbulenz am Zylinderstumpf: Isoflächen verschiedener Kriterien für die Wirbelerkennung

Die als Ergebnis der Simulation beobachtbare Turbulenz besteht aus unzähligen kleineren Wirbelgebieten, wobei die Vielzahl ihren Ursprung in einer, der am Zylinder ablösenden Scherschichten haben (vgl. Abbildung 7.5 a). Darüber hinaus findet die im Nachlauf präsente Turbulenz ihre Fortsetzung auch nach dem Wiederanlegen auf der Endscheibe. Der Hufeisenwirbel direkt vor dem Zylinder besteht ebenfalls aus kleineren Wirbelpaketen, die aufgrund des Zustandes der Plattengrenzschicht turbulenten Charakter haben und entlang der Hufeisenform mit der wandnahen Strömung konvektiert werden. Konsistent mit den Beobachtungen in turbulenten Strömungen lassen sich im Nachlauf geordnete, kohärente Bewegungen von Gruppen kleinerer Wirbelstrukturen ausmachen. Die Darstellungen von lokalen Druckminima und Wirbelstärke (Abbildung 7.5) verdeutlichen, daß diese globalen Bewegungen die Überlagerung einer Art Wirbelstraße aus der seitlichen Ablösung und dem Wirbelabwurf vom Zylinderkopf repräsentieren.

Mit der zeitlichen Entwicklung der abgelösten, turbulenten Nachlaufströmung (Abbildung 7.6) wird ein Großteil der äußeren Wirbelstrukturen nahezu mit der Anströmgeschwindigkeit zügig stromab konvektiert. Durch die Interaktion von seitlich und am Zylinderkopf ablösenden Fluidmassen entstehen mehrere um die globale Strömungsachse rotierende Regionen. Aus diesem Grund existieren sowohl deutliche Aufwärts- als auch Abwärtsbewegungen im Nachlauf, obwohl die vertikale Ausdehnung des Nachlaufes durch die Kopfüberströmung in Richtung der Platte abnimmt. Trotz der relativ frühen Ablösung an der Zylinderschale bleibt die laterale Ausdehnung des Nachlaufes offenbar begrenzt. Im weiteren Verlauf der Strömungsanalyse wird deutlich, daß diese Kohärenz mit den ausgebildeten Nachlaufwirbeln (zumindest im untersuchten Strömungsausschnitt) begründet werden kann.

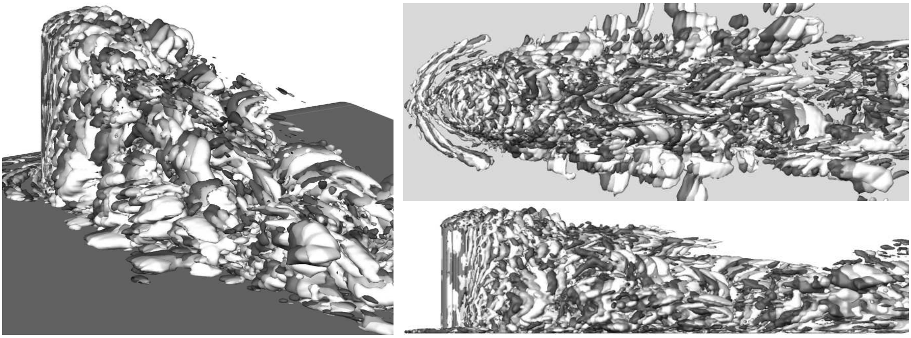
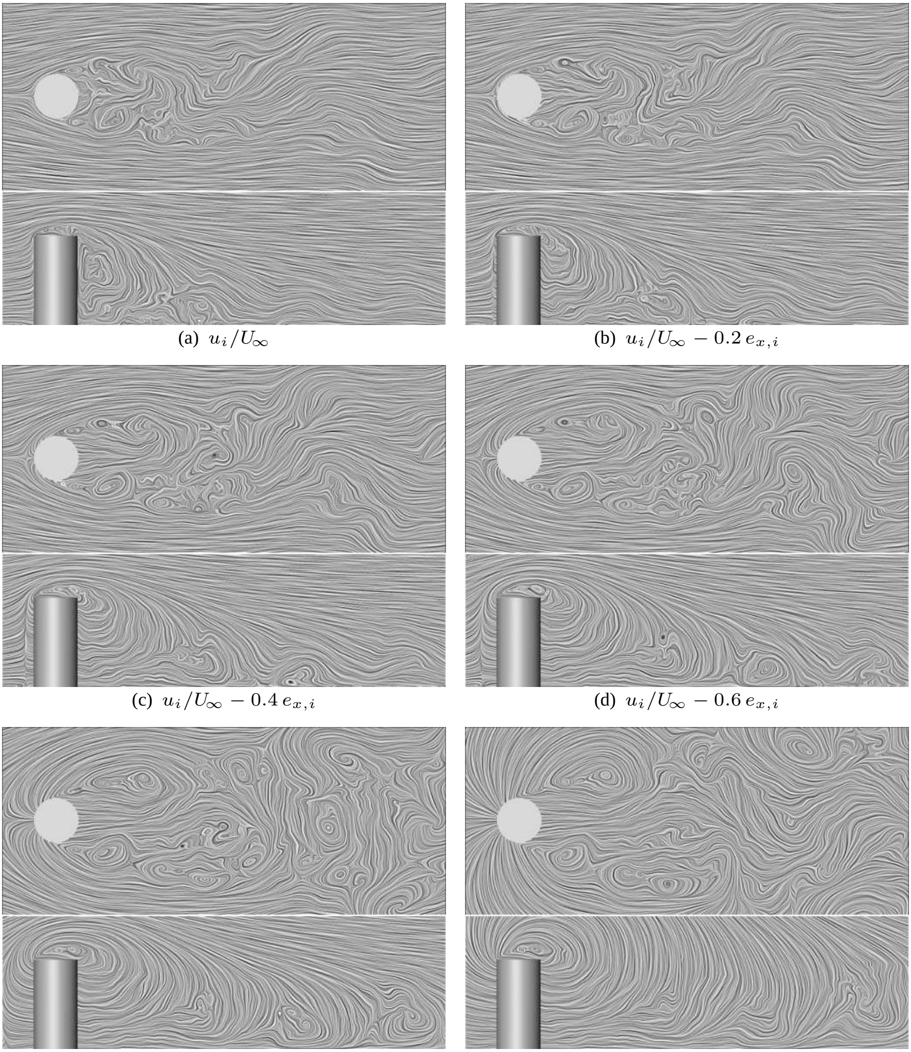


***Abb.** 7.6:* Instantane Turbulenz am Zylinderstumpf im zeitlichen Verlauf: Isoflächen $\lambda_2 = -1$ dreier Momentanaufnahmen im zeitlichen Abstand von $0.25D/U_\infty$ (dunkelgrau, hellgrau, weiß) in verschiedenen Ansichten (von schräg hinten, von oben, von der Seite)

Im zeitlichen Verlauf sichtbare Konvektionsbewegungen kohärenter Turbulenzgebiete vollziehen sich auf den unterschiedlichsten Geschwindigkeitsskalen. Vermischung dieser Skalen wird durch den überlagerten Einfluß der verschiedenen Wandflächen (verzögerte Strömung) und die infolge der globalen Nachlaufbewegungen involvierte Fluidmasse am Nachlaufrand (Anströmung) begünstigt. Als Folge führt die Interaktion verschieden „schnell“ konvektierter Wirbelgebiete zu einer reichhaltigen Dynamik besonders im zylindernahen Nachlauf. Ein virtueller Beobachter, der sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten relativ zur Strömung bewegt (Abschnitt 4.8.1), würde diese Dynamik wahrnehmen können. In Abbildung 7.7 sind einzelne Eindrücke einer solchen virtuellen Beobachtungstour in Ausschnitten visualisiert.

Die Anteile des Turbulenzfeldes im Zylindernachlauf werden zwangsläufig von den beiden vorherrschenden Strömungseffekten, nämlich seitliche und Kopfüberströmung, in ihrem Charakter wesentlich beeinflußt. Dessen Aufteilung gelingt beispielsweise durch die Zerlegung in symmetrische und antimetrische Anteile bezüglich der Symmetrieebene $y = 0$, wie in Abbildung 7.8 gezeigt und in Abschnitt 4.8.2 beschrieben. Die im Strömungsfeld enthaltene Wirbelstraße mit Ausgangspunkt am seitlichen Zylinder besitzt fast ausschließlich eine antimetrische Struktur bezogen auf die Symmetrieebene. Nicht nur als Folge dieser Beobachtung bzw. Annahme läßt sich daraus ableiten, daß die symmetrischen Anteile mit der Kopfüberströmung in Zusammenhang stehen. Wie in Abbildung 7.8 gut erkennbar, verbleibt nach dem Anlegen der Strömung auf der Endscheibe ein lediglich antimetrisch strukturiertes Strömungsfeld. Obwohl dies nicht gleichbedeutend ist mit dem Verlust des Einflußes der Kopfüberströmung, dominiert offenbar der alternierende Strömungscharakter im weiteren Nachlauf. Es ist plausibel bereits hier zu postulieren, daß im Umkehrschluß großskalige, antimetrische Anteile in der Strömungslösung zumindest nicht ihren Ursprung in der Kopfüberströmung haben. Ähnliches sollte für die großskaligen, symmetrischen Anteile bezüglich der seitlichen Umströmung gelten.



(a) u_i/U_∞

(b) $u_i/U_\infty - 0.2\,e_{x,i}$

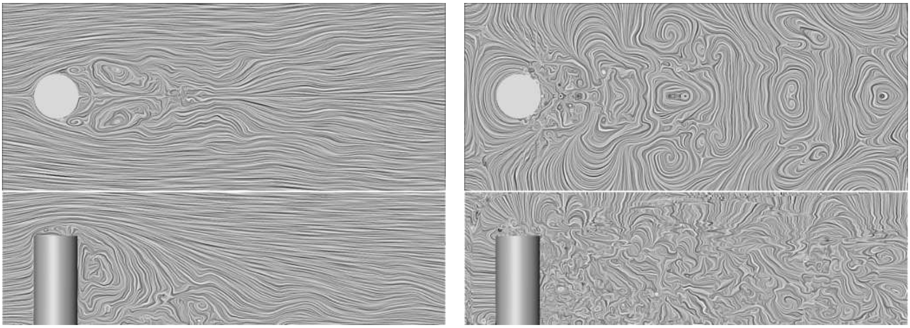
(c) $u_i/U_\infty - 0.4\,e_{x,i}$

(d) $u_i/U_\infty - 0.6\,e_{x,i}$

(e) $u_i/U_\infty - 0.8\,e_{x,i}$

(f) $u_i/U_\infty - 1.0\,e_{x,i}$

Abb. *7.7:* Dynamik im Nachlauf des Zylinderstumpfes: Line Integral Convolution eines instantanen Geschwindigkeitsfeldes in den Ebenen $y = 0$ und $z/D = -0.5$ gesehen von einem unterschiedlich schnell mitbewegtem, virtuellen Beobachter



(a) Symmetrischer Anteil u_i^s (b) Antimetrischer Anteil u_i^a

***Abb.** 7.8:* Symmetrisch-antimetrische Zerlegung im Nachlauf des Zylinderstumpfes: Line Integral Convolution eines nach (4.48) zerlegten instantanen Geschwindigkeitsfeldes

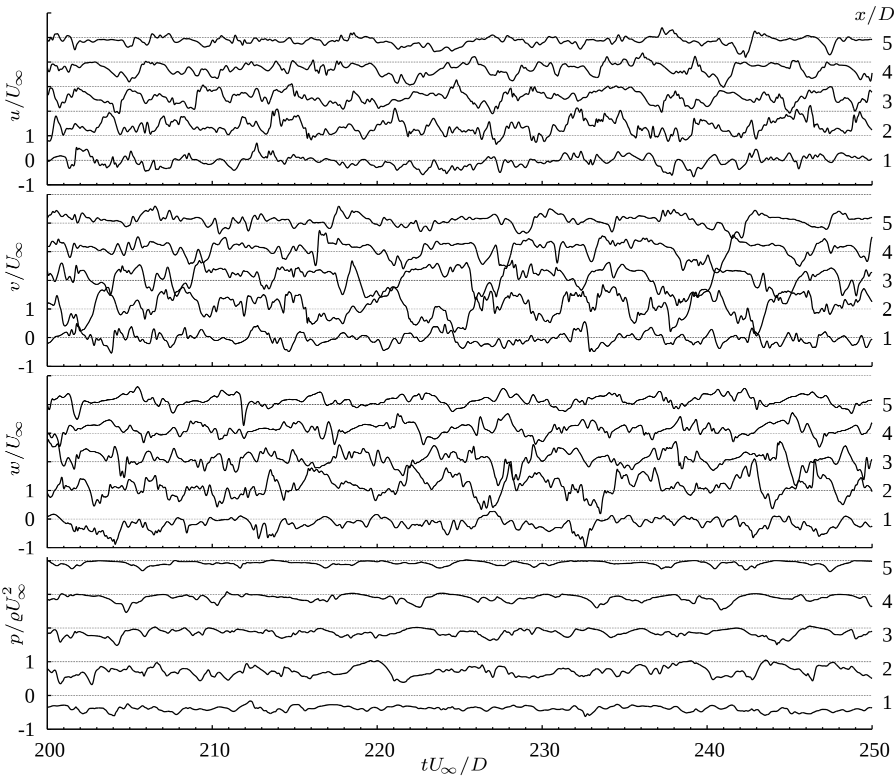


***Abb.** 7.9:* Geschwindigkeits- und Drucksignale im Nachlauf des Zylinderstumpfes: Monitorpunkte mit $y/D = -0.5$ und $z/D = -1$ und variierender Position x/D (die Signale sind sukzessive entlang der jeweiligen Ordinate um den Betrag 1 verschoben)

Als finaler erster Eindruck sind in Abbildung 7.9 lokal aufgezeichnete Geschwindigkeits- und Drucksignale wiedergegeben. Die Monitorpunkte sind im Nachlauf gestaffelt, und das gezeigte Zeitintervall umfaßt $10\,000$ Zeitschritte der LES. Trotz der kompakten und teilweise verschobenen Darstellungen bleibt die Quantität in den Signalen erhalten. So zeichnen sich besonders die lateralen und vertikalen Geschwindigkeitskomponenten durch Schwankungen der Größenordnung U_∞ aus. Weiterhin ist allen Signalen gemein, daß keine deutliche bzw. ausgezeichnete Periodizität augenscheinlich ist. Viel eher scheinen eine Reihe verschiedener, aber in der Größenordnung ähnlicher Frequenzen überlagert zu sein. Dabei sind hochfrequente Anteile wenig ausgeprägt – in Teilen ein Resultat der Filterung im Rahmen von LES, aber auch der Lage der Punkte. Mit zunehmender Entfernung zum Zylinder ist nur eine schwache Dämpfung der Amplituden und höherfrequenten Anteile sichtbar. Das Drucksignal als Konglomerat aller Geschwindigkeitseinflüsse ist deutlich glatter ausgeprägt, läßt aber auch eine offenkundige Periodizität vermissen. In der Zusammenfassung verdeutlicht Abbildung 7.9 die Vermischung verschiedenster Geschwindigkeitsskalen und Frequenzen mit Schwankungen in der Größenordnung der Anströmung bzw. der Mittelwerte in großen Teilen des abgelösten Nachlaufes.

Die vorstehend aufgezeigten Erkenntnisse über die turbulente Dynamik des Nachlaufes – sowohl dreidimensional, planar als auch lokal (zeitlich) – betonen nachdrücklich die Notwendigkeit einer zeitabhängigen Strömungsanalyse. Fortschritt in dieser Richtung soll in der vorliegenden Arbeit mit verschiedenen Analyseverfahren erreicht werden. Dabei dient die statistisch ausgewertete Strömung als Ausgangspunkt.

7.3 Statistische Strömungsanalyse

Die statistische Analyse der stochastisch verteilten und strukturierten Turbulenz ist traditionell Grundlage und Ausgangspunkt der Beschreibung nicht kanonischer, instationärer Strömungen. Die Ensemble- bzw. zeitliche Mittelung der Strömungsgrößen ist dabei das etablierte Vorgehen.

Die nachstehend aufgezeigten Statistiken basieren auf den zeitlichen Mittelwerten der LES als Referenzsimulation. Für diese Simulation wurden insgesamt fast $60\,000$ $(59\,510)$ Zeitschritte des Strömungsfeldes berechnet. Als Anfangsbedingung wurde das Strömungsfeld mit der letzten Momentanaufnahme aus der LES mit konstantem Zuströmprofil initialisiert. Transiente Anfahrvorgänge resultieren entsprechend aus der Änderung des Zuströmprofils. Damit die Mittelung nur über eine vollständig entwickelte Strömung mit abgeklungenen Transienten bezüglich der Numerik erfolgt, wurden die ersten $10\,000$ simulierten Zeitschritte nicht berücksichtigt. Da weiterhin der physikalische Zeitschritt mit $\Delta t = 0.005 D/U_\infty \approx 2.3 \cdot 10^{-5}$s sehr klein ist, wurde für die statistische Basis nur jeder zehnte Zeitschritt herangezogen. Die zeitlichen Mittelwerte basieren deshalb auf rund $5\,000$ Zeitschritten innerhalb eines Zeitintervalls von nahezu 250 konvektiven Einheiten D/U_∞.

In Abbildung 7.10 ist die zeitliche Entwicklung der integralen Kraftbeiwerte in Strömungsrichtung C_x und in lateraler Richtung C_y sowie deren Mittelwert in einem bewegten Fenster dargestellt. Die Fenstermittelung erfolgt über jeweils 2 000 vergangene Zeitschritte. Der Beginn der zeitlichen Mittelung nach 50 konvektiven Einheiten Simulationszeit stellt den Zeitpunkt dar, ab dem der Fenstermittelwert $\overline{C}_y^F$ etwa Schwingungen um die Nulllinie ausführt. Obwohl der Mittelwert über alle Zeitschritte noch immer verschieden von null ist, sind Anfangsstörungen ab diesem Zeitpunkt als abgeklungen zu betrachten.

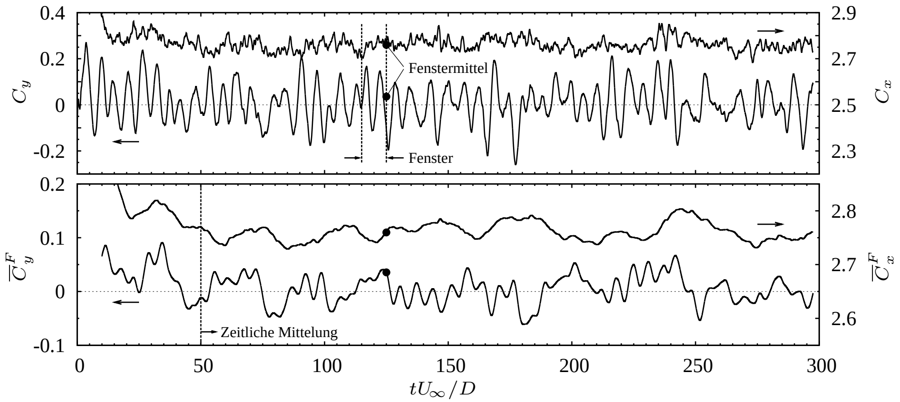


***Abb.** 7.10:* Beginn der zeitlichen Mittelung nach Abklingen von Anfangsstörungen: Zeitliche Entwicklung der integralen Beiwerte für Widerstand und Seitenkraft (oben) und deren Mittelwerte in einem mitbewegten Fenster der Breite 2 000 Zeitschritte (unten)

7.3.1 Die zeitlich gemittelte Strömung

Das zeitlich gemittelte Strömungsfeld um den Zylinderstumpf repräsentiert unter anderem ein mittleres Turbulenzfeld. Die physikalische Interpretation der enthaltenen Strömungs- bzw. Turbulenzstrukturen ist fragwürdig, ermöglicht jedoch, häufig auftretende bzw. wiederkehrende Phänomene räumlich einzugrenzen. Der im Abschnitt 5.2 gegebene phänomenologische Überblick basiert auf gemittelter Turbulenz und wird hier als Ausgangspunkt der detaillierten Analyse genutzt. Die Visualisierung der Wirbelstrukturen im zeitlich gemittelten Strömungsfeld in Abbildung 7.11 zeigt eine zu Abbildung 5.3 weitestgehend analoge Topologie. Mit der Klassifizierung am Zylinderkopf beginnend können mindestens ein wirbelbehaftetes Rezirkulationsgebiet auf der Kopffläche, Längswirbel beginnend am Zylinderkopf, Ablösung am Zylindermantel mit anschließender Wirbelbildung, ein Rezirkulationsgebiet stromab des Zylinders sowie ein Hufeisenwirbel auf der Platte identifiziert werden. Im Folgenden werden die einzelnen Regionen in wichtigen Details beleuchtet. Die Reihenfolge der Einzelanalysen entspringt einer absteigenden Sortierung nach Bedeutung für das globale Strömungsfeld.

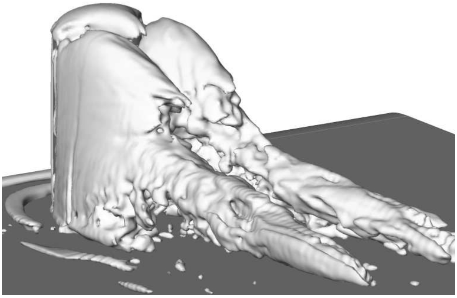


Abb. *7.11:* Wirbelstrukturen für das zeitlich gemittelte Strömungsfeld als Grundlage einer detaillierten Analyse (Isoflächen $\overline{\lambda_2} = -0.1$)

Die gemittelten Ergebnisse und die wichtigsten Erkenntnisse daraus sowie der Vergleich mit Experimenten sind unter anderem in FREDERICH *et al.* (2007*c*) und FREDERICH *et al.* (2008*b*) veröffentlicht.

Strömungsablösung am Zylindermantel

Aufgrund von Form und kontinuierlicher Krümmung des Zylinders kann die Strömung (für alle Reynolds-Zahlen $\mathrm{Re}_D > 1$) der Kontur wegen ihrer Trägheit nicht folgen, und es kommt zur Strömungsablösung. Für die vorliegende Reynolds-Zahl von $200\,000$ wird die druckinduzierte Ablösung an einem unendlich langen Zylinder nahe 80° bezogen auf die Staupunktlinie erwartet (ZDRAVKOVICH, 1997). Die Transition findet unmittelbar nach dieser Ablösung der noch laminaren Grenzschicht in der freien Scherschicht statt.

Die Strömungsablösung am Zylindermantel und deren Folgen stellen für die vorliegende Konfiguration endlicher Streckung den wichtigsten Strömungsanteil neben der Kopfüberströmung dar. Weil die Effekte von fixiertem und freiem Zylinderende in unmittelbarer Zylindernähe lokal stark begrenzt sind und außerdem ihr Haupteinfluß erst auf der stromabgewandten Seite des Zylinders zum Tragen kommt, ist die Ablösung am Mantel des Zylinderstumpfes ebenfalls nahe 80° zu erwarten. In Abbildung 7.12 ist das zeitlich gemittelte, zum Zylindermantel tangentiale Geschwindigkeitsfeld ähnlich einem experimentellen Ölanstrichbild mittels LIC dargestellt. Deutlich sichtbar ist die primäre Ablöselinie im Bereich um 80°. In der unteren Hälfte des Zylinders ist die Ablöselinie um etwa 5° leicht stromauf versetzt, während ganz nah an der Platte der Versatz stromab etwa um den gleichen Betrag erfolgt. PATTENDEN *et al.* (2005) gibt als Grund dafür einen höheren Druck hinter dem Zylinder, verursacht durch die in das stromab liegende Rückströmgebiet eintretende Kopfüberströmung, an. Infolge der jeweiligen Endeffekte ist die Ablöselinie in Richtung Kopf leicht stromab und in Richtung Fuß stromauf gekrümmt. Die Ablöselinie ist in Abbildung 7.34 explizit mit Hilfe des Nulldurchgangs im vorzeichenbehafteten Reibungsbeiwert dargestellt.

In Abbildung 7.12 ist des weiteren die Staupunktstromlinie mit der lateralen Strömungsaufteilung und zum Zylinderkopf zunehmenden vertikalen Effekten erkennbar. Aufgrund dieser offensichtlich vorhandenen Aufwärtsbewegung, welche durch die Druckunterschiede zwischen

Staupunktbereich und Kopfbereich verursacht wird, löst die Strömung am Zylindermantel unter einem obligatorischen Winkel (Winkel zwischen Stromlinien und Ablöselinie) zur Horizontalen ab. Die Oberfläche im primär abgelösten Strömungsgebiet auf der Rückseite des Zylinders offenbart geordnete, hauptsächlich vertikal aufwärts orientierte Stromlinien im größten Teil der Fläche. Da ein solches Verhalten nur bei einer anliegenden Strömung entsteht, existiert eine wiederangelegte Sekundärströmung, welche nah an die primäre Ablösung heranreicht. Auf diesen Aspekt wird detailliert eingegangen bei der Rezirkulation stromab des Zylinders, infolge derer wiederangelegte Fluidmasse vertikal am Zylinder aufsteigt (siehe Seite 149).

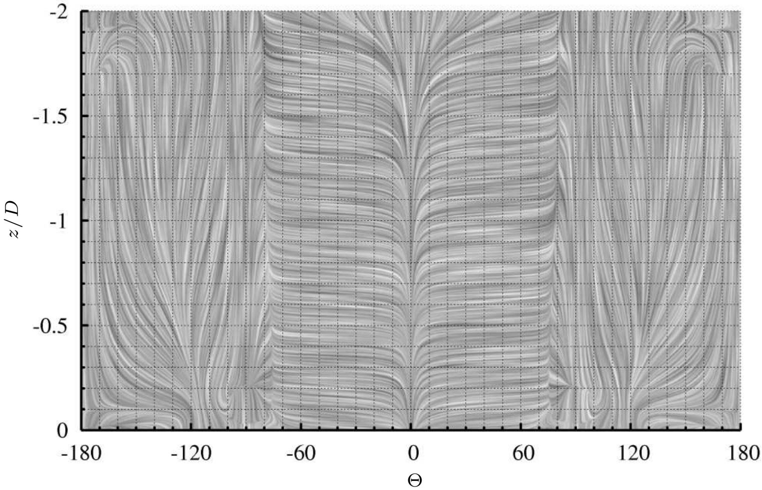


***Abb.** 7.12:* Zeitlich gemittelte Oberflächenstromlinien auf dem Zylindermantel: LIC des Geschwindigkeitsfeldes in der abgewickelten ersten Gitterebene über der Wand (Seitenverhältnis der Darstellung entspricht gleicher Skalierung der repräsentierten Längen)

Die Umströmung unendlich langer Zylinder ist charakterisiert durch alternierende Wirbelablösung, die sich aus Instabilitäten der abgelösten Scherschicht entwickeln. Dieser Effekt kann auch für endliche Zylinder mit einem Seitenverhältnis $L/D > 6$ beobachtet werden (z. B. bei KAWAMURA *et al.*, 1984). Natürlich existieren auch Instabilitäten für kleinere Seitenverhältnisse, so daß zumindest Relikte derartiger Wirbelstrukturen auch für die vorliegende Konfiguration zu erwarten waren. Wie bereits im Abschnitt 5.3 angeführt, wird die Wirbelablösung durch die Kopfüberströmung gestört und es existiert, wenn überhaupt, nur eine eingebettete Region aufrollender Wirbel mit nahezu zweidimensionalem Charakter (FARIVAR, 1981). Aus der zeitlich gemittelten Strömung kann eine derartige Region nur bedingt extrahiert werden, weshalb eine genauere Betrachtung basierend auf Frequenzen (Abschnitt 7.3.5) und Zeitreihenzerlegung mittels POD (Abschnitt 7.6) stattfindet.

Die horizontalen Schnitte durch das Strömungsfeld in Abbildung 7.13 zeigen die Verkürzung des direkten Nachlaufgebietes mit zunehmender Höhe über der Platte. In Plattennähe finden sich gemittelte Stromlinien, deren Topologie der Umströmung eines Zylinders ohne Endeffekte stark ähnelt. Diese Ähnlichkeit verliert sich spätestens zwischen $z/D = -1$ und -1.5 vollständig.

Die planar projizierten Stromlinien werden dort durch die Kopfüberströmung dominiert, so daß die seitlich abgelöste Strömung in Teilen bis zu zwei Drittel der Zylinderhöhe als Wirbel aufrollt. Die flächige Darstellung des skalaren Wirbelkriteriums $\overline{\lambda_2}$ für die gemittelte Strömung in Abbildung 7.13 zeigt die Entwicklung der seitlichen Scherschichten im zylindernahen Nachlauf. Ab $z/D = -1.0$ findet eine Überlagerung der Wirbelformation im mittleren Nachlauf statt, deren Ursprung offenbar nicht die seitlich abgelösten Scherschichten sind. In unmittelbarer Nähe des freien Endes werden die Scherschichten direkt in die Phänomene der Kopfüberströmung integriert. Die Isolinie der zeitlich gemittelten Hauptströmungskomponente $\overline{u} = 0$ in Abbildung 7.13 gibt einen Anhaltspunkt bzw. ein quantitatives Maß für das mittlere seitliche Aufrollen der Scherschicht. Obgleich die Dreidimensionalität des Geschwindigkeitsfeldes bei der gewählten Darstellung verloren geht, wird die mit dem Abstand zur Platte zunehmende Störung durch die Kopfüberströmung deutlich.

Durch die Interaktion zwischen seitlicher Umströmung und Kopfüberströmung entsteht ein großskaliges Rezirkulationsgebiet hinter dem Zylinder. Die Vereinigung der Einzelphänomene verhindert eine Differenzierung dieser, z. B. mittels einer Stromfläche, weshalb auf das Rezirkulationsgebiet als Gesamtphänomen gesondert eingegangen wird (Seite 147).

Für die seitliche Ablösung sei abschließend erwähnt, daß die Transitionslage in der freien Scherschicht basierend auf der mittleren Strömung nicht ermittelt werden kann. Im Einklang mit den Vorüberlegungen kann jedoch ausgeschlossen werden, daß die Transition in der anliegenden Grenzschicht stattfindet. Für diesen Fall wäre eine deutlich verschobene Ablösung bei etwa 95° zu beobachten (ZDRAVKOVICH, 1997, S.165).

Strömung auf dem Zylinderkopf

Auf Teile der gemittelten Strömungstopologie am freien Ende des Zylinders wurde bereits im Rahmen der Voruntersuchungen eingegangen (siehe z. B. Abbildung 7.2). Angesichts der scharfen Geometrieänderung löst die ankommende Strömung direkt an der Vorderkante der Zylinderdeckfläche geometrieinduziert ab. Die entstehende Scherschicht hat ihren Ursprung in der vertikal ablösenden Grenzschicht vom vorderen Zylindermantel (vgl. Abbildung 7.12). Die Hauptströmung als Ursache der Vertikalbewegung drückt die abgelöste Scherschicht stromab, so daß ein spitzer Ablösewinkel entsteht. Zeitlich gemittelt beträgt dieser Winkel in der Symmetrieebene etwa 70° bezogen auf die Deckfläche (Abbildung 7.17) und wird seitlich zum Scheitelpunkt des Zylinders tendenziell größer.

Das Gebiet verringerten Druckes hinter dem Zylinder verursacht eine starke Abwärtsbewegung der oberen Fluidmassen in Richtung der Grundplatte. Als Folge erfährt auch das Fluid auf der Zylinderoberseite inklusive der Scherschicht eine Abwärtsbewegung, so daß letztlich ein gekrümmtes Überströmungsgebiet entsteht. Bei der vorliegenden Strömungskonfiguration treffen Teile der begrenzenden Scherschicht deshalb wieder auf der Deckfläche des Zylinders auf. Die wiederanlegende Fluidmasse teilt sich dabei in ein Rezirkulationsgebiet und stromab weiter fließende Strömung auf. Als Ergebnis findet sich auf der Zylinderkappe ein stark dreidimensionales Ablöse- und Rezirkulationssystem mit mehreren Sattelpunkten, Wiederanlegebereichen und Wirbelbewegungen.

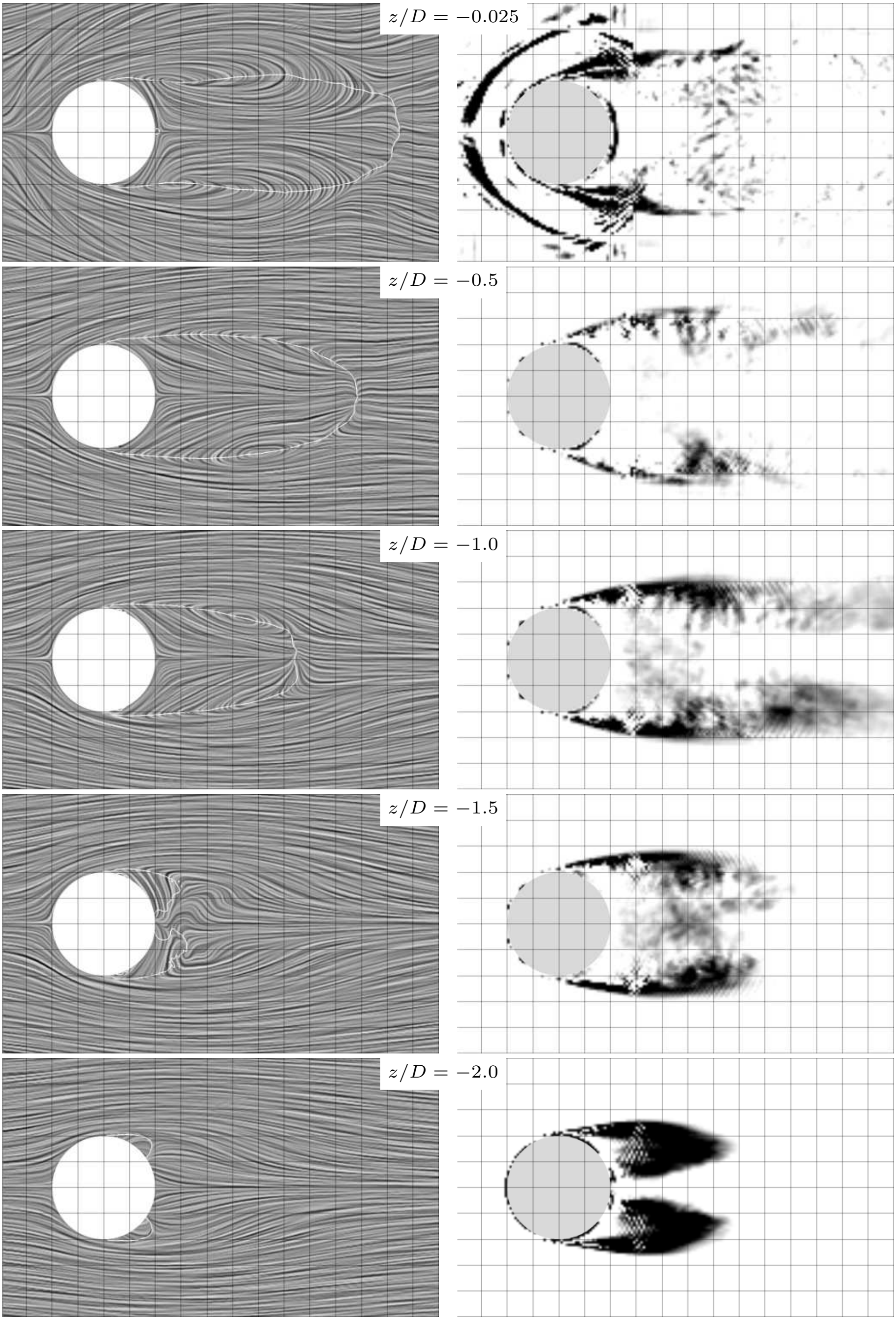
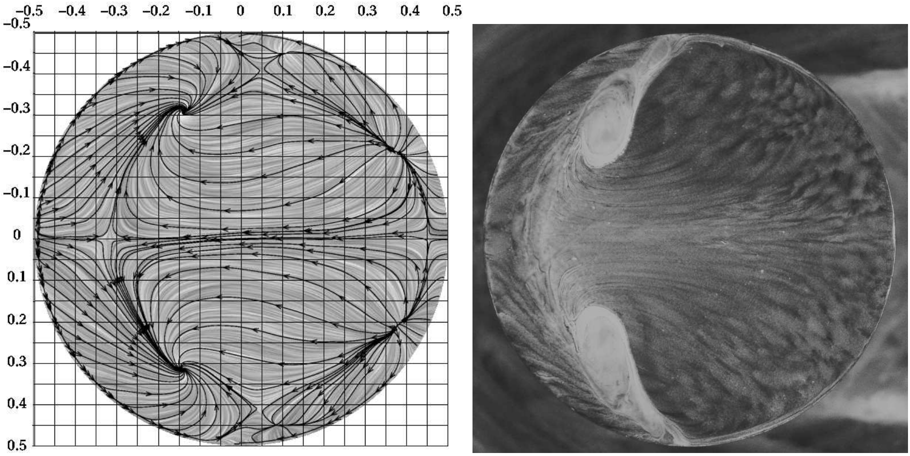


***Abb.** 7.13:* Bildtitel auf Seite 144

***Abb.** 7.13:* Darstellung der seitlich ablösenden Scherschichten und Wirbelbildung: Vertikale Ebene $z/D = \mathrm{const.}$ mit zeitlich gemittelten Stromlinien via LIC und der Isolinie $\overline{u} = 0$ (links) sowie Konturdarstellung des Wirbelkernkriteriums $\overline{\lambda_2}$ (rechts)



(a) LIC in der ersten Gitterebene über der Wand (b) Anstrichbild von RUDOLPH *et al.* (2009)

***Abb.** 7.14:* Visualiserung der mittleren Strömung an der Oberfläche der Zylinderkappe

Abbildung 7.14 a zeigt die Fußabdrücke der Strömung auf der Zylinderkappe ähnlich einer experimentellen Oberflächenvisualisierung. Die wichtigsten Komponenten der Kopfüberströmung lassen sich bereits in dieser Darstellung identifizieren, während ihre räumliche Ausdehnung in Abbildung 7.15 herausgearbeitet wird. Nach der bereits beschriebenen Ablösung an der scharfen Zylindervorderkante legt ein kleiner Teil der Fluidmasse unmittelbar danach wieder auf der Deckfläche an. Die zugehörige Anlegelinie in Abbildung 7.14 a verschmilzt fast mit der Vorderkante. Der größere Teil des Fluids folgt der gekrümmten Bahn der Kopfüberströmung und legt nahe der Hinterkante ($x/D = 0.45$ in der Symmetrieebene) wiederum an. Das Fluid teilt sich in positiver und negativer Strömungsrichtung auf, wobei der verringerte Druck hinter der Vorderkantenablösung zur Bewegung entgegen der Strömungsrichtung führt. Durch die seitliche Kopfüberströmung von beiden Seiten existieren zusätzlich laterale Strömungskomponenten, die letztlich zwei im Mittel nahezu symmetrische Rezirkulationsgebiete verursachen. Aus der Interaktion der verschiedenen Strömungsrichtungen entsteht beidseitig eine Strömungsverwirbelung, erkennbar an den beiden Foki bei $x/D = -0.15$. Diese innere Wirbelbewegung ist unabhängig von den seitlich ablösenden Kopfwirbeln und bildet das Zentrum der beiden symmetrischen Rezirkulationen auf der Zylinderkappe. Tatsächlich wird das Fluid der Wirbelbewegung in das Wiederanlegen nahe der Hinterkante involviert, wo sich die gegensinnige Rotation kompensiert. Das Wiederanlegen wiederum entsteht als Folge zweier induzierter Abwärtsbewegungen: derjenigen hinter dem Zylinder und derjenigen aus den seitlichen Kopfwirbeln.

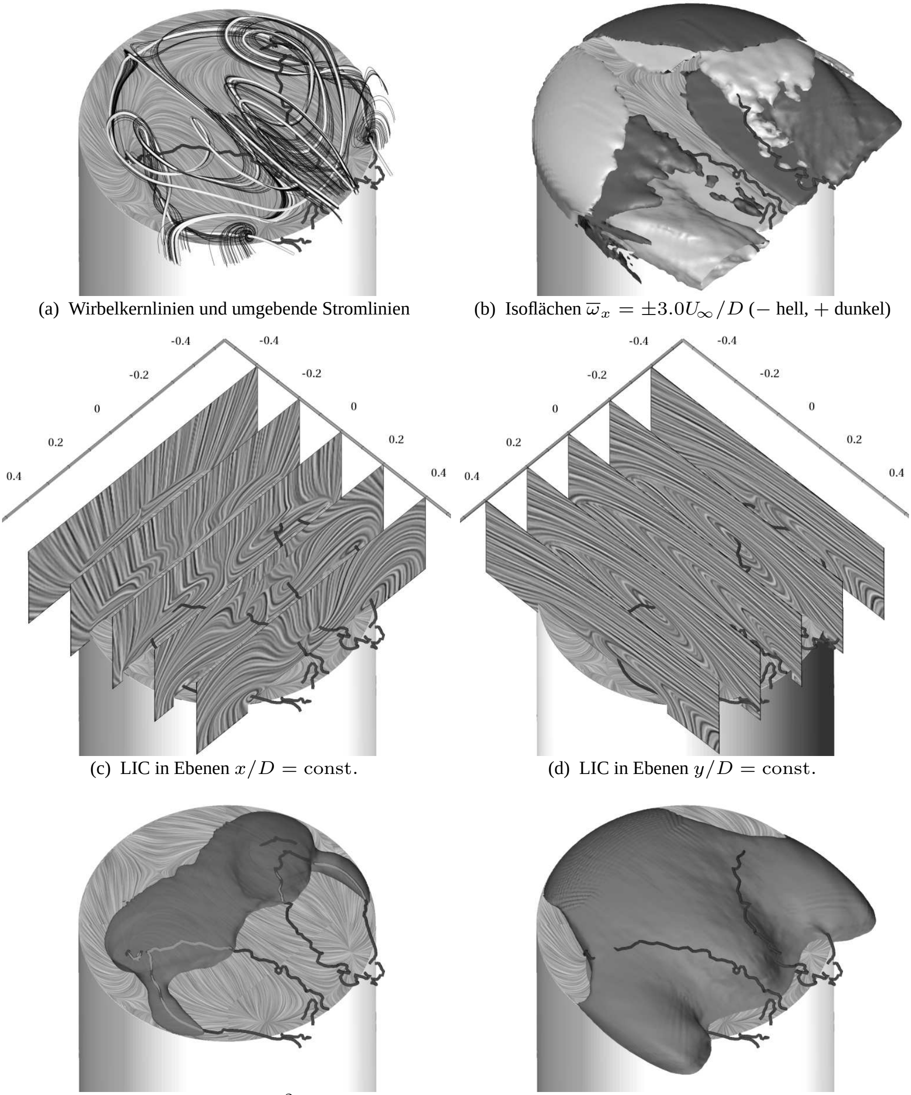
Im Vergleich zum experimentellen Anstrichbild in Abbildung 7.14 läßt sich eine globale Ähnlichkeit der Topologien feststellen. Allerdings finden sich im Experiment deutlich weniger

Details. Dieser Umstand wird auf die zeitlich starke Variation der Kopfüberströmung zurückgeführt, womit die fehlende Stationarität verschiedener Einzelphänomene einhergeht. Die relativ kleinen Geschwindigkeitsschwankungen in Wandnähe vermögen nicht den Ölfilm genügend zu strukturieren. Die experimentell ersichtlichen Rotationsgebiete an den beiden Fokuspunkten finden sich in den numerischen Daten weiter entfernt von der Wand (ca. 1 mm oberhalb) ähnlich ausgeprägt, was mit der endlichen Dicke des Ölanstrichs zu erklären ist. Der Vergleich mit weiteren experimentellen Resultaten (z. B. von LEDER, 2003; ROH & PARK, 2003; PATTENDEN *et al.*, 2005) bzw. die Kombination der jeweilig erfaßten Details untermauert die vorgestellte Topologie auf der Zylinderkappe.

Die räumliche Struktur der Strömungstopologie auf der Zylinderkappe ist in Abbildung 7.15 vielfältig visualisiert. Neben der auffälligen Symmetrie aller Darstellungen, wird anhand der Wirbelkernlinien und Stromlinien in Abbildung 7.15 a der komplexe räumliche Charakter der beiden (symmetrischen) Teilgebiete deutlich. Offenbar wird Fluid aus der Rezirkulation stromab des Zylinders seitlich sowie zentral am Kopf wieder eingespeist. Es entwickeln sich beidseitig jeweils in Teilen geschlossene Zirkulationsbereiche, deren Fluidmasse zumindest in der gemittelten Strömung voneinander separiert scheint. In Folge der seitlich über die Zylinderkappe einwirkenden Hauptströmung entwickelt sich ein Paar Kopfwirbel, deren Verbindung zu den entsprechenden Rezirkulationsgebieten erkennbar ist. Die Isoflächen der Wirbelstärke um die Hauptströmungsachse $\overline{\omega}_x$ in Abbildung 7.15 b heben allerdings den unterschiedlichen Drehsinn der Einzelphänomene hervor. Dieser Umstand läßt darauf schließen, daß dennoch ein gewisse Separation vorliegt.

Die Ausdehnung und Form der Rezirkulationsgebiete wird in den nachfolgenden Teilabbildungen mit projiziertem Geschwindigkeitsfeld auf Ebenen x/D bzw. $y/D = \mathrm{const.}$ und den Wirbelkernlinien ersichtlich. Die begrenzenden Isoflächen für das Gebiet minimalen Druckes sowie des Gebietes richtungsumgekehrter Strömung runden die Darstellung und Erkenntnisse in Abbildung 7.15 ab. Und dennoch enthält Abbildung 7.15 d ein wichtiges Detail, dessen Analyse das Gesamtbild zumindest bezüglich der gemittelten Strömung nochmals abwandelt.

Die Isofläche $\overline{u} = 0$ schneidet die Kernlinien der vermeintlichen Kopfwirbelachsen und daß, obwohl in Abbildung 7.15 c der Eindruck bestärkt wird, die Konstitution der Kopfwirbel begänne vor der Ebene $x/D = 0.2$. Die zeitlich gemittelte Strömung enthält an den Schnittpunkten der Isofläche mit den Wirbelachsen jeweils kritische, topologische Sattelpunkte. Wie in Abbildung 7.16 visualisiert, konvergieren die in einer Ebene liegenden Stromlinien an diesen Punkten auf diese selbst. Aus Gründen der auch für das gemittelte Feld geltenden Kontinuität kann die Fluidmasse nur noch auf der Achse entweichen, was in vor- und rückwärtiger Richtung passiert. Die Ebene quasi ruhenden Fluids entsteht aus dem Ausgleich zwischen der von außen einwirkenden Strömung in positiver und der rezirkulierenden, inneren Strömung in negativer Ausrichtung bezüglich x. Im Rahmen stabilitätsanalytischer Untersuchungen zu möglichen Strömungstopologiepunkten würde der beobachtete Punkt als instabiler Wirbel klassifiziert (siehe z. B. OERTEL, 1999). Im statistischen, hier zeitlichen Mittel beginnt die stromabwärtige Bewegung der Kopfwirbel also erst ab etwa $x/D = 0.4$. Inwieweit dies auch für die zeitlich variierende Strömung zutrifft, wird zu klären sein.



(a) Wirbelkernlinien und umgebende Stromlinien

(b) Isoflächen $\overline{\omega}_x = \pm 3.0 U_\infty / D$ ($-$ hell, $+$ dunkel)

(c) LIC in Ebenen $x/D = \mathrm{const.}$

(d) LIC in Ebenen $y/D = \mathrm{const.}$

(e) Isofläche $\overline{p} = -0.465 \varrho U_\infty^2$ (transparent)

(f) Isofläche $\overline{u} = 0$

Abb. *7.15:* Strömungstopologie mit Wirbelkernlinien auf der Zylinderkappe

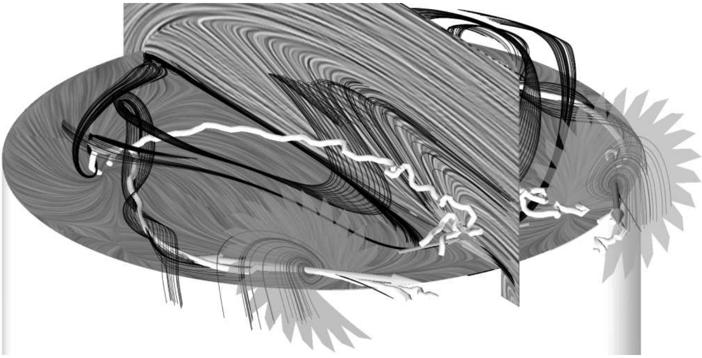


Abb. *7.16:* Sattelpunkte, Wirbelkernlinien und Stromlinien auf der Zylinderkappe

Ein weiteres Detail der Strömungstopologie auf der Zylinderkappe ist in Abbildung 7.17 für die Symmetrieebene dargestellt. Nahe der Vorderkante existiert ein wandnahes, kleines Wirbelgebiet, das sich aus der Ablösung der auf der Zylinderkappe anliegende Rückströmung entwickelt. Das Zentrum liegt in der Symmetrieebene bei etwa $x/D = -0.35$. Diese sekundäre Ablösung findet sich vor dem in Abbildung 7.14 sichtbaren Sattelpunkt auf der Oberfläche. Aus den Schnittebenen $y/D = \pm 0.2$ in Abbildung 7.15 d wird ersichtlich, daß sich dieses eingebettete Wirbelgebiet zu den Seiten leicht vergrößert und letztlich in den Fokuspunkten bei $x/D = 0.15$ mündet. Das extrahierte Phänomen ist der Grund für die in Abbildung 7.14 sichtbare, anliegende Strömung in Hauptströmungsrichtung nahe der Zylindervorderkante. Einzig die Oberflächenvisualisierung (unabhängig davon ob numerisch oder experimentell) könnte hier den Eindruck erwecken, die ankommende Strömung würde nicht primär an der Vorderkante ablösen sondern noch über kurze Distanz anliegen.

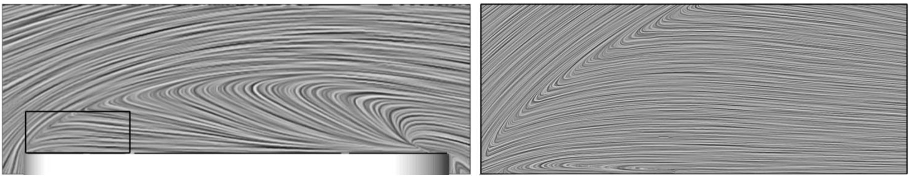
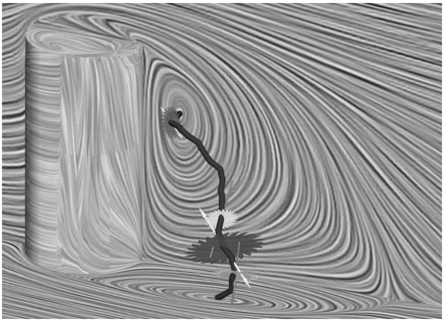


Abb. *7.17:* LIC und wandnahes Strömungsdetail am Zylinderkopf in der Ebene $y = 0$

Ob aus der Kopfüberströmung irgendeine Art von periodischer Wirbelablösung in den Nachlauf entsteht, läßt sich aus dem zeitlich gemittelten Strömungsfeld allein nicht erkennen. Ähnliches gilt für die Instabilität der primär abgelösten Scherschicht.

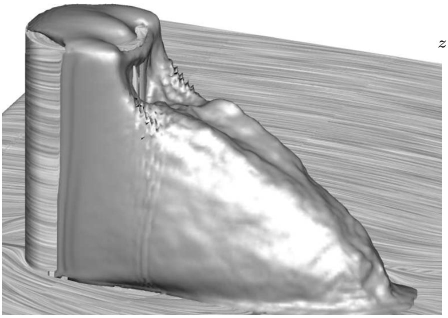
Rezirkulation stromab des Zylinders

Direkt stromab des Zylinders manifestiert sich aufgrund der seitlich ablösenden Scherschichten ein Gebiet reduzierten Druckes. Das Fluid aus der Kopfüberströmung wird dadurch abwärts gesaugt, und die Ausdehnung des abgelösten Bereiches fällt in der Höhe schnell ab. Außerdem treffen deshalb die Fluidmassen aus der seitlichen Ablösung und der Kopfüberströmung aufeinander. Aus der Kombination der jeweiligen Bewegungen entsteht ein Wirbelsystem mit bogen- oder hufeisenförmiger Achse (Abbildung 7.18 a). Nahe der Symmetrieebene induzieren die aufrollenden Wirbel der seitlichen Ablösung Längsgeschwindigkeiten entgegen der Strömungsrichtung. Mit der gleichzeitig abwärtigen und längsgerichteten Geschwindigkeit aus der Kopfüberströmung konstituiert sich mittig hinter dem Zylinder ein großskaliger Rezirkulationswirbel (im zeitlichen Mittel). Weiter entfernt zur Symmetrieebene dominiert die Rotationsbewegung der seitlich aufrollenden Wirbel mit vertikaler Achse. Da auch dort sehr wohl Abwärtsgeschwindigkeiten existieren, ergeben sich abwärtsrotierende Wirbelspiralen, die an einen Tornado erinnern (vgl. Abbildung 7.18 b). Die abwärtige Bewegung der Spiralen stagniert deutlich vor der Platte – erkennbar an der Konzentration der Stromlinien – und direkt oberhalb der Platte bewegen sich die Spiralen aufwärtig. Der Übergang zwischen den Ab- und Aufwärtsgeschwindigkeiten ist durch mehrere kritische Punkte auf der Wirbelachse gekennzeichnet, welche in Abbildung 7.18 a visualisiert sind. Der Übergang der lateralen Wirbelachse mittig zu den fast vertikalen Achsen seitlich formt den bereits genannten bogenartigen Rezirkulationswirbel. Es sei bereits an dieser Stelle der Hinweis erlaubt, daß dies eine rein statistische Struktur ist, die in der realen, zeitlich ablaufenden Physik so nicht existiert.

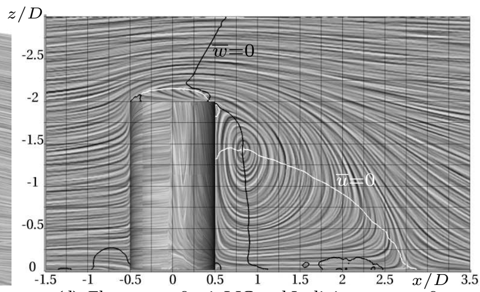


(a) Wirbelkernlinie, Sattelpunkte und LIC

(b) Zusätzliche Stromlinien



(c) Isofläche $\overline{u} = 0$



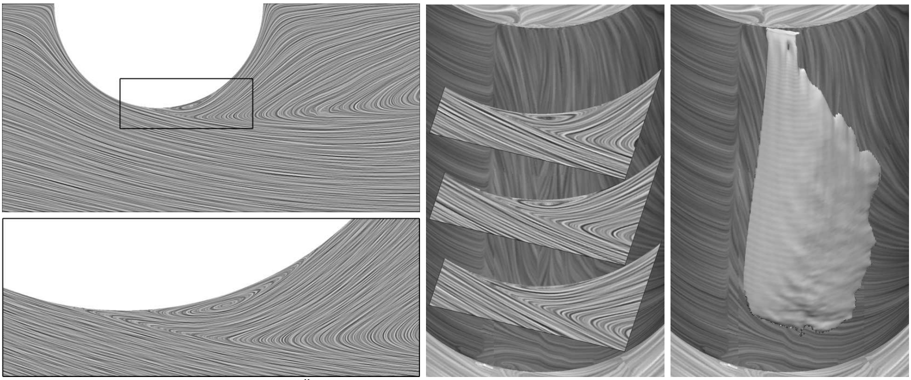
(d) Ebene $y = 0$ mit LIC und Isolinien $\overline{u}, \overline{w} = 0$

***Abb.** 7.18:* Topologie des Rezirkulationsgebietes stromab vom Zylinder

Die Visualisierung in Abbildung 7.18 dient (in den Teilabbildungen a,b,c) dazu, das Rezirkulationsgebiet qualitativ darzustellen. Quantitative Eigenschaften sind in der Abbildung 7.18 d, aber auch in den vertikalen Schnittebenen aus Abbildung 7.13, abzulesen. So hat der Rezirkulationswirbel sein Zentrum in der Symmetrieebene bei $\{x/D = 0.8,\, y = 0,\, z/D = -1.4\}$. Die Abwärtskomponente der Strömung ist derart ausgebildet, daß die Strömung auf der Grundplatte bei $x/D = 2.88$ (in der Symmetrieebene) wieder anlegt. Dennoch bleibt die starke Abwärtsbewegung auf einen schmalen Bereich um die Symmetrieebene beschränkt, während in den äußeren Bereichen negative w-Komponenten, also Aufwärtsbewegungen, dominieren.

Die in Abbildung 7.18 c dargestellte Isofläche $\overline{u} = 0$ umschließt den Bereich mit richtungsumkehrender Strömung im zeitlichen Mittel. Zusammen mit der Zylindergeometrie repräsentiert die sichtbare Oberfläche in gewisser Weise den der Anströmung effektiv entgegen stehenden Störkörper.

Wie bereits im Zusammenhang mit Abbildung 7.12 erwähnt, existieren im primär abgelösten Bereich des Zylindermantels große sekundär anliegende Strömungsgebiete. Durch den großskaligen Rezirkulationswirbel hinter dem Zylinder wird das Fluid nicht nur zum Zylinder zurück transportiert, sondern auch zum Anliegen geführt. Aufgrund der Achse und Drehrichtung des Rezirkulationswirbels steigt das anliegende Fluid am Zylinder vertikal auf. Dabei dringt Fluidmasse bis nahe an das primäre Ablösegebiet vor. Entsprechend strömen Teile des aufsteigenden Fluids entgegen der Anströmung und müssen von der primär ablösenden Scherschicht umgelenkt werden. Diese Umlenkung führt wie in Abbildung 7.19 a sichtbar, zu einer sekundären Wirbelformation direkt stromab der Ablösung. Diese findet sich nahezu über die vollständige Höhe des Zylinders (Abbildung 7.19 b). Wegen des zusätzlichen vertikalen Fluidtransports handelt es sich hierbei um eine helikalische Rotationsbewegung bezüglich der Rückströmung. Diese Eigenschaft wird durch die in Abbildung 7.19 c gezeigte Isofläche negativer Helizität $\overline{h} = \overline{\omega}_i \overline{u}_i$ (nicht normierte Wirbelstärke in Strömungsrichtung) bestätigt und räumlich eingegrenzt. Interessant ist letztlich noch die Tatsache, daß die aufsteigende Fluidmasse aus Gründen der Kontinuität nicht im Rückströmgebiet verbleiben kann und in irgendeiner Art der stromab konvektierenden Nachlaufströmung wieder zugeführt werden muß. In der Tat füttert das relativ langsam aufsteigende Fluid den jeweiligen seitlichen Kopfwirbel und auch das Rezirkulationsgebiet auf der Zylinderkappe. Dieser Umstand ist in Abbildung 7.19 c ersichtlich.



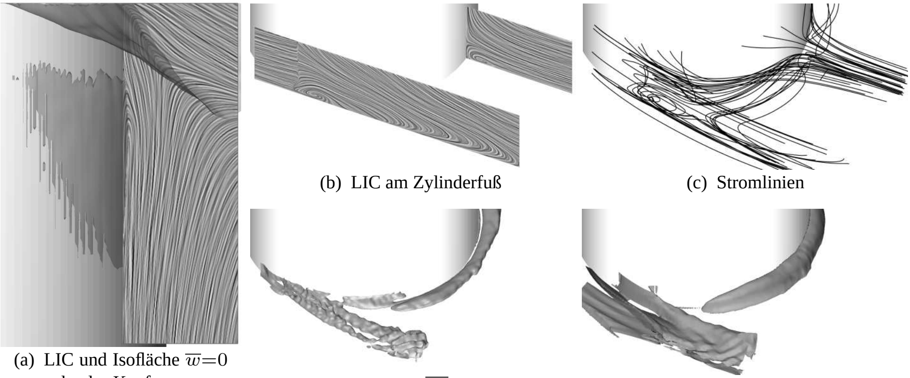
(a) LIC in der Ebene $z/D = -1.0$ (Überblick und vergrößertes Detail)

(b) LIC in Ebenen $z/D = -0.5; -1.0; -1.5$

(c) Isofläche negativer Helizität $\overline{h} = \overline{\omega}_i \overline{u}_i$

***Abb.** 7.19:* Sekundärströmung nahe der primären Ablösung am Zylindermantel

Eine ungeeignete Darstellung des beobachteten Phänomens oder planare experimentelle Messung können zu der irrigen Annahme führen, daß es sich bei dem helikalen Fluidtransport um eine (laminare) Ablöseblase handelt. Unterstützt würde ein solcher Irrtum durch die experimentell vergleichsweise stark begrenzte räumliche Auflösung sowie die räumlich stationäre Lage der Wirbelstärke.



(a) LIC und Isofläche $\overline{w}=0$ nahe des Kopfes

(b) LIC am Zylinderfuß

(c) Stromlinien

(d) Isofläche $\overline{\lambda_2} = -1$

(e) Isofläche $\overline{w} = 0$

Abb. *7.20:* Kleinskalige Sekundärwirbel am Zylindermantel

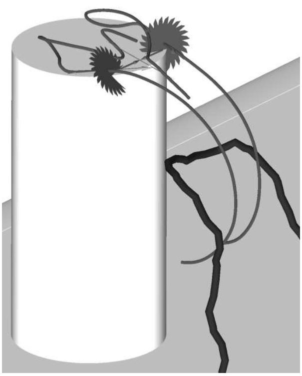
Für die Rückströmung am Zylinder finden sich in der gemittelten Strömung weitere sekundäre Ablösegebiete bzw. Wirbelformationen. In Abbildung 7.20 sind derartige Phänomene in der Nähe des Zylinderkopfes und seines Fußes dargestellt. Ein Teil des am Zylinder wiederangelegten Fluids, nämlich nahe der Symmetrieebene, bleibt in deren Nähe und formiert im zeitlichen Mittel ebenfalls eine lokal begrenzte Ablöseregion auf der Rückseite des Zylinders wenig unterhalb des Kopfes mit Zentrum bei etwa $\{x/D = 0.506,\ z/D = -1.82\}$ (vgl. Abbildung 7.20 a). Wegen der Wechselwirkung mit der seitlichen Sekundärströmung, dargestellt in Abbildung 7.19, dehnt sich das betrachtete Gebiet seitlich nur wenig aus. Im Gegensatz dazu erstrecken sich im Fußbereich des Zylinders zwei miteinander verbundene sekundäre Wirbelphänomene fast über die gesamte Breite des Ablösebereiches. Wie in Abbildung 7.20 b bis Abbildung 7.20 e gezeigt, handelt es sich hierbei um das Aufrollen des Fluides infolge des Hindernisses in der Rückströmung. Im zentralen Nachlauf formiert sich eine Art rückwärtiger Hufeisenwirbel, der bis nahe an die Ablösung ausgedehnt ist. Aufgrund der Begrenzung durch die Scherschicht findet untermittelbar hinter dieser eine Umorientierung des Fluides und der Wirbelachse statt. Letztere befindet sich etwa in der Höhe $z/D = 0.04$ mit einer Ausdehnung des Phänomens bis ungefähr $z/D = 0.08$. Ein Fußabdruck des Beobachteten findet sich bereits in der Oberflächenvisualisierung aus Abbildung 7.12 sowie in verschiedenen Anstrichbildern (z. B. PATTENDEN *et al.*, 2005).

Seitliche Kopfwirbel

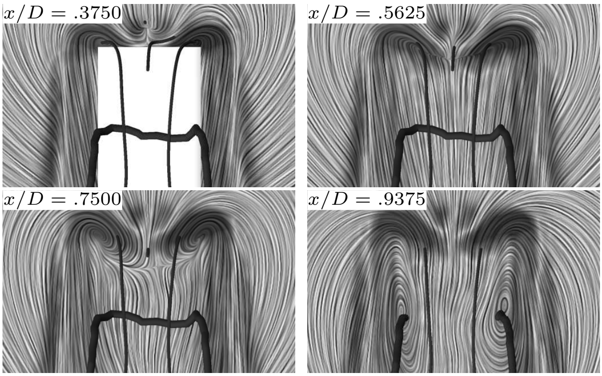
Die Existenz von Kopfwirbeln wird in der Literatur einmütig beschrieben. Nahezu einheitlich wird ihre Struktur als kohärente seitliche Kopf- oder Tütenwirbel, ausgebildet über eine lange Region des Nachlaufes, angegeben (vgl. z. B. Abbildung 5.3). Ihre räumliche Lage und Ausdehnung wird bei LEDER (2003) mit Hilfe kohärenter Wirbelstärke in Strömungsrichtung (zeitlich gemittelt) visualisiert. Der Drehsinn beider Kopfwirbel ist von außen nach innen, mit Abwärtsbewegung im zentralen Nachlauf, gerichtet. Dies entspricht bei der vorliegenden Reynolds-Zahl der Fluidbewegung vom höheren Druck seitlich am Zylinder und außerhalb des Nachlaufs zum geringeren Druck auf der Zylinderkappe und im Nachlauf.

Die vorliegenden, gemittelten Simulationsergebnisse offenbaren nach eingehendem Studium ebenfalls derartige Kopfwirbel, aber nicht deren Ausdehnung in den fernen Nachlauf. Wie bereits in Abbildung 7.16 aufgezeigt, beginnt die stromabwärtige Bewegung formierter Wirbelstärke in den extrahierten kritischen Punkten bei etwa $x/D = 0.4$. Die von diesen Punkten beginnend, integrierten Separationslinien sind in Abbildung 7.21 a im räumlichen Bezug zur Wirbelkernlinie des Rezirkulationsgebietes dargestellt. Die Verschmelzung der Kopfwirbel mit dem Rezirkulationsgebiet ist in dieser Darstellung evident, auch wenn die Separationslinien im Allgemeinen nicht identisch mit der Wirbelkernlinie sind.

In Abbildung 7.21 b sind planare Stromlinien mittels LIC für einzelne Schnittebenen in Strömungsrichtung gezeigt. Zusätzlich sind die Ebenen mit der Wirbelstärkekomponente $\overline{\omega}_x$ eingefärbt, so daß Kohärenz bezüglich dieser Komponente dunkel erscheint. Offenkundig werden die Kopfwirbel relativ schnell Bestandteil des konstituierten Rezirkulationswirbels. Dabei verbleiben Gebiete extremaler Wirbelstärke in Strömungsrichtung, in denen das Geschwindigkeitsfeld aufgrund der deutlich großskaligeren Bewegung des Rezirkulationsgebietes von diesem überlagert wird. Wegen der starken Abwärtsbewegung hinter dem Zylinderstumpf ist es plausibel, daß auch die Kopfwirbel von dieser betroffen sind. Da die Wirbelablösung aus den seitlichen Scherschichten irgendwie periodisch erfolgt und die Kopfwirbel relativ stationären Charakter besitzen, ist jedoch denkbar, daß das Verschmelzen des Rezirkulationsgebietes mit den Kopfwirbeln nur temporär ist. Als Ergebnis der Mittelung wären dann die Gebiete starker, strömungsgerichteter Wirbelstärke mit $\overline{\omega}_x/|\overline{\omega}_i| \approx 0.7$ erklärbar. Sehr wahrscheinlich ist, daß diese Gebiete der momentanen Kontur des Rückströmgebietes folgen.



(a) Wirbelpunkte mit Separationslinien und Wirbelkernlinie



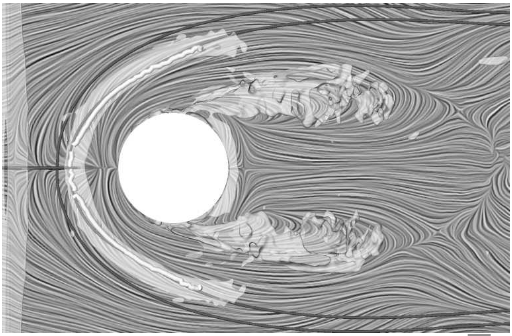
(b) Separationslinien, LIC in Ebenen $x/D = \mathrm{const.}$ eingefärbt mit extremaler Wirbelstärke $\overline{\omega}_x$ und Wirbelkernlinie im Nachlauf

***Abb.** 7.21:* Seitliche Kopfwirbel und ihre Vereinigung mit dem Rezirkulationsgebiet

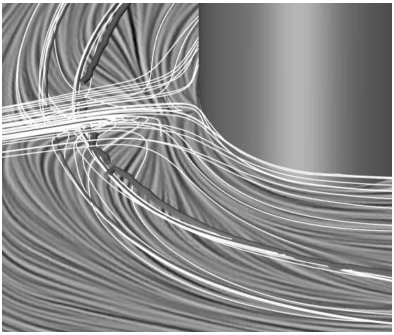
Die Kohärenz der Wirbelstärke in x-Richtung wird etwa bei $x/D = 2.0$ durch die lateralen Geschwindigkeitskomponenten der seitlich ablösenden Strukturen gestört. Nach dem Wiederanlegen der Strömung auf der Grundplatte formieren sich longitudinal ausgerichtete Nachlaufwirbel (Abbildung 7.23), deren Ausrichtung zu erneuter Stärkung der strömungsgerichteten Wirbelstärke führt.

Hufeisenwirbel

Die Kombination einer Platte mit darauf positioniertem Störkörper endlicher Breite führt zur Entwicklung eines Hufeisenwirbels vor dem Körper, wo die Plattengrenzschicht aufgrund des starren Hindernisses stagniert. Für die untersuchte Zylinderstumpfkonfiguration ist der Plattenvorlauf relativ gering, so daß die durch den Transitionsdraht turbulent definierte Plattengrenzschicht relativ dünn ist (experimentell $\delta/D \approx 0.04$). Dementsprechend formiert sich ein vertikal gering ausgedehntes Hufeisenwirbelsystem. Es sei an dieser Stelle vorweg genommen, daß der Transitionsmechanismus am Draht bei der LES als Referenzsimulation aufgrund fehlender Turbulenz am unmittelbar davor gelegenen Einströmrand nicht adäquat funktioniert hat. Die Simulation sagt infolge der damit fehlenden Energetisierung der Grenzschicht ein räumlich leicht verfrühte Konstitution des Hufeisenwirbels voraus. Dennoch ist die Struktur und Größe des Wirbelsystems mit experimentellen Ergebnissen vergleichbar.



(a) Oberflächen-LIC auf der Platte, Separationslinien, $\overline{\lambda_2}$-Isofläche und Wirbelkernlinie



(b) Oberflächen-LIC auf der Platte, Wirbelkernlinie und Stromlinien

(c) LIC in der Ebene $y = 0$ mit vergrößertem Transitionsdraht

(d) LIC in der Ebene $x = 0$ (laterale Geschwindigkeitskomponente zur Darstellung modifiziert: $\overline{v} \pm 0.35U_\infty$)

Abb. *7.22:* Topologie des Hufeisenwirbels nahe der Platte vor dem Zylinder

In Abbildung 7.22 sind die wichtigsten Eigenschaften des Hufeisenwirbels und seiner Topologie stromauf, seitlich und hinter dem Zylinder visualisiert. Das Zentrum des Hufeisenwirbels befindet sich in der Symmetrieebene mittig, leicht stromab verschoben zwischen dem Transitionsdraht und der Zylindervorderkante. Anhand der Separationslinien in Abbildung 7.22 a, die an extrahierten kritischen Punkten beginnen, läßt sich zylindernah eine gewisse Trennung zwischen dem Hufeisenwirbelsystem und dem abgelösten Nachlaufgebiet feststellen. Nichtsdestotrotz wird ein Teil der involvierten Fluidmasse seitlich in das Nachlaufgebiet gesaugt; erkennbar an den Oberflächenstromlinien ab $x/D \approx 2$. Außerhalb der in Abbildung 7.22 c dargestellten Symmetrieebene mit indifferenten Strömungsbedingungen nimmt die vertikale Ausdehnung leicht zu. Durch die dort starken lateralen Geschwindigkeitskomponenten findet quasi eine Aufdickung mit der Lauflänge statt. Im dem nicht maßstabsgetreuen Vergleich der beiden letzten Teilabbildungen ist die Aufdickung erkennbar. Um das Kerngebiet des Hufeisenwirbels in der Ebene $x = 0$ darzustellen (Abbildung 7.22 d), wurde die signifikante, seitliche Geschwindigkeit des Wirbelkerns subtrahiert. Die gekrümmte Wirbelkernlinie behält in der vorderen Hälfte des Zylinders in etwa den gleichen Abstand zur Zylindermantelfläche.

Mit der Positionierung des Zylinders nahe der Plattenvorderkante sollte der Einfluß des Hufeisenwirbels minimiert werden. Zum einen ist dies der Grund für die geringe Ausdehnung des Phänomens, zum anderen aber auch ein Grund geringer Verfälschung des abgelösten Nachlaufs infolge der unzureichenden numerischen Behandlung.

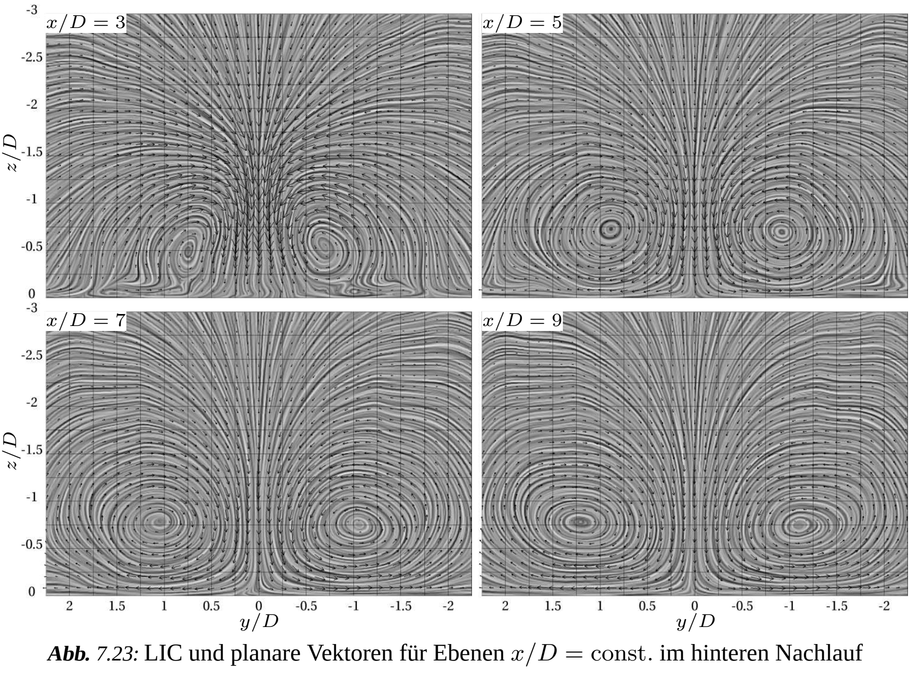


Abb. *7.23:* LIC und planare Vektoren für Ebenen $x/D = \mathrm{const.}$ im hinteren Nachlauf

Weiterer Nachlauf

Die bisher näher betrachteten strömungstopologischen Phänomene konstituieren sich in unmittelbarer Zylindernähe. Für den Bereich stromab von $x/D = 3$ zeigt die Wirbelkerndarstellung für das gemittelte Feld in Abbildung 7.11 stark ausgeprägte Längswirbel. In der Tat hat die Längsrotation im Nachlauf stark stationären Charakter und ist deshalb als zeitlich gemitteltes Phänomen beobachtbar. Abbildung 7.23 zeigt Stromlinien und Vektoren des tangentialen Geschwindigkeitsfeldes in Schnittebenen normal zur Hauptströmungsrichtung beginnend bei $x/D = 3$. Die symmetrischen Wirbelspiralen formieren sich kurz vor der ersten dargestellten Ebene aufgrund der abwärtigen und lateralen Bewegungen im Bereich des plattennahen Rezirkulationsgebietes. Die in Abbildung 7.22 a sichtbaren, symmetrisch angeordneten Sattelpunkte bei $x/D = 2.5$ können hierbei als Fußabdrücke der Wirbelformation verstanden werden. Ab der Ebene $x/D = 5$ verharren die Wirbelkernlinien im weiteren Nachlauf auf fast konstanter Höhe über der Platte, während seitlich ein Auseinanderdriften stattfindet.

Die Tatsache, daß die Nachlaufwirbel aufsteigen, um anschließend ihre vertikale Lage und Größe beizubehalten, ist zumindest vorerst überraschend. Am Ende des Rezirkulationsgebietes trifft Fluid in einer überlagerten, aber vertikalen Bewegung auf die Grundplatte. Wie bereits in Abbildung 7.18 d sichtbar, findet ein Wiederanlegen auf der Platte statt, ohne daß irgendwelche Abpralleffekte beobachtet werden können. Die Fluidmasse der Nachlaufwirbel kann dementsprechend nicht aus dem unmittelbaren Nachlauf bzw. Rezirkulationsgebiet stammen. Die Stromliniendarstellung in Abbildung 7.24 zeigt deutlich, daß dieses Fluid aus dem äußeren Bereich der seitlichen Zylinderumströmung in den Nachlauf eingesaugt wird. Dabei findet sich in der gemittelten Strömung eine gewisse Schichtung des Fluids bezüglich der vertikalen Position über der Platte. Insbesondere wird deutlich, daß das unmittelbar wandnahe Fluid am Zylinderkopf und -mantel das Rezirkulationsgebiet „füttert“, während der weitere Nachlauf im Wesentlichen durch die äußere Umströmung gespeist wird.

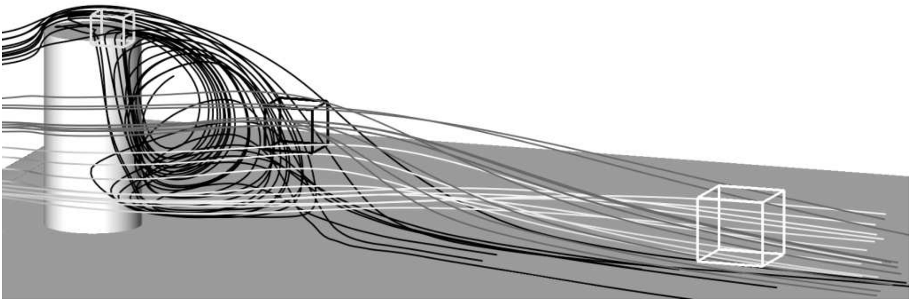


Abb. *7.24:* Stromlinien mit unterschiedlichen Startgebieten am Kopf und im Nachlauf: Startgebiet im Bereich der Kopfwirbel (schwarz), seitlich am Ende des Rezirkulationsgebietes (dunkelgrau) und im Bereich eines Nachlaufwirbels (hellgrau)

Informationen über die Konvektion ablösender (periodischer) Wirbelstrukturen im weiteren Nachlauf sind im gemittelten Strömungsfeld nicht mehr enthalten.

7.3.2 Strömungstopologie im zeitlichen Mittel

Die topologischen Erkenntnisse über das zeitlich gemittelte Strömungsfeld sind mittels einer Skizze in Abbildung 7.25 zusammengestellt. Für die Detailanalyse der Einzelphänomene sei auf die vorhergehenden Paragraphen verwiesen.

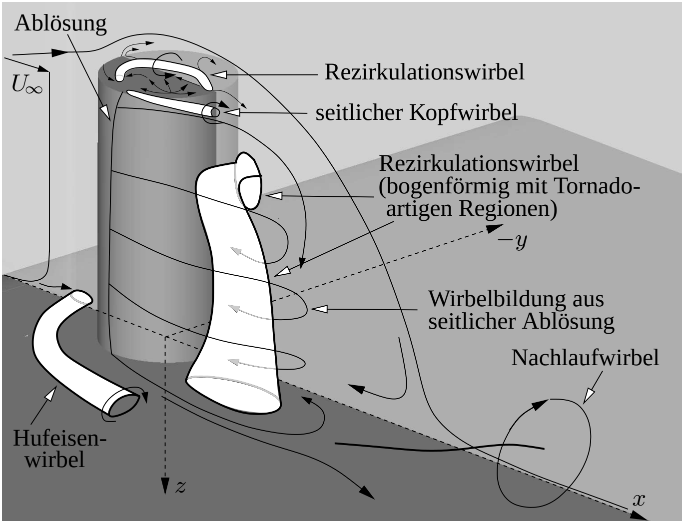


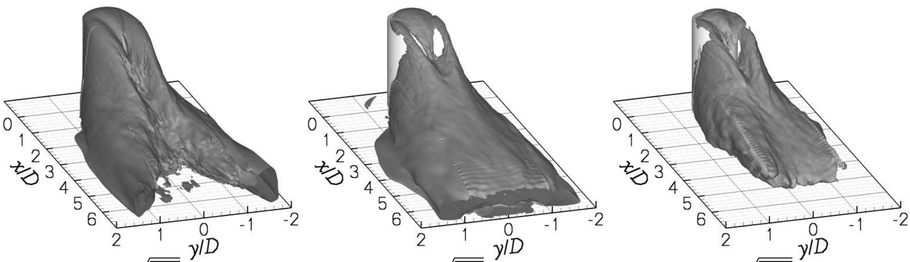
Abb. *7.25:* Skizze der zeitlich gemittelten Strömungstopologie (aus FREDERICH *et al.*, 2007*c*)

Die dargestellte Strömungstopologie besitzt vorerst nur Gültigkeit für die aktuell untersuchte Konfiguration. Einzelne Strömungsgebiete finden sich aufgrund der Formation gleicher bzw. ähnlicher Phänomene für andere Seitenverhältnisse, aber auch leicht variierende Reynolds-Zahlen, wieder (z. B. Hufeisenwirbel und Topologie am Kopf). Wegen der im Abschnitt 7.4 dokumentierten guten Übereinstimmung mit begleitenden Experimenten ist die numerisch gewonnene Darstellung auch für diese zutreffend bzw. durch diese validiert.

7.3.3 Turbulenzstatistiken und Momente höherer Ordnung

Die vorhergehend präsentierte Analyse stützt sich einzig auf topologische Untersuchungen des zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsvektorfeldes ohne Berücksichtigung der zeitlichen Varianz. Im Sinne der additiven Zerlegung in Mittelwert und Schwankungsgröße (2.11) sind für die statistische Auswertung besonders die Korrelationen mehrerer Schwankungsgrößen relevant. Die Reynolds-Spannungen als Korrelationstensor zweier Geschwindigkeitsfluktuationen sind dabei von speziellem Interesse, da diese die zusätzlichen, turbulenten Spannungen in den Reynolds-gemittelten Gleichungen (2.50) repräsentieren. Bei den nachstehenden Auswertungen wird davon ausgegangen, daß der Feinstrukturanteil der Schwankungsgrößen klein gegenüber den aufgelösten Schwankungen ist und daher vernachlässigt werden kann.

In Abbildung 7.26 sind Gebiete hoher Reynoldsscher Normalspannungsanteile in Form der effektiven mittleren Schwankungen (RMS-Werte) dargestellt. Zwangsläufig treten starke Schwankungen im abgelösten, turbulenten Nachlauf auf, wobei diese infolge der abwärtigen Bewegung im Nachlauf mit zunehmender Entfernung zum Zylinder schnell auf die plattennahen Gebiete beschränkt werden. Während die Schwankungen in x- und y-Richtung sich dabei weit in den Nachlauf ausdehnen, existieren hohe effektive Schwankungen in der vertikalen Richtung z nur bis in das Gebiet, wo die Nachlaufwirbel vollständig konstituiert sind. Im Umkehrschluß folgt wiederum die bereits beschriebene, im Mittel stationäre Lage der Nachlaufwirbel in vertikaler Richtung.

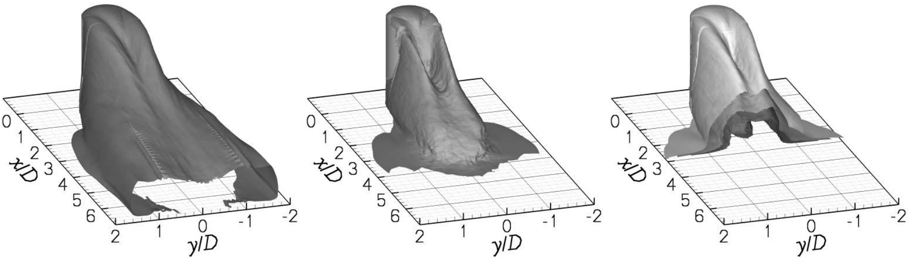


(a) $u_{rms} = \sqrt{u'^2} = 0.18\,U_\infty$ (b) $v_{rms} = \sqrt{v'^2} = 0.18\,U_\infty$ (c) $w_{rms} = \sqrt{w'^2} = 0.18\,U_\infty$

Abb. *7.26:* Isoflächen der RMS-Werte für die Geschwindigkeitsfluktuationen

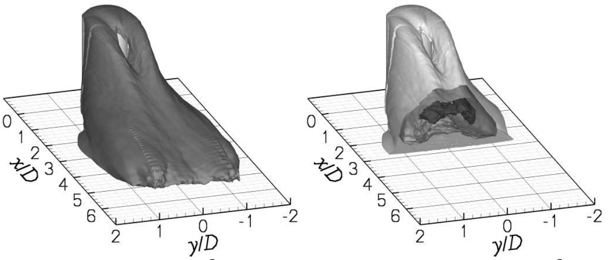
Die Abgrenzung der Gebiete mit relativ starken Schwankungen in Abbildung 7.26 macht deutlich, daß die einzelnen Komponenten der vorhergehend beschriebenen Topologie für die gemittelte Strömung starken zeitlichen und dreidimensionalen Änderungen unterworfen sind. Um dies zu verdeutlichen sind in Abbildung 7.27 einige aus den Effektivwerten abgeleitete richtungsunabhängige Größen visualisiert. So beschreibt der Betrag eines Vektors der Effektivwerte $|u_{rms,i}|$ mit $u_{rms,i} = u_{rms}e_{x,i} + v_{rms}e_{y,i} + w_{rms}e_{z,i}$ ein Maß für die lokale Geschwindigkeitsänderung im Feld. Die in Abbildung 7.27 a dargestellte Fläche schließt ein Gebiet ein, in dem die Geschwindigkeit im Mittel um ein Viertel der Anströmgeschwindigkeit bezüglich des zeitlichen Mittelwertes variiert. Erkennbar ist davon im Grunde der gesamte Nachlauf betroffen. Der zusätzliche Bezug zum mittleren Geschwindigkeitsfeld der Form $|u_{rms,i}|/|\overline{u}_i|$, dargestellt in Abbildung 7.27 b, betont die schwache Aussagekraft des mittleren Geschwindigkeitsfeldes. Die gewählte Fläche begrenzt die Nachlaufregion, in der die mittleren Schwankungen größer sind als der Mittelwert selbst. Eine Staffelung der relativen Schwankung im Nachlauf ist in Abbildung 7.27 c ersichtlich. Demnach ist die Instationarität der untersuchten Strömung erwartungsgemäß dort besonders hoch, wo die statistisch beschriebenen Einzelphänomene miteinander interagieren. Unmittelbar hinter dem Zylinder treffen Kopfüberströmung, seitlich aufrollende Scherschichten sowie Plattengrenzschicht bzw. Hufeisenwirbel aufeinander.

Die Summe der massenspezifischen Reynoldsschen Normalspannungsanteile führt auf die mittlere kinetische Turbulenzenergie k nach (2.16). Die Berechnung und Analyse des Skalarfeldes von k ist wegen $2k = |u_{rms,i}|^2$ redundant und unterstützt die bisherigen Aussagen hinsichtlich intensiver (turbulenter) Schwankungen im unmittelbaren Nachlauf. Aufgrund der Gebräuchlichkeit von k ist eine diesbezügliche Darstellung in Abbildung 7.28 enthalten.



(a) $|u_{rms,i}| = 0.25\,U_\infty$ (b) $|u_{rms,i}|/|\overline{u}_i| = 1$ (c) $|u_{rms,i}|/|\overline{u}_i| = 0.5, 1, 1.5$

Abb. *7.27:* Gebiete stark variierender mittlerer Geschwindigkeiten



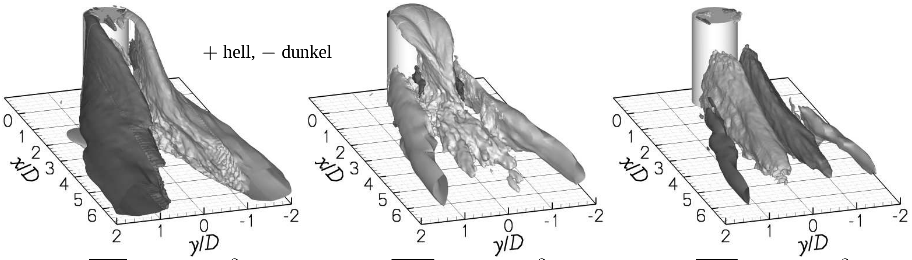
(a) $k = 0.05\,U_\infty^2$ (b) $k = 0.05, 0.1, 0.15\,U_\infty^2$

Abb. *7.28:* Isoflächen der mittleren turbulenten kinetischen Energie $k = \frac{1}{2}\overline{u_i'^2}$

Die kreuzweise Korrelation von zwei kartesischen Geschwindigkeitsschwankungen gibt Aufschluß, inwieweit eine Koppelung zwischen den Schwankungsanteilen beider Raumrichtungen besteht. Diese Information wird von den Schubspannungskomponenten des Reynolds-Spannungstensors repräsentiert. Weil für den Fall vollständig statistisch isotroper Turbulenz diese Nebendiagonalelemente verschwinden würden, bilden die Schubspannungen anisotrope Eigenschaften des Strömungsfeldes ab. Wie erwartet und in Abbildung 7.29 ersichtlich, existieren hohe Schubspannungen besonders im Bereich großskaliger Turbulenz. In nicht unerheblich ausgedehnten Gebieten ist deren Größenordnung vergleichbar mit derjenigen der Normalspannungen[41].

Auffällig in Abbildung 7.29 ist zum einen, daß nur wenig negative Schubspannungen $\overline{u'w'}$ existieren. Im Mittel gibt es also (fast) keine anisotropen Schwankungen nach stromab-aufwärts oder stromauf-abwärts bezüglich der mittleren Hauptströmung. Eine derartige Spannung wäre mit den identifizierten Phänomenen auch nicht zu erklären. Zum anderen offenbart die vorstellbare Überlagerung der einzeln dargestellten Isoflächen überlappende Gebiete, in denen nur zwei Schubspannungskomponenten ausgebildet sind. Die Tatsache, daß die dritte Komponente verschwindet, ist ein Hinweis auf unterschiedliche Zeitskalen der Schwankungen bzw. die Überlagerung verschiedener Frequenzen, weil ansonsten die Korrelation aller Schwankungen gegeben sein müßte. Die Frequenzen werden im Abschnitt 7.3.5 und die Isotropie-Eigenschaften im Abschnitt 7.3.6 gesondert analysiert.

[41] Das Quadrat der Isowerte $0.18\,U_\infty$ in Abbildung 7.26 entspricht $0.0324\,U_\infty^2$.



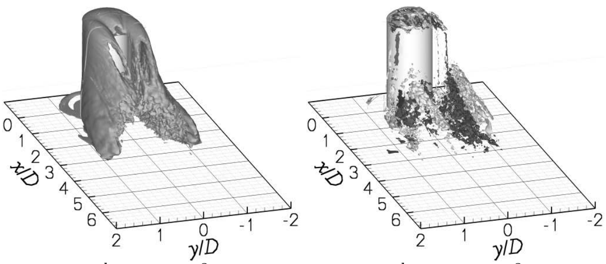
(a) $\overline{u'v'} = \pm 0.01\,U_\infty^2$ (b) $\overline{u'w'} = \pm 0.01\,U_\infty^2$ (c) $\overline{v'w'} = \pm 0.01\,U_\infty^2$

Abb. *7.29:* Schubspannungskomponenten des Reynolds-Spannungstensors

Neben den Doppelkorrelationen der Geschwindigkeitsschwankungen wurden während der LES weitere Korrelationen berechnet. Speziell wurden Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen korreliert, also $\overline{p'u_i'}$, aber auch Einzelkomponenten des Tensors der Tripelkorrelationen ausgewertet, hier $\overline{u'u'u'}$, $\overline{v'v'v'}$, $\overline{w'w'w'}$, $\overline{u'v'w'}$ und $\overline{u'w'w'}$. Aufgrund zusätzlich benötigter Feldvariablen bei der Berechnung der Tripelkorrelationen (vgl. Abschnitt 4.7) wurden nicht alle Komponenten berechnet. Tripelkorrelationen treten in den Transportgleichungen für die Reynolds-Spannungen oder der turbulenten kinetischen Energie k auf. Mit den berechneten Korrelationen können einzelne Terme der Gleichung für k (7.1) berechnet werden.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_i'u_i'u_j'} + \frac{1}{\varrho}|\overline{u_j'p'}| - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j}\right] - \varepsilon \tag{7.1}$$

Nachträglich ausgewertet wurden der Produktionsterm $P^k = -\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}$ sowie der Druckdiffusionsterm $D^k = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial|\overline{u_j'p'}|}{\partial x_j}$. Da nicht alle Tripelkorrelationen $\overline{u_i'u_j'u_k'}$ berechnet wurden und die räumlichen Nebendiagonalelemente starken Einfluß haben, kann die turbulente Diffusion nicht angegeben werden. Abbildung 7.30 zeigt zum einen die Gebiete verstärkter Turbulenzproduktion, die ihren Ursprung nahezu ausschließlich in ablösenden Scherschichten haben. Auf der anderen Seite existieren auch Regionen, in denen Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen irgendwie korreliert sind, also nicht zwangsläufig lokal phasenverschoben sind. An dieser Stelle ist der Hinweis wichtig, daß bei der Turbulenzmodellierung der Druckdiffusionsterm fast immer vernachlässigt wird. In Abbildung 7.30 b zeigt sich die Relevanz des Terms für Gebiete nichtlinearer Interaktion mit Frequenzüberlagerung.

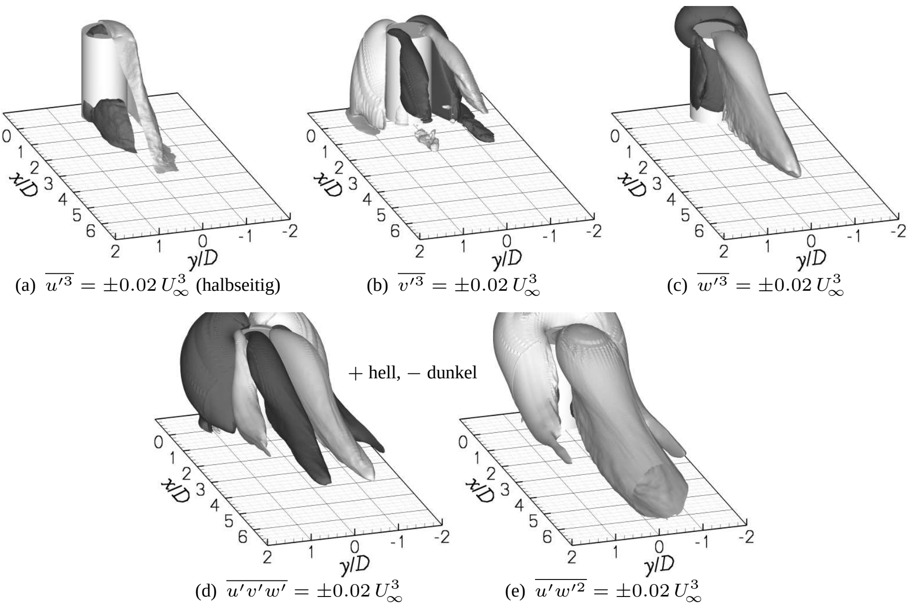


(a) $P^k = 0.05\,U_\infty^3/D$ (b) $D^k = \pm 0.05\,U_\infty^3/D$

Abb. *7.30:* Produktions- und Druckdiffusionsterm der Transportgleichung für k

Die Hauptdiagonalelemente des Tripelkorrelationstensors, z. B. $\overline{u'u'u'} = \overline{u'^3}$, werden auch als Schiefe bezeichnet. Diese ist ein Maß für die Unsymmetrie der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der jeweiligen Geschwindigkeitsfluktuation. Im Sinne der Physik bedeuten positive Werte für die Schiefe, daß positive Schwankungen am lokalen Ort häufiger auftreten (wahrscheinlicher sind) als negative und umgekehrt. In Abbildung 7.31 a bis 7.31 c sind die Einhüllenden von Gebieten visualisiert, in denen verstärkt positive bzw. negative Schwankungen in den kartesischen Raumrichtungen auftreten. Der deutliche Unterschied bei den positiven und negativen Werten für $\overline{u'^3}$ wird verursacht durch die Dominanz der Anströmgeschwindigkeit in x-Richtung. Konsistent dazu treten bevorzugt einseitige Schwankungen besonders dort auf, wo gerichtete und wenig periodische, also nahezu stationäre Phänomene vorhanden sind. Dies umfaßt u. a. die Strömungsaufteilung vor dem Zylinder, die Kopfwirbel und die Abwärtsbewegungen im Nachlauf, aber auch die Rückströmung außermittig hinter dem Zylinder.

Abbildung 7.31 d zeigt Strömungsvolumina mit den am stärksten korrelierten Schwankungen in allen drei Raumrichtungen. Aus der Topologie sind hier enthalten die seitlich abgelösten, instabilen Scherschichten, Gebiete im Zusammenhang mit den Kopfwirbel sowie die Areale minimalen Druckes vorne seitlich am Zylinder. Die Schwankungen im letzteren Gebiet werden durch die sich elliptisch ausbreitenden, hauptsächlich periodischen Druckinformationen aus dem Nachlauf hervorgerufen. Die letzte Tripelkorrelation in Abbildung 7.31 e ist hier nur gezeigt, um zu bestätigen, daß auch die gemischten Terme für den Anteil der turbulenten Diffusion in der k-Gleichung relevant sind.



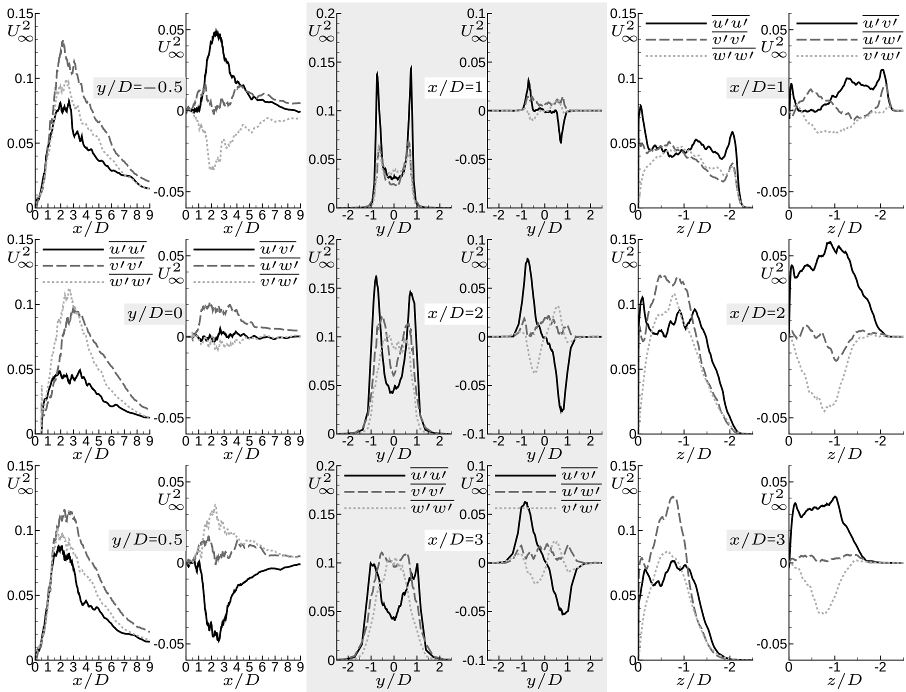
(a) $\overline{u'^3} = \pm 0.02\,U_\infty^3$ (halbseitig) (b) $\overline{v'^3} = \pm 0.02\,U_\infty^3$ (c) $\overline{w'^3} = \pm 0.02\,U_\infty^3$

(d) $\overline{u'v'w'} = \pm 0.02\,U_\infty^3$ (e) $\overline{u'w'^2} = \pm 0.02\,U_\infty^3$

***Abb.** 7.31:* Ausgewertete Tripelkorrelationen der Geschwindigkeitsschwankungen

Nachdem vorstehend Regionen ausgeprägter Schwankungen bzw. Korrelationen identifiziert wurden, folgen nachstehend quantitative Darstellungen in ausgewählten Linien im nahen Zylindernachlauf. Der ferne Nachlauf ist weniger relevant, da dort Abfall und Homogenisierung der Korrelationen beobachtet werden können. In Abbildung 7.32 sind jeweils alle Komponenten des Reynolds-Spannungstensors für Linien mit Ausrichtung in allen drei kartesischen Raumrichtungen aufgetragen.

Ein nicht ganz triviales Fazit aus der Darstellung ist die Tatsache, daß sämtliche Schubspannungen im Feld stets kleiner sind als alle Normalspannungen. Die Ausnahme bildet zwangsläufig die Wandgrenzschicht auf der Platte, wo die vertikale Normalspannung infolge des Wandeinflußes klein ausfällt. Obwohl Normalspannungen aufgrund der Eigenkorrelation allgemein größer sind als die zugehörigen Schubspannungen, muß dies nicht unbedingt für die ergänzende dritte Schwankungskomponente gelten. Im nahen Nachlauf des Zylinderstumpfes sind jedoch alle Raumrichtungen von den Schwankungen wenigstens in der gleichen Größenordnung betroffen. Bezogen auf die Turbulenz wird durch diesen Fakt deren vollständig dreidimensionale Ausprägung hervorgehoben.



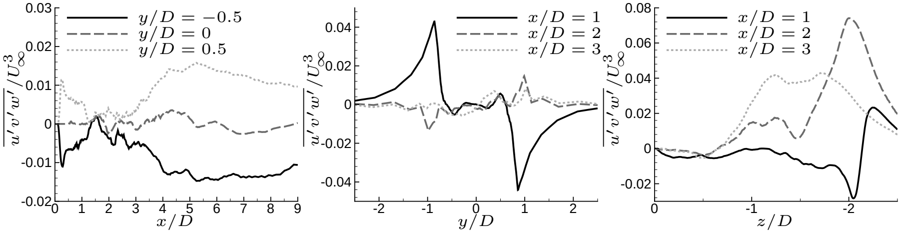
(a) $y/D = \mathrm{const.}, z/D = -0.5$ (b) $x/D = \mathrm{const.}, z/D = -0.5$ (c) $x/D = \mathrm{const.}, y/D = -0.5$

Abb. *7.32:* Reynolds-Spannungen $\overline{u_i' u_j'}/U_\infty^2$ entlang einzelner Linien des Nachlaufs

In der axialen Richtung x treten die Maximalwerte in der Symmetrieebene um $x/D = 3$ und außerhalb bei $y/D = \pm 0.5$ um etwa $x/D = 2.5$ auf. In diesem Bereich ist die trennende Scherschicht zwischen dem gekrümmten Rezirkulationsgebiet und dem direkt abströmenden

Fluid lokalisiert. Aufgrund der Symmetrie der gemittelten Hauptströmung sind die Schubspannungen in der Symmetrieebene wenig ausgeprägt, einzig die zugehörige planare Komponente $\overline{u'w'}$ ist hier relevant. Die laterale Richtung y in Abbildung 7.32 b offenbart deutlich herausragende Maximalwerte um $y/D = \pm 0.75$, wobei eine leichte Aufweitung dieser Maxima weiter stromab stattfindet. Der Vergleich mit Abbildung 7.13 zeigt, daß es sich wiederum um die Trennschicht handelt. Im vorderen Bereich des Nachlaufs findet ein starker Korrelations- bzw. Spannungsabfall zur Mitte und zu den Seiten statt. Weiter stromab laufen mindestens die Normalspannungen $\overline{v'v'}$ und $\overline{w'w'}$ mittig zusammen, während für die Korrelation $\overline{u'u'}$ getrennte Extrema erhalten bleiben. Die Ebene $x/D = 3$ in Abbildung 7.23 zeigt auf, daß es sich bei diesen Maximalwerten um den Übergang von der Außenströmung zu den Nachlaufwirbeln handelt. Die Auswertung vertikal bezüglich z in Abbildung 7.32 c läßt zum einen deutlich die Trennung zwischen Nachlaufgebiet und Außenströmung und zum anderen die Höhenabnahme des Nachlaufs stromab erkennen. Die Korrelation $\overline{u'u'}$ behält unterhalb der Außenströmung ein nahezu konstantes Niveau. Demgegenüber wird hier besonders die starke Zunahme von $\overline{v'v'}$ ersichtlich, die auch zwischen den Linien mit variierendem y/D sichtbar ist. Damit wird das mit zunehmender stromabwärtiger Position verstärkte seitliche Schwanken des Nachlaufes erfaßt. Zusätzlich werden die Schubspannungen $\overline{u'w'}$ mit Verlassen des Rezirkulationsgebietes, hier seitlich bei $y/D = -0.5$, stark auf fast null reduziert. Die einzige Erklärung dafür ist das korrelierte Schwanken lokaler Ebenen x-y bzw. y-z mit unterschiedlichen Frequenzen.

Die quantitative Darstellung der Tripelkorrelation $\overline{u'v'w'}$ entlang der gleichen Linien findet sich in Abbildung 7.33. Augenscheinlich lassen sich einige Strömungsregionen identifizieren, in denen nicht alle Schwankungsgrößen stark korreliert sind. In der Linie $\{y = 0,\ z/D = -0.5\}$ zum Beispiel sind die Schwankungen in x und z wohl miteinander korreliert, aber wenig mit denen in y. Auch in der Linie $\{x/D = 2,\ z/D = -0.5\}$ ist die Korrelation aller drei Schwankungskomponenten schwach, obwohl Schubspannungen klar ausgeprägt, aber gegenphasig orientiert sind (vgl. Abbildung 7.32). Darüber hinaus bekräftigen die Verläufe der Tripelkorrelation den Umstand, daß die stärksten Koppelungen aller Schwankungsgrößen am Rand des Rezirkulationsgebietes an der begrenzenden Scherschicht auftauchen. Auch wenn die Schwankungsgrößen innerhalb des Gebietes mal mehr und mal weniger miteinander korreliert sind, kann die beobachtbare Zunahme von $\overline{u'v'w'}$ zur trennenden Scherschicht als eine Art Synchronisation an bzw. durch diese interpretiert werden.



(a) $y/D = \mathrm{const.}, z/D = -0.5$ (b) $x/D = \mathrm{const.}, z/D = -0.5$ (c) $x/D = \mathrm{const.}, y/D = -0.5$

Abb. *7.33:* Tripelkorrelation $\overline{u'v'w'}/U_\infty^3$ entlang einzelner Linien des Nachlaufs

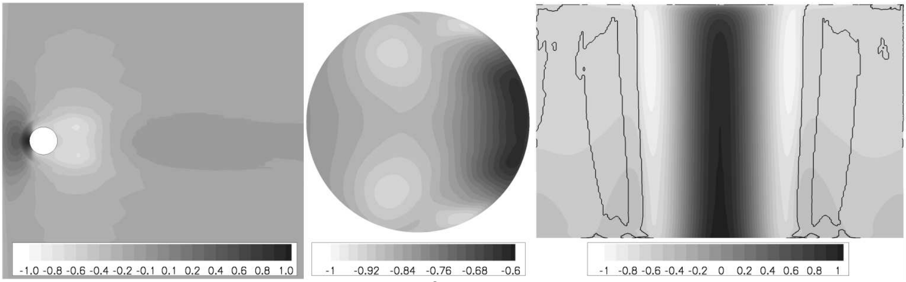
Zu den Korrelationen sei abschließend erwähnt, warum auf deren Normierung mit den Effektivwerten (Intensitäten) entsprechend (2.18) verzichtet wurde. Im dreidimensionalen Strömungsfeld existieren eine Reihe lokaler Punkte mit einzeln verschwindenden Intensitäten. Dies gilt nicht nur für die enthaltenen Wandflächen. Durch die feldweise Normierung entstünden entsprechend vielfältig Singularitäten, die einer Filterung oder Anpassung des Strömungsfeldes bedurft hätten. Um dadurch nicht Ergebnisse zu verfälschen, wurde einzig die Normierung mit den äußeren Größen U_∞ und D durchgeführt.

7.3.4 Oberflächenkräfte

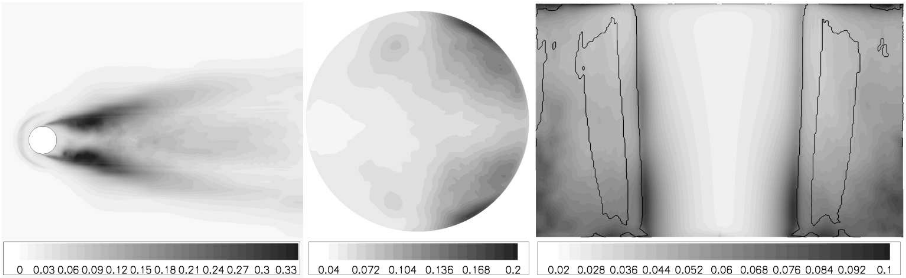
Die Wirkung des Strömungsfeldes auf die Oberfläche von Zylinder und Platte wird durch die dort angreifenden bzw. auftretenden Kräfte charakterisiert. Die Oberfläche, repräsentiert von allen festen Wänden, läßt sich zu diesem Zweck in mindestens drei Teilsegmente unterteilen: die Grundplatte, die Zylinderkappe und den Zylindermantel. Die Integration über alle Teilflächen führt auf die wichtigen integralen, typischerweise als Beiwerte angegebenen Widerstands-, Seiten- und Auftriebskräfte. Der zeitliche Verlauf der beiden wichtigsten Kräfte in Strömungsrichtung (Widerstand) und Querrichtung (Seitenkraft) ist bereits in Abbildung 7.10 dargestellt. Aufgrund der Symmetrie der Konfiguration ist der Mittelwert der Seitenkraft idealerweise null, während der Widerstand einen deutlich von null verschiedenen, positiven Wert (also in Strömungsrichtung) annimmt. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß die integrale Kraft in vertikaler Richtung (Auftrieb) einen ebenfalls deutlich von null verschiedenen, negativen Wert (nach oben) aufweist.

Die flächige Verteilung der zeitlich gemittelten Normalkräfte sowie deren mittlere Schwankungsgröße ist in Abbildung 7.34 getrennt nach den einzelnen Teilflächen visualisiert. Die charakteristischen Elemente in der Druckverteilung sind Aufstaugebiete, gekennzeichnet durch relativ stark erhöhten Druck, und Sauggebiete mit erniedrigtem Druck. Der Aufstau der Anströmung vor dem Zylinder ist auf der Platte und dem Zylindermantel sichtbar. Hier steigt der Druckbeiwert auf 1. Abfall von diesem Druckniveau bedeutet Strömungsbeschleunigung, was obligatorisch in Umfangsrichtung auftritt und auch im oberen Bereich des Zylindermantels erkennbar ist, wo die Strömung infolge des geringeren Druckes in Richtung des freien Endes gezogen wird. Auch das Wiederanlegen auf der Grundplatte und der Zylinderkappe wird durch Gebiete erhöhten Druckes abgebildet.

Am Zylindermantel findet sich kurz vor der Ablöselinie ($\overline{c_f} = 0$) die größte Saugspitze mit Werten nahe $\overline{c_p} = -1$ im oberen Bereich und leicht größeren Werten im unteren Bereich. Die ansteigenden Werte zum Fuß des Zylinders erklären sich durch das Wiederanlegen des rezirkulierenden Fluides auf der unteren Rückseite des Zylinders – erkennbar am erhöhten Druck. Aus dem gleichen Grund steigt im primär abgelösten Bereich die Druckverteilung über die Höhe leicht an. Letztlich sind die Fußabdrücke der bereits beschriebenen, gemittelten Wirbelstrukturen deutlich auf Grundplatte und Zylinderkappe an den lokalen Druckminima zu erkennen.



(a) $\overline{c_p} = 2\,\overline{p - p_\infty}/\varrho U_\infty^2$ (Mantel mit Isolinie $\overline{c_f} = 0$)



(b) $\overline{c_p'} = \sqrt{\overline{(c_p - \overline{c_p})^2}}$ (Mantel mit Isolinie $\overline{c_f} = 0$)

***Abb.** 7.34:* Gemittelte Druckverteilung und RMS-Wert der Druckfluktuation auf der Grundplatte, dem Zylinderkopf und dem abgewickelten Zylindermantel

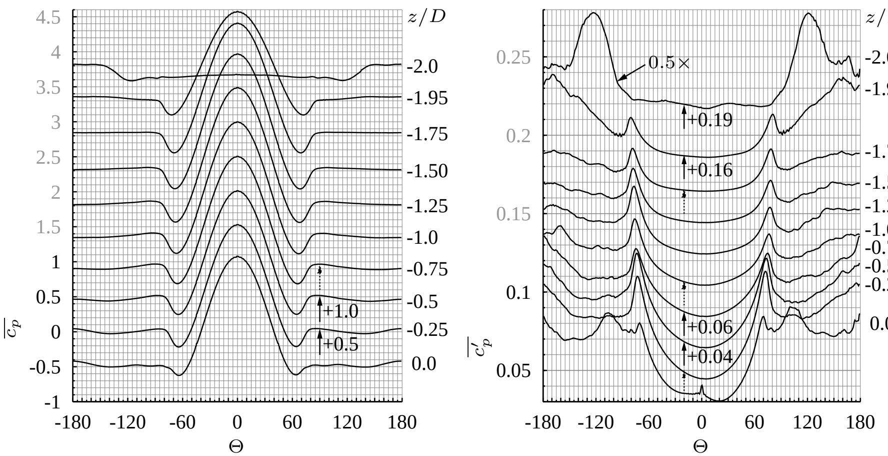


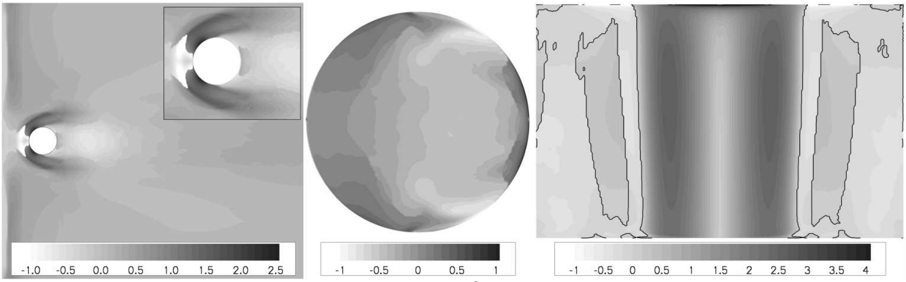
***Abb.** 7.35:* Gemittelter Druckbeiwert und RMS-Wert für verschiedene Höhenlinien auf dem abgewickelten Zylindermantel (Graphen zur Übersichtlichkeit vertikal verschoben)

Die stärksten Druckschwankungen sind unbedingt an die größten Strömungsschwankungen gekoppelt. Deshalb sind bei anliegender Strömung fast keine Schwankungen vorhanden. Das diese dennoch ungleich null sind, basiert auf der rückwärtigen Wirkung der dominanten Nachlaufschwankungen, welche auch die Strömung stromauf des Zylinders beeinflussen. Bereiche mit starken Schwankungen finden sich vorrangig überall dort, wo die primäre Ablösung und die nachfolgende dominante Schwankungsbewegung von Scherschicht und Turbulenzpaketen ihre Wirkung hinterläßt. Dazu gehören auch die Einflußgebiete der seitlichen Kopfwirbel an Zylinderkappe und -mantel. Um den lokalen Verlauf vor allem am Zylindermantel stärker quantitativ hervorzuheben, sind in Abbildung 7.35 der mittlere Druckbeiwert und die zugehörige Schwankung für verschiedene Höhenlinien aufgetragen.

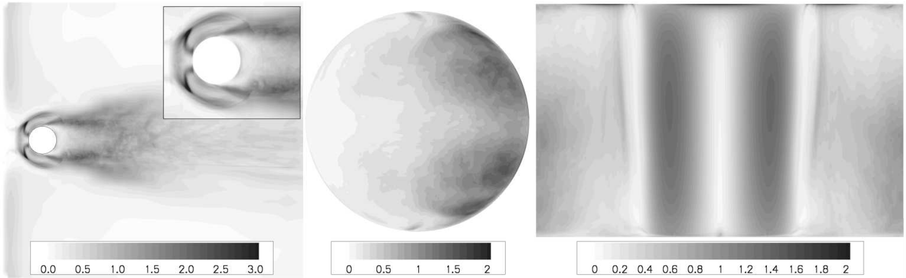
Während die mittlere Druckverteilung genauso wie das mittlere Strömungsfeld im Verlauf der Simulation berechnet wurden (Abschnitt 4.7), ist dies mit den Druckschwankungen und den nachfolgenden Tangentialkräften nicht erfolgt. Diese sind nachträglich aus $4\,480$ Datensätzen instantaner Wandgrößen als Ensemble-Mittelwert berechnet worden. Weil die vorhandenen Datensätze einen Simulationszeitraum von über 130 konvektiven Einheiten D/U_∞ abdecken, sind Abweichungen zwischen den beiden unterschiedlich bestimmten Mittelwerten für die Druckverteilung kaum erfaßbar. Aus dem gleichen Grund werden die angegebenen Mittelwerte für Druckschwankung und Tangentialkräfte als konvergiert betrachtet.

In Abbildung 7.36 ist der Betrag der tangentialen Wandkräfte in Form des Reibungsbeiwertes flächig angegeben. Die Richtung des Wandschubspannungsvektors geht bereits aus den zugehörigen LIC-Darstellungen in Abbildung 7.22 a, Abbildung 7.14 und Abbildung 7.12 hervor. Aufgrund der Bestimmungsmethode der Tangentialkräfte sind die Richtung des wandnächsten Geschwindigkeitsfeldes und der Wandschubspannungsvektoren numerisch identisch. Für die Darstellung des Reibungsbeiwertes $\overline{c_f}$ wird die von ACHENBACH (1968) verwendete Berechnung $\mathrm{sgn}(u)\sqrt{\mathrm{Re}_D}\,|\overline{\tau_w}|/\varrho U_\infty^2$ benutzt, die sich direkt aus der Grenzschichttheorie ableiten läßt. Diese erlaubt den Vergleich zwischen verschiedenen Reynolds-Zahlen und durch das Vorzeichen der lokalen Strömung die Detektion von Ablösung.

Aufgrund der gemittelten Darstellung finden sich die größten Reibungsbeiwerte bei anliegender (laminarer) Strömung in der Mantelregion vor der primären Ablösung und im Bereich des Hufeisenwirbels auf der Platte. Auch auf der Zylinderkappe sind Strömungsgebiete mit im Mittel anliegender, impulsreicher Strömung im vorderen Bereich und nahe der Hinterkante zu erkennen. Gebiete negativer Reibungsbeiwerte kennzeichnen Rückströmungen, die beispielsweise im Zylindernachlauf, auf der Zylinderkappe sowie dem Zylindermantel auftreten. Aus der anliegenden Rückströmung auf der Rückseite des Zylindermantels bildet sich zudem noch eine sekundäre Ablösung, die bereits in Abbildung 7.19 charakterisiert wurde. Die direkt stromauf des Zylinders erkennbare Rückströmung im Bereich des Hufeisenwirbels resultiert aus einer laminaren Ablösung am Transitionsdraht. Aufgrund der Nähe des Einströmrandes kann die LES nicht genügend Schwankungen produzieren, um die gewünschte Transitionswirkung der Plattengrenzschicht zu erzielen, und es bildet sich eine lang gestreckte Art laminarer Ablöseblase. Durch die gewünschte, geringe Grenzschichtdicke und die Dominanz der Zylinderumströmung hat dieses Modellierungsdefizit keinen entscheidenden Einfluß auf die weitere Strömung.



(a) $\overline{c_f} = \mathrm{sgn}(u)\sqrt{\mathrm{Re}_D}\,|\overline{\tau_w}|/\varrho U_\infty^2$ (Mantel mit Isolinie $\overline{c_f} = 0$)



(b) $\overline{c_f'} = \sqrt{\overline{(c_f - \overline{c_f})^2}}$

Abb. *7.36:* Gemittelter Reibungsbeiwert und RMS-Wert der zugehörigen Fluktuation

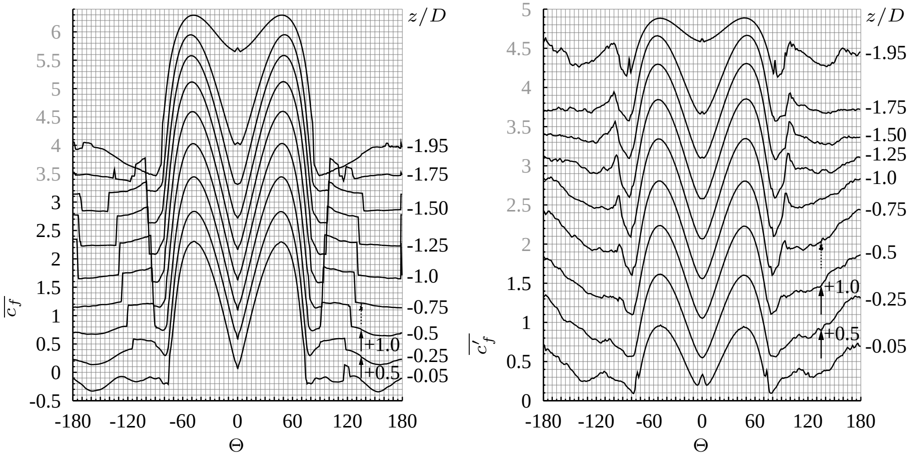


Abb. *7.37:* Gemittelter Reibungsbeiwert und RMS-Wert für verschiedene Höhenlinien auf dem abgewickelten Zylindermantel (Graphen zur Übersichtlichkeit vertikal verschoben)

Große mittlere Fluktuationen der Wandschubspannungen sind ein Indiz für ein stark zeitlich (nicht nur turbulent) schwankendes, wandnahes Geschwindigkeitsfeld. Solche Bereiche finden sich vor allem im voll turbulenten Nachlauf des Zylinders und der turbulenten Überströmung. Aber auch im anliegenden Bereich des vorderen Zylindermantels schwankt das Geschwindigkeitsfeld periodisch infolge der Rückwirkung des oszillierenden Nachlaufs stromauf. Interessanterweise sind gerade die Fluktuationen hinter der primären seitlichen Ablösung besonders klein. Dies ist gleichbedeutend mit einer relativ fixierten Lage dieser Ablösung.

Für den Zylindermantel sind in Abbildung 7.37 wiederum die lokalen Verteilungen verschiedener Höhenlinien für mittleren Reibungsbeiwert und mittlere Fluktuation aufgetragen. Durch die Definition von $\overline{c_f}$ sind primäre und sekundäre Strömungsphänomene deutlich hervorgehoben. Zusätzlich erkennbar ist, daß im Gebiet des sekundären Wiederanlegens hinter der primären Ablösung auch relativ große Schwankungen vorliegen. Diese werden vermutlich durch den Einfluß der periodischen Vorgänge hervorgerufen.

Die Dominanz der Druckkräfte über die Reibungskräfte (Tangentialkräfte) und damit auch der zugehörigen Widerstandsanteile wird in Abbildung 7.38 plakativ. Die flächig verteilten Reibungskräfte sind fast überall mindestens zwei Größenordnungen kleiner als die Druckkräfte. Durch das gewählte Verhältnis wird dieses nur dann etwas größer, wenn die Druckkräfte sehr nahe null sind. Das gleiche Ergebnis findet sich auch in den integralen Kräften. So entsprechen die integralen Reibungskräfte etwa 1.24% der Druckkräfte, wobei dies fast identisch auch für die Teilflächen Mantel, Deckel und Platte gilt. Auch die Daten von ACHENBACH (1968) zeigen für die vorliegende Reynolds-Zahl ein Verhältnis der gleichen Größenordnung. Bezogen auf das Strömungsfeld bedeutet dies, es ist nicht nur essentiell, die wandnahe Strömung gut zu simulieren, sondern vor allem den turbulenten Nachlauf und dessen Rückwirkung auf die Oberfläche über den Druck korrekt zu erfassen.

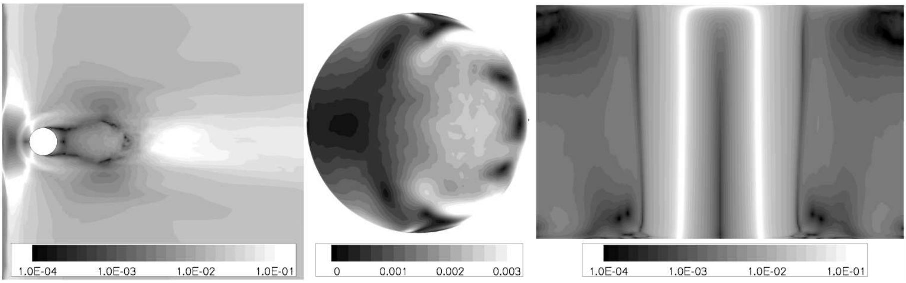


Abb. *7.38:* Lokales Verhältnis von Reibungs- zu Druckkräften $|\overline{\tau_w}| \,/\, |\overline{p - p_\infty}|$

7.3.5 Frequenzen und Spektren

Für die spektrale Analyse von Zeitschrieben stehen unterschiedliche Signalarten für verschieden lange Zeitintervalle zur Verfügung. Die integralen Kraftbeiwerte sind in jedem Zeitschritt $\Delta t = 0.005 D/U_\infty$ aufgezeichnet worden, wovon die letzten 30 000 Einträge benutzt wurden. Die Beobachtung lokaler Strömungsgrößen wie Druck und Geschwindigkeit in ausgewählten

Monitorpunkten wurde erst zu einem späteren Zeitpunkt der Simulation gestartet, so daß die Signallänge hier $23\,200\Delta t$ ist. Weitere lokale Signale wurden aus der Datenbasis instantaner Strömungsdaten nachträglich rekonstruiert. Die Länge für die so erzeugten Zeitschriebe beträgt $2\,744 \cdot (5\Delta t)$. Bei der Darstellung in unten stehenden Spektren sind die beiden redundanten lokalen Signale aus unterschiedlich langen Zeitschrieben teilweise überlagert bzw. die kürzeren Zeitschriebe mittels unterbrochener Linien gezeichnet (vgl. z. B. Abbildung 7.39). Der Vergleich zeigt, daß bestehende Abweichungen den Trend nur wenig verfälschen.

Allgemein existiert für jede der drei Raumrichtungen ein gesondertes Spektrum, welche sich bei nicht isotroper Turbulenz gewöhnlich deutlich unterscheiden. Deshalb wird im Weiteren häufig das Drucksignal für die spektrale Analyse benutzt, weil der Druck die Informationen aller Geschwindigkeitskomponenten in natürlich geglätteter und skalarer Form enthält. Dieser Zusammenhang ist in der Druck-Poisson-Gleichung formuliert (siehe z. B. FERZIGER & PERIĆ, 1999, oder Abschnitt 7.6.3). In Abbildung 7.39 sind die Frequenzspektren von Druck- und Geschwindigkeitssignalen eines Punktes im Nachlauf vergleichend aufgetragen. Obwohl die einzelnen Geschwindigkeitsspektren unterschiedliche Details aufweisen, sind die dominanten Spitzen in einer Art Filterung bezüglich globalen Verhaltens im glatteren Spektrum des Druckes enthalten. Diese Art der Reduktion und Glättung der spektralen Information ist besonders wichtig bei breiten Spektren mit schwach ausgeprägten Einzelspitzen. Die in Abbildung 7.39 gewählte typische, logarithmische Darstellung der spektralen Leistungsdichte (SLD) mittels Dezibel ist wenig aussagekräftig für die Identifikation beteiligter spektraler Komponenten, so daß im Folgenden darauf verzichtet wird. Aufgrund der relativ kurzen Signallängen wird auch von der Verwendung gemittelter Spektren abgesehen.

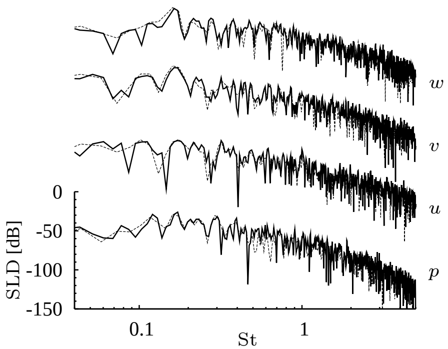
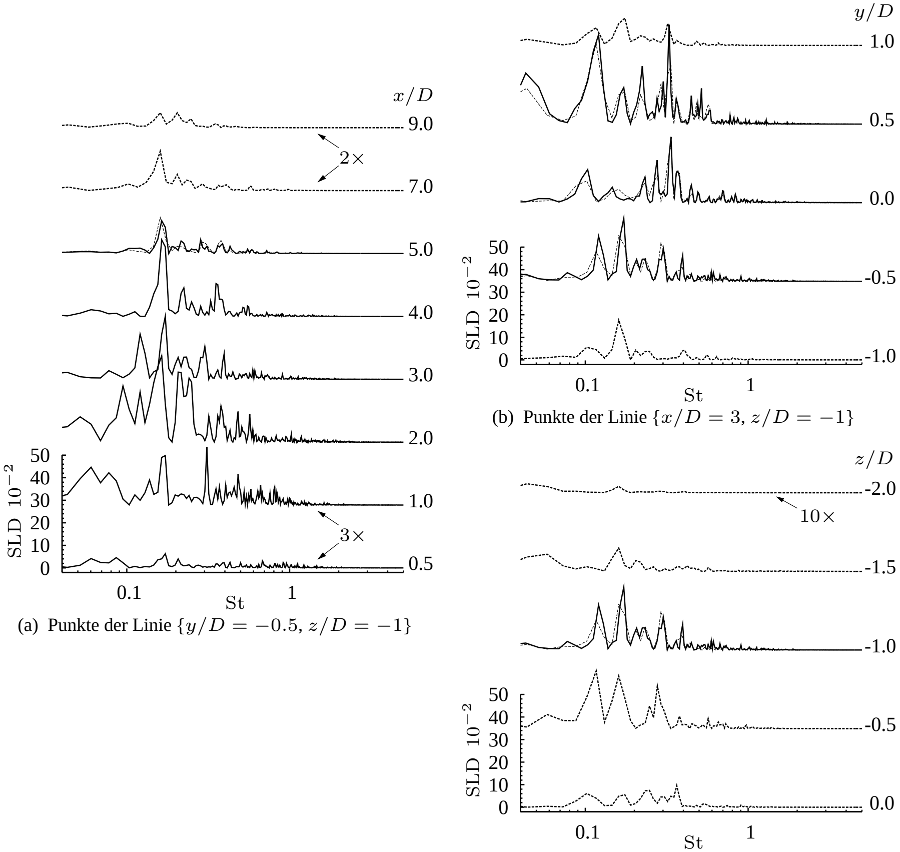


***Abb.** 7.39:* Frequenzspektren von Druck- und Geschwindigkeitssignalen im Nachlauf für den Punkt $\{x/D = 3, y/D = -0.5, z/D = -1\}$

Die Frequenzanalysen von Drucksignalen im Nachlauf mit Variation aller Raumrichtungen sind in Abbildung 7.40 präsentiert. Die aufgezeichneten Signale entlang der Linie $\{y/D = -0.5, z/D = -1\}$ sind für die Positionen $x/D = 1, 2...5$ in Abbildung 7.9 aufgetragen. Der Zeitschritt der Signale erlaubt bei Berücksichtigung des Nyquist-Kriteriums[42] die Erfassung von

[42]Gemeint ist das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem, nachdem zwei Punkte pro Wellenlänge notwendig sind, um aus dem abgetasteten Signal das Ursprungssignal nahezu ohne Informationsverlust rekonstruieren zu können.

Frequenzen bis zu $\mathrm{St} = 100$ bzw. 20. Die gesamten relevanten Frequenzen sind für den Nachlauf unterhalb von $\mathrm{St} = 1$ zu beobachten, womit aus der zeitlichen Auflösung von LES zumindest hier kein unmittelbarer Nutzen gezogen werden kann.



(a) Punkte der Linie $\{y/D = -0.5, z/D = -1\}$

(b) Punkte der Linie $\{x/D = 3, z/D = -1\}$

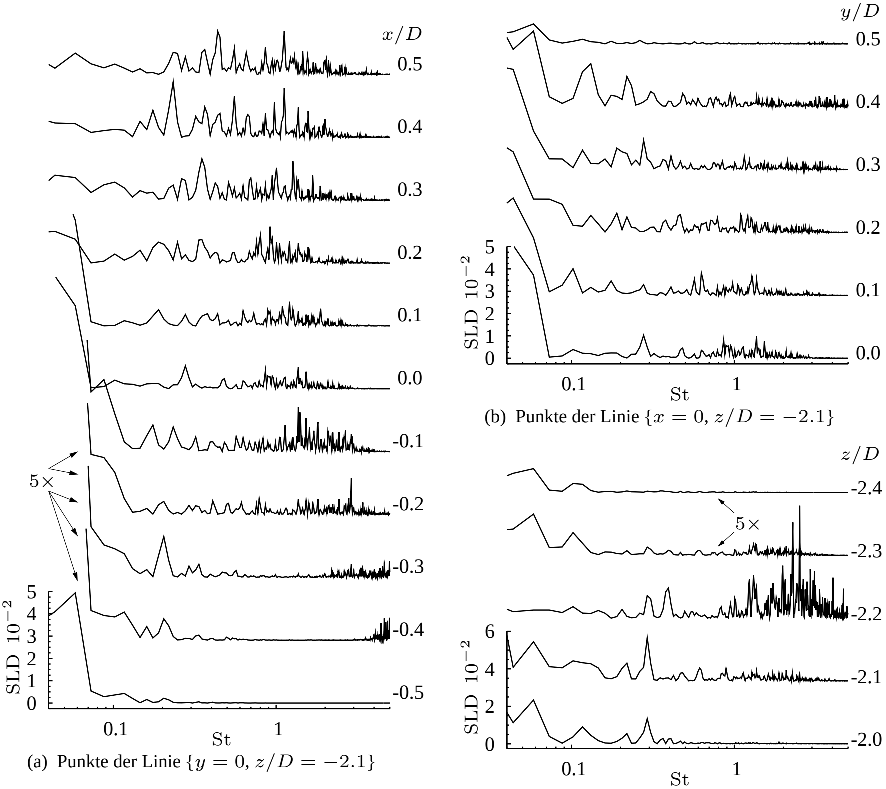
(c) Punkte der Linie $\{x/D = 3, y/D = -0.5\}$

Abb. *7.40:* Frequenzspektren von Drucksignalen in Punkten des Nachlaufs

Eine Frequenz, die sich einzig in allen Spektren identifizieren läßt und entsprechend die dominante Harmonik ist, findet sich bei etwa $\mathrm{St} = 0.165$. Aufgrund der bereits diskutierten, topologischen Untersuchungen handelt es sich dabei um eine Art Wirbelstraße aus der seitlichen Ablösung stark beeinflußt durch die Kopfüberströmung. Im näheren Nachlauf des Rezirkulationsgebietes findet sich zudem ein Bereich mit niedrigeren Frequenzen, von denen etwa $\mathrm{St} = 0.115$ herausragt. Nach den Literaturangaben von PARK & LEE (2002) handelt es sich dabei um periodische Phänomene im Zusammenhang mit den Kopfwirbeln. Nach BABAN & SO (1991) oszilliert das Rezirkulationsgebiet aufgrund instationärer Kopfablösung dann als Ganzes (mit dieser Frequenz). Weiterhin lassen sich nahe des Zylinders weitere spektrale Komponenten bei $0.20 - 0.22$ sowie etwa bei der ersten harmonischen Frequenz 0.32 identifizieren. Eine

Zuordnung zur Physik kann an dieser Stelle noch nicht gelingen. Generell ist festzustellen, daß die wichtigen Frequenzen vom Betrag sehr ähnlich sind und es daher außerordentlich schwierig ist, zwischen Einzelfrequenzen bzw. einem einzelnen Frequenzband zu unterscheiden. Zusätzlich erschwert wird dies durch die relativ geringe Auflösung der Spektren infolge endlicher Zeitschriebe.

Neben dem Nachlauf stellt der abgelöste Bereich auf der Zylinderkappe die zweite wichtige Region für die Entstehung spektraler Komponenten dar. Abbildung 7.41 zeigt deshalb Frequenzspektren oberhalb des Zylinders, wiederum mit Variation aller Raumrichtungen. Im Vergleich zu Abbildung 7.40 fallen zumindest zwei wichtige Aspekte auf. Die Amplituden sind aufgrund breiterer spektraler Beteiligung deutlich geringer als im Nachlauf, und es existieren eine Reihe von Komponenten bis zu $\mathrm{St} = 5$.



(a) Punkte der Linie $\{y = 0, z/D = -2.1\}$

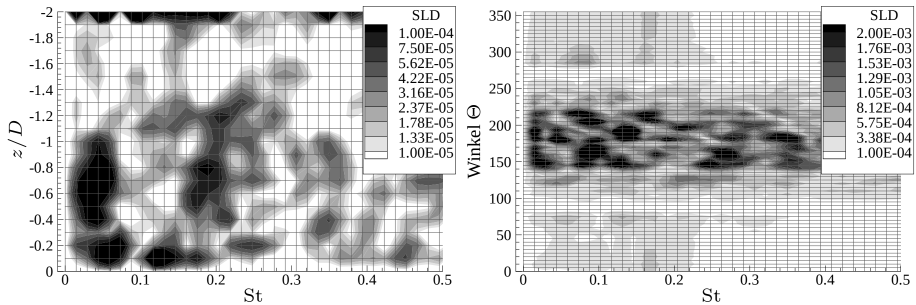
(b) Punkte der Linie $\{x = 0, z/D = -2.1\}$

(c) Punkte der Linie $\{x = 0, y/D = -0.2\}$

Abb. *7.41:* Frequenzspektren von Drucksignalen in Punkten oberhalb des Zylinders

Über der vorderen Zylinderkappe existieren prominente, spektrale Spitzen um $\mathrm{St} = 0.2$ sowie offenbar auch bei sehr kleinen Strouhal-Zahlen. Letztere können aufgrund der Zeitschrieblänge allerdings nicht adäquat aufgelöst werden. HAIN *et al.* (2008) detektieren in diesem Gebiet eine wichtige Frequenzkomponente bei $\mathrm{St} = 0.0136$, die sie mit dem Auf und Nieder der abgelösten Scherschicht assoziieren. Die nicht ausreichend aufgelösten niederfrequenten Anteile beschreiben das gleiche physikalische Phänomen. Im hinteren Bereich der Zylinderkappe wird ein breites Band des Spektrums aktiviert. Die ausgeprägtesten Spitzen finden sich um die Werte 0.055, 0.22, 0.30, 0.35, 0.42 und 1.1. Die letztere hohe Frequenz hängt mit Instabilitäten und anschließender Wirbelbildung in der begrenzenden Scherschicht zusammen. Dies wird besonders deutlich im Punkt $\{x = 0, y/D = -0.2, z/D = -2.2\}$, der sich direkt in dieser Scherschicht befindet und dominante Turbulenzentstehungsphänomene (z. B. freie Transition) um $\mathrm{St} = 1.1$ und vor allem 2.5 erfährt. Die Zuordnung der niedrigeren Frequenzen bezüglich periodischer Wirbelbildung und / oder nichtlinearer Interaktion soll im Abschnitt 7.6 zu erreichen versucht werden.

Da die statistische Analyse nicht erlaubt, weitere Frequenzen mit bisher unbekannten Phänomenen in Verbindung zu bringen, werden in diesem Abschnitt im Weiteren nur die bekannten Phänomene noch etwas genauer beleuchtet. So ist die im Nachlauf des Zylinders etablierte Wirbelstraße gekennzeichnet durch laterale Schwankungsbewegungen. Deshalb ist deren Entstehung am Zylinder auf Basis der zugehörigen Geschwindigkeitskomponente v in Abbildung 7.42 für zwei Linien am Mantel spektral analysiert. In der vertikalen Linie bei $120°$ finden sich vor allem Komponenten bei $\mathrm{St} = 0.04 - 0.06$ und $0.18 - 0.20$ im unteren Zylinderbereich. Das erste Frequenzband hängt sehr wahrscheinlich mit dem auf der Rückseite des Zylinders wiederanlegenden Rezirkulationsgebiet zusammen. Das zweite, relativ schmale Band hat die gleiche Frequenz wie der Wirbelabwurf eines quasi zweidimensionalen Zylinders (ZDRAVKOVICH, 1997). Die Ausdehnung des Bandes bis etwa zwei Drittel der Zylinderhöhe läßt an dieser Stelle nur den Schluß zu, daß dort eine eingebettete Region nahezu ungestörter zweidimensionaler Wirbelformation nahe am Zylinder existiert. Interessant ist dabei besonders, daß das Frequenzband um $\mathrm{St} = 0.16$ hier nur wenig bedient wird. Dies ist im Umkehrschluß ein Merkmal der überlagerten Umströmung von Zylindermantel und -kappe. Eine zeitliche Variation im Sinne der Verschiebung zwischen beiden Frequenzen ist aber nicht ausgeschlossen.



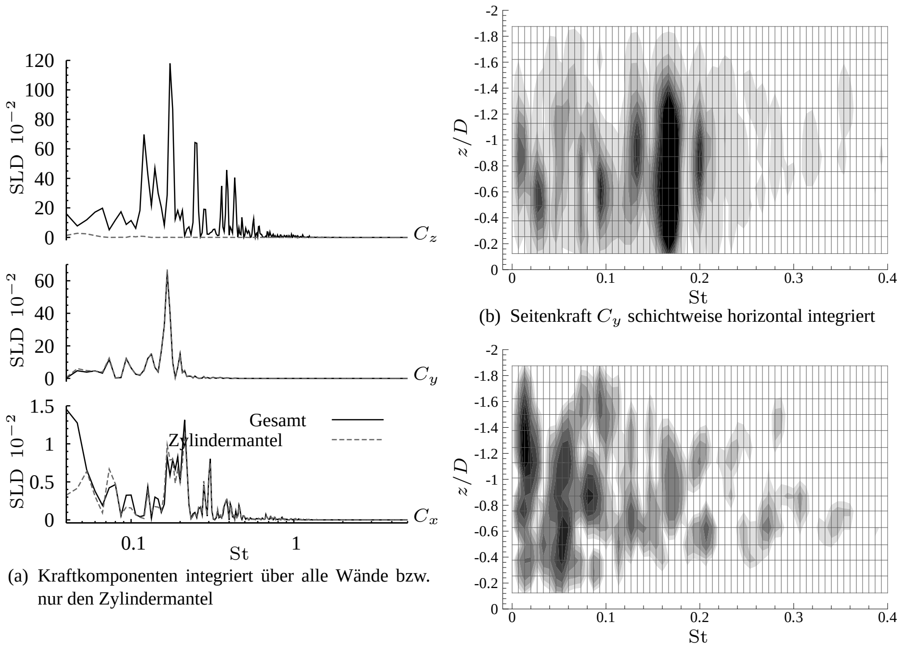
(a) Linie $\Theta = 120°$ (b) Linie $z/D = -1$

***Abb.** 7.42:* Frequenzspektren der Geschwindigkeit v in Linien des Zylindermantels (erste Gitterlinie über der Wand)

In Umfangsrichtung bei $z/D = -1$ existiert ein breiter Streifen verschiedenster Frequenzen zwischen 140 und $220°$. Der Nachlauf ist in diesem Bereich geprägt von geringen mittleren

Geschwindigkeiten und starken Schwankungen, was gleichbedeutend mit einem indifferenten Zustand ist. Eine relativ deutlich ausgeprägte Frequenzlinie findet sich um 0.1 und hängt mutmaßlich wieder mit der Oszillation des Rezirkulationsgebietes als Ganzes zusammen. Auf der Vorderseite des Zylinders ist die dominante Frequenz bei 0.165 präsent.

Die Zeitschriebe der integralen Kraftbeiwerte stellen die längsten Signale für die Frequenzanalyse dar. Ihr zeitlicher Verlauf ist für die wichtigsten Komponenten bereits in Abbildung 7.10 gezeigt. Wie in Abbildung 7.43 erkennbar, sind infolge der integralen Betrachtung vor allem hochfrequente Anteile im Spektrum nicht vorhanden. Weiterhin ist die Auftriebskomponente C_z für den Zylinder offenbar nicht relevant. Dennoch sticht in allen Raumrichtungen die dominante Frequenz der Gesamtkonfiguration um 0.165 deutlich hervor. Weitere Komponenten in den einzelnen Kraftbeiwerten bestehen bei 0.11, 0.2, 0.3 aber auch um 0.4. Besonders die Seitenkraft C_y beinhaltet ebenfalls wieder Anteile bei 0.2. Das Verständnis der anderen Frequenzen wird Aufgabe der zeitabhängigen Strömungsanalyse sein.



(a) Kraftkomponenten integriert über alle Wände bzw. nur den Zylindermantel

(b) Seitenkraft C_y schichtweise horizontal integriert

(c) Widerstand C_x schichtweise horizontal integriert

***Abb.** 7.43:* Frequenzspektren integraler Kraftbeiwerte

Mit Hilfe der im Abschnitt 4.1 beschriebenen Wavelet-Transformation kann überprüft werden, wie variabel das Frequenzspektrum im zeitlichen Verlauf ist. Dies sei hier bei der statistischen Analyse vorweg genommen, um zu verdeutlichen, daß auch die bereits diskutierten Spektren ein Art Mittelwert darstellen. Zu diesem Zweck ist in Abbildung 7.44 das Skalogramm für den global integrierten Seitenkraftbeiwert C_y dargestellt. Es ist unmittelbar nachvollziehbar, daß verschiedenste Frequenzbänder existieren. Allerdings zeigt sich ebenfalls zeitweises Verschwinden einzelner Frequenzanteile bzw. deren Mäandern. Die dominante Frequenz $\mathrm{St} \approx 0.165$ stellt einen Mittelwert über den betrachteten Zeithorizont dar und bricht, abgesehen vom Anfahrvorgang der Simulation, am Ende des Signals offenbar kurzzeitig zusammen. Auf diesen Aspekt wird zu einem späteren Zeitpunkt erneut eingegangen. Bemerkenswerterweise verbleiben andere Frequenzbänder, wie z. B. 0.2 relativ unbehelligt im zeitlichen Verlauf.

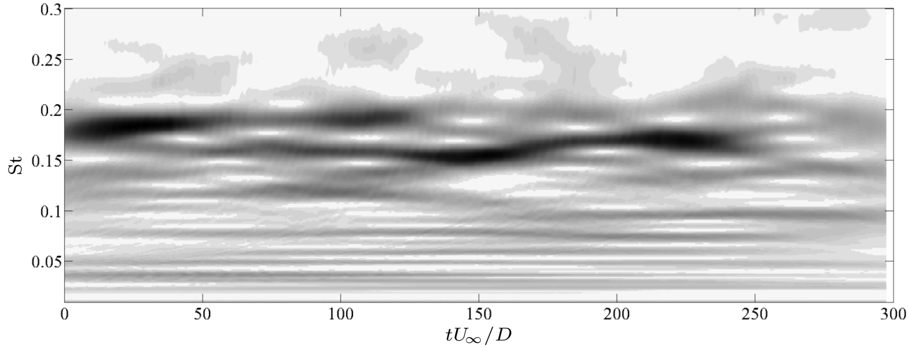
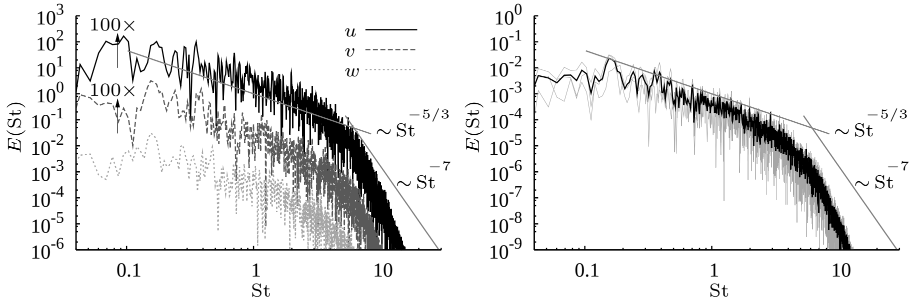


***Abb.** 7.44:* Skalogramm der Wavelet-Transformation für die globale Seitenkraft C_y (CWT mit dem Morlet-Wavelet und $f_c = 0.8$, $f_b = 40$)



(a) Einzelkomponenten der Geschwindigkeit

(b) gemittelt über die Raumrichtungen

***Abb.** 7.45:* Spektren des Zerfalls turbulenter kinetischer Energie bezogen auf die Strouhal-Zahl im Punkt $\{x/D = 2,\, y/D = -0.5,\, z/D = -1\}$

Die Energiekaskade und das Energiespektrum bilden eine Grundvorstellung für die Beschreibung turbulenter Strömungen (vgl. Abschnitt 2.2). Die LES als hochauflösendes Simulationsverfahren ist prinzipiell in der Lage, den größten Teil der turbulenten kinetischen Energie, nämlich für die turbulenten Skalen oberhalb der Filterweite, zu erfassen. In Abbildung 7.45 ist zur Überprüfung das Energiespektrum für alle drei Geschwindigkeitskomponenten in einem Punkt des turbulenten Nachlaufes ausgewertet. Zu Vergleichszwecken sind ebenfalls die theoretisch geltenden, linearen Abfallkurven im Trägheits- und Dissipationsbereich des Spektrums eingetragen. Das dargestellte Simulationsergebnis entspricht einer adäquat aufgelösten LES, welche den Abfall im Trägheitsbereich korrekt erfaßt. Mit der Wahl der Filterweite nahe des Dissipationsbereiches beginnt auch erst dort der für LES typische, übermäßig starke Abfall des Spektrums im Dissipationsbereich. Wegen der Verwendung eines Gitterfilters im physikalischen Raum liegt kein spektrales Abschneiden vor. Die gemachten Aussagen gelten für alle Raumrichtungen sowie für deren Mittelwert.

7.3.6 Eigenschaften beobachteter Turbulenz

Mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (WDV) läßt sich verdeutlichen, in welchem Amplitudenbereich sich der Verlauf der betrachteten Strömungsgröße an einem Punkt bewegt. Zusätzlich enthält diese Informationen über die Wahrscheinlichkeit eines jeden Betrages der Geschwindigkeitskomponente im zeitlichen Verlauf (vgl. z. B. DURST, 2006).

Wegen der geringen Länge der verfügbaren lokalen Zeitsignale lassen sich für die vorliegende Datenbasis keine ausreichend glatten Verteilungen berechnen. Auch die Mittelung der Einzelverteilungen über mehrere Punkte schafft hier kaum Abhilfe. Dennoch sind in Abbildung 7.46 zumindest einige beispielhafte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen aufgetragen. Die Verteilungen sind über jeweils fünf Punkte in Strömungsrichtung gemittelt und repräsentieren mittlere Verteilungen um die Hauptströmung bei fester lateraler Position.

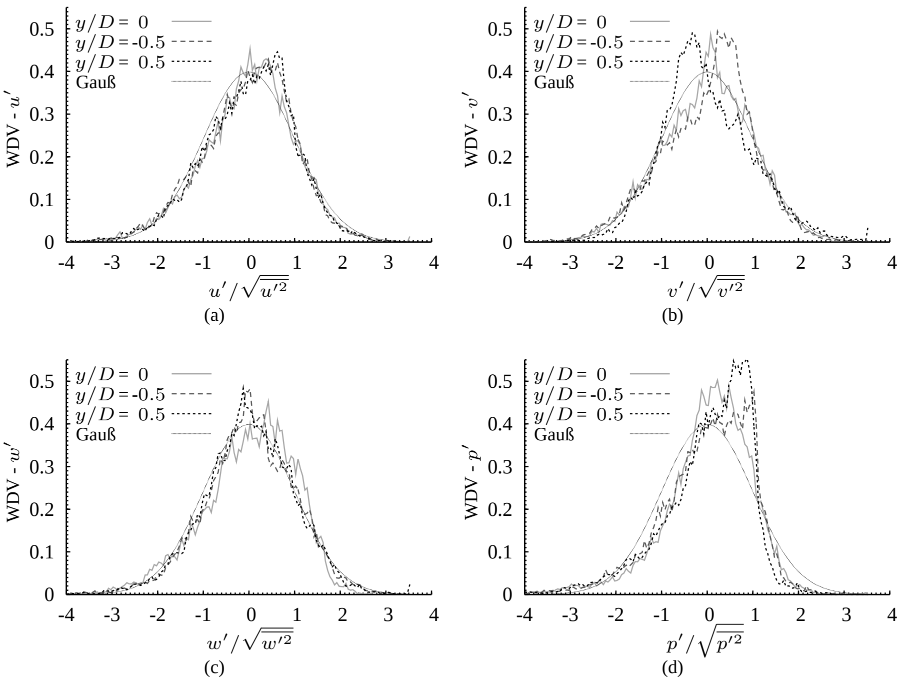


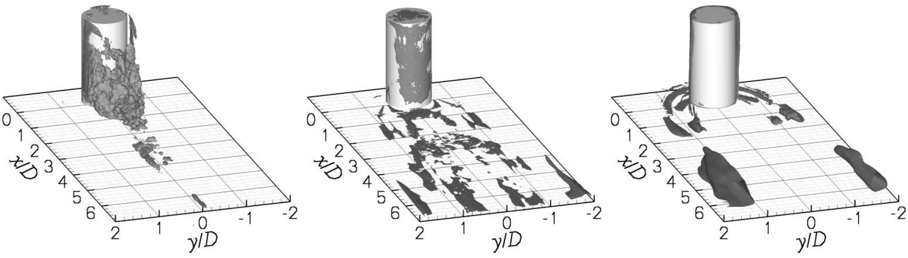
Abb. 7.46: Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (WDV) lokaler Signale bei $z/D = -1$ (jede WDV gemittelt für die Punkte bei $x/D = 1, 2, 3, 4, 5$)

Bei der Geschwindigkeitsschwankung in Strömungsrichtung u' ist die Abweichung zur Gaußschen Normalverteilung relativ gering. Trotzdem ist erkennbar, daß Schwankungen in positive Längsrichtung (also Strömungsrichtung) häufiger auftreten bzw. wahrscheinlicher sind. Besonders bei kleineren Schwankungsbeträgen und außermittiger lateraler Position ist diese Tendenz ausgeprägt. Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der lateralen Schwankungsgröße v' zeigen außerhalb der Symmetrieebene eine sehr deutlich einseitige Ausrichtung. In Folge periodischer Phänomene wäre jedoch eher eine symmetrische Verteilung zu erwarten. Schwankungen in Richtung der Symmetrieebene sind hier wahrscheinlicher, weil auf der untersuchten Höhenlinie fast durchgängig Bewegung zur Strömungsmitte hin stattfindet. Dies gilt sowohl im Bereich des Rezirkulationsgebietes ($x/D = 1, 2$) als auch im Bereich der Nachlaufwirbel ($x/D = 4, 5$). Die Verteilung für die vertikale Geschwindigkeitskomponente w' fügt sich ebenfalls konsistent in das Bild, daß Schwankungen in Richtung der mittleren Strömung wahrscheinlicher sind. Während auf den lateral außermittigen Positionen die Schwankungen nahezu normal verteilt sind, findet sich mittig eine einseitige Ausrichtung zu positiven Schwankungen. Im zentralen Nachlauf existieren durchweg Bewegungen in Richtung Platte (in positive z-Richtung) und außerhalb durchgängig Aufwärtsbewegungen. Die gewählten lateralen Linien $y/D = \pm 0.5$ befinden sich dabei sehr nahe der Isofläche $\overline{w} = 0$.

Die WDV von Druckschwankungen stellt deutliche Abweichungen zur Normalverteilung heraus. Die durchgehend unsymmetrische Ausrichtung weist erhöhte Wahrscheinlichkeiten für positive Schwankungen aber mögliche größere Beträge bei den negativen Schwankungen auf.

Die richtungsabhängigen Eigenschaften der gemittelten Geschwindigkeitsschwankungen im Raum sind teilweise im Tensor der Reynolds-Spannungen enthalten. Wie im Anhang A.2 erläutert, können die Invarianten des daraus abgeleiteten Anisotropietensors benutzt werden, um den lokalen Spannungszustand hinsichtlich seiner räumlichen Struktur zu charakterisieren. Die Randkurven und Eckpunkte der Anisotropiekarte repräsentieren dabei Strömungszustände mit im Mittel extremalen Aniso- bzw. Isotropieeigenschaften. Zur diesbezüglichen Analyse des untersuchten Strömungsfeldes sind in Abbildung 7.47 alle Strömungsgebiete nahe räumlicher Isotropie der turbulenten Schwankungen ($-\mathrm{II}_b < 0.01$), nahe zweidimensionaler isotroper Schwankungen ($\mathrm{III}_b < -0.0075$) und mit einer dominierenden Einzelschwankung ($\mathrm{III}_b > 0.02$) visualisiert.

Im statistischen Sinne richtungsunabhängige, turbulente Schwankungen treten nur im abgelösten Nachlauf, hauptsächlich im unteren Rezirkulationsgebiet auf, wo die lokale Strömung aufgrund vorherrschender geringer Geschwindigkeitsbeträge anfällig gegenüber Störungen ist. Die zweidimensionalen bzw. planaren, isotropen Schwankungen finden sich einzig im turbulenten Wandbereich des Zylinders und der Platte. Die dominierenden Einzelschwankungen scheinen letztlich auf die relativ stationären Strukturen des Hufeisenwirbels und der Nachlaufwirbel sowie die anliegenden laminaren Grenzschichten begrenzt. Die ursprüngliche Idee, mit der Anisotropiekarte auch Turbulenzquellgebiete, wie z. B. in Abbildung 7.30 a, identifizieren zu können, konnte nicht erfolgreich umgesetzt werden.



(a) Isofläche $-\mathrm{II}_b = 0.01$ (b) Isofläche $\mathrm{III}_b = -0.0075$ (c) Isofläche $\mathrm{III}_b = 0.02$

***Abb.** 7.47:* Strömungsgebiete mit extremalen Aniso- bzw. Isotropieeigenschaften

Aufschluß über die räumliche bzw. flächige Verteilung der Isotropieeigenschaften im Nachlauf des Zylinderstumpfes gibt abschließend Abbildung 7.48. Neben den bereits erläuterten extremalen Eigenschaften ist offensichtlich, daß im betrachten Ausschnitt des Strömungsfeldes die anisotrope, geometriespezifische Turbulenz dominiert. Mit zunehmender Entfernung zum Zylinderstumpf entsteht schließlich der Eindruck gleichzeitig zunehmender Dreidimensionalität und Isotropie der Reynolds-Spannungen.

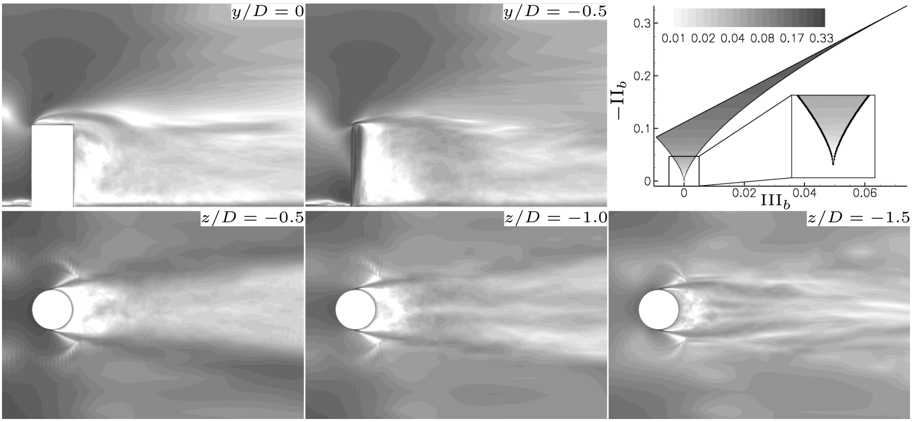
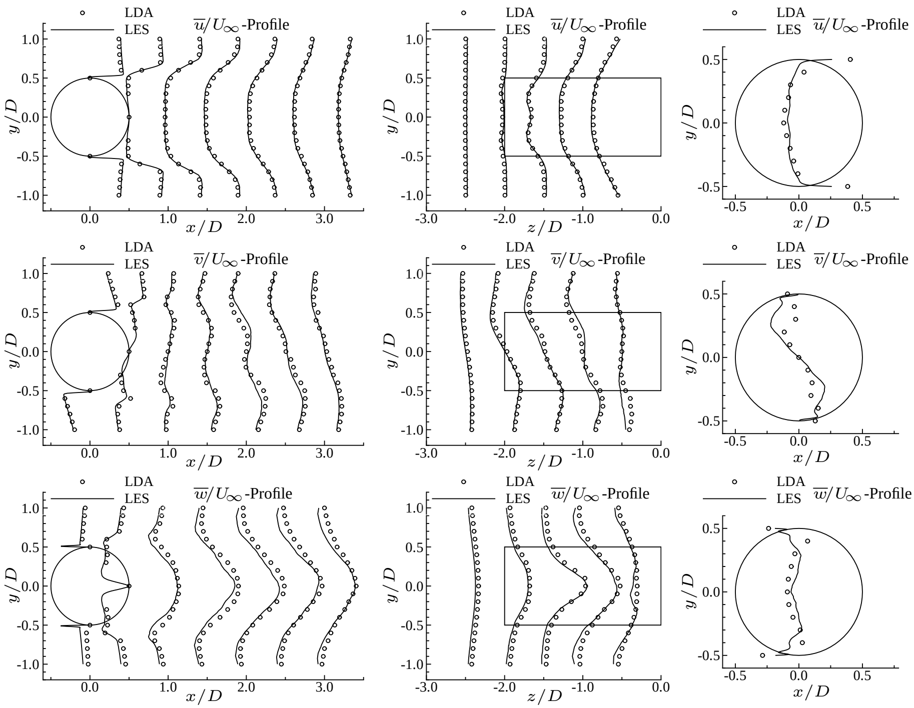


***Abb.** 7.48:* Anisotropieverteilung der Reynolds-Spannungen in Schnittebenen

7.4 Vergleiche mit Experimenten

Angesichts der Unzulänglichkeiten vieler Simulationen ist der Vergleich mit Meßergebnissen immer noch obligatorisch, um Vertrauen in die Simulationsergebnisse herzustellen. Die Gegenüberstellung von Simulation und Experiment erfolgt fast durchgängig auf Statistiken basierend. Zeitliche Vergleiche tauchen nur im Sinne von Frequenzen, Spektren oder Korrelationen der Fluktuationen auf. Hauptsächlich wird mit direkt zugeordneten Experimenten aus dem SPP-1147 verglichen, weil dort die Vergleichbarkeit und oft auch die Datensätze gegeben sind. Dadurch können sowohl Feld- und Oberflächenwerte als auch topologische Aspekte in die Gegenüberstellung einbezogen werden. Aufstellungen der benutzten experimentellen Untersuchungen finden sich in Tabelle 5.1 und Tabelle 5.2. Erste Vergleiche wurden bereits in Abbildung 7.2 und Abbildung 7.14 gezeigt. Darüber hinaus existiert eine Reihe diesbezüglicher Veröffentlichungen, z. B. in FREDERICH *et al.* (2005*b*, 2007*c*, 2008*a,b*, 2009*c*).



(a) Ebene $z/D = -1.0$ (b) Ebene $x/D = 2.2$ (c) Ebene $z/D = -2.05$

Abb. *7.49:* Vergleich zeitlich gemittelter Geschwindigkeitsprofile aus LDA-Messungen (RICHTER, 2005) und LES (teilweise aus FREDERICH *et al.*, 2007*c*)

7.4.1 Feldwerte im Vergleich

Das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsfeld wurde im Rahmen der Arbeiten von RICHTER (2005) mittels LDA in wenigen Ebenen der abgelösten Strömung vermessen. Abbildung 7.49 zeigt Profile der verschiedenen Geschwindigkeitskomponenten im Vergleich dieser Experimente mit den numerischen Referenzdaten aus der Large-Eddy Simulation. Die Geschwindigkeitsprofile sind maßstäblich dargestellt, so daß sehr wohl quantitative Informationen enthalten sind. Unter Berücksichtigung der Komplexität und Empfindlichkeit der Strömung gegenüber leicht verschiedenen Randbedingungen existieren nennenswerte Unterschiede nur auf der Zylinderkappe. Diese werden den Unterschieden zwischen dem experimentellen und dem numerisch benutzten Zuströmprofil zugeschrieben, welches in dieser Region größeren Einfluß hat als im Nachlaufgebiet.

Erste Feldmessungen mit dem neuen PIV-System von JENSCH *et al.* (2006) wurden in der Symmetrieebene $y = 0$ durchgeführt. Der quantitative Vergleich von Geschwindigkeitsprofilen sowie den zugehörigen mittleren Schwankungsgrößen ist in Abbildung 7.50 für die vertikale Linie bei $x/D = 2.2$ zusammen mit den zusätzlichen PIV-Daten dargestellt. Auch hier existiert hervorragende Übereinstimmung der numerischen und experimentellen Daten. Die Bedeutung wird noch dadurch hervorgehoben, daß die gewählte Linie nahe vor dem Wiederanlegebereich auf der Platte lokalisiert ist, wo die Strömung starken Variationen unterworfen ist. Die Simulationsergebnisse bewegen sich dabei innerhalb der Streuung der beiden Meßmethoden mit leicht besserer Kongruenz zu den genaueren LDA-Messungen. Das laterale Geschwindigkeitsprofil $\overline{v}$ verdeutlicht für alle drei gegenübergestellten Verfahren die fehlende statistische Konvergenz bzw. die erfaßte starke Variation der lokalen Strömung.

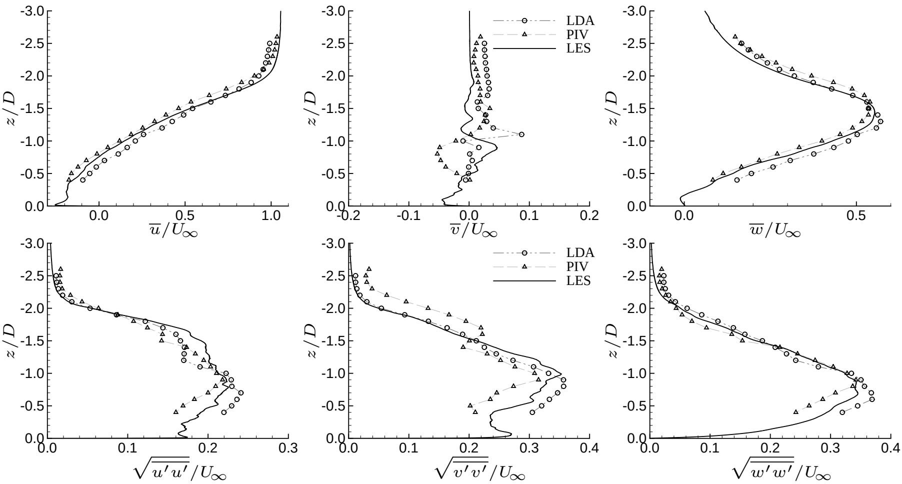


***Abb.** 7.50:* Zeitlich gemittelte Geschwindigkeitskomponenten und Effektivwerte aus Messungen mit LDA (RICHTER, 2005) und PIV (JENSCH *et al.*, 2006) im Vergleich zu LES in der Linie $\{x/D{=}2.2,\ y{=}0\}$ des Nachlaufs (modifiziert aus FREDERICH *et al.*, 2007*c*)

Die Variation entlang der lateralen Richtung in Abbildung 7.51, diesmal zusätzlich mit den Schubspannungskomponenten, bestärkt nochmals die bereits gemachten Aussagen. Darüber hinaus zeigt dieser Vergleich aber auch Unterschiede, die auf die deutlich höhere räumliche Auflösung der Simulation zurückgehen. Gerade die Ausprägung lokaler Extrema in den Spannungskomponenten, z. B. $\overline{u'w'}$, sind davon betroffen.

Profile aller Komponenten des Reynolds-Spannungstensors in der Ebene $x/D = 2.2$ sind in Abbildung 7.52 vergleichend aufgetragen. Die sehr gute Deckung der Ergebnisse wird nahe der Grundplatte leicht gestört. Zum einen wird von der LES die Entwicklung der Plattengrenzschicht stromauf des Zylinders nicht korrekt erfaßt, womit die spätere Grenzschicht, aber auch die Ausdehnung und der Einfluß des Hufeisenwirbelsystems nicht vollständig richtig vorhergesagt werden. Zum anderen variiert die Strömung in Wandnähe deutlich stärker als weiter

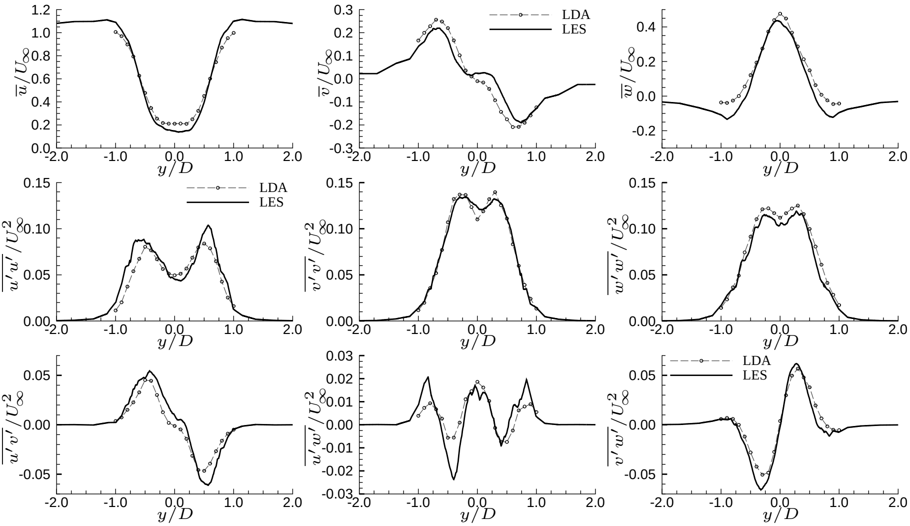


Abb. *7.51:* Zeitlich gemittelte Geschwindigkeitskomponenten und Effektivwerte aus Messungen mittels LDA (RICHTER, 2005) im Vergleich zu LES in der Linie $\{x/D{=}2.2, z/D{=}-1\}$ des Nachlaufs (modifiziert und erweitert aus FREDERICH *et al.*, 2007*a*)

entfernt davon. Letzteres mündet in der Notwendigkeit relativ langer Mittelungszeiten, die numerisch kaum realisiert werden können. So sind Unsymmetrien in den Korrelationsprofilen, wie z. B. bei $\overline{u'u'}$, die Folge. Aber auch das Experiment weist Unsymmetrien auf, die infolge veränderter Umgebungsbedingungen bei den sehr langen Meßkampagnen von LDA auftreten.

Ein aus verschiedenen vertikalen Meßebenen $y/D = \mathrm{const.}$ rekonstruiertes Volumen wurde für die gemeinsamen Auswertungen von JENSCH *et al.* (2008) benutzt. Abbildung 7.53 zeigt für die außermittige Schnittebene $y/D = -0.1$ den flächigen Vergleich ausgewählter mittlerer Geschwindigkeits- und Reynolds-Spannungskomponenten. Wiederum sind die Ergebnisse nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ in sehr guter Übereinstimmung. Die Ausdehnung des durch Ablösung beeinflußten Bereiches paßt auffällig gut zueinander, ähnlich wie Lage und Betrag der räumlichen Extrema. Bei den PIV-Messungen existieren offensichtlich Probleme mit Reflektionen nahe der Wandflächen, sowie am Rand der Meßebenen. Außerdem sind die korrelierten Schwankungsgrößen weniger genau als bei Erfassung mittels LDA. Für die LES ist nicht in allen Gebieten des Strömungsfeldes statistische Konvergenz erreicht worden. Dies trifft hauptsächlich für diejenigen Bereiche mit geringer mittlerer Geschwindigkeit zu, wo der lokale Strömungszustand verstärkt indifferent ist.

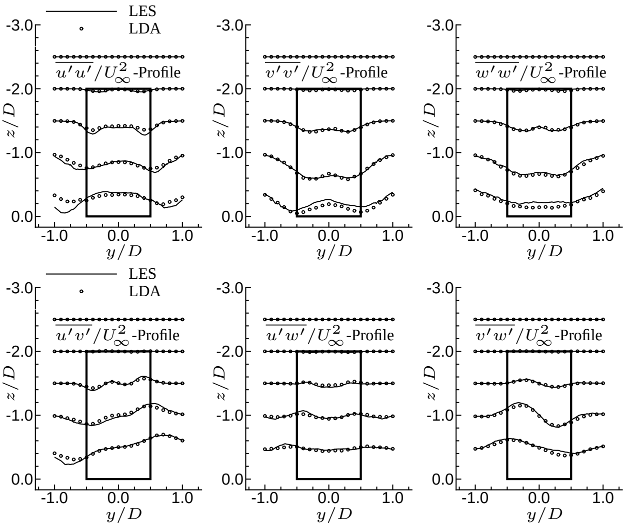


Abb. *7.52:* Reynolds-Spannungsprofile aus Messungen mittels LDA (RICHTER, 2005) im Vergleich zu LES in der Ebene $x/D = 2.2$ (modifiziert aus FREDERICH *et al.*, 2008*b*)

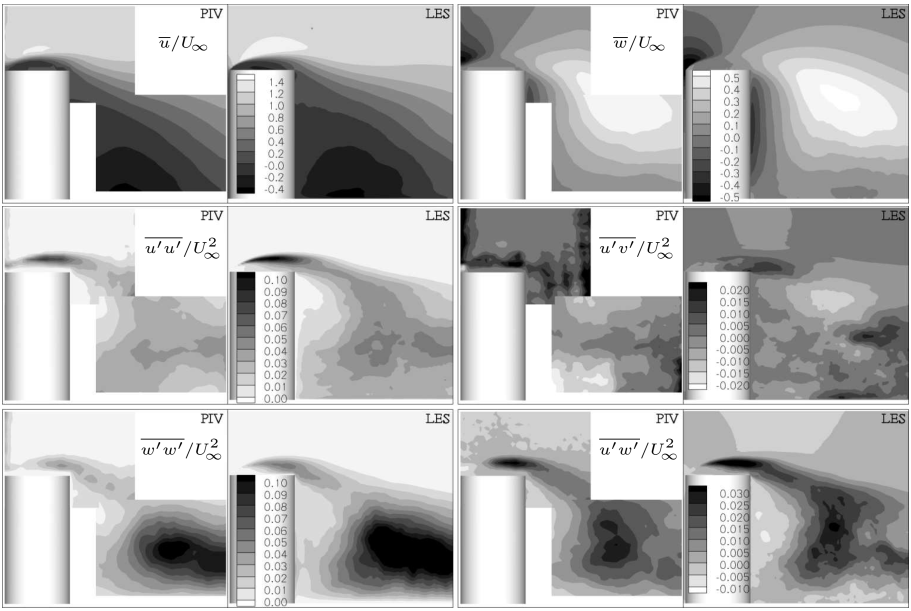
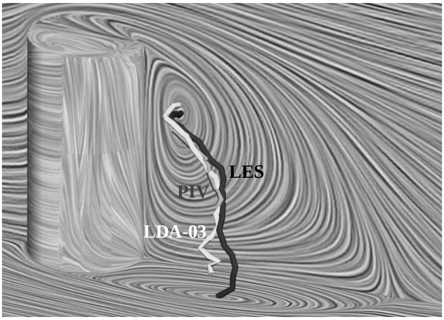
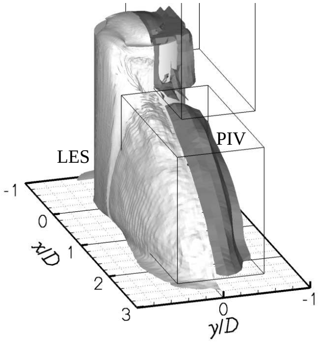


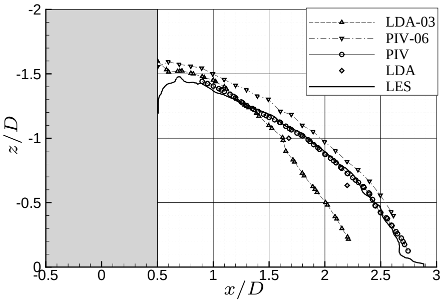
Abb. *7.53:* Zeitlich gemittelte Geschwindigkeiten und Reynolds-Spannungen aus Messungen mittels PIV (JENSCH *et al.*, 2008) im flächigen Vergleich zu LES in der Ebene $y/D = -0.1$ (teilweise aus FREDERICH *et al.*, 2008*a*)



(a) Wirbelkernlinie des Rezirkulationswirbels



(b) Isofläche $\overline{u} = 0$ und Meßvolumina



(c) Isolinie $\overline{u} = 0$ in der Ebene $y = 0$

Abb. *7.54:* Topologischer Vergleich des Rezirkulationsgebietes stromab des Zylinders zwischen Experimenten von LEDER (2003, LDA-03), RICHTER (2005, LDA), JENSCH *et al.* (2006, PIV-06), JENSCH *et al.* (2008, PIV) und LES

7.4.2 Topologische Aspekte

Erste topologische Vergleiche mit guter Übereinstimmung finden sich bereits in Abbildung 7.2 und Abbildung 7.14. Weiterhin lassen sich aus den volumetrischen Datensätzen von LES, LDA und PIV strömungstopologische Eigenschaften in identischer Weise extrahieren. Für das Rezirkulationsgebiet stromab des Zylinders ist eine solche Gegenüberstellung in Abbildung 7.54 vorgenommen. Die Wirbelkernlinie des Rezirkulationswirbels als Eigenschaft der mittleren Strömung in Abbildung 7.54 a zeigt nur geringe Abweichungen zwischen den verschiedenen Strömungsvolumina. Das aus PIV rekonstruierte Volumen ist nicht breit genug, um den Fortgang der Linie zur Platte hin verfolgen zu können. Demgegenüber sind die LDA-Messungen von LEDER (2003) unter Verwendung einer signifikant kleineren Endscheibe vorgenommen worden, weshalb die Abweichungen in Richtung Basis deutlich zunehmen. Die geometrische Lage des Zentrums in der Symmetrieebene ist in Tabelle 7.1 für verschiedene Experimente und LES angegeben. Kleinere Unterschiede existieren vor allem bezüglich der vertikalen Position. Diese werden hauptsächlich dem numerisch verwendeten Zuströmprofil zugeschrieben. Bemerkenswert ist der ausgeprägte Unterschied der beiden referenzierten PIV-Meßreihen. Im weiteren Vergleich der Ausdehnung des Rezirkulationsgebietes über die Isofläche bzw. -linie in Abbildung 7.54 zeigt sich, daß die neueren Messungen offenbar besser mit dem numerischen Ergebnis übereinstimmen. Generell läßt sich festhalten, daß die Vorhersagen von LES immer im Streubereich der zugehörigen Experimente zu finden sind. Abweichungen sind nicht zuletzt auch ein Resultat von höherer räumlicher Auflösung in der Simulation.

Kürzel	Referenz	x/D	z/D
LDA-03	LEDER (2003)	0.805	-1.483
LDA	RICHTER (2005)	–	–
PIV-06	JENSCH *et al.* (2006)	0.821	-1.557
PIV	JENSCH *et al.* (2008)	0.837	-1.450
LES	FREDERICH *et al.* (2008*b*)	0.821	-1.427

Tab. *7.1:* Lage der Wirbelkernlinie des Rezirkulationsgebietes in der Ebene $y = 0$ im Vergleich von Messungen und Simulation

Wegen der guten Übereinstimmung von den angeführten Meßergebnissen und denen von LES ist die in Abbildung 7.25 dargestellte Topologie der zeitlich gemittelten Strömung ebenso gültig für die Experimente.

7.4.3 Oberflächenkräfte im Vergleich

Die mittlere Druckverteilung als dominante Oberflächenkraft und als Fußabdruck des umgebenden Hauptströmungsfeldes ist in Abbildung 7.55, vergleichend zwischen Experimenten und LES für die einzelnen Wandflächen, aufgetragen. Als Druckmeßverfahren wurden konventionelle Druckbohrungen (KDR) sowie MEMS[43]-Drucksensoren eingesetzt, wobei letztere nicht auf der Grundplatte etabliert wurden. Ein Gegenüberstellung von numerischen und MEMS-Druckdaten findet sich bereits in BERNS *et al.* (2009).

Der flächige Vergleich zwischen LES und KDR auf der Grundplatte und dem Zylindermantel zeigt qualitativ und quantitativ sehr ähnliche Resultate. Auch im abgelösten Nachlauf unterscheiden sich die Druckverläufe nur unwesentlich. Die mittels MEMS ermittelten Druckdaten auf dem Zylindermantel sind global vergleichbar, offenbaren aber Schwierigkeiten bei der Vermessung des Ablösebereichs am oberen Zylindermantel. Die vorliegende Reynolds-Zahl von $200\,000$ bildet die nominelle Grenze zwischen über- und unterkritischer Zylinderumströmung, so daß geringste Störungen der anliegenden gerade noch laminaren Grenzschicht, z. B. durch irgendwelche Oberflächenrauigkeiten, den turbulenten Umschlag verursachen können. Eine derartige Störung scheint bei den MEMS-Sensoren vorzuliegen.

Wie in Abbildung 7.14 gezeigt, paßt die vorhergesagte wandnahe Strömung auf der Zylinderkappe gut zu Oberflächenvisualisierungen. Dennoch sind relativ starke Unterschiede in der Druckverteilung auf der Zylinderoberseite auszumachen. Besonders auffällig ist das meßtech-

[43] MEMS ist die Abkürzung für Micro-Electro-Mechanical System.

nisch bestimmte große Gebiet erhöhten Druckes nahe der Hinterkante. Dieses repräsentiert den Aufstau aus der wiederanlegenden Kopfüberströmung. Weil gerade die Kopfüberströmung ziemlich sensitiv für das unweit entfernte Zuströmprofil ist, lassen sich die Abweichungen in der Nähe der Hinterkante mit den unterschiedlichen Zuströmbedingungen begründen. Der Vergleich zwischen LES und KDR im vorderen Zylinderbereich zeigt qualitativ die gleiche Topologie, jedoch mit leicht erhöhtem Druckniveau im Experiment. Die Messungen mittels MEMS lassen topologische Aspekte höchstens erahnen und zeigen eher Abdrücke des winkelabhängigen Meßgitters.

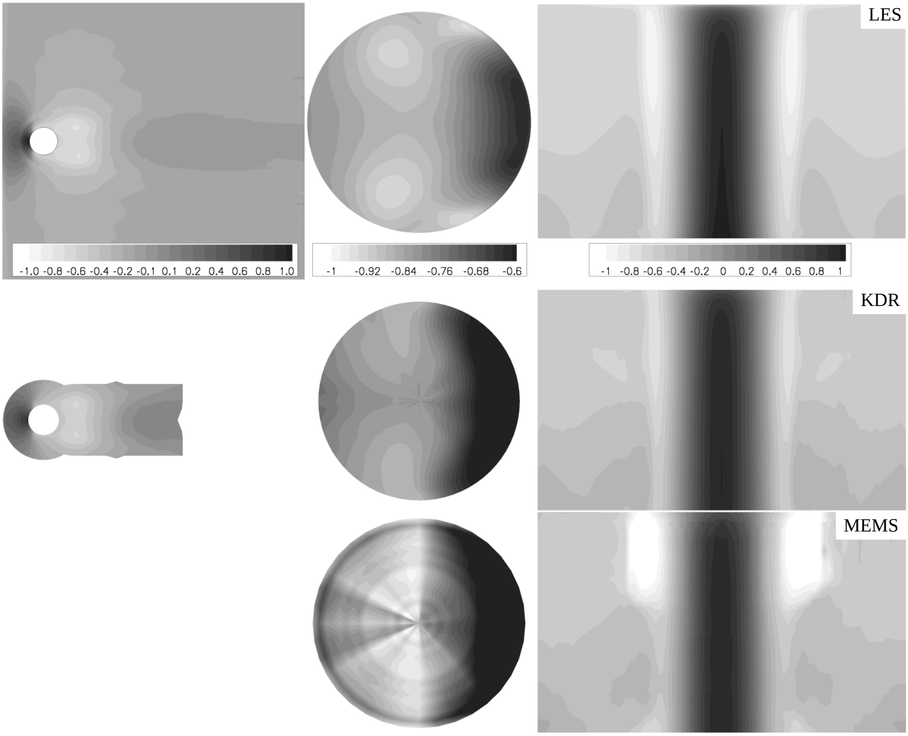


Abb. *7.55:* Gemittelter Druckbeiwert $\overline{c_p}$ auf der Grundplatte, dem Zylinderkopf und dem abgewickelten Zylindermantel im Vergleich zwischen DOBRILOFF & NITSCHE (2009, KDR), BERNS & OBERMEIER (2009, MEMS) und LES

Der Vergleich der mittleren Druckschwankungen auf Grundplatte, Zylinderkopf und -mantel ist in Abbildung 7.56 erstmals vorgestellt. Auf der Zylinderkappe sind qualitativ und großteils auch quantitativ ähnliche Schwankungsgrößen auszumachen. In beiden Experimenten sind jedoch Relikte des Meßgitters zu erkennen. Außerdem ist der jeweils äußerste Punkt im Experiment aus konstruktiven Gründen zwangsläufig eingerückt. Die starken seitlichen Spitzen bei MEMS auf Kappe und Mantel hängen wiederum mit der Störung des Ablösegebietes zusammen.

Auf der Grundplatte und dem Zylindermantel sind die Druckschwankungen zwischen LES und den konventionellen Druckmessungen sowohl topologisch als auch quantitativ vergleichbar. Die Simulation kann infolge der merklich höheren räumlichen Auflösung die Gebiete extremaler Schwankungen genauer erfassen. Im Staugebiet des Zylindermantels ist das Niveau der Druckschwankungen von LES gegenüber dem Experiment angehoben. Es ist zu vermuten, daß hier die numerische Behandlung des Zuströmprofils mit variablem Druck eine zu starke Rückwirkung auf den Zylinder verursacht.

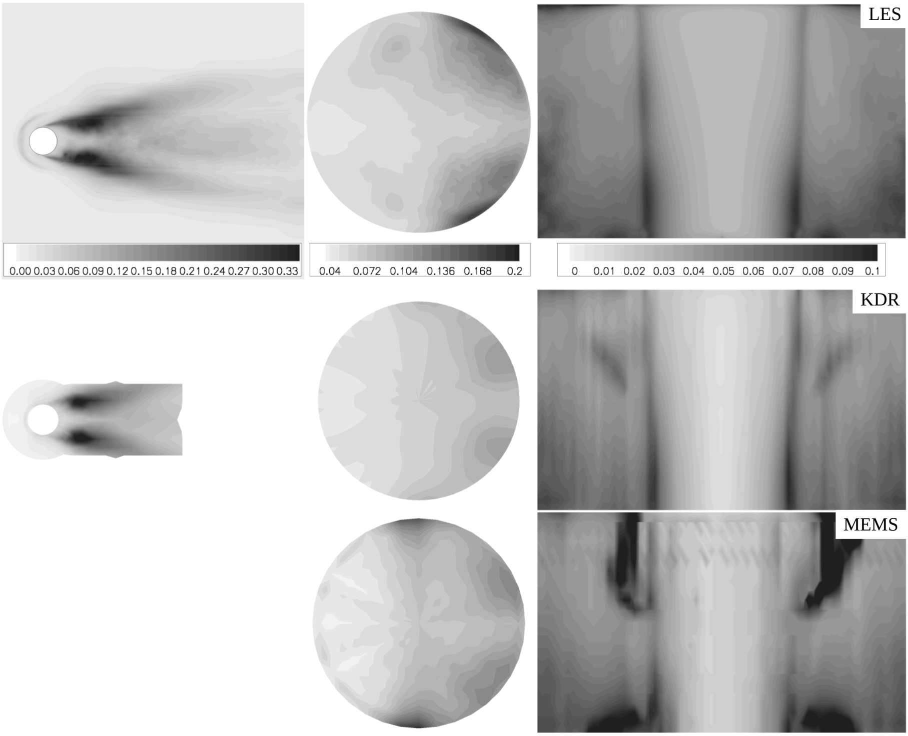
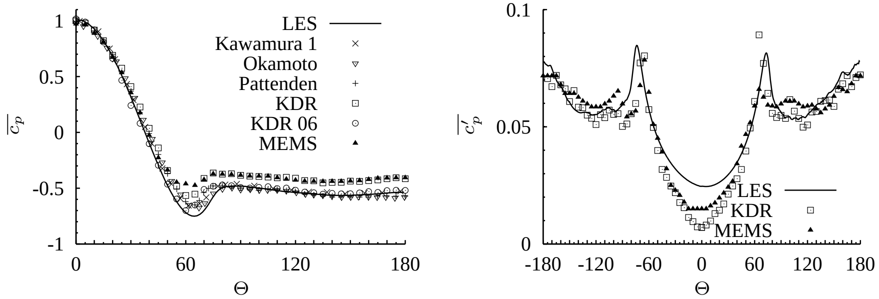
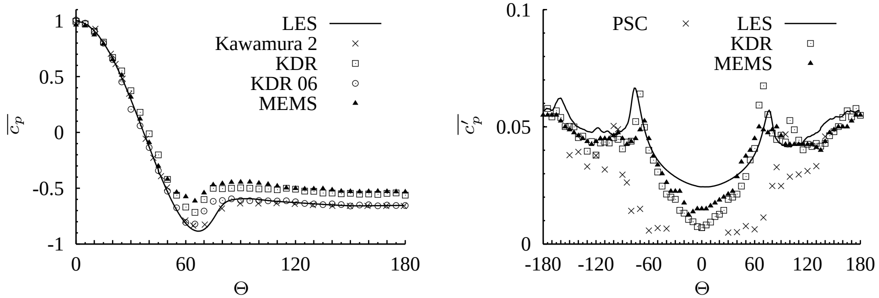


Abb. *7.56:* RMS-Wert der Druckfluktuation $\overline{c_p'}$ auf der Grundplatte, dem Zylinderkopf und dem abgewickelten Zylindermantel im Vergleich zwischen DOBRILOFF & NITSCHE (2009, KDR), BERNS & OBERMEIER (2009, MEMS) und LES

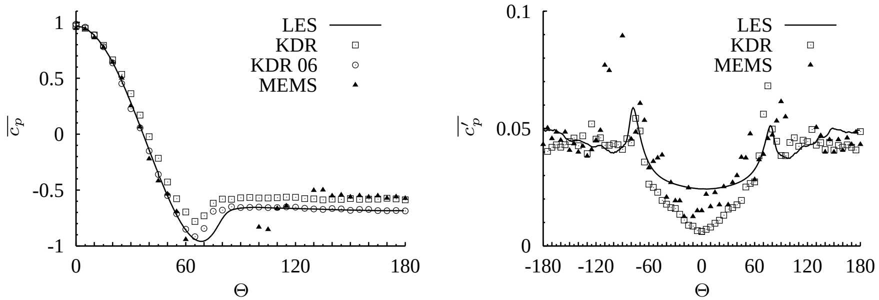
Der quantitative Vergleich des Druckes und seiner Schwankung für verschiedene Höhenlinien des Zylindermantels ist in Abbildung 7.57 unter Berücksichtigung weiterer publizierter Druckmessungen aufgetragen. Abgesehen von den Messungen mittels MEMS mit den bereits diskutierten Problemen, ist der qualitative Verlauf der Druckverläufe sehr ähnlich. Auffällig sind zwei wesentliche Unterschiede. In den Experimenten wird fast durchgängig das nahezu konstante Druckniveau im abgelösten Bereich bei leicht geringeren Winkeln erreicht. Außerdem ist bei den neueren Messungen mit KDR und MEMS dieses Druckniveau wesentlich erhöht. Da der Referenzdruck in den neueren Messungen zuerst über die Geschwindigkeitsanzeige des Windkanals bestimmt wurde, in den früheren Messungen KDR-06 aber über ein Prandtl-Rohr im



(a) Höhenlinie $z/D = -0.5$



(b) Höhenlinie $z/D = -1.0$



(c) Höhenlinie $z/D = -1.5$

Abb. *7.57:* Druckbeiwert und RMS-Wert der Druckfluktuation für verschiedene Höhenlinien des Zylinders im Vergleich zwischen KAWAMURA *et al.* (1984, $L/D = 1, 2$), OKAMOTO & SUNABASHIRI (1992), PATTENDEN *et al.* (2005), DOBRILOFF & NITSCHE (2009, KDR), DOBRILOFF (2006, KDR 06), BERNS & OBERMEIER (2009, MEMS), DOMHARDT (2009, PSC) und LES

Düseneintritt ermittelt wurde, ist zwischenzeitlich eine Anpassung der Referenzierung für die neueren Messungen durchgeführt worden. Weil sich auch dadurch die Unterschiede im Druckniveau nur unwesentlich in Richtung anderer Literaturdaten korrigieren ließen, ist mutmaßlich der benutzte Windkanal ausschlaggebend. In beiden Messungen wurden Kanäle mit offenen Meßstrecken benutzt. Der Windkanal am ILR der TU Berlin, welcher für die Messungen KDR-06 benutzt wurde, hat jedoch einen deutlich kleineren Meßstreckenquerschnitt als der anderweitig an der Universität Rostock benutzte. Der Einfluß der Verblockung am Berliner Windkanal ähnelt einer geschlossenen Meßstrecke, so daß die Abweichungen mit großer Wahrscheinlichkeit auf diesen Einfluß zurückzuführen sind.

Die Effektivwerte der Druckfluktuationen in Abbildung 7.57 bestätigen Experiment und Simulation global sehr gut. Kleinere Diskrepanzen im abgelösten Bereich resultieren hauptsächlich aus den Unterschieden in der räumlichen Auflösung. Das erhöhte Schwankungsniveau im vorderen Staubereich des Zylinders wurde bereits erörtert und kann mit einer in der Simulation vorhergesagten stärkeren Rückwirkung der dominanten Nachlaufschwankungen stromauf zusammengefaßt werden. Warum die mittels PSC (Pressure Sensitive Coating) ermittelten Druckfluktuationen deutlich geringer ausfallen, befindet sich derzeit in der Diskussion.

Für die tangentialen Oberflächenkräfte existieren quantitative Daten aus Messungen mittels Wandhitzdraht-Deltasonden (WHD) von DOBRILOFF (2009) auf der Grundplatte und dem Zylindermantel. Für den Vergleich auf dem Zylindermantel sind die numerisch ermittelten Reibungskräfte bezüglich virtueller Wandhitzdrähte bzw. deren Brückenspannung umgerechnet worden (siehe Anhang F), weil derzeit keine experimentell nutzbare Kalibrierung existiert.

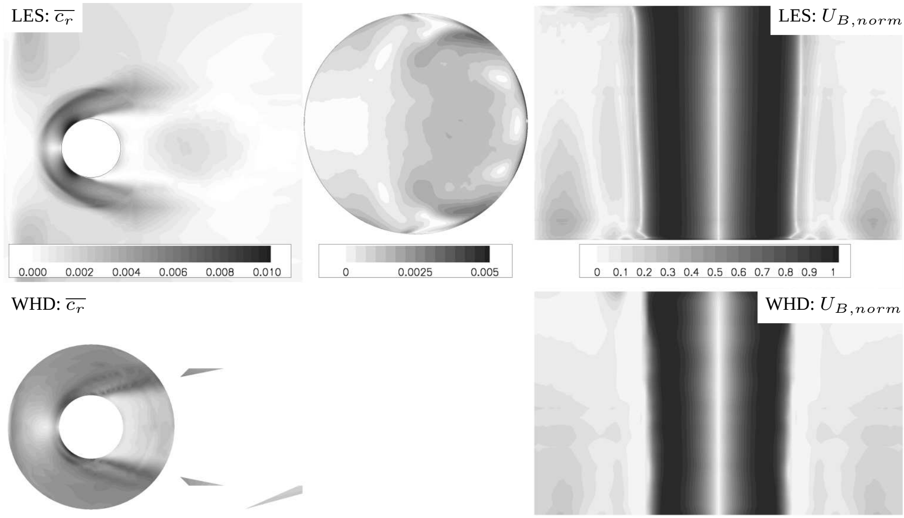
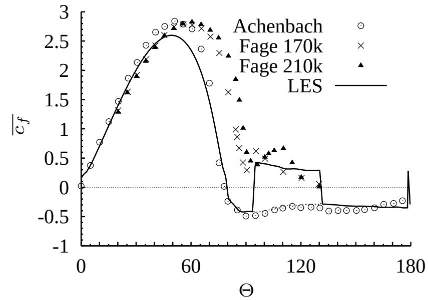
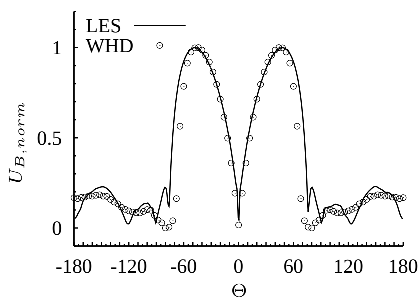


***Abb.** 7.58:* Wandreibungsverteilung $\overline{c_r} = 2|\overline{\tau_w}|/\varrho U_\infty^2$ auf der Platte und Hitzdrahtbrückenspannung $U_{B,norm}$ auf dem abgewickelten Zylindermantel im Vergleich zwischen DOBRILOFF (2009, WHD) und LES

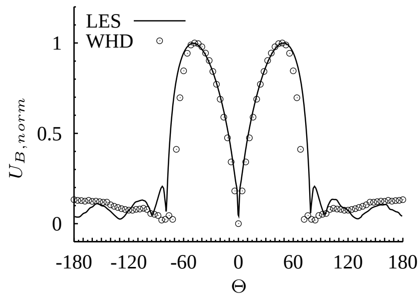
Der Betrag der Wandschubspannungen, ausgewertet als Wandreibungsbeiwert $\overline{c_r} = 2|\tau_w|/\varrho U_\infty^2$ für die Grundplatte und normierte Hitzdrahtbrückenspannungen $U_{B,norm}$ für den Mantel, ist in Abbildung 7.58 gegenübergestellt. Zu erwähnen ist abermals, daß experimentell die Kanten des Zylinders nicht erreicht werden können und diese deshalb von den Daten nicht repräsentiert sind. Der qualitative Verlauf auf der Grundplatte ist durchaus ähnlich, leidet aber von der numerischen Seite unter dem nicht vollständig turbulenten Charakter der Plattengrenzschicht stromauf des Zylinders. Trotzdem korrespondieren die dominanten Merkmale des Hufeisenwirbelsystems und die Beträge auf der Grundplatte sehr gut miteinander. Auf dem Zylindermantel gleichen Struktur und Größe der Wandreibungsverteilung (bzw. Brückenspannungen) einander sehr stark. Einzig die Region der Sekundärwirbelbildung hinter der primären Ablösung wird von den Wandhitzdrähten nicht vollständig erfaßt. Weitere Unterschiede sind kaum feststellbar und wenn existent wiederum Resultat abweichender Diskretisierungen.



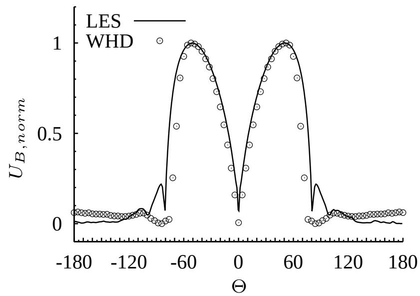
(a) Höhenlinie $z/D = -1.0$



(b) Höhenlinie $z/D = -0.5$



(c) Höhenlinie $z/D = -1.0$



(d) Höhenlinie $z/D = -1.5$

***Abb.** 7.59:* Reibungsbeiwert bzw. Hitzdrahtbrückenspannung $U_{B,norm}$ für verschiedene Höhenlinien des Zylindermantels im Vergleich zwischen ACHENBACH (1968, $\mathrm{Re}_D = 10^5$), FAGE & FALKNER (1931), DOBRILOFF (2009, WHD) und LES

In der einschlägigen Literatur sind nur wenige Messungen der Reibungskräfte publiziert. Außerdem sind die auffindbaren Daten erstaunlicherweise relativ frühen Datums. In Abbildung 7.59 sind Vergleiche des Reibungsbeiwerts bzw. der Brückenspannungen für konstante Höhenlinien des Zylindermantels aufgezeigt. Die sehr gute Deckung der Kurven für die Brückenspannungen wird nur wenig gestört durch Detailunterschiede im abgelösten Bereich. In diesem Gebiet variieren die Strömungsgeschwindigkeiten lokal einigermaßen stark und sind zudem von recht kleinen Beträgen. Die Meßqualität der Wandhitzdrahtsonden ist bei diesen Bedingungen nicht uneingeschränkt gegeben. Die Ergebnisse von FAGE & FALKNER (1931) basieren auf dem zweidimensionalen Zylinder und diejenigen von ACHENBACH (1968) auf einem größeren Seitenverhältnis sowie zusätzlicher thermischer Belastung. Ungeachtet dessen ist gerade die sehr gute Vergleichbarkeit von letzteren Daten außerordentlich. Die Vorzeichengewichtung im Falle der LES verdeutlicht die Lage des Sekundärwirbels, während der Verzicht auf die Gewichtung in diesem Gebiet (gestrichelte Linie) nochmals die gute Übereinstimmung hervorhebt.

Referenz	$\overline{C_x}$	Re_D	L/D	δ/D	Bl [%]
KAWAMURA *et al.* (1984)	0.78	32 000	2	0.1	0.88
OKAMOTO & SUNABASHIRI (1992)	0.73	47 000	2	0.1	1.3
FRÖHLICH & RODI (2004)	0.88	43 000	2.5	0.1	7.3
PATTENDEN *et al.* (2005)	0.79*	200 000	1	0.1	4.2
FREDERICH *et al.* (2008*b*)	0.82	200 000	2	0.06	2.85

* lokaler Wert bei $z/D = 0.5$

Tab. *7.2:* Gemittelter Widerstandsbeiwert (integriert über den Zylindermantel) im Vergleich verschiedener Untersuchungen

Sichtbare Unterschiede im Vergleich der Oberflächenkräfte zwischen Experiment und Simulation sind ohne Zweifel durch leicht verschiedene Zuströmbedingungen verursacht. Wie aus dem Literaturüberblick im Abschnitt 5.3 hervorgeht, existieren eine Reihe weiterer wichtiger Einflußparameter, unter ihnen Grenzschichtdicke, Turbulenzgrad und Verblockung. Die Sensitivität gegenüber der Verblockung läßt sich mit Hilfe von Tabelle 7.2 veranschaulichen. Der mittlere Widerstandsbeiwert (experimentell bestimmt aus der Druckverteilung) variiert um mehrere Prozent bei Veränderung der effektiven Verblockung. Für die beurteilten Simulationsdaten ist hierbei wichtig, daß sie dem Trend der Literaturdaten folgen. Es sei abschließend erwähnt, daß die Verblockung der zugeordneten Experimente im SPP-1147 nicht mit derjenigen der Simulation übereinstimmt. Die offene Meßstrecke im Windkanal der Universität Rostock hat einen Querschnitt von $25D^2$ (JENSCH *et al.*, 2008), womit die Verblockung dort nominell 8% beträgt.

7.4.4 Vergleich dominanter Frequenzen

Um aussagekräftige Frequenzspektren zu erhalten, mitteln SUMNER *et al.* (2004) viele Einzelspektren. KAWAMURA *et al.* (1984) weisen darauf hin, daß bei Seitenverhältnissen $L/D < 6$ dominante Frequenzen schwierig auszumachen sind. Die Aufstellung in Tabelle 7.3 zeigt dennoch, daß sich für den untersuchten und ähnliche Zylinderstümpfe konsistent eine dominierende Periodizität nahe $\mathrm{St} = 0.16$ identifizieren läßt. Auf weitere, in der numerischen Simulation auftretende, relevante Frequenzen wurde bereits im Abschnitt 7.3.5 eingegangen. Je nach betrachtetem Ausschnitt des Strömungsfeldes und Strömungsgröße finden sich leicht andere Subfrequenzen. Auch diesen Aspekt spiegeln die referierten Untersuchungen wider.

Referenz		Re_D	L/D	St_1	St_2
JENSCH *et al.* (2009)	PIV	200 000	2	0.16	–
DOBRILOFF (2009)	KDR	200 000	2	0.16	–
DOMHARDT *et al.* (2009)	PSC	200 000	2	0.16	0.18
BERNS *et al.* (2009)	MEMS	200 000	2	0.16	0.30
SUMNER *et al.* (2004)	HDA	60 000	3	0.16	–
PATTENDEN *et al.* (2005)	KDR	200 000	1	–	0.09
FRÖHLICH & RODI (2004)	LES	43 000	2.5	0.16	–
FREDERICH *et al.* (2007*c*)	LES	200 000	2	0.16	0.20

Tab. *7.3:* Dominante Frequenzen im Vergleich von Experiment und Numerik

7.4.5 Gewichtete planare POD

Um im Rahmen der Vergleiche auch der zeitlichen Entwicklung der Strömung Rechnung zu tragen, ist eine POD-Zerlegung unter Verwendung experimenteller und numerischer Daten durchgeführt worden. Aus Messungen mit zeitaufgelöstem PIV standen zu diesem Zweck instationäre 3D-Geschwindigkeitsvektoren in der Ebene $y = 0$ zur Verfügung. Wie in Tabelle 7.4 aufgeführt, ist die Anzahl der Realisationen des Strömungsfeldes beider Datenbasen ähnlich, jedoch unterscheidet sich der Zeitschritt und damit die abgedeckte Gesamtzeit um jeweils eine Größenordnung. Trotzdem erlaubt POD den Vergleich der zeitlich unkorrelierten Datenbasen bezüglich Dynamik und Struktur des Strömungsfeldes. Für die Durchführung der POD wurde aus den Simulationsdaten ein zum Experiment nahezu identisches Fenster (basierend auf ganzen Gitterzellen) ausgewählt und anschließend Korrelationsmatrix und POD-Gewichte (siehe Abschnitt 4.2) nur für die darin enthaltenen Zellen ausgewertet. Die berechneten Moden und Koeffizienten können direkt mit denen der ebenfalls selbst durchgeführten Zerlegung der PIV-Daten verglichen werden. Aus den numerischen Daten wurde zusätzlich die planare Fortsetzung der Mode außerhalb des Fensters berechnet.

		Anzahl Realisationen	Zeitschritt Δt	Konv. Einheiten D/U_∞	Gesamtzeit
PIV	2D3C	2 000	0.001000s	430	2.0s
LES	3D3C	2 300	0.000115s	60	0.264s

Tab. *7.4:* Benutzte Datenbasen für die planare POD

Die Ergebnisse der gewichteten planaren POD wurden bereits teilweise in FREDERICH *et al.* (2008*a*, 2009*c*) veröffentlicht. Die gute Übereinstimmung der Eigenwertspektren, dargestellt in Abbildung 7.60, war darin bisher nicht dokumentiert. Die normiert aufgetragenen Eigenwerte beinhalten direkte Informationen über den Anteil der Fluktuationsenergie in der jeweiligen Mode. Trotz der zeitlich unterschiedlichen Datenbasen werden diese Anteile von beiden Zerlegungen quantitativ fast identisch erfaßt. Die Spektren unterscheiden sich erst oberhalb von Mode 200, wo der Energieanteil der Moden unterhalb von 0.025% fällt. Zum einen bedeutet dieser Umstand, daß die dominanten Phänomene zumindest energetisch ähnlich separiert wurden. Zum anderen wird die unterschiedliche Auflösung der niedrigen Moden widergespiegelt, womit in den hohen Modenzahlen voneinander abweichende, aber dennoch vernachlässigbare Moden auftreten. Für beide Zerlegungen ist die Tendenz zur starken Modenpaarung schlecht ausgeprägt. Eine solche wäre am treppenstufigen Abfall der Spektren erkennbar. Ein Grund dafür ist auf jeden Fall der komplexe turbulente Charakter der Strömung, aber auch die symmetrische Lage der Auswerteebene sowie die flächige Auswertung.

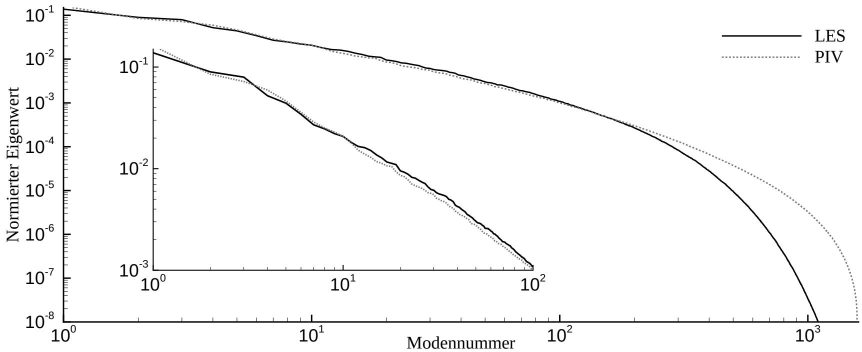


Abb. *7.60:* Eigenwertspektren der planaren POD für PIV und LES

Die ersten drei Moden beider Zerlegungen sind mit den Spektren der zugehörigen Zeitkoeffizienten in Abbildung 7.61 parallel visualisiert. Um die vektorielle Information des Geschwindigkeitsfeldes geeignet skalar und planar darstellen zu können, ist jeweils die kinetische Energie der Mode berechnet worden. Aus der Abbildung der Moden ist evident, daß jeweils die gleiche Strömungsstruktur extrahiert wurde. Aufgrund des längeren Zeitintervalls der PIV-Daten sind deren Moden glatter bzw. eher konvergiert. Aus dem gleichen Grund unterscheiden sich die spektralen Spitzen in den Frequenzspektren der ersten Mode. Gleichwohl sind die beteiligten Frequenzen ähnlich und für die Spektren der anderen beiden Zeitkoeffizientenpaare identisch im Verlauf. Auch in weiteren, hier nicht bebilderten, Moden- und Zeitkoeffizienten findet sich relativ gute Übereinstimmung der Struktur und Dynamik.

Von der physikalischen Interpretation der einzelnen Strukturen soll an dieser Stelle abgesehen werden, da es sich nur um einen planaren Ausschnitt des Strömungsfeldes handelt. Generell wird festgestellt, daß die experimentellen Daten deutlich abgegrenztere Strukturen ermöglichen und auch mehr spektrale Information zur Verfügung stellen. Es sei dabei aber nicht vergessen, daß durch die für PIV notwendigen Auswertealgorithmen sowohl Fehler als auch Glättung in die Daten eingebracht werden. Dies kann zum Verschmieren dynamischer Information führen, besonders wenn diskrete Frequenzen ähnlicher Größenordnung vorliegen, wie im betrachteten Fall. Abgesehen davon erfolgt mit POD eine globale, energiebasierte Korrelation, wobei Frequenztrennung nicht inhärent enthalten ist. Die numerischen Daten haben den großen Vorteil zusammenhängender Dreidimensionalität und ermöglichen dadurch, den räumlichen Fortgang der Moden wie in Abbildung 7.61 zu bestimmen.

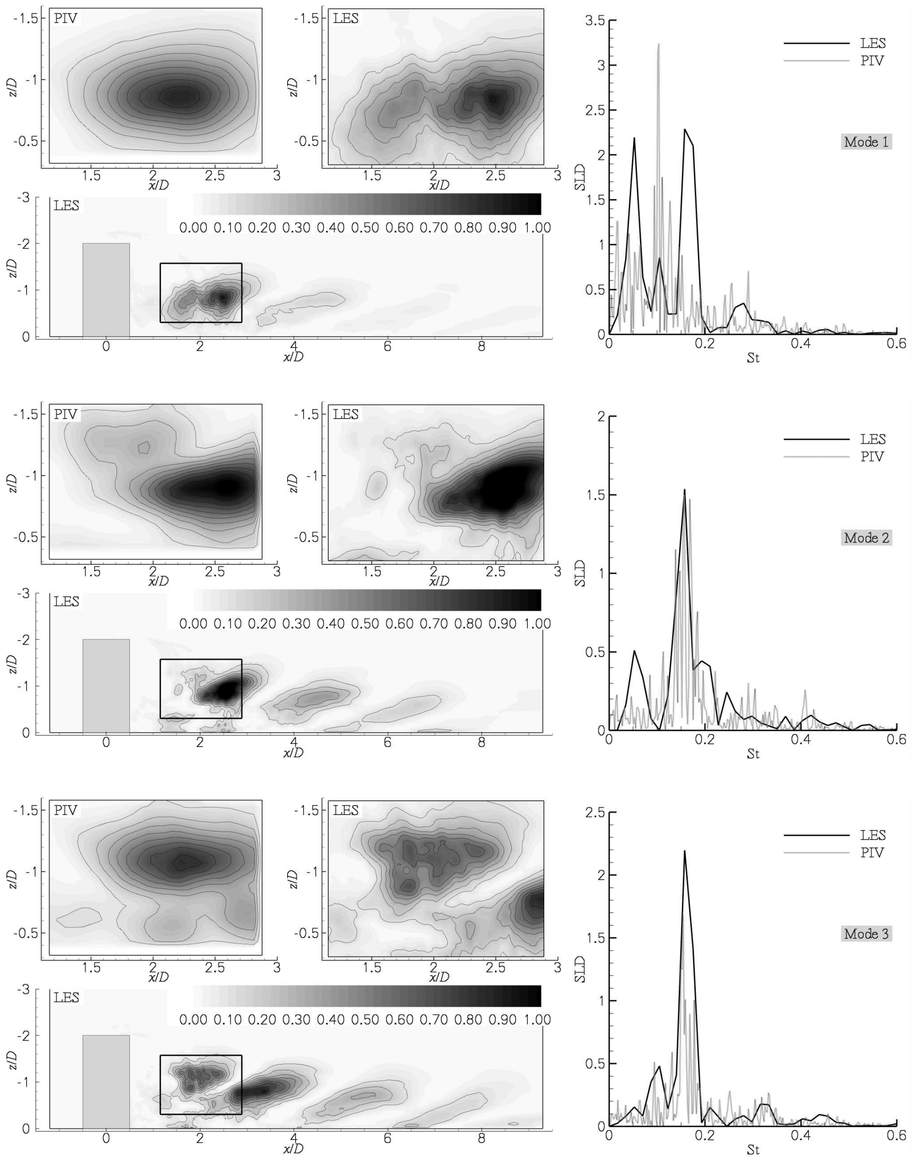
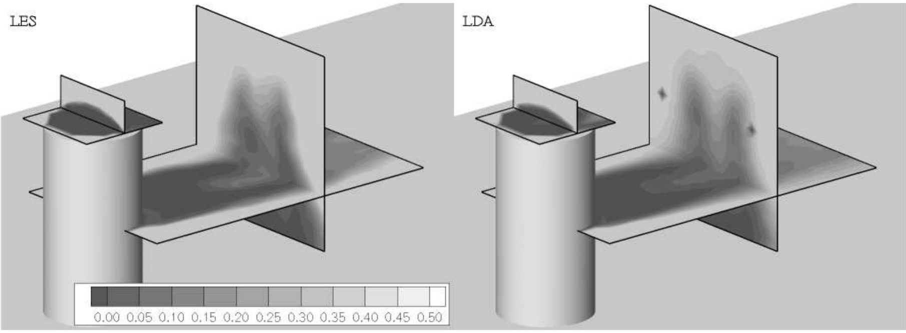


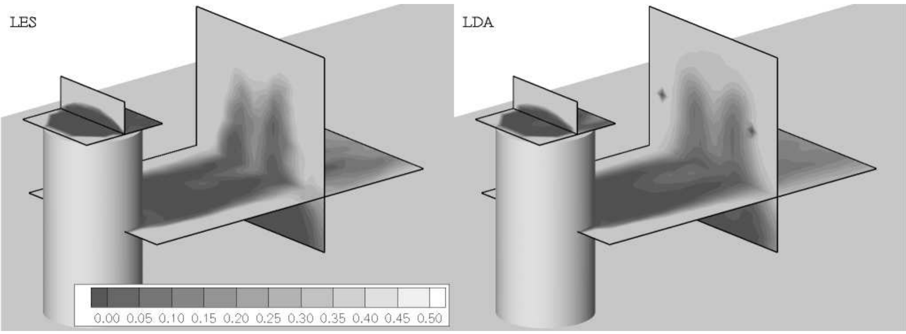
Abb. *7.61:* Vergleich von Moden und Spektren der planaren POD für PIV und LES: Kinetische Energie $0.5(u_i u_i)_m$ der Mode m für die POD-Ebene und Spektren der zugehörigen Zeitkoeffizienten aus DFT

7.4.6 Phasengemittelte Geschwindigkeitsdaten

Bei den Messungen mittels LDA von RICHTER (2005) wurde, neben der zeitlichen Mittelung, auch eine Phasenmittelung in den verschiedenen Meßebenen durchgeführt. Dazu wurde das Signal eines im Nachlauf positionierten Hitzdrahtes mit einem Bandpaß bezüglich der dominanten Frequenz gefiltert und anschließend 16 Phasenlagen gemittelt. Wegen der durch die Simulation abgedeckten relativ kurzen Zeitintervalle und zeitlicher Variation der dominanten Harmonik, liefert ein ähnliches Vorgehen für die Simulationsergebnisse relativ schlechte, wenig glatte Vergleichsdaten. Die mittels der Zeitkoeffizienten des dominanten POD-Modenpaares etablierte Phasenmittelung (beschrieben im Abschnitt 7.6.6) involviert die zeitliche Änderung der dominanten Frequenz und liefert daher bessere Ergebnisse. Obwohl deshalb die phasengemittelten Felder aus LDA und LES unterschiedlich bestimmt wurden, sind diese trotzdem vergleichbar. In Abbildung 7.62 sind die Ergebnisse für zwei verschiedene Phasenwinkel nebeneinander dargestellt. Die Verteilung der kinetischen Energie aus den phasengemittelten Geschwindigkeiten zeigt einander stark ähnelnde Verläufe, so daß ein weiteres Indiz für die Übereinstimmung der instationären Strömung besteht.



(a) Phasenwinkel $\pi/2$

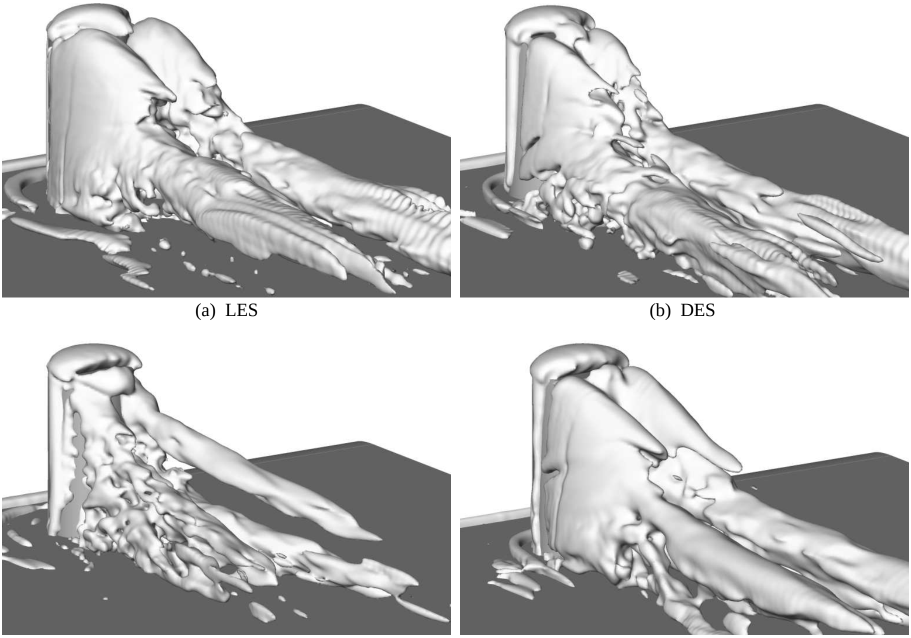


(b) Phasenwinkel π

Abb. *7.62:* Kinetische Energie des phasengemittelten Geschwindigkeitsfeldes $0.5\langle u_i\rangle\langle u_i\rangle$ für zwei verschiedene Phasenwinkel im Vergleich der LDA-Daten von RICHTER (2005) und LES (Ebenen $x/D = 0, 2.2$ und $z/D = -2.1, -1$)

7.5 Vergleich der Simulationsansätze

In Tabelle 6.2 sind die ausgeführten Simulationen überblickgebend zusammengestellt. Mit der Wahl von Simulationsansatz, Diskretisierung und Randbedingungen ändert sich die Strömungsvorhersage teilweise eklatant. Unter Berücksichtigung der aufgezeigten Ergebnisqualität im Vergleich zu experimentellen Daten kann die LES als Referenzsimulation angesehen werden. Somit sind abweichende Vorhersagen nahezu durchgängig als Verlust der Vorhersagequalität zu interpretieren. Für die dazu notwendigen Vergleiche ist die Gegenüberstellung von Statistiken der einzig sinnvolle Ansatz. LES und DES wurden bei FREDERICH *et al.* (2008*b*) bereits eingehender miteinander verglichen.



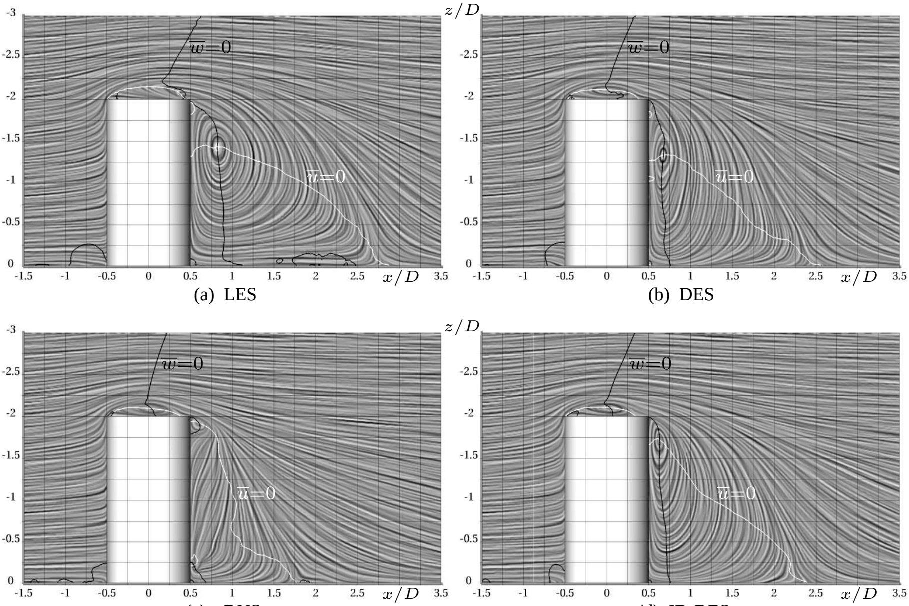
(a) LES (b) DES (c) cDNS (d) ID-DES (reduzierte Diskretisierung)

Abb. *7.63:* Wirbelstrukturen für das zeitlich gemittelte Strömungsfeld im Vergleich verschiedener Simulationsansätze bei gleicher Diskretisierung (Isoflächen $\overline{\lambda_2} = -0.05$)

7.5.1 LES als Referenzsimulation

Weil Diskretisierung und Randbedingung unverändert sind, unterscheiden sich die beiden Simulationen DES und cDNS gegenüber der LES im Grunde nur durch das Feinstrukturmodell. Im ersten Fall liegt eine alternative Feinstrukturmodellierung vor, während im zweiten keine explizite Modellierung benutzt wurde. Zur Auswertung der mittleren Strömung wurde in beiden Fällen die statistische Basis nicht beliebig (bis zur Konvergenz) ausgedehnt, sondern nur soweit, daß ein eindeutiger Trend erkennbar ist. So basieren die Mittelwerte auf jeweils etwa 20 000 Zeitschritten, wobei nur jeder zehnte für die Statistik benutzt wurde.

Zum Vergleich der jeweilig prognostizierten Strömungsstrukturen ist in Abbildung 7.63 das Wirbelkernkriterium $\overline{\lambda_2}$ für die zeitlich gemittelten Strömungsfelder der verschiedenen hochauflösenden Simulationen visualisiert. Die Topologie von LES und DES ist nahezu identisch, im Falle von DES aber in Strömungsrichtung und lateraler Richtung weniger weit ausgedehnt. Die seitliche Ablöselinie, bei LES um 80°, findet sich bei DES deutlich verspätet nahe 100°. Offenbar erfährt die DES Probleme bei der Vorhersage der richtigen Ablöseposition, weil das im wandnahen Bereich aktive RANS-Modell dazu tendiert, Wirbelviskosität zu produzieren. Diese fälschlicherweise in der anliegenden (laminaren) Grenzschicht produzierte Wirbelviskosität verursacht turbulenten Charakter, weshalb die Ablösung verspätet stattfindet, ähnlich wie es bei größerer Reynolds-Zahl der Fall wäre. Die angesprochene, in Abbildung 7.64 b sichtbare reduzierte Rezirkulationslänge und die verringerte Nachlaufbreite sind letztlich eine Folge der verspäteten Ablösung. Die Kopfüberströmung wird bei DES nur unwesentlich verändert, weil die vorliegende Ablösung geometrieinduziert ist und modellbedingte Produktion von Wirbelviskosität für diesen Fall deutlich geringeren Einfluß hat. Einzig die starke Zweiteilung des Rezirkulationsgebietes an der Symmetrieebene (vgl. Abbildung 7.16) geht bei DES durch erhöhte turbulente Diffusion verloren. Im Vergleich zur LES führt gerade die Turbulenzproduktion durch das RANS-Modell zur turbulenten Plattengrenzschicht hinter dem Transitionsdraht. Dadurch wird die Vorhersage des Hufeisenwirbels, der näher an den Zylinder rückt, verbessert.



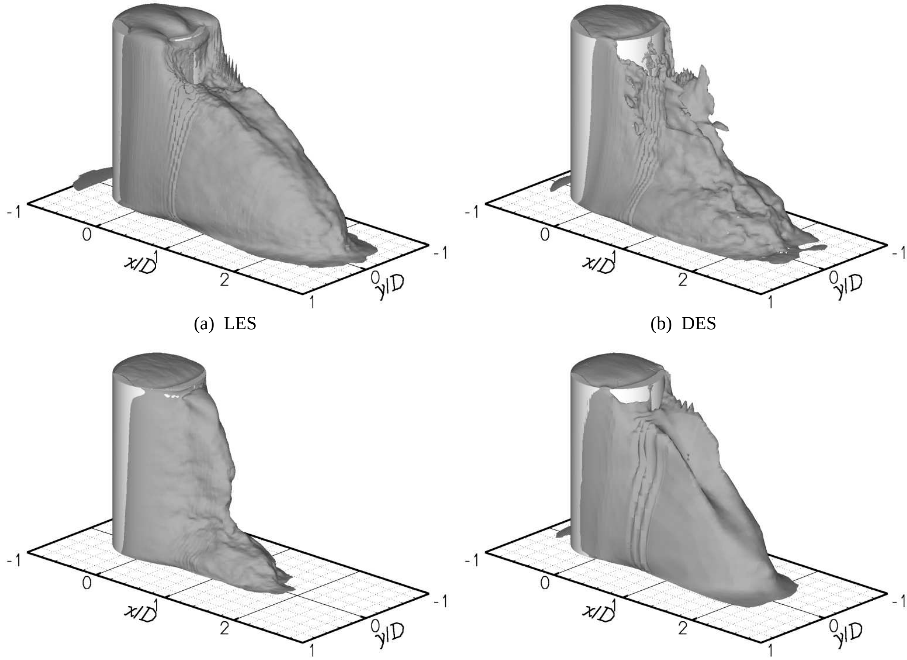
(a) LES (b) DES
(c) cDNS (d) ID-DES

***Abb.** 7.64:* Zeitlich gemittelte Stromlinien und Isolinien $\overline{u}, \overline{w} = 0$ in der Symmetrieebene $y = 0$ im Vergleich verschiedener Simulationsansätze

Die „grobe“ DNS (cDNS) dient hier im Wesentlichen dazu, die Notwendigkeit und Wirkungsweise der Feinstrukturmodellierung zu demonstrieren. Der ursprünglich vorgeschlagene Gedanke, diese Simulation zur Erfassung der Grobstrukturen ohne Berücksichtigung nichtaufgelöster kleinster Strukturen einzusetzen, kann schon nach wenig detaillierten Analysen des vorhergesagten Strömungsfeldes verworfen werden. Der Energieentzug aus der Hauptströmung durch die inhärenten Fehlereigenschaften des numerischen Verfahrens ist in keiner Weise ausreichend. Trotz Erhöhung des upwindbasierten Anteils im gemischten Konvektionsschema auf 15% (5% bei LES) verbleibt die im Strömungslöser *ELAN* implementierte Numerik wenig dissipativ. Im mittleren Strömungsfeld dominieren längsgerichtete (in Strömungsrichtung, vgl. Abbildung 7.63 c), stark kohärente Wirbelstrukturen. Offenbar sind die Austauschmechanismen zwischen den einzelnen Raumrichtungen bzw. die Dreidimensionalität der turbulenten Strukturen aufgrund stark reduzierter Diffusion und Dissipation gegenüber der LES gestört. Daraus resultieren lokal höhere Geschwindigkeiten in Strömungsrichtung sowie verminderte turbulente Aktivität im Nachlauf. Bemerkenswert ist, daß durch das verringerte Rezirkulationsgebiet (siehe Abbildung 7.64 c) stromab der Druck geringer ist als im Fall der LES und deshalb die laminare Ablösung stromab zu etwa 90° verlagert wird. Auch die Kopfüberströmung ist gekennzeichnet durch die verringerte Diffusion, wodurch die Austauschbewegungen im abgelösten Bereich eingeschränkt sind.

Weil die Vorhersagequalität von DES im Grunde nur durch die inkorrekte Behandlung der Zylindergrenzschicht leidet, könnte eine angepaßte Transitionsbehandlung zu quantitativ mit der LES vergleichbaren Ergebnissen führen. Diese Motivation und die gleichzeitige Reduktion notwendiger Ressourcen führten zum Einsatz von ID-DES. Die laminare Behandlung der anliegenden Grenzschicht wird in dieser Simulation durch geschickte Variation der einströmenden Turbulenz (Abschnitt 6.2.3) erreicht. Obwohl die Simulation nach Mittelung über $20\,000$ Zeitschritte ihr Ziel und statistische Konvergenz der Mittelwerte noch nicht erreicht hat, ist die gemittelte Hauptströmung bereits repräsentativ. Es zeigt sich die fast identische Lage der Ablöselinie wie bei LES und ein qualitativ zu LES und DES vergleichbares Wirbelsystem. Allerdings stellt sich der Vorteil der erreichten Laminarhaltung der Grenzschicht als Nachteil der gewählten Modellierung im abgelösten Bereich heraus. Sowohl die an der Vorderseite der Zylinderkappe als auch die seitlich ablösende Scherschicht bleiben räumlich schmal begrenzt. Im Falle der seitlichen Ablösung beschreibt sie dabei für eine kurze Strecke die Form der Zylinderkrümmung nach. Die Beobachtungen weisen auf zu geringe turbulente Diffusion im zylindernahen Bereich bei ID-DES hin. Die im Nachlauf advektierte Wirbelviskosität erreicht die Ablösegebiete nur in sehr geringem Maße. Als Folge diffundiert der abgelöste Bereich nicht weit genug auseinander, und das Rezirkulationsgebiet sowie der weitere Nachlauf sind in ihrer Ausdehnung zu klein (Abbildung 7.63 d). Durch den Vergleich in Abbildung 7.65 wird jedoch ersichtlich, daß hauptsächlich die fehlende bzw. geringere seitliche Ausdehnung die Verkürzung des Rezirkulationsgebietes verursacht. In diesem Zusammenhang ist auch wichtig, daß die Kohärenz großskaliger Strukturen außerdem durch die zusätzliche Dissipation aus der vergröberten Diskretisierung geschwächt wird. Im Endeffekt verdeutlichen die jeweiligen Visualisierungen in Abbildung 7.63 und Abbildung 7.65, daß bei der Simulation ID-DES die Vorhersagen für den Hufeisenwirbel korrespondierend zu DES, die Kopfüberströmung vergleichbar zu cDNS und das zu kleine Rezirkulationsgebiet ähnlich wie bei LES sind.

Das Hauptproblem bei der durchgeführten Simulation mittels ID-DES ist fehlende turbulente Diffusion aufgrund der numerischen Zusammenhänge bei Abwesenheit einströmender Turbulenz. Überaus wichtig ist aber ebenso die Tatsache, daß einzig für diese Konfiguration ein experimentell ermitteltes Geschwindigkeitsprofil am Einströmrand vorgegeben wurde. Dieses unterscheidet sich teilweise erheblich von dem numerisch generierten Profil (vgl. Abbildung 6.8), das bei den anderen Simulationen benutzt wurde. Das effektive Einflußgebiet der Zylinderverblockung ist im neuen Profil größer, so daß der Zylinder mit lokal leicht geringeren Geschwindigkeiten angeströmt wird. Daraus resultiert ein Teil der Differenzen am Zylindermantel und -kopf. Außerdem ist es sehr wahrscheinlich, daß der Unterschied der Geschwindigkeitsprofile auch Einfluß auf die Länge des Rezirkulationsgebietes hat.



(a) LES (b) DES

(c) cDNS (d) ID-DES

Abb. *7.65:* Einhüllende des Rezirkulationsgebietes (Isofläche $\overline{u} = 0$) im Vergleich verschiedener Simulationsansätze (Darstellungsartefakte an der Blockgrenze bei $x/D \approx 0.5$)

In Abbildung 7.66 ist der quantitative Vergleich aller Simulationsansätze in einer Linie des Nachlaufs gezeigt. Zusätzlich zu den bereits genannten Ansätzen sind Ergebnisse, der in Vorbereitung der ID-DES entstandenen, stationären RANS-Simulation enthalten, wobei die laminare Grenzschicht bereits gewährleistet ist. Während die LES angesichts der guten Übereinstimmung mit den Experimenten (siehe z. B. Abbildung 7.50) als Referenzlösung angesehen wird, weichen die Profile aller anderen Lösungen aufgrund der spezifischen Defizite der Simulationen zunächst ab. Für den globalen Vergleich der Geschwindigkeitskomponenten und Reynolds-Spannungen zeigt die ID-DES die größte Nähe zur LES, gefolgt von der DES. Die Simulation cDNS fällt demgegenüber deutlich zurück. Hervorzuheben ist die relativ gute Qualität der mittleren Geschwindigkeiten aus der RANS-Simulation. Es ist gerade diese Fähigkeit von RANS, den Verlauf der Hauptströmung passabel erfassen zu können, der die Beliebtheit des Ansatzes industriell rechtfertigt. Der Tendenz zur Instationarität der betrachteten Strömung in der lateralen Geschwindigkeitskomponente, die auch in stationärer Simulation nicht unterdrückt werden kann, ließe sich in diesem Umfeld mit U-RANS begegnen. Im Gegensatz dazu ist von vornherein einsichtig, daß die Schwankungsgrößen zur Berechnung der Reynolds-Spannungen mit RANS gar nicht und mit U-RANS nur bedingt für diese Strömung vorhersagbar sind.

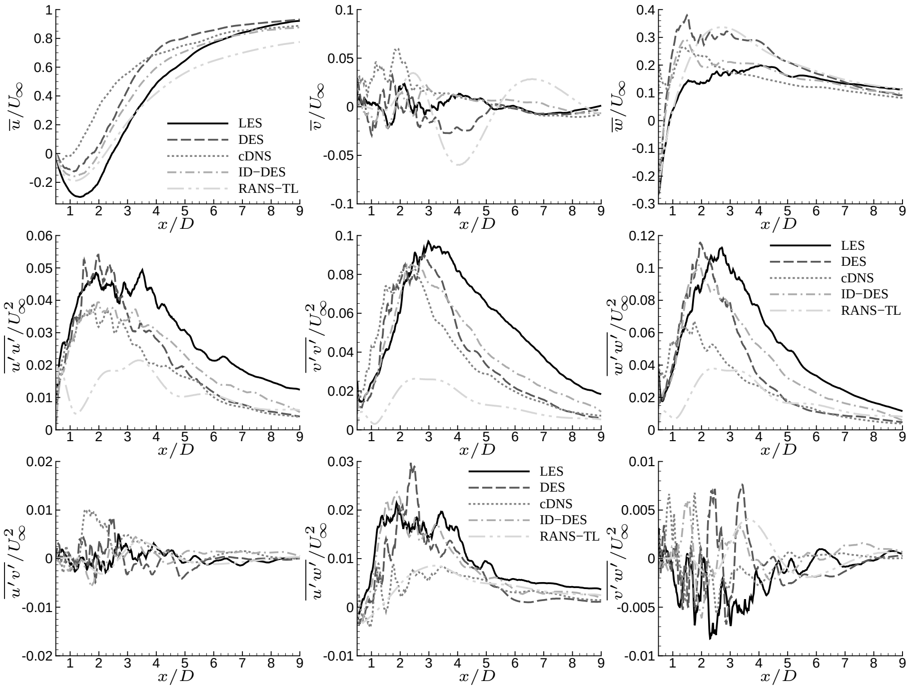
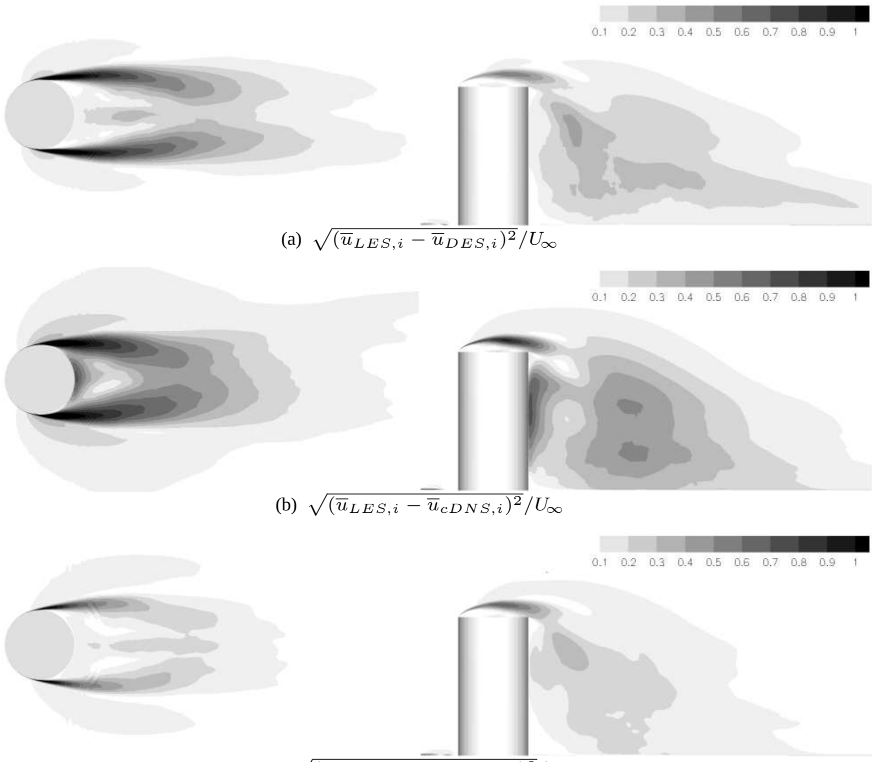


Abb. 7.66: Profile gemittelter Geschwindigkeiten und Reynolds-Spannungen in der Linie $(y{=}0, z/D{=}-0.5)$ im Vergleich verschiedener Simulationsansätze

Zur Visualisierung der Unterschiede zwischen zwei Simulationsansätzen und vor allem auch deren Ursprung bedienen sich BOTCHEN *et al.* (2006) eines Skalarfeldes für die Unsicherheit (engl. uncertainty). Diese bereits in FREDERICH *et al.* (2008*b*) benutzte Methode zum Vergleich von LES und DES basiert auf der Differenz der lokalen Geschwindigkeitsvektorfelder, z. B. $\sqrt{(\overline{u}_{LES,i} - \overline{u}_{DES,i})^2}$. Der Betrag des Differenzvektorfeldes ist in Abbildung 7.67 für die hochauflösenden Simulationansätze bezüglich der LES ausgewertet und in zwei Ebenen visualisiert. So ist unmittelbar nachvollziehbar, daß die Defizite der Vorhersage von DES aus der verspäteten Ablösung und dem zu gering ausgedehnten Nachlauf erwachsen. Analoges ist für cDNS erkennbar, wobei die Ausprägung überall – also am Kopf, an der Seite und im Nachlauf – stärker ist. Zusätzlich zeigen sich bei cDNS topologische Unterschiede direkt stromab des Zylinders. Die stärkste Annäherung an die LES ist bei ID-DES zu sehen, wo die Differenzen der Geschwindigkeiten vom Betrag und der räumlichen Ausdehnung am kleinsten sind. Die Unsicherheit am Zylindermantel resultiert in diesem Fall nicht aus verspäteter Ablösung, sondern fehlender Aufweitung infolge Diffusion sowie einem geänderten Zuströmprofil. Es sei bei dieser Gegenüberstellung mittels Differenzen zuletzt auch nicht vergessen, daß nur die LES als statistisch auskonvergiert betrachtet werden kann.



(a) $\sqrt{(\overline{u}_{LES,i} - \overline{u}_{DES,i})^2}/U_\infty$

(b) $\sqrt{(\overline{u}_{LES,i} - \overline{u}_{cDNS,i})^2}/U_\infty$

(c) $\sqrt{(\overline{u}_{LES,i} - \overline{u}_{ID-DES,i})^2}/U_\infty$

Abb. *7.67:* Betrag des Differenzvektorfeldes im Vergleich verschiedener Simulationsansätze gegenüber LES in den Ebenen $z/D = -1$ (links) und $y = 0$ (rechts)

Die dominanten Frequenzen und gemittelte integrale Kraftbeiwerte für die diskutierten Simulationen sind in Tabelle 7.5 zusammengestellt. Die Frequenzen finden sich in den Zeitschrieben des Seitenkraftbeiwertes und lokal aufgezeichneter Signale. Die dominante Frequenz um $\mathrm{St} = 0.16$ wird von allen Simulationen recht gut erfaßt. Dies deutet darauf hin, daß der Ursprung nicht direkt am Zylinder zu suchen ist, sondern durch die Interaktion von seitlicher und Strömung über den Kopf hervorgerufen wird. Bis auf die außen vorstehende cDNS enthalten alle Simulationsergebnisse eine weitere wichtige Frequenz bei $\mathrm{St} = 0.20$, welche mit sehr großer Wahrscheinlichkeit das typische Ablösen an einer gestreckten Zylindermantelfläche repräsentiert. Die später noch auffällige Frequenzkomponente bei 0.115 tritt in den benutzten Signalen für Kraftbeiwerte und lokale Monitorpunkte nicht dominierend hervor.

Der mittlere vertikale Auftriebsbeiwert $\overline{C_z}$ wird ebenso durchweg ähnlich vorhergesagt. Aufgrund des negativen Vorzeichens bedeutet dies, daß die Aufwärtskomponente der anliegenden Strömung an der Vorderseite, aber auch die wiederanlegende Strömung auf der Rückseite des Zylinders gleichermaßen gut berechnet wird. Demgegenüber ist die Widerstandskraft $\overline{C_x}$ nur von LES in der richtigen Größenordnung verfügbar. Ausschlaggebend für deren Bestimmung ist die korrekte Größe des Rezirkulationsgebietes als Kombination von Kopfüberströmung und seitlicher Umströmung, womit die dominierende Druckkraft die richtige Größe aufweist. Durch die verspätete Ablösung bzw. die zu geringe Ausdehnung des Nachlaufes in den anderen Simulationen ist der Basisdruck hinter dem Zylinder gegenüber LES zu groß (nicht negativ genug) bzw. in einem zu kleinen Gebiet wirksam. Hieraus resultiert dann die Unterschätzung des Widerstandsbeiwertes.

Simulation	St_1	St_2	$\overline{C_x}$	$\overline{C_z}$
LES	0.16	0.20	0.82	-0.24
DES	0.15	0.21	0.55	-0.26
cDNS	0.15	0.24	0.47	-0.26
ID-DES	0.16	0.20	0.56	-0.23
RANS-TL	–	–	0.60	-0.23

Tab. *7.5:* Dominante Frequenzen und mittlere integrale Kraftbeiwerte am Zylindermantel für die verschiedenen Simulationen

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Simulation mittels LES bezüglich der Vorhersagequalität ihres Gleichen sucht. Die Wichtigkeit des Feinstrukturmodells läßt sich dabei aus der Differenz mit der Simulation cDNS erkennen. Aufgrund der Komplexität der Strömung und fehlender Methoden, um Ursache und Wirkungen zu trennen, soll auf die Quantifizierung des Einflußes verzichtet werden. Obwohl durch die Verwendung der gleichen Diskretisierung bei cDNS die turbulente Energiekaskade ebenfalls bis weit in den Trägheitsbereich aufgelöst wurde, ist der fehlende Anteil offensichtlich eklatant wichtig. Eine Schlußfolgerung ist, daß bei dieser stark abgelösten Strömung gerade die vernachlässigte Dissipation und fehlende Diffusion großen Anteil an der Turbulenzproduktion (besonders für die kleinen Skalen) haben.

Die Vorhersagen mit den auf der DES basierenden Ansätzen haben in beiden Fällen Defizite, welche aus fehlender bzw. aktiver Behandlung (Laminarhaltung) der anliegenden Grenzschichten am Zylinder resultieren. Hier wird deutlich, daß gerade für den laminar-turbulenten Übergang im Rahmen numerischer Simulationen zur Zeit kein allgemeingültiger Ansatz verfügbar ist. Deshalb ist dieses Themenfeld aktuell verstärkt im Fokus der Forschung (siehe dazu z. B. MENTER *et al.*, 2006; FU *et al.*, 2010).

7.5.2 Einfluß der Randbedingungen

In Anbetracht der notwendigen Rechnerressourcen können Variationen der Randbedingungen bei den hochauflösenden Simulationen nicht in beliebigem Umfang durchgeführt werden. Trotzdem sind aufgrund der Projekthistorie zumindest Zuströmprofil und Wandrandbedingung variiert worden. Am Einströmrand wurde, neben einem konstanten Blockprofil, ein numerisch generiertes Zuströmprofil (Abbildung 6.8 a) verwendet, welches die Verblockung bzw. den Aufstau durch den Zylinder stromauf berücksichtigt. Die rein optisch feststellbaren Unterschiede zwischen den gemittelten Strömungsfeldern beider Simulationen sind zylindernah marginal. Infolge des lokal höheren dynamischen Druckes bei der Simulation mit dem Blockprofil (LES-B) ist das Strömungsgebiet auf dem Kopf flacher ausgeprägt und das Rezirkulationsgebiet stromab verkürzt und etwas schmaler. Die seitliche Ablösung, die Topologie des mittleren Strömungsfeldes sowie die dominanten Frequenzen sind vom Zuströmprofil fast nicht beeinflußt. Wie in Abbildung 7.68 zu erkennen, sind die stärksten Differenzen am Zylinderkopf und auf der Grundplatte stromauf des Zylinders zu finden. Letztere Region resultiert aus der fehlenden wandnahen Anpassung der Einströmgeschwindigkeiten zur Platte im Fall des Blockprofils.

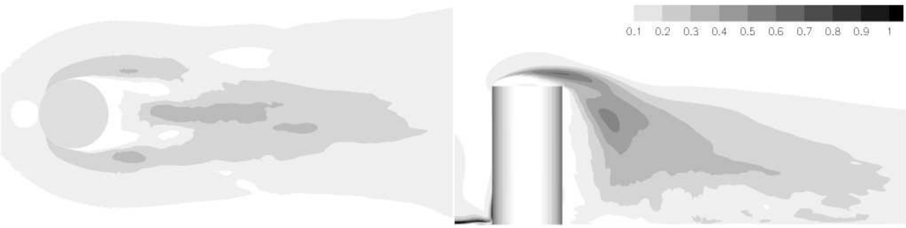


Abb. *7.68:* Betrag des Differenzvektorfeldes $\sqrt{(\overline{u}_{LES,i} - \overline{u}_{LES-B,i})^2}/U_\infty$ bei Variation des Zuströmprofils in den Ebenen $z/D = -1$ (links) und $y = 0$ (rechts)

Bei der Wandrandbedingung wurde die Wirkung der Wanddämpfungsfunktion (2.68) in einer Simulation (WD-LES) nachträglich erprobt. Im Vergleich zur LES ohne Wanddämpfung sind Abweichungen im zeitlich gemittelten Strömungsfeld weitaus geringer als bei Variation des Zuströmprofils. Fast ausschließlich finden sich geringe Unterschiede in den wandnahen Geschwindigkeitsprofilen, wobei die abgelöste Region kaum verändert wird. Auch wenn sich, wie Tabelle 7.6 zeigt, nominell kleine Unterschiede in der Geometrie des Rezirkulationsgebietes ergeben, sind im direkten quantitativen Vergleich, beispielsweise über den Betrag des Differenzvektorfeldes, nur der wandnächste Bereich wie auch geringfügig die abgelösten Scherschichten betroffen. Da auch die zusätzliche Simulation mit Wanddämpfung nicht bis zur abschließenden statistischen Konvergenz fortgeführt wurde, resultieren einige der quantitativen Differenzen auch aus den stark unterschiedlichen statistischen Basen. Interessanterweise zeigt die (hier nicht dokumentierte) Simulation mit dem dynamischen Smagorinsky-Feinstrukturmodell nahezu identische Einflußgebiete und damit Ergebnisse zu WD-LES.

Simulation	$x/D^{1)}$	$z/D^{1)}$	$\Delta y_{max}/D^{2)}$	$x_{max}/D^{3)}$
LES	0.805	-1.483	1.202	2.870
LES-B	0.691	-1.519	1.188	2.477
WD-LES	0.812	-1.524	1.204	3.004

in der Ebene $^{1)}$ $y = 0$, $^{2)}$ $z/D{=}{-}0.5$ bzw. $^{3)}$ $z = 0$

Tab. *7.6:* Zentrum des Rezirkulationswirbels und Ausdehnung des Rezirkulationsgebietes bei Variation der Randbedingungen

Weitere Möglichkeiten den Einfluß verschiedener Randbedingungen zu beurteilen, lieferte beispielsweise die stationäre Simulation mittels RANS. Hier wurde eine voll turbulente Simulation (RANS-FT) mit einströmender Turbulenz und eine ohne diese (RANS-TL) durchgeführt. Wesentlicher Unterschied ist der angestrebte laminare Charakter der Grenzschicht am Zylindermantel für den Fall RANS-TL. Gegenüber der voll turbulenten Simulation RANS-FT wird durch Deaktivierung der einströmenden Turbulenz, die Ablösung von etwa 100° zu 80° verschoben und zwangsläufig der Nachlauf räumlich ausgedehnter. Die Gründe dafür wurden bereits diskutiert. Der gleichartige Versuch, die Vorhersage der hochauflösenden DES durch die Deaktivierung einströmender Wirbelviskosität zu verbessern, wurde mit vorheriger Gewißheit des Scheiterns mit geringem Ressourceneinsatz unternommen. Weil das benutzte Hintergrundmodell LLR k-ω (vgl. Anhang B.2.2) keine Dämpfungsfunktion wie im Falle des SA-Modells f_{t2} beinhaltet, bleibt der Produktionsterm im gesamten Strömungsfeld aktiv. Wie bereits vormals erwähnt, wird bei Konstruktion der Koeffizientenmatrix nicht nach den Einzelanteilen (Produktion, Dissipation, etc.) unterschieden, so daß die implizite Lösung des Gleichungssystems die Wirbelviskosität in allen Termen gleich verteilt. Abhilfe könnte hier durch explizite Deaktivierung des Produktionsterms, eine Dämpfungsfunktion oder ein anderes Hintergrundmodell erreicht werden.

7.6 Energiebasierte Analysen der Grobstrukturdynamik

Für die Analyse des turbulenten Strömungsfeldes bezüglich seiner zeitlich Variation bietet sich eine energetisch basierte Reduktion der Fülle instationärer Momentanaufnahmen an. Passend zur benutzten LES, bei der die großen energietragenden Strukturen simuliert werden, wird mit POD ein energetisch optimales System an räumlichen Moden konstruiert. Diese werden nach dem Betrag der abgebildeten Fluktuationsenergie sortiert und können als kohärente Strömungsstrukturen interpretiert werden. Die zugehörigen zeitlichen Amplituden (hier als Zeitkoeffizienten bezeichnet) aus der POD-Zerlegung beschreiben die Dynamik der jeweiligen Mode. Die theoretischen Details von POD und eine Diskussion zu deren physikalischer Relevanz sind im Abschnitt 4.2 gegeben. Hervorzuheben ist hier nochmals, daß der Bezug zur turbulenten Schwankungsenergie über die Definition des inneren Produktes bei der Berechnung der Korrelationsmatrix hergestellt wird.

Vor dem Versuch der physikalischen Interpretation von Moden und Zeitkoeffizienten werden Untersuchungen zur Dimensionierung der Datenbasis für POD präsentiert. Im Resultat werden die Ergebnisse einer POD-Zerlegung basierend auf dem originalen Simulationsgitter und allen verfügbaren Schnappschüssen vorgestellt. Anschließend werden POD-Zerlegungen in drei wichtigen Teilgebieten und Filterungsansätze beschrieben, um die detektierte Frequenzvermischung und globale Korrelation zu reduzieren. Einzelergebnisse der POD-Analyse des Geschwindigkeitsfeldes sind bereits in FREDERICH *et al.* (2007*a*,*b*, 2008*a*, 2009*b*,*c*) veröffentlicht.

7.6.1 Räumlich-zeitliche Datenbasis für POD

Die Voruntersuchungen zu POD konzentrieren sich auf die Größe des betrachteten Strömungsfeldausschnittes und den zeitlichen Abstand der Momentanaufnahmen (damit auch auf deren Anzahl). POD wird dabei auf das instationäre Geschwindigkeitsvektorfeld angewendet. In Erweiterung zu den publizierten Ergebnissen in FREDERICH *et al.* (2007*b*) werden drei unterschiedlich große räumliche Gebiete und verschiedene Abtastraten des Strömungsfeldes variiert. Der quantitative Vergleich beinhaltet aber nicht alle möglichen Kombinationen, sowie ebenfalls nicht die planare Zerlegung (Abschnitt 7.4.5). In Tabelle 7.7 sind die benutzten Gebiete und Datenbasen aufgelistet. Aufgrund des extensiven Rechenbedarfs ist die POD der Gesamtdomain nur für den kleinsten Zeitschritt $5\Delta t$ durchgeführt worden, aber für die erweiterte Datenbasis von $2\,744$ Datensätzen. Für die kleineren räumlichen Gebiete wurde jeweils ein kartesisch äquidistantes Gitter mit linear interpolierten Daten verwendet. Obwohl der Zylinder darin nur implizit enthalten ist, konnte durch die Vernachlässigung hoch aufgelöster Wanddetails der Rechenaufwand für POD drastisch reduziert werden.

Räumliche Gebiete

Bezeichnung	Gebietsgröße	Gitterpunkte	Bemerkung
Domain 1	$3D \times 1.5D \times 2D$	$0.7 \cdot 10^6$	kartesisch, interpoliert
Domain 2	$6D \times 3.0D \times 3D$	$4.2 \cdot 10^6$	kartesisch, interpoliert
Gesamtdomain	LES-Gitter	$12.3 \cdot 10^6$	block-strukturiert

Zeitliche Datenbasen

Bezeichnung	Zeitschritt	Abtastrate St_a	Datensätze
Zeitschritt 100	$100\Delta t$	2.0	114
Zeitschritt 50	$50\Delta t$	4.0	228
Zeitschritt 25	$25\Delta t$	8.0	456
Zeitschritt 20	$20\Delta t$	10.0	571
Zeitschritt 10	$10\Delta t$	20.0	1 142
Zeitschritt 5	$5\Delta t$	40.0	2 284 / 2 744

Tab. *7.7:* Unterschiedliche Gebiete und Datenbasen für die POD-Zerlegung

Die verschiedenen Gebiete sind mit ihrer räumlichen Lage und Ausdehnung in Abbildung 7.69 gezeigt. Während die Gesamtdomain das gesamte simulierte Feld abdeckt, beinhaltet das mittlere Gebiet Kopfüberströmung und wichtige Teile des Nachlaufes und die kleinste Domain fast nur das Rezirkulationsgebiet mit den begrenzenden Scherschichten.

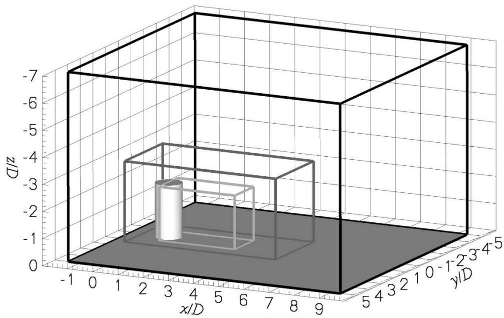
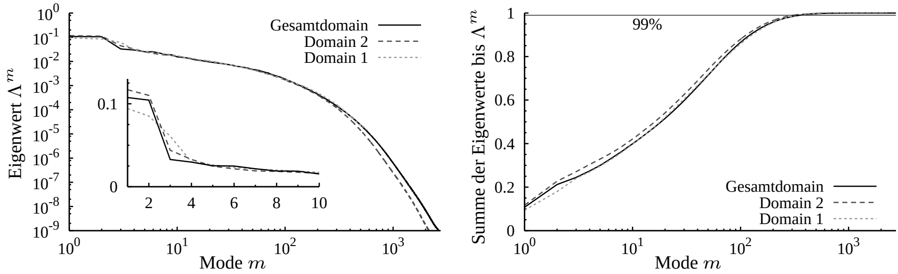


Abb. *7.69:* Ausdehnung und Lage der räumlichen Gebiete für die POD-Zerlegung

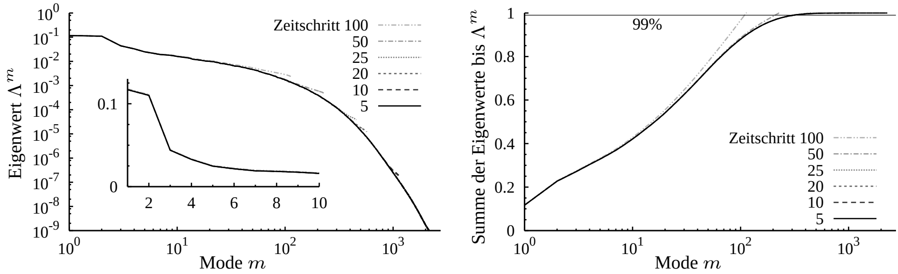
Die normierten Eigenwerte aus POD sind identisch mit dem prozentualen Anteil der von der Mode bzw. dem Zeitkoeffizienten repräsentierten Schwankungsenergie. Wie in Abbildung 7.70 ersichtlich, unterscheidet sich der globale Verlauf der einfachen und kumulativen Spektren sowohl bei räumlicher als auch bei zeitlicher Variation nur sehr wenig. Die geringen Unterschiede bei der Variation der Datenbasis sind relativ einfach durch den sehr kleinen Simulationszeitschritt Δt zu erklären. Die betrachteten Zeitschrittvariationen sind immer noch in der Lage, die bereits in den Frequenzspektren (vgl. Abschnitt 7.3.5) erkennbaren, dominanten Phänomene bei kleinen Strouhal-Zahlen zu erfassen. Anhand der summierten Eigenwerte zeigt sich, daß der maximale Zeitschritt der Momentanfelder $25\Delta t$ sein sollte, um das kumulative Spektrum angemessen zu reflektieren. Wegen des geringen Einflußes wird im Weiteren die Variation der Zeitschritte nahezu unberücksichtigt gelassen.

Wichtigere Abweichungen finden sich bei modifizierter Größe der Strömungsvolumina. Gerade bei den vergleichsweise energiereichen Moden 1 bis 4 kann mit dem kleinsten Gebiet deren Dominanz nicht erfaßt werden, weil die Grobstrukturen nicht vollständig enthalten sind. Eine der Erkenntnisse in FREDERICH *et al.* (2007*b*) war, daß POD in einem größtmöglichen Gebiet durchgeführt werden sollte, um die dominanten Moden bestmöglich aufzulösen. Um so erstaunlicher, daß der Energieanteil der beiden ersten Moden für die Gesamtdomain gegenüber der mittleren Domain abfällt. Im Gegensatz dazu wird die Modenpaarung, erkennbar an nahezu gleichen Eigenwerten, in den Moden 3 und 4 gestärkt.

Generell ist im Verlauf der Eigenwertspektren festzustellen, daß das dominante Paar [1,2] energetisch hervorsticht, die weiteren Moden aber sehr ähnliche Anteile der Schwankungsenergie repräsentieren. Aufgrund des geringen Abfalls zu den nächst höheren Moden für $m > 3$ ist für diese höchstens der Terminus „wichtig“ anstatt „dominant“ angebracht. In der Folge werden sehr viele Moden benötigt, um einen adäquaten Anteil der in den Momentanaufnahmen enthaltenen Schwankungsenergie darzustellen. Die quantitativen Angaben in Tabelle 7.8 verdeutlichen diese Problematik. Vom dominanten Modenpaar wird wenig mehr als 20% der Energie aufgenommen, und doch ist bereits etwa ab Mode 20 der Energieanteil geringer als 1%. Deshalb werden für die relativ schwache Forderung nach 90% Anteil mehr als 100 Moden benötigt. Für die stärkeren Forderungen schnellt die Modenanzahl stark in die Höhe, weil die Energieanteile ebenso stark abnehmen.



(a) Variation der Gebietsgröße für $5\Delta t$



(b) Variation der Datenbasis für Domain 2

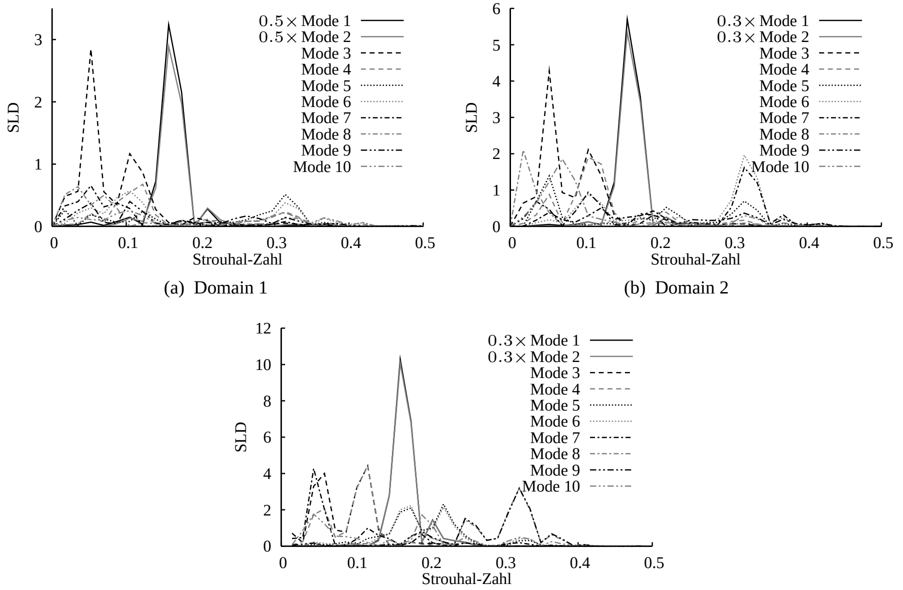
***Abb.** 7.70:* Einfache und kumulative Spektren der normierten Eigenwerte bei Variation von Gebietsgröße oder Datenbasis

		m für Λ^m			M für $\sum_{m=1}^{M} \Lambda^m$		
Gebiet	$\Lambda^1 + \Lambda^2$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-2}$	$> 90\%$	$> 95\%$	$> 99\%$
Domain 1	0.1794	343	142	21	129	189	336
Domain 2	0.2271	317	134	21	114	168	310
Gesamtdomain	0.2119	338	137	19	123	183	353

***Tab.** 7.8:* Größe der normierten Eigenwerte und summierte Fluktuationsenergie bei Variation der Gebietsgröße

Die Zeitkoeffizienten beschreiben die zeitliche Skalierung der Mode, welche direkt mit der zugehörigen Strömungsdynamik im Schnappschußensemble verknüpft ist. Die spektrale Analyse einzelner Zeitkoeffizienten gibt damit Aufschluß über beteiligte Frequenzen und die Periodendauer der extrahierten kohärenten Strukturen. In Abbildung 7.71 sind die Frequenzspektren der ersten zehn Zeitkoeffizienten für die drei verschiedenen Gebiete aufgetragen. Allen gemein ist die stark ausgeprägte Dominanz des ersten Modenpaares. Im Detail ist festzustellen, daß fast alle Moden mehrere Frequenzanteile beinhalten. Die Separation von Frequenzen ist im POD-Ansatz nicht inhärent enthalten. Mit steigender Gebietsgröße nimmt die Vermischung von Frequenzen in einzelnen Moden ab, verschwindet aber nicht vollständig. Dennoch wird die Zugehörigkeit von paarweisen Moden deutlicher hervorgehoben, so daß die Ähnlichkeit ihrer

Spektren zunimmt. Gleichwohl bleibt in allen Fällen der Wert und die der Strömungskonfiguration anhaftende, charakteristische Nähe der beteiligten Frequenzen erhalten.



(a) Domain 1 (b) Domain 2

(c) Gesamtdomain

Abb. *7.71:* Spektren der Zeitkoeffizienten bei Variation der Gebietsgröße und größter Datenbasis

Aufgrund der Eigenschaften von POD sind die Zeitkoeffizienten vollständig unkorreliert in der Zeit – mathematisch beschrieben durch die Normierung (4.21). Trotzdem kann die optisch wahrnehmbare Ähnlichkeit einander zugehöriger Zeitkoeffizienten in Form einer Korrelation berechnet werden. Dazu werden die Zeitsignale der Modenamplituden zeitlich zueinander verschoben und iterativ die maximale Korrelation $\overline{a_k(t_n)a_l(t_n+\tau)}$ zweier Signale berechnet. Hohe Korrelationswerte zeigen Zugehörigkeit oder Interaktion zwischen den Moden an, während niedrige Werte die harmonische Trennung der Moden andeuten. Unter der Annahme, daß die Zeitkoeffizienten zweier einander zugehöriger Moden der gleichen Harmonik ähnlich wie Sinus- und Cosinus-Funktion um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben sind, liefert die Zeitverschiebung τ über $f = \frac{1}{4\tau}$ einen direkten Zusammenhang zur (mittleren) Frequenz. Für Korrelationswerte ganz nahe 1 ist dies eine Frequenz des Systems und in den Frequenzspektren abgebildet.

Die maximierte Korrelation der wichtigsten Zeitkoeffizienten wurde für die drei Gebietsgrößen berechnet und ist in Abbildung 7.72 als Matrixdarstellung (ohne redundante Information) enthalten. Die bereits in den Spektren beobachtete Stärkung der Modenpaarung wird hier hervorgehoben. Darüber hinaus zeigt der mit der Gebietsgröße ansteigende relative Korrelationsverlust vieler Matrixeinträge die bessere Separation von Frequenzen und damit auch Strukturen an. Für die Gesamtdomain führen die ermittelten Zeitverschiebungen τ der Modenpaare [1,2], [3,4], [5,6] und [8,9] auf Strouhal-Zahlen von 0.175, 0.112, 0.222 und 0.294. Im Vergleich zu den

Spektren aus Abbildung 7.71 c weichen diese Werte leicht ab, worin sich der mittelnde Charakter der Korrelation widerspiegelt. Im Umkehrschluß weisen die Unterschiede auf mehrere beteiligte Frequenzen bzw. deren Variabilität hin.

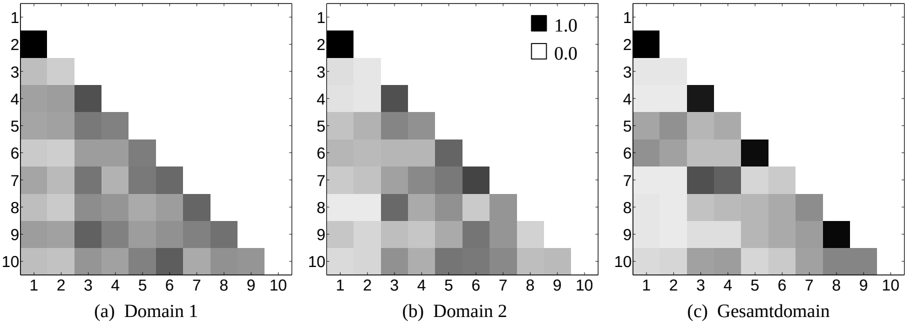


***Abb.** 7.72:* Maximierte Korrelation der Zeitkoeffizienten bei Variation der Gebietsgröße

Ein Maß für die Bestimmtheit einer Mode oder das Durcheinander in einem Zeitkoeffizienten kann über die Informationsentropie, beschrieben von JAYNES (1957), gewonnen werden. Indem die Spektren der einzelnen Zeitkoeffizienten bezüglich ihrer lokalen Eigenschaften gewichtet und summiert werden, ergibt sich die Möglichkeit, Frequenzvermischung zu quantifizieren. Für die Berechnung der Informationsentropie $S_I^m = -\sum s_i^m \ln s_i^m$ werden die normierten spektralen Leistungsdichten $[s_i]^m$ aus dem Frequenzspektrum der einzelnen Zeitkoeffizienten der Mode m benutzt. Eine Normierung mit der maximalen Leistungsdichte stellt sicher, daß für den Grenzfall eines tonalen (monofrequenten) Signals die Informationsentropie verschwindet.

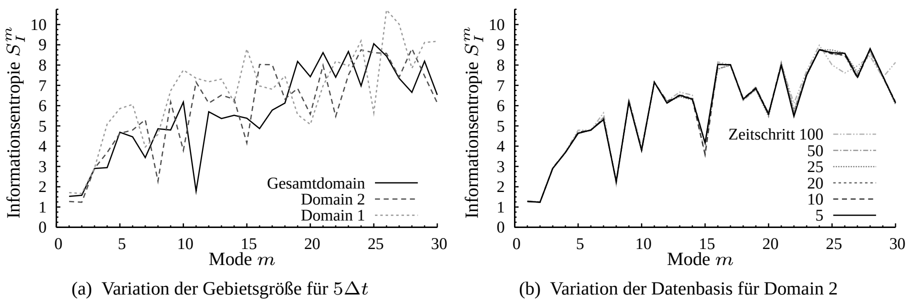


***Abb.** 7.73:* Informationsentropie in den Spektren der Zeitkoeffizienten bei Variation von Gebietsgröße und Datenbasis

Die betrachtete Variation der zeitlichen Datenbasis für POD hat verschwindenden Einfluß auf den Informationsgehalt der Zeitkoeffizienten; wiederum aufgrund der relativ hohen Abtastraten (vgl. Abbildung 7.73 b). Die Maximierung des zerlegten räumlichen Volumens schärft nicht nur die Abgrenzung der Moden zueinander, sondern steigert die Bestimmtheit der wichtigen Moden (bis ca. 20) nicht unerheblich (siehe Abbildung 7.73 a). Die lokal geringere Informationsentropie der kleineren Gebiete für die Moden zwischen 19 und 25 ist mit großer Wahrscheinlichkeit eine Folge der Glättung durch die Interpolation auf das kartesische Gitter. Die dadurch hervorgerufene Dämpfung hochfrequenter bzw. kurzwelliger Lösungsanteile ist für eine reduzierte Skalenvermischung in den POD-Moden durchaus vorteilhaft.

Die vorgestellten Vergleiche belegen, daß die Qualität der Zerlegung mittels POD für große Strömungsgebiete global verbessert wird. Die zeitliche Datenbasis ist infolge des geringen Zeitschrittes der Simulation von untergeordneter Bedeutung. Weil POD aber statistisch existente Strukturen extrahiert, wird die Konvergenz der Statistik bei vielen Datensätzen verbessert. Kleine Zeitschritte etablieren dabei hochfrequente Lösungsanteile auch in den Moden und Zeitkoeffizienten. Die globale Korrelation aller Schwankungen im Strömungsfeld ist einer der Gründe für die verbesserten Eigenschaften der POD-Ergebnisse bei großem Volumen. Im Abschnitt 7.6.7 wird versucht, die damit verbundenen Defizite bei der Erfassung lokaler Details der Strömungsdynamik durch die Betrachtung einzelner Strömungsregionen zu kompensieren.

7.6.2 POD des Geschwindigkeitsvektorfeldes

Die nachfolgend dargestellten Moden und Zeitkoeffizienten basieren auf der POD von 2 744 Momentanaufnahmen des räumlich hochaufgelösten Strömungsfeldes aus der LES. Die Berechnung der Korrelationsmatrix ist basierend auf den topologischen Blöcken des zugehörigen Gitternetzes parallelisiert durchgeführt worden. Damit ist auch die Instationarität der detailliert aufgelösten Grenzschichtbereiche enthalten, wenn auch durch Gewichtung mit den dort kleinen Zellvolumina in gewisser Weise unterrepräsentiert.

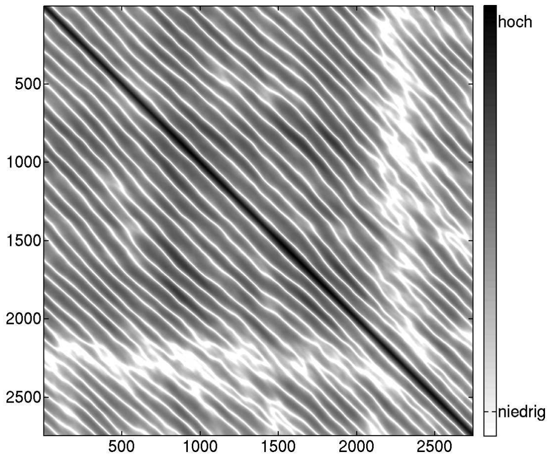
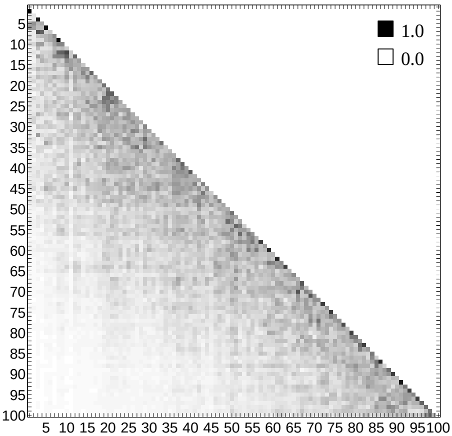
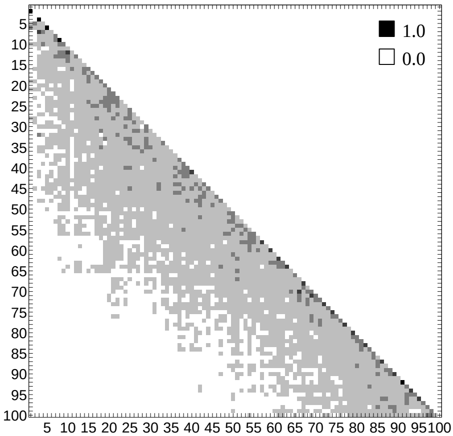


***Abb.** 7.74:* Visualisierung der POD-Korrelationsmatrix für das Geschwindigkeitsfeld (Grauwerte entsprechen $log\,|\mathrm{C}_{mn}|$)

Die wichtigsten Eigenschaften der Korrelationsmatrix, wie Eigenwerte und deren energetische Bedeutung, wurden bereits im vorherigen Abschnitt 7.6.1 erläutert. Die Matrix selbst ist in Abbildung 7.74 derart visualisiert, daß die durch ihre Einträge repräsentierte Korrelation zweier Momentaufnahmen bezüglich ihrer Stärke (niedrig oder hoch) beurteilt werden kann. Neben der Eigenkorrelation der Einzelaufnahmen auf der Diagonale ist die dominante Periodizität auf einer Art Nebendiagonalen augenfällig. Wegen der vorzeichenfreien Darstellung wiederholen sich starke Korrelationen zweifach pro zugehöriger Periodendauer. Die halbe Periode von etwa $115...120$ Zeitschritten entspricht der dominanten, aber variierenden Frequenz bei $\mathrm{St} = 0.166...0.174$. Die logarithmische Repräsentation hebt einen starken Korrelationsverlust bezüglich dieser Frequenz im hinteren Teil der Datenbasis hervor. Offenbar ändert sich die Harmonik der turbulenten Nachlaufströmung und damit auch ihre Struktur in einem zeitlich lokalen Band erheblich. Für die Zuordnung und Klärung dieses Phänomens sind weitere Untersuchungen unternommen worden (siehe z. B. nächster Abschnitt 7.6.3).



(a) normiert



(b) gerundet auf 0, 0.25, 0.5, 0.75 und 1

Abb. *7.75:* Maximierte Korrelation der Zeitkoeffizienten für das Geschwindigkeitsfeld

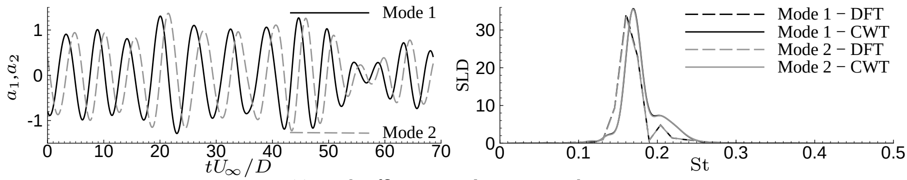
Die Spektren der wichtigsten Zeitkoeffizienten und deren maximierte Korrelation wurden bereits in Abbildung 7.71 c bzw. Abbildung 7.72 c gezeigt. Die Erweiterung der Korrelationsberechnung auf 100 Moden ist in Abbildung 7.75 auf zweierlei Arten visualisiert. Die normierte Darstellung verdeutlicht schnell, daß die Paarung von Moden oberhalb von 10 bis etwa 60 sehr schwach ausgeprägt ist. Obwohl danach wieder starke Paarungen auftauchen, sind diese aufgrund der geringen Eigenwerte (Energieanteile) zur Extraktion harmonischer Anteile der Grobstrukturdynamik unbrauchbar. Die Rundung der Korrelationswerte auf diskrete Niveaus zeigt mehrere Aspekte auf. Hohe Korrelationen existieren nur auf oder dicht an der Diagonale. Infolge der energetischen Sortierung bedeutet dies, daß energetisch sehr ähnliche Moden stärker korreliert sind als energetisch verschiedene. Verstärkt wird dieser Fakt noch durch die Konzentration jeglicher relevanter Korrelationen auf die Nähe der Diagonale. Im Umkehrschluß ist die energetische Anordnung der Moden im Rahmen von POD – zumindest für diesen Fall – nicht vollständig abgekoppelt von einer durch die Strömung vorgegebenen Frequenz- oder Skalentrennung. Allerdings wird eine Reihe von Moden anstatt eines einzelnen Paares für die Beschreibung verschiedener Skalenbänder benötigt.

Der Mittelwert aller $2\,744$ Momentanaufnahmen ist topologisch identisch und statistisch kaum unterscheidbar zum zeitlich akkumulierten Mittelwert der LES. Die nullte Mode, welche die mittlere Strömung charakterisiert, ist deshalb schon detailliert im Abschnitt 7.3.1 diskutiert.

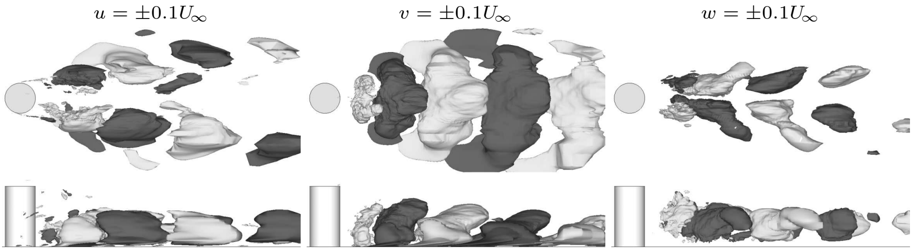
Die über alle anderen Phänomene herausragende Periodizität im Strömungsfeld – bereits erkennbar aus der Korrelationsmatrix in Abbildung 7.74 – ist in wesentlichen Teilen im dominanten Modenpaar [1,2] enthalten. Alle Bestandteile der POD-Zerlegung für diese Moden sind in Abbildung 7.76 dargestellt. Die Zeitkoeffizienten beider Moden sind ähnlich wie Sinus- und Cosinusfunktion um $\pi/2$ zueinander phasenverschoben, wobei die Kurven qualitativ und quantitativ fast perfekt übereinstimmen. Die ebenfalls in der Korrelationsmatrix erkennbare Störung der dominanten Bewegung wird durch die starke lokale Reduktion der Modenamplitude beschrieben.

Die zugehörigen Spektren wurden aufgrund der mit $2\,744$ Punkten in rund 70 konvektiven Einheiten geringen Signallänge sowohl mit der Diskreten Fourier-Transformation (DFT) als auch aus der Wavelet-Transformation (CWT, Abschnitt 4.1) berechnet. Das Ergebnis der letzteren wird nicht durch Grenzen der Frequenzauflösung, wie im Falle der DFT, geprägt. Die dominanten Spitzen der Spektren sind bei $\mathrm{St} = 0.16$ mit DFT bzw. $\mathrm{St} = 0.17$ mit CWT. Die Abweichung dieser beiden Ergebnisse ist, neben den darstellungstechnischen Aspekten der Ansätze, hauptsächlich das Resultat einer zeitlich variierenden Frequenz. Besonders das Spektrum der Wavelet-Transformation sowie ein entsprechendes Skalogramm in Abbildung 7.82 a zeigen auf, daß es sich um ein dominantes Frequenzband handelt. Diesem beigeordnet ist ein Seitenband um $\mathrm{St} = 0.2$, welches allein charakteristisch für unendlich lange Zylinder wäre.

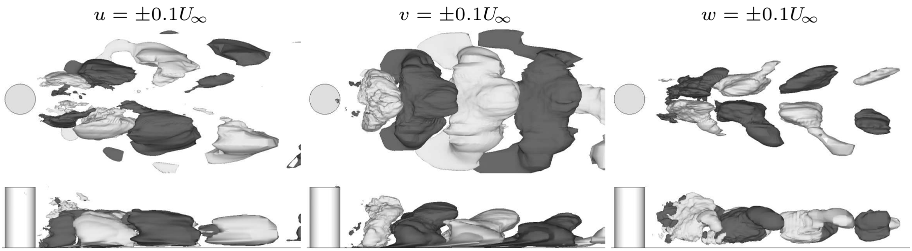
Die Struktur des räumlichen Modenpaares [1,2] ist in Abbildung 7.76 durch repräsentative Isoflächen der drei Geschwindigkeitskomponenten visualisiert. Der Hauptteil der enthaltenen kinetischen Energie ist auf den unteren Nachlauf konzentriert. Dabei sind die u- und w-Komponenten antimetrisch und die v-Komponente symmetrisch bezüglich der Symmetrieebene $y = 0$ angeordnet. Das globale Erscheinungsbild der Moden in x- und y-Richtung beschreibt eine Bewegungsform, die stark einer typischen Wirbelstraße ähnelt. Die alternierende Wirbelablösung nimmt hier jedoch mit der Höhe über der Grundplatte ab und wird zusätzlich vertikal alternierend angehoben. Der harmonische Wellencharakter beider Moden, also der räumliche Versatz konvektierter Strukturen, ist gezielt in Abbildung 7.77 hervorgehoben. Ausgesprochen interessant erscheinen bei dieser von POD extrahierten Bewegungsform zwei Aspekte. Zum einen ist der Einfluß der Kopfüberströmung wohl in allen Geschwindigkeitskomponenten sichtbar, aber besonders in der lateralen Komponente durch die Neigung der Isoflächen auszumachen. Die seitliche Nachlaufschwankung wird in höheren Regionen stärker stromab versetzt und räumlicher schmaler. Zum anderen erscheint die globale Bewegung sich, ungeachtet des rezirkulierenden Nachlaufes und des Wiederanlegens auf der Platte, vom Zylinder bis in den fernen Nachlauf auszudehnen. Die Tatsachen, daß sich in den Zeitkoeffizienten spektrale Anteile um



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren



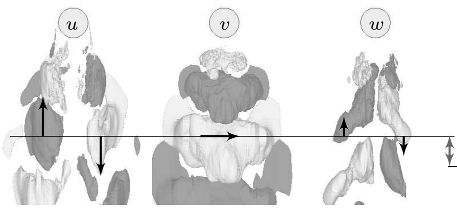
(b) Mode 1



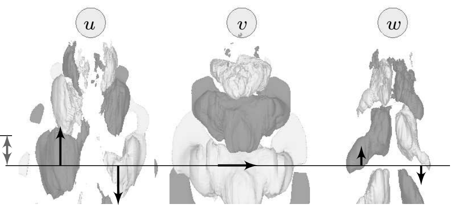
(c) Mode 2

Abb. *7.76:* Dominantes Modenpaar [1,2] der Geschwindigkeiten: Zeitkoeffizienten mit Frequenzspektren und Isoflächen der Geschwindigkeitskomponenten mit Ansichten von oben und von der Seite (+ hell; − dunkel)

$\mathrm{St} = 0.2$ finden und oberhalb des Zylinders diese Frequenz nicht präsent ist, deuten in diesem Zusammenhang auf die Beschreibung eines kombinierten oder aber auch abwechselnden Phänomens aus Wirbelstraße des Gesamtsystems und quasi ungestörtem Wirbelabwurf des unteren Zylindermantels hin. Die topologischen Aspekte der dominanten Nachlaufbewegung sind im Abschnitt 7.6.6 unter Einsatz einer diesbezüglichen Phasenmittelung extrahiert.



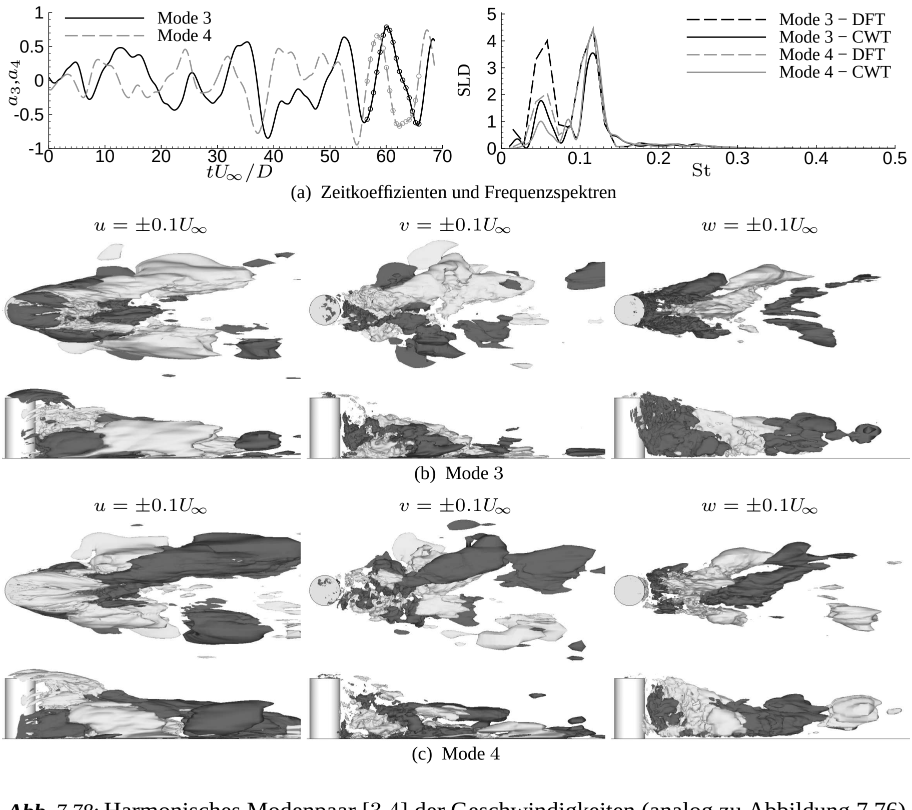
(a) Mode 1



(b) Mode 2

Abb. *7.77:* Dominante Nachlaufbewegung aus Modenpaar [1,2]

Neben dem dominanten Paar sind mindestens drei weitere harmonische Paarungen mit sehr starker Korrelation in Abbildung 7.72 c auszumachen. Für die höheren Moden ist die Skalenmischung stärker und Korrelationen weniger stark ausgeprägt. Dieser Umstand kommt bereits in den Zeitkoeffizienten des zweiten Modenpaares [3,4] zum Ausdruck (vgl. Abbildung 7.78 a), wo die perfekte Harmonik beider Zeitverläufe abnimmt bzw. gestört ist. Die qualitative Form der Kurven ist typisch für die Überlagerung verschiedener Frequenzanteile, wodurch starke Amplituden- und Periodenänderungen auftreten. Die Frequenzspektren, deren maximale Leistungsdichte weitaus geringer als im Fall des Paares [1,2] ist, beinhalten deshalb mindestens zwei prominente Spitzen bei 0.115 und etwa der Hälfte 0.055. Aufgrund der größeren Leistungsdichte ist es unwahrscheinlich, daß die größere Frequenz eine höhere Harmonik der kleineren ist. Trotzdem läßt sich in den Frequenzspektren von Drucksignalen oberhalb des Zylinders (Abbildung 7.41 c) diese kleinere Frequenz mit einer dominierenden Leistungsdichte ausmachen. Anhand der Frequenzspektren in Abbildung 7.40 ist sicher, daß $\mathrm{St} = 0.115$ eine wichtige Frequenz im Nachlauf des Zylinderstumpfes ist, welche von BABAN & SO (1991) mit Oszillationen des Rezirkulationsgebietes verknüpft wird.



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

(b) Mode 3

(c) Mode 4

Abb. *7.78:* Harmonisches Modenpaar [3,4] der Geschwindigkeiten (analog zu Abbildung 7.76)

Die räumliche Struktur der Moden [3,4] läßt auch keine unmittelbare physikalische Interpretation der extrahierten Kohärenz zu. Die harmonischen Eigenschaften einer laufenden Welle sind zwar noch erkennbar, aber weitaus geringer als für das dominante Modenpaar. Dennoch findet sich besonders in den seitlichen Ansichten der Abbildung 7.78 von Mode 3 nach 4 eine Verschiebung der Isoflächen in Richtung des Zylinders und leicht aufwärts. Eine zwischenzeitlich durchgeführte bedingte Mittelung von Momentanaufnahmen auf Grundlage der Zeitkoeffizienten offenbarte pulsierende Änderungen des Nachlaufgebietes in allen räumlichen Richtungen. Der Grund dafür wurde später durch eine Phasenmittelung basierend auf gefilterten Zeitkoeffizienten ermittelt (Abschnitt 7.6.6). Die in Zylindernähe vorherrschende symmetrische Struktur der Moden führt zu in Strömungsrichtung variierender Position des Wiederanlegepunktes auf der Platte. Damit variieren auch die Länge, Breite und Höhe des direkten Nachlaufes (Rezirkulationsgebiet im zeitlichen Mittel) periodisch.

PARK & LEE (2000) führen die Frequenz mit $\mathrm{St} = 0.115$ auf die Abwärtsbewegung im Nachlauf durch die Kopfwirbel zurück, womit ein Zusammenhang zur Kopfüberströmung bestünde. Unter Berücksichtigung der Wichtigkeit des Modenpaares [3,4] – ausgedrückt über ihre Position in der Modensortierung – wäre ihre Verbindung zu diesem Teil der Strömung offenkundig, weil die Kopfüberströmung und die von ihr verursachte Abwärtsbewegung global dominante Strömungsphänomene sind. Die Strömung über den Zylinderkopf hat Anteil an den Variationen des direkten Nachlaufgebietes, die über das Paar [3,4] beschrieben werden. Es kann jedoch keinen Beleg dafür erbracht werden, daß diese Fluktuationen von der Kopfüberströmung verursacht werden. Die Position und Größe der seitlichen Kopfwirbel ist relativ stationär und deshalb hauptsächlich in der Mode 0 enthalten. Demzufolge könnten nur periodische Phänomene aus dem Rezirkulationsgebiet auf der Zylinderkappe die Ursache sein. Interessanterweise steht die dort auffindbare Frequenz von etwa $\mathrm{St} = 0.055$ zu den dominierenden Frequenzen der ersten vier Moden (0.115, 0.17) in einem sehr günstigen Verhältnis. Durch die (nichtlineare) Interaktion bzw. Überlagerung mehrerer Frequenzen im Strömungsfeld können im einfachsten Fall die halbe Differenz- und die halbe Summenfrequenz $\frac{\mathrm{St}_1 \pm \mathrm{St}_2}{2}$ entstehen (EHRENFRIED, 2004). Es ist unmittelbar einsichtig, daß die drei genannten Frequenzen diese Teilungen in mehrfacher Hinsicht erfüllen. Dieser Umstand läßt eine globale Synchronisation des Strömungsfeldes erkennen, wobei Ursache und Wirkung schwerlich unterschieden werden können. Wie verworren die Analyse bei ungenügender Sorgfalt werden kann wird noch durch einen weiteren Umstand hervorgehoben. Die Strouhal-Zahl wurde hier durchgängig mit dem Zylinderdurchmesser D als globalem Längenmaß berechnet. Das charakteristische Längenmaß von oberhalb des Zylinders auftretenden Frequenzen könnte auch die Zylinderhöhe L sein. Bei der betrachteten Konfiguration ist diese wiederum mit dem Faktor 2 bezüglich des Durchmessers verknüpft, womit die Strouhal-Zahl bezüglich der Zylinderhöhe doppelt so groß wäre. Tatsächlich bleiben die Frequenzen aber physikalisch getrennt, unabhängig von verschiedener Entdimensionierung.

Zur Visualisierung der vom Modenpaar [3,4] beschriebenen Bewegungsform ist die Rekonstruktion aus den Moden 0, 3 und 4 durchgeführt worden. Dazu sind 16 zeitlich äquidistant verteilte Punkte t_j in einer Periode der Zeitkoeffizienten gewählt worden und das rekonstruierte Geschwindigkeitsvektorfeld $\langle u_{0,3,4}(t_j)\rangle = u_i^0 + a^3(t_j)u_i^3 + a^4(t_j)u_i^4$ berechnet worden. Die Rekonstruktionspunkte sind in Abbildung 7.78 a gezeigt. Repräsentativ für die Variation des zylindernahen Nachlaufes ist das Rückströmgebiet, welches in Abbildung 7.79 mit Hilfe der

Isofläche $\langle u_{0,3,4}(t_j)\rangle = 0$ für jeden zweiten Rekonstruktionspunkt dargestellt ist. Die periodische Verlängerung, Verbreiterung und lokale Erhöhung des eingeschlossenen Gebietes sind besonders stromab des Zylinders ausgeprägt. Unmittelbar am und auf dem Zylinder ist diese periodische Gebietsänderung schwächer, aber vorhanden.

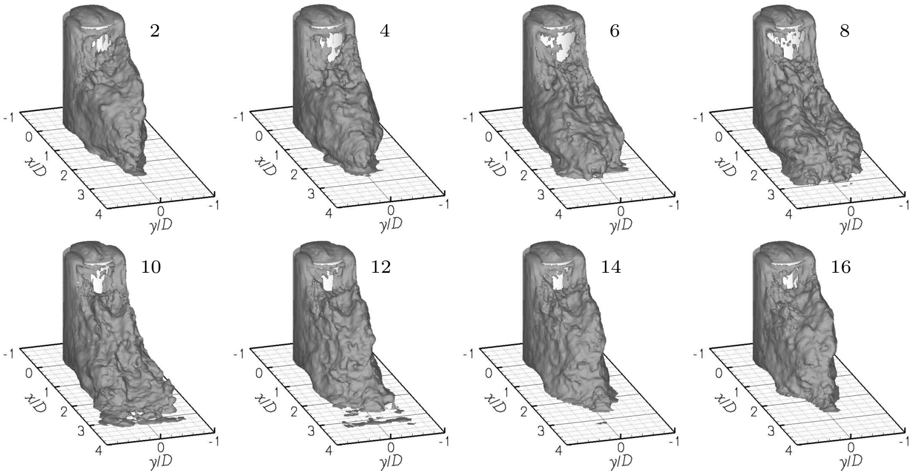
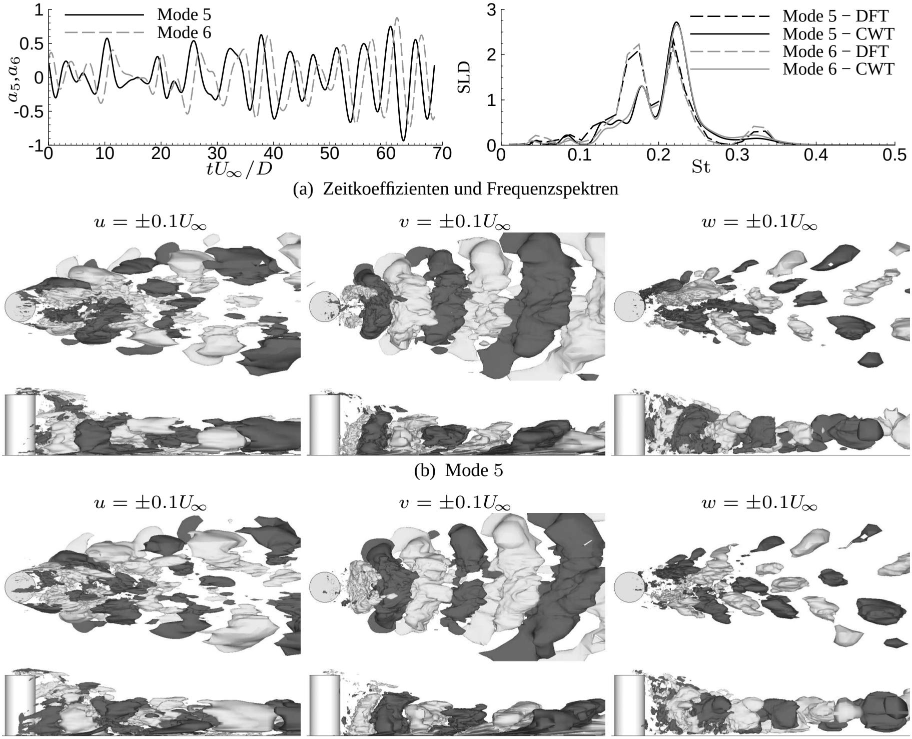


***Abb.** 7.79:* Pulsierende Variation der Rückströmgebiete (Isofläche $\langle u_{0,3,4}(t_j)\rangle = 0$ verschiedener Phasenlagen) in der zeitlichen Rekonstruktion der Moden 0, 3 und 4

Das Modenpaar [5,6] in Abbildung 7.80 weist wiederum untereinander starke Ähnlichkeit hinsichtlich der Zeitkoeffizienten und der Moden auf. Die dominanten Frequenzen um $\mathrm{St} = 0.175$ und $\mathrm{St} = 0.22$ ermöglichen jedoch keine direkte Zuordnung zu bereits bekannten Phänomenen. Die räumliche Anordnung und Struktur der energietragenden Gebiete der Mode sind vergleichbar zum dominanten Modenpaar [1,2]. Allerdings existieren in Strömungsrichtung ungefähr zwei Extrema je Geschwindigkeitskomponente mehr als in den Moden [1,2]. Zusätzlich ist die rückwärtige Annäherung an den Zylinder stärker und das Kopfgebiet signifikant involviert. Dabei sind die größten Unterschiede zum dominanten Paar direkt stromab des Zylinders anzutreffen. Wie mit Hilfe von Abbildung 7.72 c überprüft werden kann, existieren die stärksten Korrelationen der Zeitkoeffizienten ebenfalls und fast ausschließlich mit den Moden 1 und 2. Weil die Frequenz mit $\mathrm{St} = 0.22$ sehr nahe an der doppelten Frequenz der Moden [3,4] ist, wäre die Auslegung als deren höhere Harmonik denkbar, wozu aber die Struktur der Moden nicht paßt. Die beobachteten Eigenschaften lassen allenfalls die Interpretation als eine in die globale Wirbelstraße eingebettete Subharmonik zu. Infolge der nicht unerheblichen Gleichartigkeit der beteiligten Frequenzen sowie der räumlichen Struktur der Modenpaare [1,2] und [5,6] könnte deren Kombination mit großer Wahrscheinlichkeit Ursache starker, zeitlich lokaler Überlagerungseffekte, wie Auslöschung oder Verstärkung der Wirbelstraße, sein.

Das nächste harmonische Paar wird durch die Moden 8 und 9 gebildet. Der wesentliche Bestandteil dieser Paarung wäre nach den Zeitschrieben der Koeffizienten und den Spektren in Abbildung 7.81 die erste höhere Harmonik zum dominanten Modenpaar. Dies wird jedoch nicht

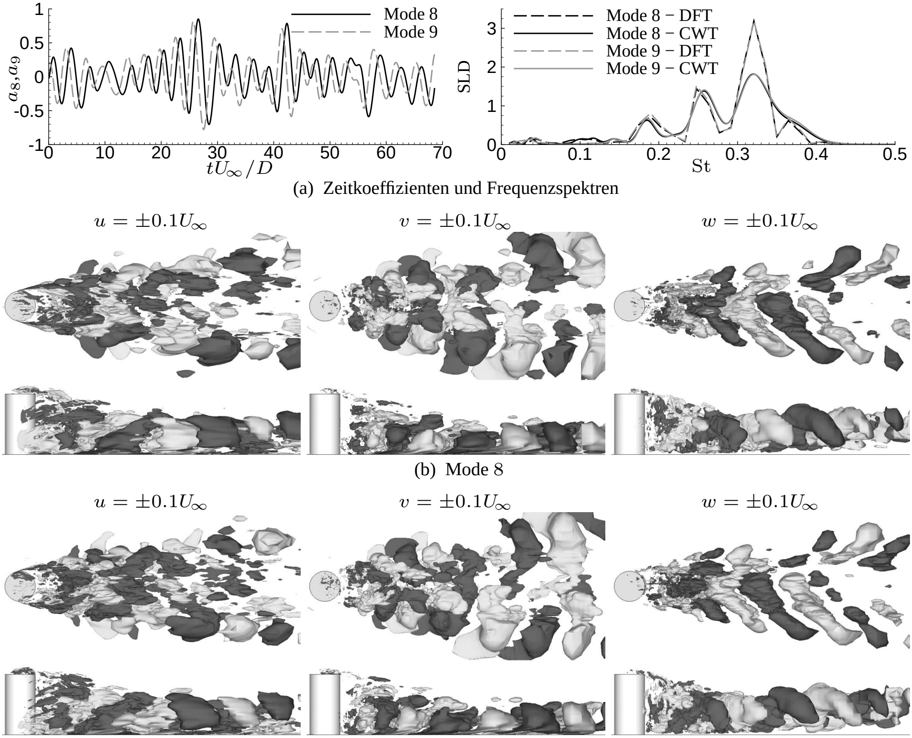


(c) Mode 6

Abb. *7.80:* Harmonisches Modenpaar [5,6] der Geschwindigkeiten (analog zu Abbildung 7.76)

von der Korrelation zwischen den Zeitkoeffizienten gestützt (vgl. Abbildung 7.72 c). Trotzdem ist die Frequenzverdoppelung in Zeitschrieben und Spektren evident, ungeachtet der starken Amplitudenänderung der Zeitkoeffizienten. Die Frequenz- und Skalenseparation zu anderen überlagerten Bewegungen gelingt auch für dieses Modenpaar nicht. Die zumindest teilweise erkennbare Ordnung im hinteren Nachlauf der Moden weist, unter Berücksichtigung der von den Geschwindigkeiten beschriebenen rotatorischen Anteile, auf einen Zusammenhang zu den Nachlaufwirbeln hin. Spätestens an dieser Stelle wird die physikalische Beurteilung weiterer Moden fragwürdig.

Weitere relevante Moden sind im Anhang G.1 visualisiert und werden nur kurz beschrieben. Die Mode 7 in Abbildung G.1 hat keinen harmonischen Partner, dafür aber nennenswerte Korrelation mit dem Modenpaar [3,4]. Die nahe des Zylinders symmetrische Struktur weist auf Änderungen der Hauptströmung in diesem Bereich hin. Die stärkste Frequenz 0.045 ist allem Anschein nach mit der verfügbaren Signallänge ungenügend aufgelöst. Umso bemerkenswerter ist die Erfassung der Strouhal-Zahl 0.015 in der Mode 11 (Abbildung G.2). Dazu passend beschreibt die räumliche Struktur der Mode das bereits im Abschnitt 7.3.5 angesprochene Auf und Nieder der abgelösten Scherschicht über dem Zylinderkopf, auch beschrieben von HAIN *et al.*



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

(b) Mode 8

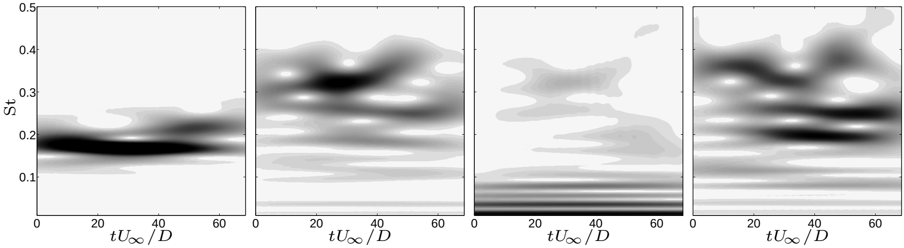
(c) Mode 9

Abb. *7.81:* Harmonisches Modenpaar [8,9] der Geschwindigkeiten (analog zu Abbildung 7.76)

(2008). Dadurch verursachte Änderungen der Hauptströmung wären symmetrisch zu erwarten, was wiederum aufgrund fehlender Signallänge nur in Teilgebieten wiedergegeben wird.

Wie in Tabelle 7.8 ersichtlich sind bereits ab Mode 19 die Anteile der Fluktuationsenergie kleiner als 1%. Weil die Moden 1 bis 19 auch nur etwa 50% der Gesamtenergie beinhalten, werden 123 Moden benötigt, um 90% der Gesamtenergie zu repräsentieren. Dies ist ein Indiz für die Komplexität der betrachteten Strömung. Die Unfähigkeit von POD, das Geschwindigkeitsfeld in Einzelphänomene zu separieren, resultiert zu nicht unerheblichen Anteilen aus deren starker Interaktion und der damit verbundenen zeitlichen Variation von Frequenzen. Die in Abbildung 7.82 dargestellten Skalogramme verschiedener Zeitkoeffizienten zeigen die Vielfältigkeit möglicher Frequenzvariationen bzw. unmöglicher Frequenzseparation durch POD auf. Niedrige Frequenzen bis etwa $\mathrm{St} = 0.1$ scheinen relativ stabil, während Frequenzbänder zwischen 0.1 und 0.4 beliebig mäandern oder zusammenbrechen können.

Oberhalb des dominanten Modenpaares [1,2] ist die Interpretierbarkeit der Moden stark eingeschränkt, weil beispielsweise nicht feststellbar ist, in welchem Maße die Frequenzvariationen Artefakte der POD-Zerlegung sind. Nicht zu vergessen, liefert die globale Korrelierung aller Momentanaufnahmen mittels POD lediglich statistisch existente Kohärenz. Die dabei auftre-



(a) Mode 1 (b) Mode 8 (c) Mode 11 (d) Mode 12

Abb. 7.82: Skalogramme aus der Wavelet-Transformation für einzelne Zeitkoeffizienten (CWT mit dem Morlet-Wavelet und $f_c = 0.8$, $f_b = 20$)

tenden Moden sind nach energetischer Relevanz sortiert, wobei die Konvektion der kohärenten Strukturen in der Regel durch harmonische Modenpaare beschrieben wird. Wie im (nicht ganz einander zugehörigen) Modenpaar [10,12] in Abbildung G.3 können dann aber beliebig viele Frequenzen involviert sein.

Die Analyse des Geschwindigkeitsfeldes mit POD verdeutlicht die Existenz verschiedenster Überlagerungseffekte spektraler Anteile. Die auch als *Intermodulation*[44] bezeichnete Erzeugung dieser Anteile durch nichtlineare Übertragung bzw. Interaktion ist das Ergebnis des Aufeinandertreffens verschiedener Frequenzen (siehe z. B. MIKSAD, 1973). Die im Wesentlichen durch den konvektiven Term gegebene Nichtlinearität von Strömungen liefert Linearkombinationen spektraler Komponenten, also Summen $\sum_n k^n f_n$ ganzzahliger Vielfache der n Einzelfrequenzen f_n. Dadurch entstehen nicht nur höhere Harmoniken, Summen und Differenzen, sondern im Falle, daß die Intermodulationsordnung $\sum_n |k^n|$ ungerade ist, auch Intermodulationsprodukte nahe der originalen Frequenzen. Solche Frequenzen haben wiederum interferierenden Einfluß auf das spektrale Gesamtverhalten. In den Modenpaaren [3,4] und [8,9] treten Intermodulationen deutlich hervor.

Mit POD wird eine additive lineare Zerlegung der Strömungsdaten vorgenommen. Es ist zweifelhaft, ob mit diesem Vorgehen nichtlineare Interaktionen separiert werden können, besonders im Kontext turbulenter Skalenmischung und -streckung. Weil diese im betrachteten Geschwindigkeitsvektorfeld allgegenwärtig sind, gelingt die Skalen- und Frequenztrennung nur unvollständig. Im Weiteren wurden deshalb verschiedene Filterungskonzepte angewandt, um die Komplexität der Felddaten im Vorhinein zu reduzieren.

7.6.3 POD des Druckfeldes

Die inhärente Koppelung von Geschwindigkeiten und Druck ist ein fundamentales Merkmal jeder Strömung. Dabei sind die lokalen Eigenschaften des Vektorfeldes der Geschwindigkeiten als Überlagerung aller Komponenten im skalaren Druckfeld enthalten. Dadurch wird eine

[44]Der Begriff *Intermodulation* ist in der Nachrichtentechnik und Akustik gebräuchlich und wird hier wegen der Ähnlichkeit der Phänomene auch für Strömungen benutzt.

natürliche Glättung oder Filterung des Strömungsfeldes im Druckfeld abgebildet. Mathematisch ist dieser Zusammenhang in den gekoppelten Bilanzgleichungen für Masse und Impuls beschrieben. Die räumliche Ableitung der Impulsgleichungen in Form der Divergenz liefert die Druck-Poisson-Gleichung, welche im inkompressiblen Fall den direkten Zusammenhang zwischen konvektivem Term der Geschwindigkeiten und dem Druckfeld wiedergibt.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j}\right) = -\varrho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\varrho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{7.2}$$

Die Druck-Poisson-Gleichung beschreibt auch die Glättung des Geschwindigkeitsfeldes. Durch die Summation über alle Geschwindigkeitskomponenten bzw. -gradienten kann die Information über lokale Phänomene (z. B. Wirbel) nur im Druck transportiert werden, wenn kein entsprechendes Gegenstück vorhanden ist. Anschaulich besagt das, der Einfluß zweier Wirbel gleicher Stärke aber unterschiedlicher Drehrichtung klingt im Druckfeld schnell (analog zu Quelle und Senke) ab. Im Hinblick auf die Analyse des turbulenten Strömungsfeldes bedeutet dies, die Fußabdrücke unzähliger kleiner Strukturen ähnlichen Charakters werden akkumuliert oder bei Gegensätzlichkeit schnell gedämpft. Damit sollte eine Reduktion der Strömungsinformationen auf global dominante Phänomene erzielt werden.

Die Anwendung von POD auf Momentanaufnahmen des Druckfeldes ändert den formalen Ansatz der Methode nicht. Einzig das innere Produkt bei der Berechnung der Korrelationsmatrix bedarf einer neuen Interpretation. Abgesehen davon, daß nun keinerlei Vektorprodukt notwendig ist, repräsentiert auch das Quadrat der massenspezifischen Druckfluktuationen $(p'/\varrho)^2$ eine Fluktuationsenergie – hier bezüglich des Druckes. Dabei ist die Dichte ϱ für den inkompressiblen Fall nur eine Skalierung. Die räumlichen Moden enthalten analog zum Geschwindigkeitsfeld, wegen der Subtraktion des Mittelwertes, nur noch Druckfluktuationen. Gebiete mit negativem Vorzeichen stellen den Kern kohärenter Wirbelstrukturen dar, während positive Druckfluktuationen den Aufstau aus gegensinnigen Geschwindigkeitskomponenten, also den Einfluß benachbarter Wirbel aufeinander, kennzeichnen.

Die Einträge der Korrelationsmatrix wurden wiederum parallel in den durch die Blöcke des Simulationsgitters abgegrenzten Teilgebieten berechnet und anschließend summiert. Die Matrix gibt die Korrelationen der einzelnen Momentanaufnahmen wieder, welche in Abbildung 7.83 in logarithmischer Skalierung visualisiert sind. Vergleichbar zur Korrelationsmatrix des Geschwindigkeitsfeldes in Abbildung 7.74 führt die dominante Harmonik zu erkennbarer Ausprägung von Nebendiagonalen. Bemerkenswert, weil im Widerspruch zur Erwartung, ist die wesentlich stärkere Störung dieser Matrixstruktur durch intermittente Ereignisse im Vergleich zum Geschwindigkeitsfeld. Die offenbar wiederkehrende Unterbrechung der dominanten Frequenz scheint in Teilen selbst periodisch aufzutreten. Die Zeitspanne zwischen den Störungen variiert etwa zwischen 18 und $21.5D/U_\infty$, was einer Strouhal-Zahl im Bereich $0.46...0.55$ entspricht. Die Strouhal-Zahl ist hier direkt über die Zeitspanne als Periodendauer berechnet worden, weil sich durchaus weitere Frequenzstörungen ungefähr mittig zwischen den drei offensichtlichen Bändern erkennen lassen.

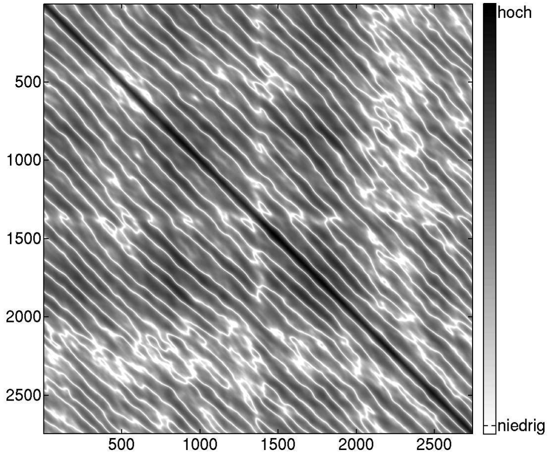


Abb. *7.83:* Visualisierung der POD-Korrelationsmatrix für das Druckfeld (Grauwerte entsprechen $log\,|\mathrm{C}_{mn}|$)

Die Frequenz der Störungen stimmt mit detektierten Frequenzen in einzelnen Zeitkoeffizienten (z. B. Moden 3, 4, 7 u. a.) der POD-Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes überein (vgl. Abschnitt 7.6.2 und Anhang G.1). Aufgrund der gut angenäherten Ganzzahligkeit des Teilungsverhältnisses zur dominanten Frequenz treten Interferenzeffekte auf. Wie bereits vormals erläutert, entstehen diese aus der nichtlinearen Interaktion verschiedener Frequenzanteile. Letztere sind zusätzlich im Strömungsfeld synchronisiert, wodurch das ganzzahlige Teilungsverhältnis begünstigt wird. Die interagierenden Frequenzen stammen mit hoher Wahrscheinlichkeit von der seitlichen Umströmung und der Kopfüberströmung, wobei Ursprung und Wirkung durch die Synchronisation miteinander verschmolzen sind. Die Interferenzen führen zum Auslöschen oder Entstehen weiterer Frequenzen. Um dies zu verdeutlichen, sind in Abbildung 7.84 das Skalogramm des Seitenkraftbeiwertes und die Korrelationsmatrix des Druckfeldes einander zeitlich zugeordnet dargestellt. Wie mit Hilfe vertikaler Linien skizzenhaft angedeutet, sind die beobachtbaren Symptome langwelliger Intermittenz mit dem Verschwinden und Auftauchen von Frequenzbändern korreliert. Die physikalische Ursache ist mit Hilfe der POD-Zerlegung nicht geeignet zu analysieren, weshalb im Abschnitt 7.8.2 die instationären Daten direkt diesbezüglich inspiziert werden.

Es seien an dieser Stelle einige Zusatzinformationen zu Abbildung 7.84 erlaubt. Der Zeithorizont des Seitenkraftbeiwertes entspricht der gesamten physikalischen Zeit der LES. Weil diese auf der bereits vollständig entwickelten Strömungslösung mit Blockprofil am Einströmrand basiert, sind Transienten zu Beginn der Simulation schnell abgeklungen. Für die Zeitpunkte hinter der Korrelationsmatrix existieren ebenfalls die Rohdaten für die Momentanaufnahmen des Strömungsfeldes. Diese zusätzlichen 1 222 Datensätze sind nach Beginn der POD erzeugt worden und stünden zukünftig für die Erweiterung der Datenbasis zur Verfügung.

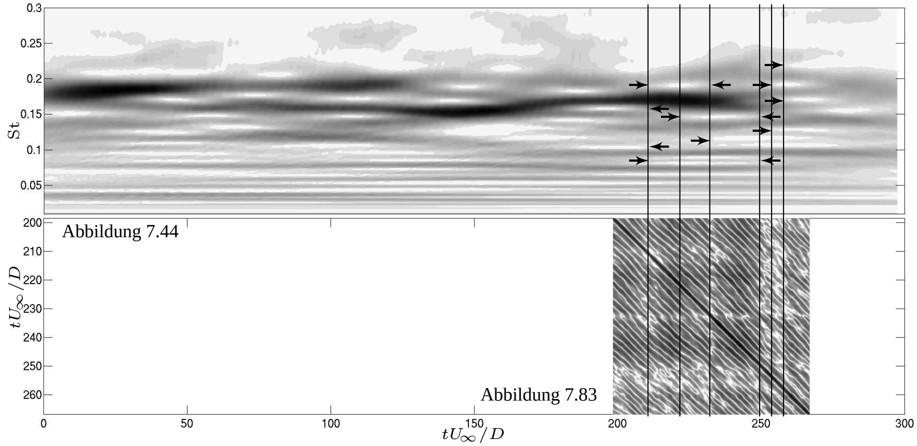


Abb. *7.84:* Intermittente Phänomene in Seitenkraftbeiwert und Druckfeld

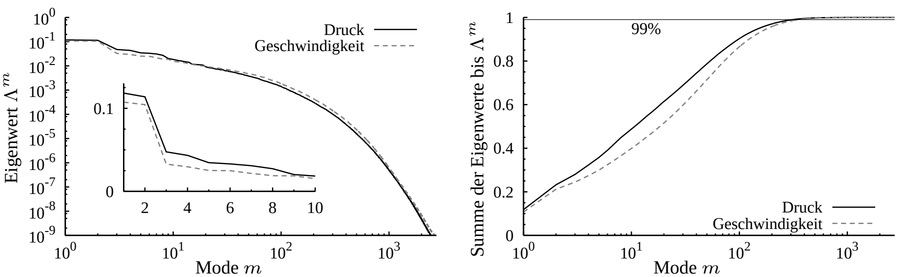


Abb. *7.85:* Einfache und kumulative Spektren der normierten Eigenwerte für Druck- und Geschwindigkeitsfeld

		m für Λ^m			M für $\sum_{m=1}^{M} \Lambda^m$		
Größe	$\Lambda^1 + \Lambda^2$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-2}$	$> 90\%$	$> 95\%$	$> 99\%$
Druck	0.2322	303	119	20	98	152	312
Geschwindigkeit	0.2119	338	137	19	123	183	353

Tab. *7.9:* Größe der normierten Eigenwerte und summierte Fluktuationsenergie für Druck- und Geschwindigkeitsfeld

Die Eigenwerte der Korrelationsmatrix für das Druckfeld sind in Abbildung 7.85 vergleichend zu denjenigen des Geschwindigkeitsfeldes aufgetragen. Der globale Verlauf beider Spektren ist ähnlich, im Detail nur bei den kleinen Modennummern verschieden. Erwartungsgemäß ist der Energieanteil in diesen Moden für das Druckfeld leicht erhöht und fällt anschließend etwas schneller ab. Die Unterschiede sind geringer als vorab vermutet, aufgrund der stärkeren Ausprägung der Störphänomene in der Korrelationsmatrix aber einsichtig. Der gleiche Trend läßt sich quantitativ in Tabelle 7.9 anhand von Größe der Eigenwerte und summierter Fluktuationsenergie ablesen. Ein glättender Effekt aus dem Druckfeld ist hier noch nicht unbedingt zu erkennen.

Die Eigenvektoren der Korrelationsmatrix, welche bis auf eine Skalierung gleichzeitig die Zeitkoeffizienten definieren, sind in Abbildung 7.86 abermals durch Verschiebung zueinander korreliert, um einander zugehörige Moden zu identifizieren. Der Trend hoher Korrelationen ist sicherlich nicht übermäßig verschieden zu den Geschwindigkeiten, dafür aber stark konzentriert auf Modenzahlen unterhalb von 15. Daraus lassen sich zwei unterschiedliche Schlußfolgerungen ziehen. Zum einen gibt es eine Reihe stochastischer Prozesse im Strömungsfeld, welche sich in unkorrelierten Druckfluktuationen äußern. Zum anderen treten bei der POD-Zerlegung des Druckfeldes verstärkt Einzelmoden auf, welche zeitlich lokale Änderungen des mittleren Druckfeldes beschreiben. Wie in den nachfolgenden Einzelabbildungen der Moden sichtbar wird, involvieren die Spektren der Zeitkoeffizienten teilweise weitaus mehr Frequenzen als im Falle des Geschwindigkeitsfeldes. Daraus resultiert die Vermutung, daß durch die Zerlegung des Druckfeldes eine Akkumulation verschiedener räumlicher Schwankungen und ihrer spektralen Eigenschaften in den ersten Moden stattfindet.

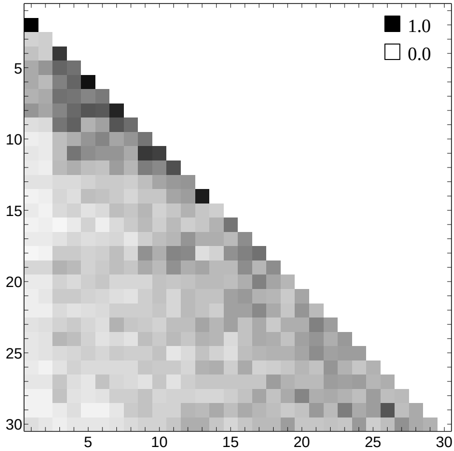
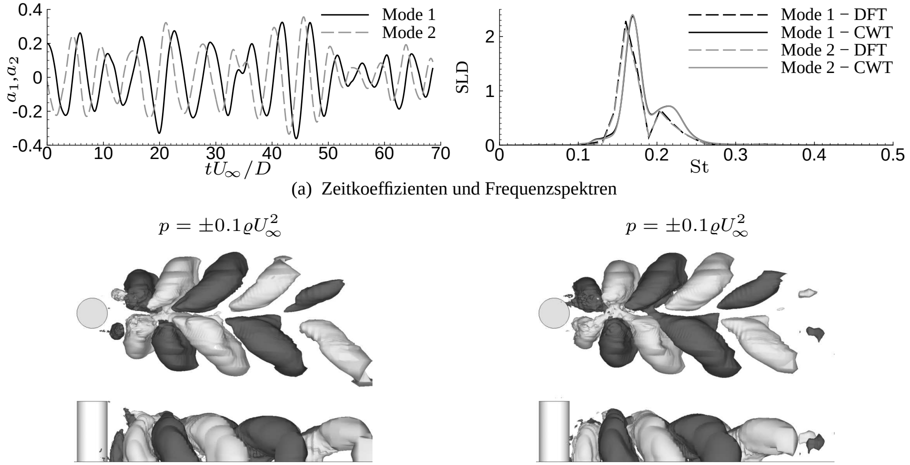


Abb. *7.86:* Maximierte Korrelation der Zeitkoeffizienten für das Druckfeld

Das stark dominante Modenpaar [1,2] in Abbildung 7.87 stellt die gleichen Wirbelstrukturen wie das dominante Paar des Geschwindigkeitsvektors dar. Wegen der skalaren Repräsentation mittels des Druckes wird aber unmittelbar die Struktur der Wirbel erkennbar. Obwohl das gleiche Phänomen wie in Abbildung 7.76 beschrieben wird, wird der große Abstand der Einzelwirbel (dunkle Gebiete) zueinander erst hier prägnant herausgehoben. Besonders interessant ist die zunehmende Neigung der Wirbel- und Staugebiete seitlich in Richtung der Symmetrieebene und am Rand des Nachlaufes in Strömungsrichtung. Ursache dafür ist die Abwärtsbewegung im Nachlauf sowie geringere Konvektionsgeschwindigkeiten im Zentrum des Nachlaufs. Die Wirbelstraße scheint ansonsten wenig beeinflußt vom Rezirkulationsgebiet hinter dem Zylinder und dem Wiederanlegen der Strömung auf der Grundplatte. Die spektralen Anteile um $\mathrm{St} = 0.2$ sind auch hier vermutlich Relikte einer sporadisch auftretenden, von der Kopfüberströmung nahezu ungestörten Ablösung im unteren Zylinderbereich. Die meist dominierende Interaktion mit der Kopfüberströmung führt offenbar zur Verringerung der Konvektionsgeschwindigkeit und damit zur Verringerung der Strouhal-Zahl. Eine mögliche Ursache dafür wird im Abschnitt 7.7.3 präsentiert.



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

(b) Mode 1

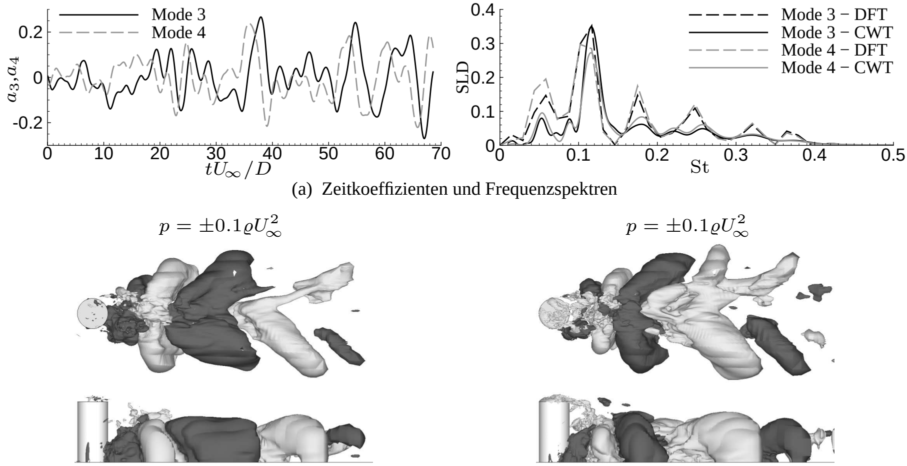
(c) Mode 2

Abb. *7.87:* Dominantes Modenpaar [1,2] des Druckfeldes: Zeitkoeffizienten mit Frequenzspektren und Isoflächen des Druckes mit Ansichten von oben und der Seite (+ hell; − dunkel)

Für das energetisch zweitwichtigste Modenpaar [3,4] ist Modenpaarung in den Zeitkoeffizienten ersichtlich, aber weniger „perfekt“ als im Fall des Paares [1,2]. Die starken Amplitudenschwankungen in Abbildung 7.88 sind ein Indiz für die Vermischung vieler, auch ähnlicher Frequenzanteile. Der zugehörige Verlauf der Frequenzspektren bestätigt dies und erweckt den Anschein eines Spektrums mit aufgelösten höheren Harmoniken. Dominierend ist analog zum Geschwindigkeitsfeld das Frequenzband bei $\mathrm{St} = 0.115$. Die weiteren spektralen Spitzen bei 0.18, 0.22 usw. passen nicht eindeutig zu ganzzahligen Vielfachen der dominanten oder Differenzfrequenzen. Abgesehen davon, daß POD die Frequenztrennung und Zuordnung von Höherharmonischen nicht beinhaltet, ist die Verbesserung dieses Verhaltens durch eine zeitlich längere Datenbasis mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen.

Die räumliche Struktur der Moden 3 und 4 zeigt in der Tendenz eine Staffelung von Wirbelstrukturen in Strömungsrichtung. Im Zusammenhang mit der Pulsation des zylindernahen Nachlaufes wird damit vereinfacht ein Wirbelausstoß aus dem Rezirkulationsgebiet beschrieben. Die Ursache der periodischen Oszillation ist auch hier nicht transparent.

Die nächst höheren Moden des Druckfeldes sind aufgrund fehlender eindeutiger Interpretierbarkeit im Anhang G.2 enthalten. Die korrelierten Paare [5,6] und [7,8] lassen sich anhand der Frequenzen und Modenstruktur als höher harmonische Anteile der beiden dominanten Modenpaare auslegen. Dabei besteht eine gewisse Zuordnung von [5,6] zu [1,2] und von [7,8] zu [3,4]. Der zeitliche Verlauf der Koeffizienten von [7,8] in Abbildung G.5 weist zudem auf die Überlagerung durch eine langwellige Transiente hin, welche sich jedoch einer Analyse mittels POD entzieht.



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

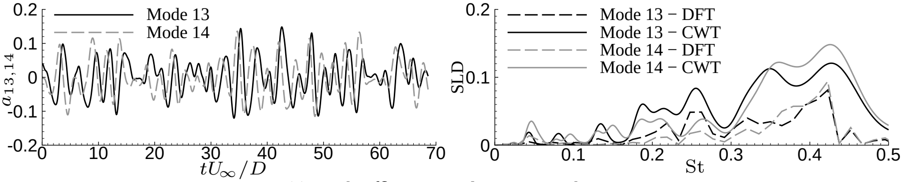
(b) Mode 3

(c) Mode 4

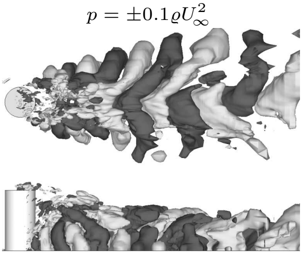
Abb. *7.88:* Harmonisches Modenpaar [3,4] des Druckfeldes (analog zu Abbildung 7.87)

Oberhalb von Mode 8 ist bis auf die Ausnahme [13,14] (vgl. Abbildung 7.86) die eindeutige Paarung von Moden nicht mehr feststellbar. Die Moden 9 bis 12, in Abbildung G.6 dargestellt, haben keinen eindeutigen Partner, sind aber über die involvierten Frequenzen miteinander verknüpft. So ist 9 mit 11, 10 mit 11 aber auch 11 mit 12 mäßig stark korreliert. Die Beteiligung mehrerer spektraler Bänder und die kreuzweise Korrelierung ist die große Schwäche von POD. Die lokal wirksamen Subharmonischen werden im globalen Kontext vermischt. Genau deshalb ist das Modenpaar [13,14] beachtenswert, weil Korrelationen zu anderen Moden ausschließlich sehr gering sind, die Paarung aber sehr stark – obwohl wiederum eine Vielzahl unterschiedlichster Frequenzen vermischt sind (siehe Abbildung 7.89). Das räumliche Feld der Moden repräsentiert ähnlich wie bei den Dominanten und Subharmonischen in Strömungsrichtung gestaffelte Kohärenz. Sensibilisiert durch den über die Koeffizienten gegebenen Zusammenhang zur Strouhal-Zahl um 0.2 und dessen höher harmonischen Anteils um 0.4 fällt die gut geordnete alternierende Beschaffenheit der Wirbelgebiete im unteren Zylinderbereich auf. Die bis in die Grenzschicht zu verfolgende vertikale Wirbelformation ist ein weiteres Indiz für die Einbettung einer ungestörten Ablösung, welche aber entsprechend dem Zeitkoeffizienten nur intermittierend auftritt.

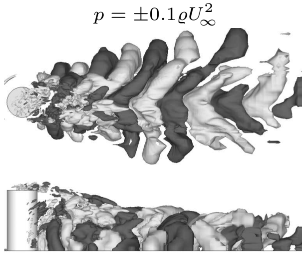
Durch Anwendung von POD auf das Druckfeld ist die Frequenztrennung nicht unbedingt verbessert worden, jedoch finden sich die prominenten Frequenzbänder und zugehörigen kohärenten Strukturen nun konzentriert in den ersten 15 Moden. Dadurch und durch die Reduktion auf eine skalare Größe wird die Interpretierbarkeit, z. B. im Falle des Paares [3,4], wesentlich verbessert. Eine Verschlechterung bei der Zerlegung der Einzelphänomene findet sich dann aber beispielsweise für die langsam schlagende Scherschicht auf dem Zylinderkopf, welche zumindest hinsichtlich der Frequenz in Mode 7 enthalten ist.



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren



(b) Mode 13



(c) Mode 14

Abb. *7.89:* Harmonisches Modenpaar [13,14] des Druckfeldes (analog zu Abbildung 7.87)

7.6.4 Druckbasierte POD für das Geschwindigkeitsvektorfeld

Die POD-Zerlegung des Druckfeldes als natürliche Glättung des Geschwindigkeitsfeldes wurde auch mit der Prämisse durchgeführt, anschließend geglättete Moden des Geschwindigkeitsfeldes basierend auf den POD-Gewichten des Druckfeldes zu berechnen. Die Eigenwerte dieser Kombination beider Strömungsgrößen zur Filterung des Geschwindigkeitsfeldes, deren energetische Bedeutung und die POD-Gewichte sind identisch zu denen aus der Zerlegung des Druckfeldes (Abschnitt 7.6.3). Bei der Berechnung der Moden muß beachtet werden, daß die Zerlegung optimal bezüglich der Fluktuationsenergie im Druckfeld ist und deshalb die energetische Sortierung der Geschwindigkeitsmoden teilweise nicht mehr korrekt ist.

Auf die Darstellung der neuen Moden wird hier verzichtet, da sich bereits in den Zeitkoeffizienten gezeigt hat, daß die Frequenzvermischung gegenüber der Zerlegung des Geschwindigkeitsvektorfeldes zugenommen hat. In ähnlichem Maße nimmt auch die Skalenvermischung in den Geschwindigkeitsmoden zu. Einzig die beiden dominanten Modenpaare [1,2] und [3,4] sind bis auf das Vorzeichen und die Phasenverschiebung zwischen Druck und Geschwindigkeit kaum zu unterscheiden. Das Ziel glatterer Moden, welche leichter interpretiert werden können, kann mit dem geschilderten Vorgehen und der vorliegenden Strömung nicht erreicht werden.

7.6.5 Harmonische Filterung und POD

Um die Frequenz- und Skalenseparation zu verbessern, ist es naheliegend, eine diesbezügliche Filterung durchzuführen. Damit bei einem solchen Unterfangen nicht die gesamte räumlich-zeitliche Datenbasis gefiltert werden muß, wurde der im Abschnitt 4.3 beschriebene Ansatz TH-POD eingesetzt. Dieser basiert auf der bereits vorhandenen Trennung von zeitlicher und räumlicher Information im Geschwindigkeitsfeld mittels POD. Im ersten Schritt wurde für die Filterung die variable dominante Harmonik, welche über die Zeitkoeffizienten des ersten Modenpaares [1,2] beschrieben wird ($\mathrm{St} = \mathrm{dyn.}$), benutzt. Die Eigenschaften dieser Harmonik sind bezüglich Phasenportrait, Phasenwinkel und variabler Frequenz an späterer Stelle in Abbildung 7.94 aufgezeigt. Des weiteren wurden drei fixierte Frequenzen, welche aus der Wavelet-Transformation einzelner Zeitkoeffizienten entnommen sind, benutzt – namentlich $\mathrm{St} = 0.167$, 0.115 und 0.20[45]. Durch die Art der Auswahl aller vier Harmoniken ist sichergestellt, daß die betrachtete instationäre Strömung diese auch enthält. Die Berechnung bzw. Rekombination neuer Moden wurde unter Verwendung der verfügbaren niederdimensionalen Beschreibung aus $M_F = 200$ Moden des Geschwindigkeitsfeldes durchgeführt, welche 95.8% der kinetischen Energie repräsentieren. Für jede Filterung entstehen so wiederum M_F neue Moden.

Die eigentliche Filteroperation wird nur auf die Zeitkoeffizienten angewandt, während die Rekombination neuer Moden zur Extraktion der zugehörigen (statistischen) Kohärenz notwendig ist. In Abbildung 7.90 und Abbildung 7.96 a sind einige gefilterte Zeitkoeffizienten im Vergleich zu den ungefilterten dargestellt. Die Gegenüberstellung der gefilterten Verläufe des Paares [1,2] für verschiedene Filterfrequenzen verdeutlicht bereits, daß die dominierende Frequenz des Gesamtsystems (z. B. für 0.115) nicht herausgefiltert werden konnte. Dafür werden aber sehr niedrige und hohe Frequenzen eliminiert, so daß die Modenpaarung gestärkt wird (vgl. z. B. Abbildung 7.96 a). Die weitere Betrachtung der zugehörigen Frequenzspektren in Abbildung 7.91 zeigt auf, daß die Filterung mit einem bewegten Fenster im Rahmen von TH-POD offensichtlich wie ein Bandpaßfilter arbeitet. Aufgrund der betraglichen Nähe der involvierten und untersuchten Frequenzen ist die Skalenseparation deshalb nur bedingt erfolgreich.

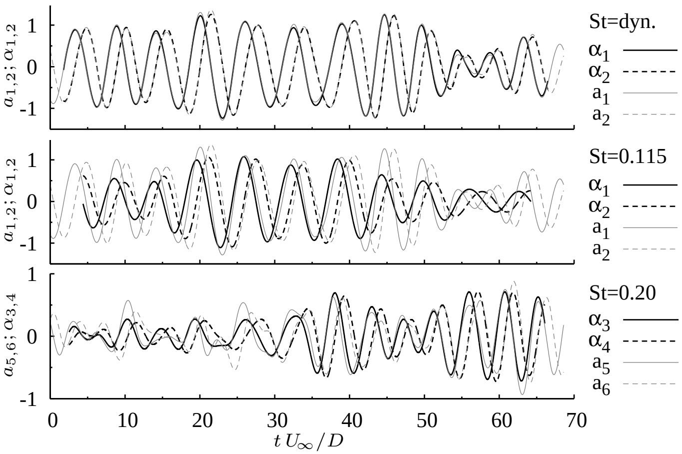
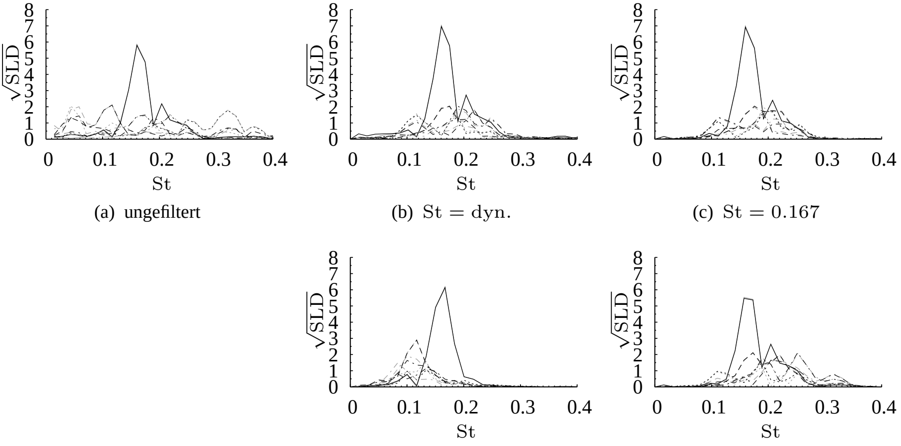


Abb. *7.90:* Ausgewählte Zeitkoeffizienten vor und nach Filterung

[45]Tatsächlich wurden die Werte $\mathrm{St} = 0.1673$, 0.1146 und 0.1995 identifiziert und benutzt.

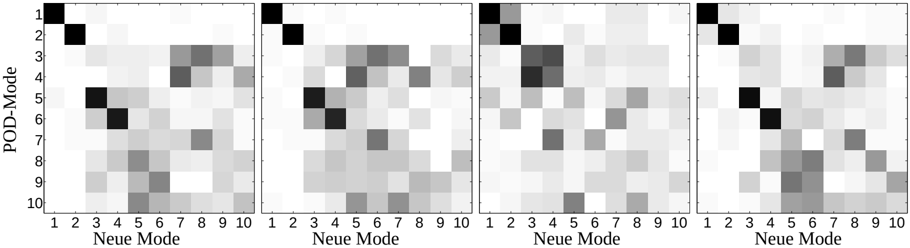


(a) ungefiltert (b) $\mathrm{St} = \mathrm{dyn.}$ (c) $\mathrm{St} = 0.167$

(d) $\mathrm{St} = 0.115$ (e) $\mathrm{St} = 0.20$

***Abb.** 7.91:* Frequenzspektren gefilterter Zeitkoeffizienten bezüglich verschiedener spektraler Anteile (10 Moden)

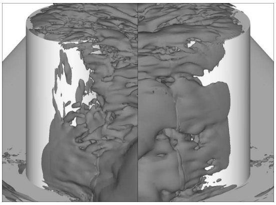
Die Berechnung der Eigenwerte nach (4.21) und des kumulativen Spektrums aus den gefilterten Zeitkoeffizienten zeigt, daß 99% der darin enthaltenen Fluktuationsenergie durch die ersten 50 Moden wiedergegeben wird. Dies bedeutet, daß nur die Grobstrukturen, typischerweise mit relativ niedrigen Frequenzen assoziiert, nach der Filterung verbleiben. Dennoch sind nur die ersten Moden von Interesse, da diese sich auf das gefilterte Frequenzband beziehen. In Abbildung 7.92 sind die Zuordnungen der POD-Moden zu den neuen Moden der gefilterten Felder visualisiert. Für alle Filtervarianten bis auf $\mathrm{St} = 0.115$ ändern sich die räumlichen und zeitlichen Anteile des dominanten Modenpaares nach Filterung und Modenrekombination kaum. Ebenso wird für diese das POD-Modenpaar [5,6] mit zusätzlichen Anteilen aus anderen Moden beaufschlagt und an die Position [3,4] verschoben. Unterschiede in den Ergebnissen der Filtervarianten $\mathrm{St} = \mathrm{dyn.}$, 0.167 und 0.20 sind in den Frequenzspektren und der Rekombination der ersten vier Moden gering ausgeprägt.



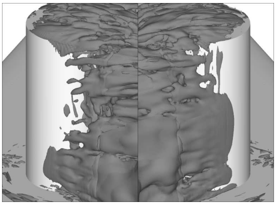
(a) $\mathrm{St} = \mathrm{dyn.}$ (b) $\mathrm{St} = 0.167$ (c) $\mathrm{St} = 0.115$ (d) $\mathrm{St} = 0.20$

***Abb.** 7.92:* Rekombination der POD-Moden zu neuen Moden des Geschwindigkeitsfeldes nach verschiedenartiger Filterung (Faktoren $|\beta_{mp}|$ aus (4.38); Wertebereich etwa $0 \ldots 1$)

Im Falle der Filterung mit $\mathrm{St} = 0.115$ verbleibt in den Frequenzspektren der gefilterten Zeitkoeffizienten von [3,4] lediglich ein einzelnes, wenn auch breites Frequenzband an ebendieser Frequenz. Eine Umsortierung infolge des beinhalteten Energieanteils ist hier nicht notwendig. Zusätzlich wird bei der Filterung mit der gleichen Frequenz die spektrale Spitze im Modenpaar [1,2] um $\mathrm{St} = 0.20$ nahezu entfernt (vgl. Abbildung 7.91 d). Die Effektivität dieser Filterung kann auch für die räumliche Mode quantifiziert werden. Um die Skalen, welche mit der Frequenz $\mathrm{St} = 0.20$ verknüpft sind, zu extrahieren wurde die Differenz der Vektorfelder zwischen den POD-Moden und den neuen Moden $\Delta u_i = \left({u_i}^{POD}_{1,2} - {\breve{u}_i}^{\mathrm{St}=0.115}_{1,2} \right)$ berechnet. Zweifellos enthält das neue Vektorfeld von null verschiedene Differenzen im gesamten Nachlauf, welche infolge der turbulenten Aufweitung in ihrem Betrag mit fortschreitender Strömungsrichtung anwachsen. Außerdem enthält es noch die hochfrequenten Anteile, die ebenfalls herausgefiltert wurden. Trotzdem beinhaltet der wichtigste Bestandteil des Differenzvektorfeldes Komponenten der Wirbelstraße. Da die Strouhal-Zahl 0.20 typisch für ungestörte Wirbelstraßen hinter unendlich langen Zylindern ist (ZDRAVKOVICH, 1997) und sie vorwiegend im unteren Bereich von langen endlichen Zylindern gefunden wurde (PARK & LEE, 2000), war anzunehmen, daß auch hier die zugehörigen Strukturen ihren Ursprung in einer ungestörten seitlichen Ablösung haben. In der Tat bestätigt der Geschwindigkeitsbetrag des Differenzfeldes $\Delta U = |\Delta u_i|$ dies nicht nur, sondern erlaubt auch das Gebiet des ungestörten Wirbelablösens mit $\mathrm{St} = 0.20$ einzugrenzen. Die in Abbildung 7.93 dargestellten Isoflächen lassen die Existenz dieser Region bis zu zwei Dritteln der Zylinderhöhe erkennen. Es ist an dieser Stelle wichtig, darauf hinzuweisen, daß auch die Differenz der Moden eine dynamische Region mit Wellenausbreitungscharakter beschreibt. Untermauert wird die Beobachtung durch die in den POD-Moden [1,2] in dieser Art nicht ausgeprägte Verbindung zur Ablöseregion. Die weiteren durch die Isoflächen eingeschlossenen Gebiete am Zylinder, besonders auf der Zylinderkappe, sind mit anderen, hauptsächlich höheren Frequenzen assoziiert.



(a) Mode 1



(b) Mode 2

Abb. *7.93:* Differenz der dominanten POD-Moden und den nach Filterung mit $\mathrm{St} = 0.115$ rekombinierten Moden (Isoflächen $\Delta U = 0.025 U_\infty$; Ansicht von beiden Seiten)

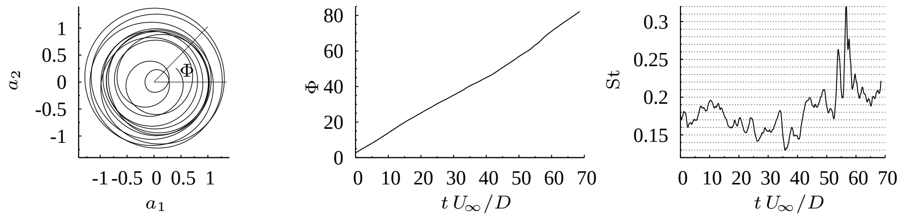
Eine Darstellung der dominanten Modenpaare nach Filterung ist aufgrund der geringen Unterschiede zu Abbildung 7.76 obsolet. Auch die physikalische Interpretierbarkeit der neuen Moden [3,4] nach Filterung $\mathrm{St} = \mathrm{dyn.}$ ist nicht unmittelbar gegeben. Die beteiligten Frequenzen und die Struktur der Moden (vgl. Abbildung G.7) deuten darauf hin, daß es sich teilweise um akkumulierte Abweichungen von der geordneten Wirbelstraße durch den Einfluß der Kopfüberströmung handelt. Das rekombinierte Modenpaar [5,6] aus dieser Filterung ist in Abbildung G.7 dargestellt und zeigt in der Überlagerung der Geschwindigkeitskomponenten u und w rezirkulierende Eigenschaften unmittelbar hinter dem Zylinder. Weitere Modenpaare aus den Filterungen $\mathrm{St} = \mathrm{dyn.}$, 0.167 und 0.20 entziehen sich einer sinnvollen physikalischen Deutung.

Wie bereits erwähnt, bezieht sich das Modenpaar [3,4] aus der Filterung mit $\mathrm{St} = 0.115$ nur noch auf eine breite spektrale Spitze um diese Frequenz. Die räumliche Beschaffenheit der rekombinierten Moden (siehe Abbildung G.9) ist ähnlich komplex wie die entsprechenden POD-Moden in Abbildung 7.78. Dennoch sind die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten im nahen Nachlauf stärker differenziert und reichen dabei weiter in den hinteren Nachlauf. Im Zusammenhang mit der Beschränkung auf eine spektrale Komponente in den Zeitkoeffizienten ist davon auszugehen, daß die Separation der pulsierenden Nachlaufänderung vom restlichen Geschehen gestärkt wurde. Aus diesem Grund ist im Abschnitt 7.6.6 eine Phasenmittelung bezüglich der gefilterten Zeitkoeffizienten durchgeführt worden.

Die ausgeführte Filterung und Rekombination von Moden ist im Sinne der Frequenztrennung wenig erfolgreich. Gründe hierfür sind die relativ große Breite des Bandpasses (festgelegt durch das mitbewegte Fenster) sowie die Konzentration der relevanten Frequenzen auf einen relativ schmalen spektralen Bereich. Eine sinnvolle Verbesserung für die Filtereigenschaften kann wahrscheinlich nur im Frequenzraum erreicht werden. Wie wichtig die Bandbreite des Filters (neben der Kenntnis aller Frequenzen) trotzdem ist, zeigte die zwischenzeitliche Berechnung der Fourier-Moden zu den gewählten fixierten Frequenzen. Aufgrund der im Strömungsfeld enthaltenen Variation der Frequenzen bzw. deren Zusammenbruch sind diese Moden ein rein numerisches Ergebnis mit wenig Bezug zur Strömungsphysik. Dessen ungeachtet konnten mit der harmonischen Filterung wiederum wichtige Elemente der instationären Strömung extrahiert werden, welche in Teilen z. B. für die Phasenmittelung weiter verwendet werden.

7.6.6 Phasenmittelung und dominante Wirbelbewegung

Die zeitlichen Koeffizienten des Modenpaares [1,2] grenzen sich zu denen anderer Moden durch ihre Dominanz und die Beschränkung auf ein schmales, stark separiertes Frequenzband ab (vgl. Abbildung 7.76 a). Deshalb kann das Phasenportrait aus diesen beiden Koeffizienten für die Phasenmittelung, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, benutzt werden. In Abbildung 7.94 ist neben dem Phasenportrait auch der instantane Phasenwinkel angegeben. Änderungen im Anstieg der Kurve bedeuten eine Variation der dominanten Frequenz, welche ebenfalls dargestellt ist und über einen zentralen Differenzenquotienten aus dem Phasenwinkel berechnet wurde. Wie bereits in Abbildung 7.44 ersichtlich, variiert die dominante Frequenz im Strömungsfeld. Die in Abbildung 7.94 c besonders stark ausgeprägte Variation resultiert allerdings teilweise aus der globalen Korrelation von POD. Infolge derer sind in den Zeitkoeffizienten des dominanten Modenpaares offenbar Anteile der ersten Harmonischen und Subharmonischer enthalten, welche im Frequenzspektrum unauffällig bleiben.



(a) Phasenportrait von a_1, a_2 (b) Instantane Phase $\Phi(t)$ (c) Variable Harmonik $\mathrm{St}(t)$

Abb. *7.94:* Instantaner Phasenwinkel und Frequenzvariation basierend auf dem Phasenportrait der Zeitkoeffizienten des dominanten Modenpaares [1,2]

Weil der instantane Phasenwinkel in erster Näherung eine Gerade darstellt, konnte trotz der verfälschten, starken Frequenzvariation die Phasenmittelung erfolgreich durchgeführt werden. Dazu sind alle Momentanaufnahmen in 16 Phasenlagen sortiert und anschließend für das jeweilige Intervall gemittelt worden (siehe dazu Abschnitt 4.4). Die Mittelung ist für alle Zellen des Simulationsgitters durchgeführt worden, so daß Grenzschichten und auch Oberflächendaten enthalten sind. Für die Visualisierung der Wirbelstrukturen und ihrer Phasenlagen in Abbildung 7.95 wird der phasengemittelte Druck in Form seiner Änderung gegenüber dem Mittelwert benutzt. Anhand dieser Darstellung wird deutlich, daß sich die alternierenden Wirbelgebiete, welche im weiteren Nachlauf stark verformt werden, aus der seitlichen Ablösung entwickeln. Die Deformation selbst ist ein dreidimensionales Umkippen der Wirbel durch die intensive Abwärtsbewegung und die geringere Konvektionsgeschwindigkeit im zentralen Nachlauf (FREDERICH *et al.*, 2009*b*). Durch die Überlagerung beider Effekte erfahren die Wirbelgebiete nicht nur eine Verzerrung in Strömungsrichtung sondern ebenso eine Drehung um die Strömungsrichtung. Im hinteren Nachlauf heben sich deshalb die Wirbelstrukturen seitlich von der Platte ab, während sie mittig aufliegen. In dieser Bewegung dreht sich gewissermaßen das unterste nach oben und umgekehrt.

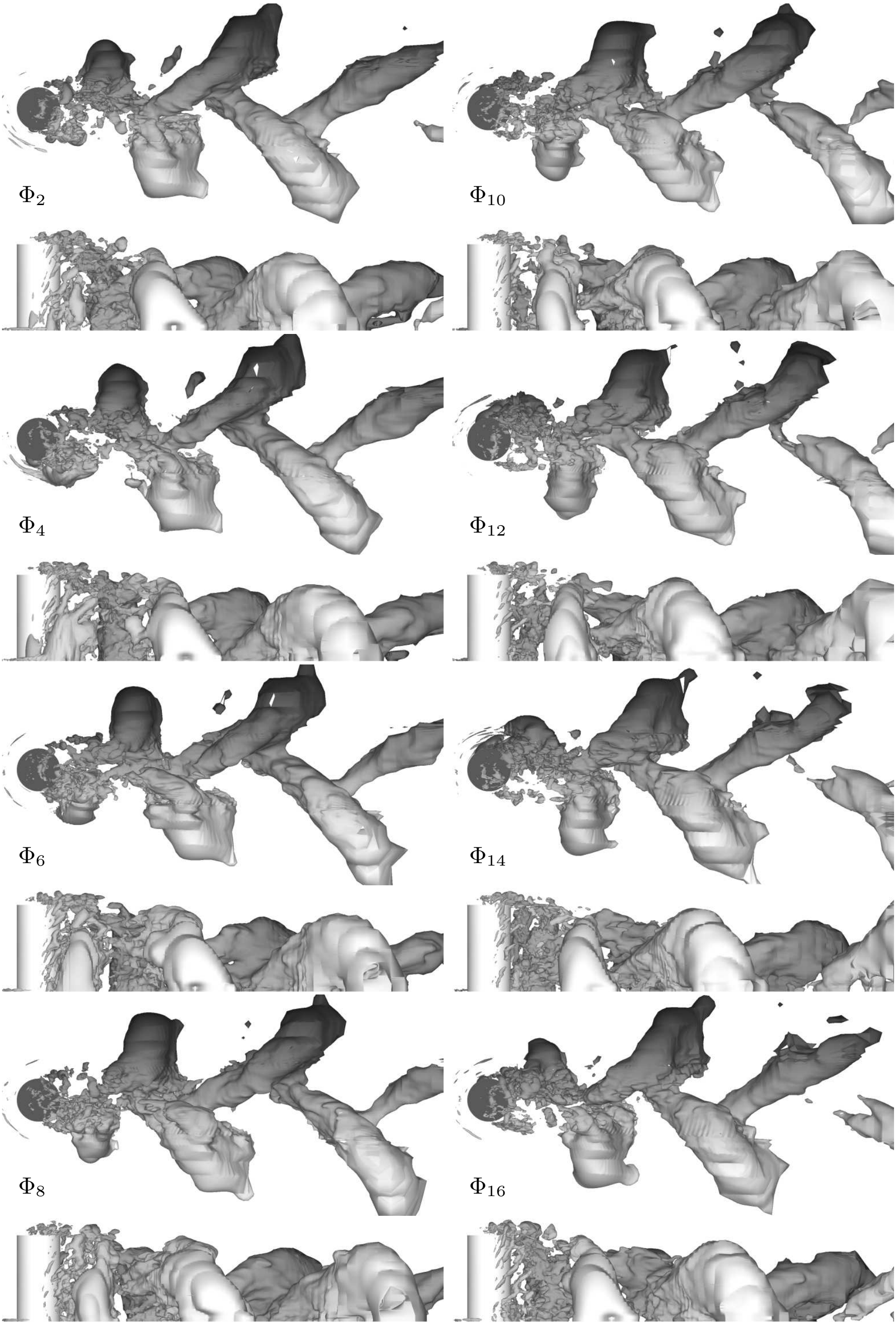
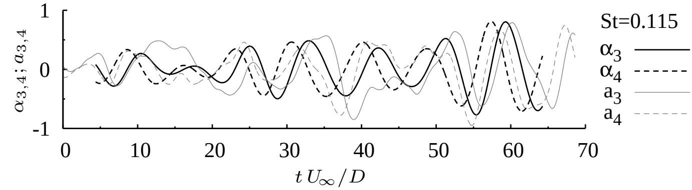
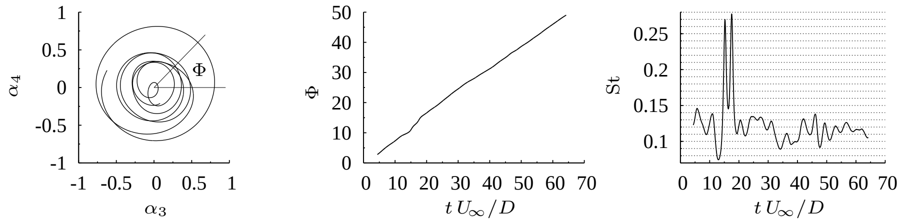


***Abb.** 7.95:* Dominante Wirbelbewegung aus Phasenmittelung (Isofläche $\langle p \rangle - \overline{p} = -0.025 \varrho U_\infty^2$ für $\Phi = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, ..., 2\pi$; y-Koordinate als Farbwert; Ansicht von oben und der Seite)

Wie in Abbildung 7.91 d bei der Filterung mit $\mathrm{St} = 0.115$ zu erkennen, beinhalten die gefilterten Zeitkoeffizienten des Paares [3,4] nur noch dieses einzelne Frequenzband. Es kann analog zu den Zeitkoeffizienten des dominanten Modenpaares zu einer weiteren Phasenmittelung benutzt werden. Abbildung 7.96 zeigt neben den gefilterten Koeffizienten auch deren Phasenportrait, den instantanen Phasenwinkel sowie die mittels TH-POD separierte Frequenzvariation. Ähnlich wie bei dem dominanten Frequenzband bricht auch dieses zeitlich lokal zusammen, womit der POD-basierte Ansatz wiederum Schwierigkeiten hat. Eine Beurteilung der Frequenzvariation hinsichtlich ihrer physikalischen Bedeutung ist aufgrund der dadurch möglichen Verfälschung nicht möglich. Trotzdem erlaubt das Phasenportrait wiederum die Zerlegung in hier 16 verschiedene Phasenlagen mit anschließender Mittelung der zugeordneten Momentanaufnahmen. Infolge der Randeffekte aus der Filteroperation konnten dafür nur $2\,396$ dieser Datensätze benutzt werden.



(a) Zeitkoeffizienten des Modenpaares [3,4] vor und nach Filterung



(b) Phasenportrait von α_3, α_4 (c) Instantane Phase $\Phi(t)$ (d) Variable Harmonik $\mathrm{St}(t)$

Abb. *7.96:* Instantaner Phasenwinkel und Frequenzvariation basierend auf dem Phasenportrait der Zeitkoeffizienten des mit $\mathrm{St} = 0.115$ gefilterten Modenpaares [3,4]

In Abbildung 7.97 ist jede zweite Instanz des bezüglich der variierenden Frequenz $\mathrm{St} = 0.115$ phasengemittelten Strömungsfeldes über die zugehörige Druckvariation dargestellt. Auf den ersten Blick wird offensichtlich, daß die dominante Wirbelbewegung durch die Mittelung nicht unterdrückt werden konnte. Die Datenbasis ist mit durchschnittlich 171 Momentanaufnahmen für statistische Konvergenz nicht ausreichend. Dennoch kann die globale Fluidbewegung bezüglich der interessierenden Frequenz zweifelsfrei identifiziert werden. Aus dem Rezirkulationsgebiet hinter dem Zylinder wird harmonisch Fluidmasse ausgestoßen. Neben dem Abfließen geringerer Beiträge über den Zylinder nach oben, ermöglicht dieser Vorgang große Mengen des rezirkulierenden Fluids, welches aus der seitlichen Umströmung und der Kopfüberströmung stammt, stromab zu konvektieren, um in gewisser Weise für die nachdrückende Fluidmasse Platz zu schaffen. Die spektrale Charakteristik dieser Bewegung mit $\mathrm{St} = 0.115$ stellt dann gerade das dynamische Gleichgewicht im globalen Strömungsfeld her. Der Fluidausstoß verursacht dabei offenbar die Pulsation des zylindernahen Nachlaufes im Sinne des relativ kontinuierlichen Wechsels zwischen Fluidaufstau und -auswurf.

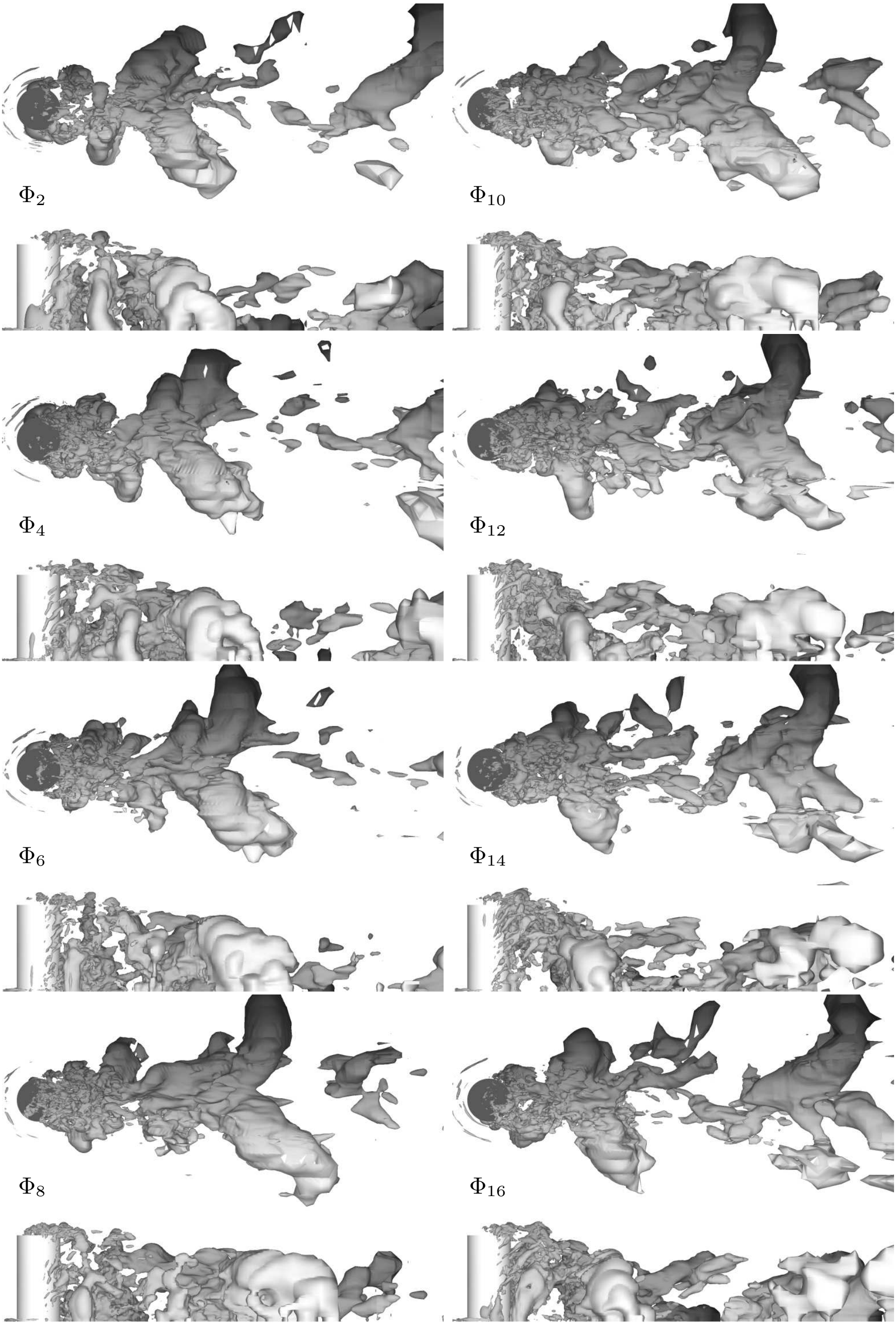


***Abb.** 7.97:* Subharmonische Fluidbewegung aus Phasenmittelung (Fläche $\langle p \rangle - \overline{p} = -0.025\varrho U_\infty^2$ für $\Phi = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, ..., 2π; y-Koordinate als Farbwert; Ansicht von oben und der Seite)

Die einzelnen Phasenlagen in Abbildung 7.97 stärken den Eindruck, daß die subharmonische Bewegung symmetrisch bezüglich der x-z-Ebene stattfindet. Die symmetrische Struktur wird durch die globale Wirbelstraße stark gestört, besonders im hinteren Nachlauf. Die Überlagerung von alternierender Wirbelstraße und symmetrischer Fluidbewegung bietet genügend Raum für Interferenzphänomene. In der Art lassen sich die beobachteten Störungen in der dominanten Harmonik (vgl. Abbildung 7.83) genauso erklären, wie das zeitweise Auftreten symmetrischer Wirbelanordnungen.

Die Phasenmittelung wurde auch für das Frequenzband $\mathrm{St} = 0.057$ durchgeführt. Zu diesem Zweck war eine weitere Filterung der Zeitkoeffizienten notwendig, die im Ergebnis dazu führte, daß das gewünschte Frequenzband im dominanten Modenpaar vorzufinden ist. Die Rekombination dieser neuen Moden erfolgte über eine Vielzahl POD-Moden mit Wichtungen in der gleichen Größenordnung. Dabei ist die variable Harmonik von ähnlicher Qualität wie diejenige in Abbildung 7.96 a. Allerdings zeigen die phasengemittelten Felddaten nach eingehendem Studium keine im Sinne der Physik sinnvoll interpretierbaren Bewegungen. Deshalb wird davon ausgegangen, daß dieses Frequenzband aus der Interaktion der beiden dominanten Bänder bei 0.167 und 0.115 angeregt wird.

7.6.7 POD in ausgewählten Teilgebieten

Lokale Details der Strömung können mit POD im globalen Kontext schlecht erfaßt werden, dazu zählt beispielsweise die Kopfüberströmung. Deshalb sind drei wichtige Teilgebiete des Strömungsfeldes abgegrenzt und in diesen die POD für das Vektorfeld der Geschwindigkeiten gesondert durchgeführt worden. Zur Verringerung des numerischen Aufwandes und dem Ziel einer schwachen Glättung, wurden die Geschwindigkeitsfelder dazu auf kartesisch äquidistante Gitter im zylindernahen Nachlauf, dem Kopfbereich und einer Zylinderseite linear interpoliert. Die Lage und Ausdehnung der Teilgebiete ist in Abbildung 7.98 visualisiert und in Tabelle 7.10 aufgelistet. Das Nachlaufgebiet entspricht der Domain 1 aus dem Abschnitt 7.6.1. Aus historischen Gründen ist die Datenbasis für dieses Gebiet gegenüber den anderen beiden reduziert.

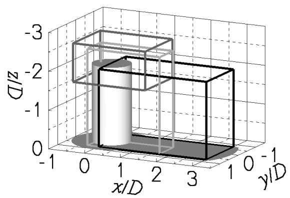


Abb. *7.98:* Teilgebiete für POD

Bezeichnung	Gebietsgröße	Gitterpunkte	Zeitschritt	Datensätze
Nachlauf	$3D \times 1.50D \times 2.0D$	$0.70 \cdot 10^6$	$20\Delta t$	571
Seitenregion	$2D \times 0.75D \times 2.5D$	$0.48 \cdot 10^6$	$5\Delta t$	2 744
Kopfbereich	$2D \times 1.50D \times 1.0D$	$0.39 \cdot 10^6$	$5\Delta t$	2 744

Tab. *7.10:* Ausgewählte Teilgebiete für eine POD-Zerlegung

Neben einem globalen Vergleich der Teilgebiete werden hier nur Einzelergebnisse herausgegriffen, welche weitere Einblicke in die Grobstrukturdynamik gewähren. Die Spektren für die POD-Eigenwerte in Abbildung 7.99 und die Angabe ihrer Quantität in Tabelle 7.11 veranschaulichen, daß die jeweilige Energie und damit auch die Strömungsdetails im Seiten- und Kopfbereich über eine zunehmende Anzahl Moden verteilt werden. Da der wahrscheinliche Grund dafür, die fehlende globale Korrelation der Einzelphänomene ist, ist signifikanter Informationsgewinn über die Strömung bzw. die physikalische Interpretierbarkeit der Moden deshalb kaum zu erwarten.

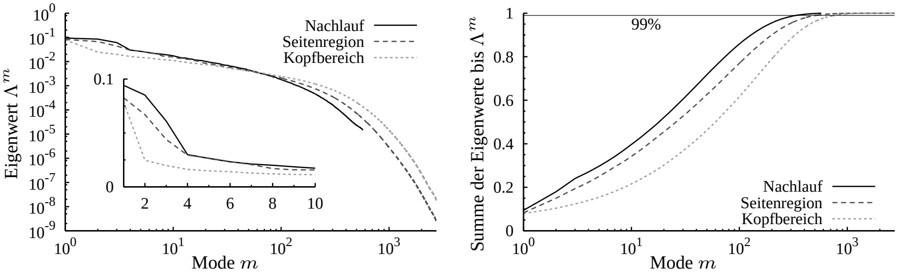
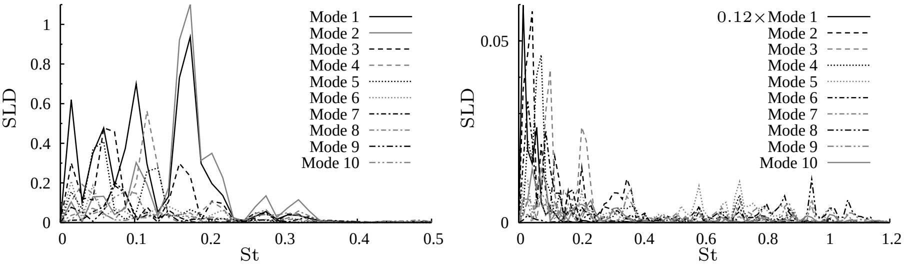


Abb. *7.99:* Einfache und kumulative Spektren der normierten Eigenwerte für ausgewählte Teilgebiete

		m für Λ^m			M für $\sum_{m=1}^{M} \Lambda^m$		
Gebiet	$\Lambda^1 + \Lambda^2$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-2}$	$> 90\%$	$> 95\%$	$> 99\%$
Nachlauf	0.1794	343	142	21	129	189	336
Seitenregion	0.1497	458	175	19	200	289	510
Kopfbereich	0.1034	627	237	12	328	450	762

Tab. *7.11:* Größe der normierten Eigenwerte und summierte Fluktuationsenergie für ausgewählte Teilgebiete

Die Spektren der Zeitkoeffizienten für Seitenregion und Kopfbereich in Abbildung 7.100 sowie für den Nachlauf in Abbildung 7.71 a konstatieren eine starke Frequenzseparation der ersten und zweiten dominanten Mode. Im Falle des Kopfbereiches ist der ersten Mode kein harmonischer Partner zugeordnet. Die weiteren Koeffizienten unterliegen ausgeprägter Frequenzvermischung, worauf bereits im Abschnitt 7.6.1 bei Reduktion der Gebietsgröße eingegangen wurde. Während für den Nachlauf und die Seitenregion die wichtigen Frequenzen unterhalb von $\mathrm{St} = 0.4$ auftreten, reicht das relevante Spektrum im Kopfbereich bis oberhalb von $\mathrm{St} = 1$. Die auffällige Häufung spektral leicht gegeneinander verschobener Spitzen im niederfrequenten Bereich, z. B. um 0.1 ist Ergebnis der unzureichenden Signallänge aber auch der Kombination von Frequenzanteilen aus nichtlinearer Interaktion.

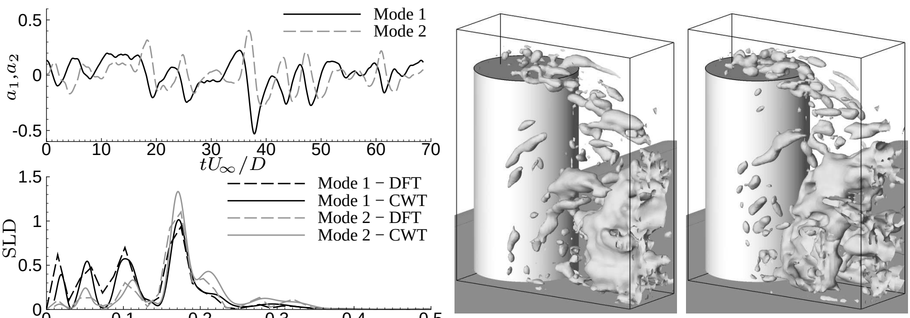


(a) Seitenregion (b) Kopfbereich

Abb. *7.100:* Spektren der Zeitkoeffizienten für ausgewählte Teilgebiete

Nachlauf Die Zuordnung der Modenpaare über die Korrelation ihrer Zeitkoeffizienten ist für das Nachlaufgebiet bereits in Abbildung 7.72 a bestimmt worden. Obwohl die Dominanz des hinteren Nachlaufs durch die Wahl des Teilgebietes geschwächt ist, sind nur die beiden ersten Paare als harmonische Partner identifizierbar. Die physikalische Bedeutung dieser Moden weicht nicht von den Paaren des Gesamtgebietes ab. Weil die Frequenz- und Skalentrennung aufgrund der nicht vollständigen Erfassung der Grobstrukturen schlecht sind, ist die Interpretation weiterer Moden als kohärente Bewegung nicht sinnvoll.

Seitenregion Die Modenzuordnung als Indiz für konvektierende Strukturen ist im Seitenbereich ebenfalls nur für das dominante Paar eindeutig ausgeprägt. Die Frequenztrennung ist vermutlich auch deshalb relativ schlecht, weil der Kopfbereich nicht vollständig separiert wurde. In dem Sinne ist die Region suboptimal gewählt.



(b) Mode 1 (c) Mode 2

(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

Abb. *7.101:* Dominantes Modenpaar [1,2] seitlich am Zylinder: Zeitkoeffizienten mit Frequenzspektren und Isoflächen des Wirbelkernkriteriums $Q = 15$ für die Moden

Das dominante Modenpaar [1,2] ist in Abbildung 7.101 mit seinen zeitlichen und räumlichen Eigenschaften dargestellt. Um die Struktur der Moden herauszuheben, wurde aus dem Geschwindigkeitsfeld das Wirbelkernkriterium $Q = \frac{1}{2}\left(\left|\Omega^2\right| - \left|S^2\right|\right) > 0$ berechnet. Hervorragendes Element beider Moden ist die große Wirbelstruktur seitlich hinter dem Zylinder, welche bis etwa zwei Drittel der Zylinderhöhe ausgedehnt und leicht in Strömungsrichtung geneigt ist. Die Kombination der Moden beschreibt die Konvektion dieser und anderer Wirbel. Aufgrund des statistischen Charakters von POD ist der Zusammenhang zur ablösenden Scherschicht und der daraus hervorgehenden Wirbel nicht gegeben. Dennoch werden in Teilen die nahe des Zylindermantels und im Verlauf der Kopfwirbel vorhandenen, kleinen kohärenten Wirbelgebiete extrahiert. Die Frequenzspektren der Zeitkoeffizienten belegen, daß diese Strukturen mit den prominenten Frequenzbändern verknüpft sind. Eine Zuordnung der Frequenzen kann aber ohne Vorwissen nicht gelingen.

Kopfbereich Die Fluktuations- und Wirbelbewegungen im Kopfbereich des Zylinders sind hinsichtlich der repräsentierten Energie sehr klein gegenüber den Nachlaufstrukturen. Dadurch werden die lokalen Phänomene in einer globalen POD nicht ausreichend abgebildet, und die Betrachtung in einem Teilgebiet ist nahezu zwingend.

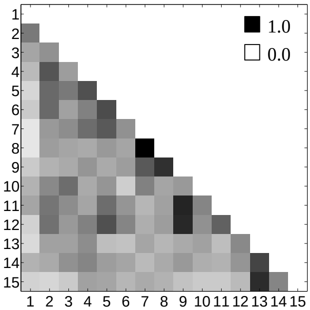
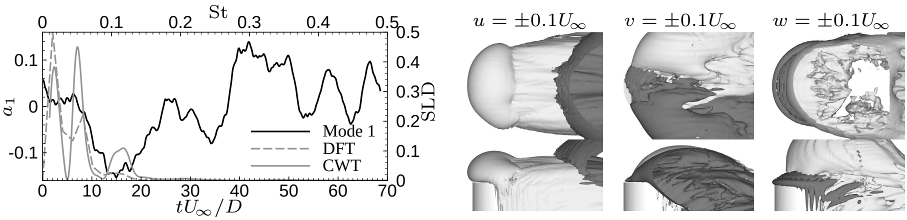


***Abb.** 7.102:* Maximierte Korrelation der Zeitkoeffizienten im Kopfbereich

Wie in Abbildung 7.102 ersichtlich, ist besonders bei den energiereichsten Moden die Zuordnung eines harmonisches Partners nicht eindeutig möglich. Mit mindestens einer Ausnahme hinsichtlich Mode 1 ist der stochastische Charakter der Strömung auf dem Zylinderkopf hier hauptsächlich Grund für die fehlende Separation von harmonischen Bewegungen. Trotzdem gibt es bei höheren Modenzahlen wieder starke Modenpaarungen (z. B. [7,8]), welche aber, wie in Abbildung 7.104 a gezeigt, nicht frequenzsepariert sind. Die mäßig starken Korrelationen von mehr als zwei Koeffizienten miteinander, auch ohne vergleichbar starke Korrelation der Partner (z. B. 9, 11 und 12) weist darauf hin, daß ähnliche räumliche Einzelphänomene statistisch erfaßt werden, diese aber in variierender Periodizität vorliegen – ein Indiz für das turbulente Durcheinander auf dem Zylinderkopf.

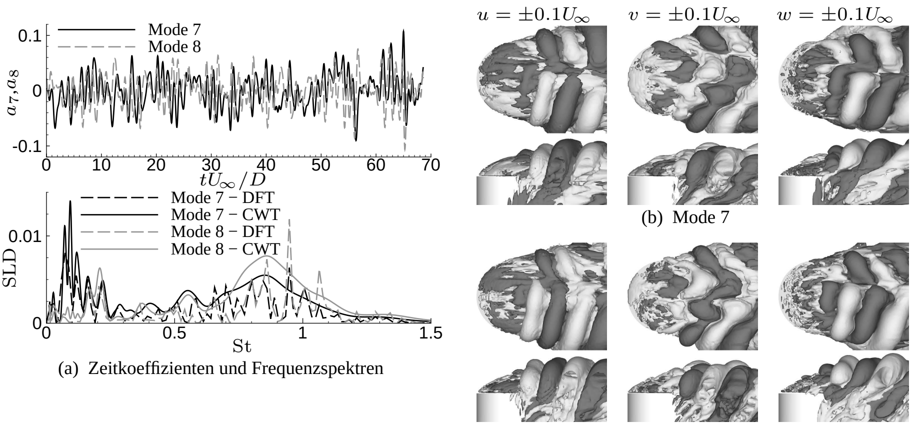


(a) Zeitkoeffizient und Frequenzspektrum (b) Mode 1

***Abb.** 7.103:* Dominante Mode 1 im Kopfbereich: Zeitkoeffizient mit Frequenzspektrum und Isoflächen der Geschwindigkeitskomponenten mit Ansichten von oben und der Seite ($+$ hell; $-$ dunkel)

Die energiereichste Mode 1 stellt eine Einzelmode dar, welche langsame Änderungen der mittleren Strömung verursacht. Die beteiligten dominanten Frequenzen in den Zeitkoeffizienten sind bei $\mathrm{St} = 0.015$ und 0.055 vorzufinden (vgl. Abbildung 7.103 a). Die erste Frequenz wurde bereits in der Mode 11 des Geschwindigkeitsfeldes für die Gesamtdomain identifiziert und in Anlehnung der Erkenntnisse von HAIN *et al.* (2008) der Auf- und Abbewegung der abgelösten Scherschicht zugeordnet (siehe Abschnitt 7.6.2 und Abbildung G.2). Das zweite Frequenzband ist in den Spektren oberhalb des Zylinders identifiziert worden (Abbildung 7.41) und im Rahmen einer dazu durchgeführten Phasenmittelung (vgl. Abschnitt 7.6.6) als harmonische Bewegungsform weitestgehend ausgeschlossen worden.

In den eigenen Simulationsarbeiten konnte festgestellt werden, daß sehr lange Mittelungszeiten notwendig sind, um konvergierte Statistiken zu erzielen. Die mit der dominanten Mode im Kopfbereich extrahierte Bewegungsform hat unbedingt Einfluß auf den Nachlauf und ist aufgrund der geringen Frequenz ein wesentlicher Bestandteil langsam konvergierender Mittelwerte im gesamten Strömungsfeld.



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

(b) Mode 7

(c) Mode 8

***Abb.** 7.104:* Modenpaar [7,8] im Kopfbereich (analog zu Abbildung 7.103)

Die nächst höheren Zeitkoeffizienten und Moden sind in Abbildung G.10 bzw. Abbildung G.11 zusammengestellt. Bis auf die Ausnahme des Paares [7,8] in Abbildung 7.104 existiert für diese keine eindeutige Modenzuordnung. Vielmehr offenbaren die Zeitkoeffizienten in weiten Teilen ähnliche oder sogar gleiche Frequenzen und die Moden räumlich vergleichbare Strukturen. Für die Separation von kohärenten Bewegungen am hoch turbulenten Kopfbereich der Zylinderumströmung scheint POD ein ungeeignetes Werkzeug zu sein. Dieser Umstand wird besonders durch die oft auftretende Vermischung von Frequenzen im gesamten Frequenzbereich von $\mathrm{St} = 0...1.5$ einsichtig.

Dessen ungeachtet zeigen die Moden eine starke Ausrichtung in Hauptströmungsrichtung in allen Geschwindigkeitskomponenten, welche die optisch im Strömungsfeld erkennbaren Wirbelbewegungen widerspiegelt. Die wichtigsten Frequenzen in den zugehörigen Zeitkoeffizienten konzentrieren sich im Bereich bis $\mathrm{St} = 0.1$ mit vielen Variationen, wobei auch die bereits bekannten dominanten Frequenzen des Gesamtsystems präsent sind. Die Struktur der Moden und die beteiligten spektralen Anteile sind mit großer Wahrscheinlichkeit das Ergebnis einer

Synchronisation mit den dominanten Strömungsschwankungen sowie der Interaktion mit den anderen Frequenzen im Kopfbereich. Zu diesen zählen, neben der bereits angeführten langwelligen Bewegung, vor allem auch die vergleichsweise sehr kurzwelligen Schwankungen mit Strouhal-Zahlen bis 1 und höher. Diese stehen, wie beim stark gepaarten Modenpaar [7,8] in Abbildung 7.104 zu erahnen, im Zusammenhang mit der instabilen Scherschicht im vorderen Bereich des Zylinderkopfes. Die stark kohärenten Bewegungsformen setzen erst im Bereich der seitlichen Ablösung nahe des Scheitelpunktes vom Zylindermantel ein.

Das Teilgebiet für die POD im Kopfbereich beinhaltet auch einen Teil der seitlichen Ablöseregion. Im Bereich der zugehörigen Scherschicht lassen sich schräg gestaffelte Wirbelstrukturen erkennen (z. B. in Abbildung 7.104). Diese beschreiben die Wirbelformation aus der Kelvin-Helmholtz-Instabilität in der freien Scherschicht. Wesentliche Teile der hohen Frequenzen in den Zeitkoeffizienten werden von diesen konvektierenden Wirbeln in den abgelösten Scherschichten am Zylinderkopf und dem Zylindermantel hervorgerufen. Auf diese von POD nur teilweise erfaßbaren Phänomene wird im Abschnitt 7.8.3 eingegangen.

7.7 Verfolgung instantaner Fluidbewegung

Die Untersuchungen mittels POD zielten darauf ab, zeitlich globale Phänomene der Strömungsdynamik zu identifizieren. Darin eingebettete nicht statistisch evaluierte, sondern im zeitlichen Verlauf betrachtete lokale Einzelphänomene sollen durch die Verfolgung instantaner Fluidbewegung extrahiert werden. Die dazu eingesetzten Verfahren der Partikel- und Strukturverfolgung sollen außerdem Details zur Interaktion der globalen Bewegungsformen aufzeigen. Besonders das methodische Verfahren der Strukturverfolgung selbst bedurfte dabei intensiver Entwicklungs- und Anpassungsarbeiten. Obwohl sich die notwendigen Algorithmen noch in der Entwicklungs- und Validierungsphase befinden, sind erste hervorragende Ergebnisse bereits in FREDERICH *et al.* (2008*a*, 2009*b*) veröffentlicht.

7.7.1 Partikelverfolgung

Für die Berechnung des Pfades von masselosen Partikeln im Strömungsfeld wird das einfache Euler-Verfahren mit linearer Interpolation der Partikelgeschwindigkeit (siehe Abschnitt 4.5) benutzt. Aufgrund der hohen zeitlichen Auflösung der numerischen Datensätze sind die Ergebnisse hinreichend genau. Bei der Verfolgung wurden zwei unterschiedliche Strategien verwendet. Zum einen wird an einem ausgewählten Punkt kontinuierlich in jedem Zeitschritt ein neues Partikel eingesetzt. Zum anderen werden Partikel in Form eines planaren Startgitters initialisiert und keine weiteren Partikel im zeitlichen Verlauf hinzugefügt. Im ersten Fall können Streich- und Bahnlinien der Partikel beobachtet werden, während der zweite Fall nur Bahnlinien ermöglicht, diese dann aber in räumlicher Nähe zueinander. Aus den vielfältigen Auswertungen mit verfolgten Partikeln werden hier zwei repräsentative Beispiele vorgestellt. Als Zeitpunkt des Partikelstarts wird hier immer der erste gespeicherte Zeitschritt benutzt.

In Abbildung 7.105 sind exemplarisch zwei Zeitpunkte einer Partikelverfolgung visualisiert, welche das Ergebnis aus dem regelmäßigen Initialisieren neuer Partikel an einem Punkt mittig vor dem Zylinder sind. Die von den Partikeln dargestellte Streichlinie zeigt für beide Instanzen die Instabilität der Scherschicht, welche durch aufrollendes Fluid mit anschließender Wirbelformation gekennzeichnet ist. Da es sich in beiden Fällen um die gleiche Streichlinie handelt, wird deutlich, daß diese die zu passierende Seite des Zylinders wechselt. Der Seitenwechsel vollzieht sich periodisch im Abstand von etwa $12D/U_\infty$, was der doppelten Periodendauer $6D/U_\infty$ der dominanten Frequenz $\mathrm{St} \approx 0.167$ entspricht. Das weitere turbulente Verteilen des Fluids und Aufweiten des Nachlaufs ist mindestens an dem ungeordneten Zustand der Partikel zu erkennen. Beachtenswert ist dabei auch die Aufwärtsbewegung der Partikel vor und am Zylinder sowie der dreidimensionale Charakter des Gesamtgeschehens im Nachlauf.

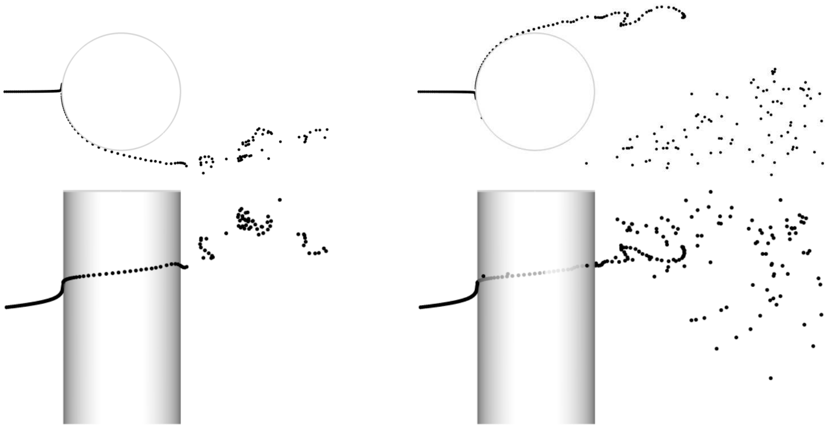
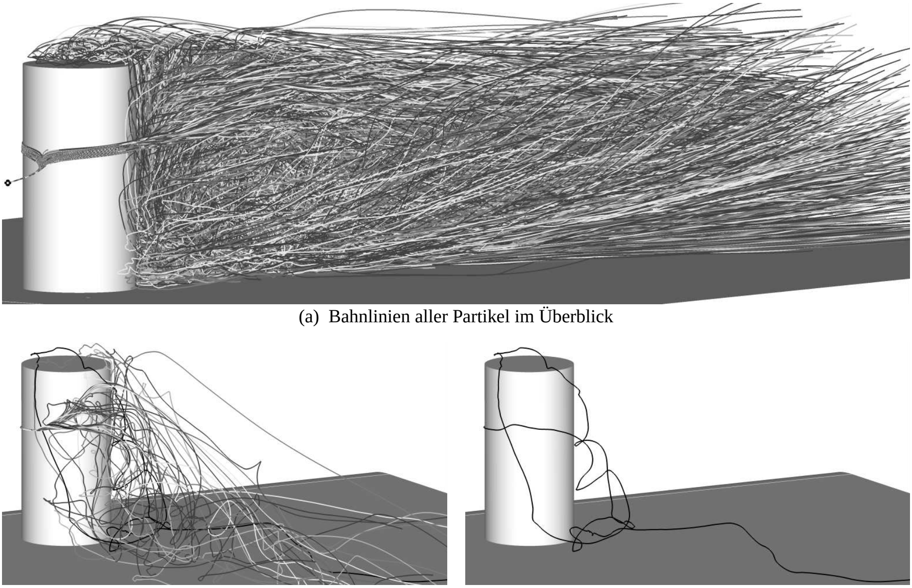


***Abb.** 7.105:* Partikel der Streichlinie mit Startpunkt $\{x/D{=}-1,\ y{=}0,\ z/D{=}-1\}$ für zwei zeitliche Instanzen im Abstand $12D/U_\infty$ (Ansicht von oben und der Seite)

Durch die Verfolgung einzelner Partikel in der Zeit können ihre Bahnlinien bestimmt werden, womit wiederum die Fluiddynamik unter dem Einfluß verschiedener physikalischer Gegebenheiten verständlich wird. Bahnlinien der Partikel mit dem bereits verwendeten Startpunkt vor dem Zylinder sind in Abbildung 7.106 dargestellt. Auch wenn im Detail wenig aussagekräftig, offenbart der globale Überblick, daß sich die Partikel im gesamten Nachlauf und auch auf dem Zylinderkopf finden. Dies ist umso bemerkenswerter, weil alle Partikel den gleichen Startpunkt haben, aufgrund ihres zeitlichen Versatzes aber unterschiedlichen strömungsphysikalischen Ereignissen begegnen.

Die exemplarischen Bahnlinien der ersten 30 Partikel in Abbildung 7.106 b starten in einem relativ schmalen zeitlichen Fenster von $0.75D/U_\infty$. Trotzdem variiert ihre Verweildauer im Strömungsgebiet sehr stark zwischen 15 und fast $50D/U_\infty$. Je nach lokalem Zustand der abgelösten Scherschicht am Zylindermantel werden sie schnell stromab konvektiert oder in das hochturbulente Nachlaufgeschehen mit Rezirkulationsbewegungen und geringen Konvektionsgeschwindigkeiten eingebunden. Welche Strömungsgebiete ein Partikel durchlaufen kann, ist in Abbildung 7.106 c ersichtlich. Nach dem Start vor dem Zylinder passiert das Partikel den



(a) Bahnlinien aller Partikel im Überblick

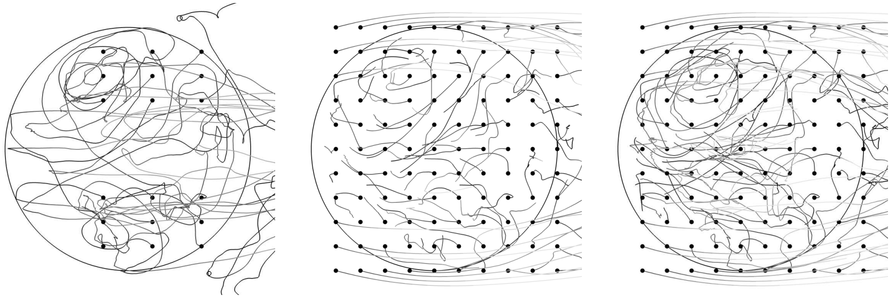
(b) Bahnlinien der ersten 30 Partikel

(c) Bahnlinie eines ausgewählten Partikels

Abb. *7.106:* Bahnlinien der Partikel mit Startpunkt $\{x/D{=}-1, y{=}0, z/D{=}-1\}$

Zylinder mit der anliegenden Grenzschicht in leichter Aufwärtsbewegung. Nach dem Ablösen der Grenzschicht, woraus sich die instabil werdende Scherschicht entwickelt, tritt es in eine abwärtsgerichtete Drehbewegung hinter dem Zylinder ein. Infolge der plattennah vorhandenen Rezirkulationsbewegung wird das Partikel stromauf zum Zylinder konvektiert und legt mit dem Fluid an der seitlichen Zylinderrückseite wieder an, um anschließend hinter der primären Ablösung aufzusteigen. Nach Erreichen der ebenfalls (re)zirkulierenden Strömungsregion auf dem Zylinderkopf wird das das Partikel enthaltende Fluid wieder stromab transportiert. Dabei tritt es in einer Spiralbewegung wiederum in das Rezirkulationsgebiet ein, wo das Partikel nach chaotischer Bewegung in Plattennähe ausgestoßen und nun Teil eines Nachlaufwirbels wird. Diese Bewegung, welche in schwacher Weise auch von der Ungenauigkeit des Euler-Verfahrens begünstigt wird, hebt die global vorhandenen Fluidbewegungen hervor und unterstreicht gleichzeitig deren Verknüpfung miteinander.

Oberhalb des Zylinders sind nochmals gesondert Partikel in Form eines Netzes eingesetzt worden. Die Partikelbahnen lassen sich über den gesamten Zeithorizont, wie in Abbildung 7.107 a zu sehen, bezüglich der durchlaufenen Phänomene nur bedingt interpretieren. Wesentlich geordnete Bewegungen sind beispielsweise im Bereich der Foki (vgl. Abbildung 7.14) zu erkennen. Partikel im Inneren des Strömungsgebietes auf dem Kopf verbleiben längere Zeit dort, wobei offenbar auch Seitenwechsel stattfinden. Das bedeutet die im zeitlichen Mittel symmetrisch abgegrenzten beidseitigen Teilgebiete tauschen Fluid miteinander aus. Daß dabei in gewisser Weise ein großes Maß an Unordnung vorliegt, beweisen die hinsichtlich der Verfolgungszeit differenzierten Darstellungen in Abbildung 7.107. So schneiden sich Partikelbahnen auf gleicher Höhe in relativ kurzer Zeit unter großen Winkeln, was auf starke Änderungen des lokalen



(a) Ausgewählte Partikel (b) Verfolgungszeit $1D/U_\infty$ (c) Verfolgungszeit $2D/U_\infty$

Abb. *7.107:* Bahnlinien eines Partikelnetzes im Kopfbereich des Zylinders in der Ebene $z/D = -2.05$ (Grauwert nimmt mit der Höhe über dem Zylinder ab)

Geschwindigkeitsfeldes hinweist. Daneben zeigen einige Bahnlinien sehr wenig oder fast gar keine Fluidbewegung an. Durch den Vergleich einzelner Bahnlinien in Abbildung 7.107 b miteinander läßt sich ein Eindruck gewinnen, wie stark zergliedert das instationäre Strömungsfeld im Kopfbereich ist. Offensichtlich ist, daß die gewählte Ebene in Wandnähe im Zentrum fast ausschließlich Bewegungen entgegen der Strömungsrichtung beinhaltet. Von dort findet im Wesentlichen kein direkter Fluidtransport in den Nachlauf statt. Nur Partikel, die sich entlang der Vorder- und Hinterkante an die Scherschicht annähern, verlassen das kopfnahe Strömungsgebiet.

7.7.2 Strukturverfolgung

Die Partikelverfolgung ist für die Analyse von Turbulenzstrukturen unpassend und wurde deshalb zugunsten der Verfolgung von kohärenter Fluidmasse nicht übermäßig ausgeweitet. Die Basisvariante der zur Strukturverfolgung benutzten Methode CST ist im Abschnitt 4.6 beschrieben und basiert auf der Arbeit von SCOUTEN (2009). Die ersten Publikationen zum Verfahren und daraus resultierenden Ergebnissen wurden, wie bereits erwähnt, in FREDERICH *et al.* (2008*a*, 2009*b*) vorgenommen.

Der aktuelle Algorithmus von CST nutzt die Identifikation von Wirbelstrukturen über Isoflächen des Wirbelkernkriteriums λ_2. Die Beschränkung auf Grobstrukturen bei der Verfolgung ist nicht zwingend, wird hier aber im Sinne der Konsistenz zum eingesetzten Simulationsverfahren LES benutzt und ist vorerst angebracht, um separierte und verfolgbare Wirbelgebiete zu definieren. Deshalb wurden für die nachstehenden Ergebnisse der Wert $\lambda_2 = -30$ sowie ein Minimalvolumen von $3 \cdot 10^{-4} D^3$ (22 Gitterzellen) und eine kritische Distanz beteiligter Gitterpunkte von $0.03D$ benutzt. Wegen des hohen zusätzlichen Aufwandes für die Glättung usw. wurden bisher nur Strukturen in einem reduzierten Strömungsfeld verfolgt. Dieses Teilgebiet ist in Abbildung 7.110 zu sehen und setzt sich aus äquidistant verteilten Zellen mit linear interpolierten Gitterwerten (ein Schritt der Glättung) zusammen.

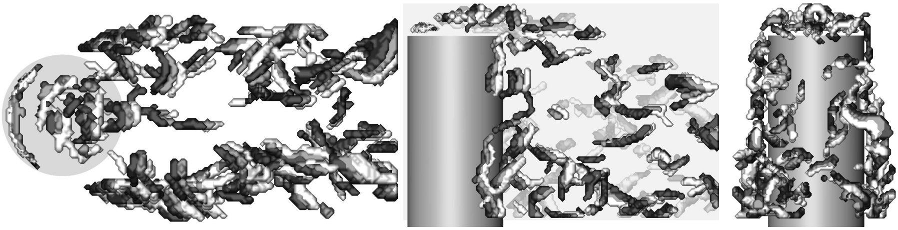


Abb. *7.108:* Mit CST identifizierte Einzelstrukturen für drei Instanzen im Abstand $0.1D/U_\infty$ (Ansichten von oben, der Seite und hinten; Reihenfolge: dunkel-, hellgrau, weiß)

Die durchgeführte Identifikation von Strukturen sowie die Möglichkeit, diese optisch zu verfolgen ist in Abbildung 7.108 dargestellt. Durch die Wahl des relativ kleinen Wertes für λ_2 verbleibt eine moderate Anzahl größerer Wirbelstrukturen, vergleichsweise wenig zu der Darstellung in Abbildung 7.5 a. Mittels CST werden diese Strukturen räumlich und zeitlich miteinander korreliert, so daß eine Zusammengehörigkeit entsteht, wie sie in Abbildung 7.109 für unterschiedlichste kohärente Wirbelgebiete bebildert ist.

Die beispielhaften, bezüglich ihrer zeitlichen Entwicklung erfolgreich beobachteten Wirbelstrukturen in Abbildung 7.109 sind aus FREDERICH *et al.* (2008*a*) entnommen, wobei zur Validierung des Algorithmus kleinere Teilgebiete benutzt wurden. Der zuerst dargestellte längliche Wirbel entsteht aus der Instabilität der seitlichen Scherschicht. Obwohl die grundlegende zylindrische Form der Struktur ziemlich regulär in der zeitlichen Entwicklung ist, wird eine Wirbelaufteilung im zweiten Schritt und eine Wirbelvereinigung im siebenten fälschlich vorhergesagt, weil die zusammengehörigen Teile des gleichen Wirbels kurzzeitig den benutzten kritischen Isowert übersteigen. Das zweite kohärente Wirbelgebiet ist Bestandteil eines Kopfwirbels und kann als solches gut verfolgt werden. Des weiteren kann auch der Wirbel in unmittelbarer Plattennähe sehr gut erfaßt werden und demonstriert das Aufrollen und Anwachsen der wirbelbehafteten Region in der Grenzschicht. Demgegenüber werden auch solche Strukturen detektiert, die ihre räumliche Position beibehalten und lediglich Ausdehnung und Orientierung ändern. So im letzten Beispiel von Abbildung 7.109 für eine relative stationäre Wirbelformation, als Teil des Rezirkulationsgebietes auf dem Zylinderkopf, gezeigt. Zur Analyse von Bewegungen für derartige Regionen ist der CST-Ansatz im derzeitigen Konzept vorerst ungeeignet.

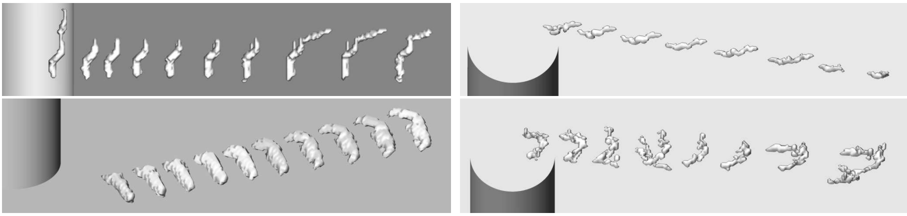


Abb. *7.109:* Beispiele für verfolgte Strukturen in aufeinanderfolgenden Zeitschritten (Zeitschritt $5\Delta t$; Abstand zehnfach vergrößert; künstlicher Abstand im vierten Beispiel)

Trotz geringer Unzulänglichkeiten im Grundkonzept der CST-Methode können wichtige Strukturen in der Strömungsdynamik identifiziert und verfolgt werden. Konsistent mit den Beobachtungen in instationären Momentanaufnahmen sind die ermittelten Strukturen in ihrer Größe relativ klein und haben eine Lebensdauer (verfolgbare Zeit) von maximal $3D/U_\infty$. Für die kohärenten Wirbelbewegungen kann außerdem eine gut approximierte Bahnlinie über die zeitlich variierende Lage des geometrischen Mittelpunktes jeder individuellen Struktur bestimmt werden. Abbildung 7.110 zeigt neben dem reduzierten Teilgebiet solche Bahnlinien differenziert nach zwei Bereichen höchster Lebensdauer. Erkennbar ist eine starke Beschränkung der Trajektorien auf die Scherschichtbereiche, aus denen sich die größeren Wirbelstrukturen entwickeln. In der zentralen Region der großen Rezirkulationsbewegung hinter dem Zylinder sind kaum „langlebige“ Strukturen auszumachen. Dafür finden sich aber in den Scherschichtbereichen vielfältige Bewegungsformen, welche eine Gruppierung der Einzelstrukturen nahezu unmöglich machen. Einzig die aus der Kopfüberströmung entstehenden seitlichen Kohärenzgebiete folgen einem relativ wenig variierenden Verlauf entlang des Randes vom Rezirkulationsgebiet.

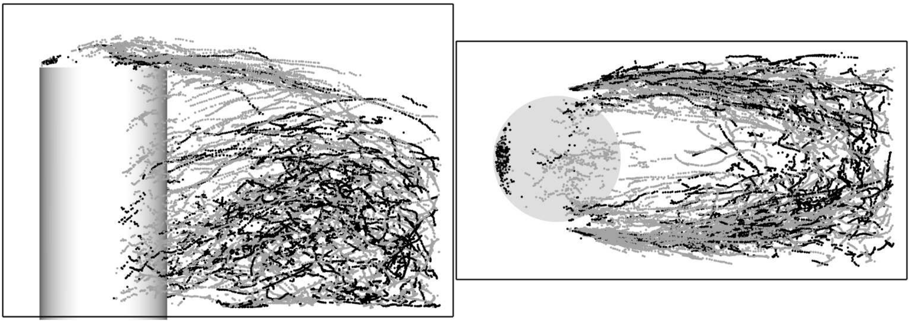


Abb. *7.110:* Reduziertes Gebiet für die Strukturverfolgung (Box) und Bahnlinien von Strukturen mit einer Lebensdauer von $1.75...2.5$ (hell) und $> 2.5D/U_\infty$ (dunkel)

Vorstehend sind einige globale Eigenschaften der Methode zur Strukturverfolgung diskutiert und die Funktionalität demonstriert worden. Im Weiteren soll an zwei wichtigen Beispielen die Relevanz eines derartigen Unterfangens belegt werden, bevor auf weitere bestimmbare Größen eingegangen wird und im Abschnitt 7.7.3 (ebenfalls zwei) für die Strömungsphysik bedeutsame Erkenntnisse vorgestellt werden.

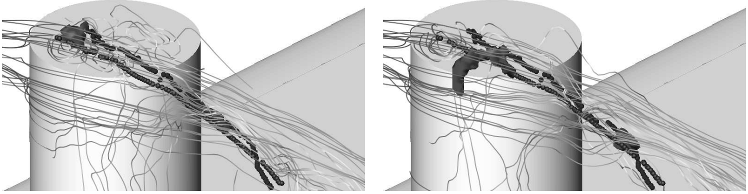
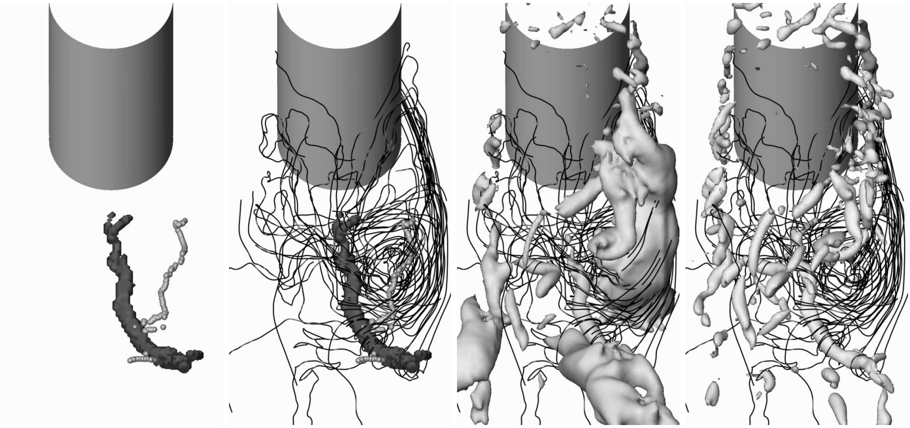


Abb. *7.111:* Beispielhaft verfolgte Wirbel im Kopfbereich: Strukturen mit Bahnlinie und instantanen Stromlinien für zwei Zeitpunkte im Abstand $0.5D/U_\infty$

In Abbildung 7.111 sind zwei verschiedene Wirbel im Kopfbereich mit dem sie direkt umgebenden Strömungsfeld für unterschiedliche Zeitpunkte gezeigt. Aus dieser Darstellung sind einige wesentliche Aspekte erkennbar. Offensichtlich formieren sich Wirbelelemente in der Scherschicht über dem Zylinderkopf, die sich in ihrem weiteren Verlauf mit solchen aus der seitlichen Scherschicht vereinigen. Dieser Umstand konnte bereits in den POD-Moden im Kopfbereich (vgl. z. B. Abbildung 7.104) beobachtet werden. Wie aus der (korrekt dargestellten zeitlichen und räumlichen) Positionierung beider Einzelwirbel ersichtlich, konstituieren sich derartige Wirbelelemente am Kopf (hier zu einem früheren Zeitpunkt) auch etwas weiter mittig und koppeln deshalb und wegen des globalen Zustandes der Wirbelstraße nicht an die seitlichen Wirbelelemente an. Beide Strukturen haben ihren Ursprung sehr nah an der Zylinderkappe und den darauf befindlichen Fokuspunkten, so daß im instationären Verlauf offenbar ein Zusammenhang mit diesen besteht. Auf ihrem interessanterweise seitlich zueinander versetzten Pfad stromab involvieren beiden Wirbelbewegungen auf jeden Fall Fluid aus der seitlichen Umströmung.



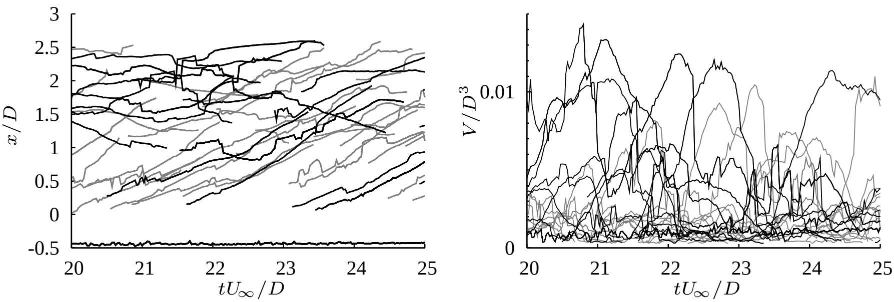
(a) Struktur mit Bahnlinie (b) Instantane Stromlinien (c) Isofläche $p - \overline{p} = -0.2\varrho U_\infty^2$ (d) Isofläche $\lambda_2 = -30$

***Abb.** 7.112:* Relikt eines Längswirbelgebiets mit Anschluß an die Nachlaufwirbel

Die Vielfältigkeit im Strömungsfeld vorhandener Längswirbel wird mit CST besonders stark betont, da diese aufgrund wenig gestörter Kohärenz offenbar besonders gut zu verfolgen sind. Derartige Strukturen formieren sich aus der Überlagerung von seitlichen Bewegungen und Abwärtskomponenten im Strömungsfeld und werden anschließend durch die globalen Strömungsphänomene häufig nur in ihrer Bahn versetzt. In Abbildung 7.112 ist ein solcher Längswirbel im Kontext des lokalen Strömungsfeldes gezeigt. Der Wirbel, dessen Bahn sich ungefähr bei einem Drittel der Höhe über der Platte befindet, wächst während seiner Konvektionsbewegung in Strömungsrichtung stetig an und wird dabei durch den sich seitlich formierenden Wirbel lateral versetzt. Aus der Darstellung der Druckfluktuation geht hervor, daß eine Verbindung zu den großskaligen Nachlaufstrukturen mit dem gleichen Drehsinn besteht. Die Isofläche für das Wirbelkernkriterium λ_2 veranschaulicht neben der betrachteten Struktur nochmal die von CST erfaßbaren Strukturen, welche durch Auswahl des Isowertes eingeschränkt sind. Die wichtigste

Aussage für CST ist, daß nicht nur die Verfolgung von Strukturen, sondern vor allem deren Separation möglich wird, womit der Aufwand gerechtfertigt ist.

Strukturereignisse, wie Vereinigung etc., können bisher nur implizit mit dem Verfahren erfaßt werden. Es existiert allerdings eine Reihe von Ansätzen, um diese Fähigkeit zu ergänzen und weitere Größen aus den Strukturmerkmalen zu bestimmen. So kann z. B. über die Bahnlinien, wie in Abbildung 7.113 a eindimensional aufgetragen, die Kongruenz mehrerer oder Endpunkte einzelner analysiert werden. Darüber hinaus stehen zeitliches Volumen (Abbildung 7.113 b) der Struktur und ihre Bahngeschwindigkeit zur Verfügung. Das Volumen gibt in der Art seiner Kontinuität einen Anhaltspunkt über Wachstum und eventuelle Strukturereignisse, während die Geschwindigkeitssignale auch zu Frequenzanalysen tauglich sind. Die derzeitige Variante von CST erlaubt wegen des Konstruktionsprinzips hierfür jedoch momentan keine ausreichend glatten Verläufe.



(a) Bahnlinien in Strömungsrichtung (b) Strukturvolumen

Abb. *7.113:* Beispielhafte Strukturmerkmale

Trotzdem Verbesserungen an CST notwendig sind, konnten bereits wichtige Phänomene identifiziert werden (Abschnitt 7.7.3). Die Kombination von CST mit verschiedenen statistischen Ansätzen wurde ebenfalls bereits erprobt und ermöglicht beispielsweise instantan gefilterte Einzelstrukturen. Diese Ansätze sind nicht Bestandteil dieser Arbeit, sondern sollen bzw. können als Fortsetzung von SCOUTEN (2009) vorgenommen werden.

7.7.3 Detektion instantaner Wirbelformation

Die Strukturverfolgung stellt auch eine Möglichkeit dar, eine gewisse Filterung des turbulenten Durcheinanders hin zu relevanten Strukturen durchzuführen. Die Rückführung so extrahierter Strukturen in das zugehörige Strömungsfeld ermöglicht, gezielt Erkenntnisse über lokale Phänomene des instationären Strömungsfeldes zu gewinnen. Die in Abbildung 7.114 ursprünglich wegen ihrer Bahnlinie auffällige Struktur ist ein prominentes Beispiel dafür. Es handelt sich hierbei abermals um einen der vielen Längswirbel im Strömungsfeld, der seinen Ursprung aber nicht direkt am Zylinderkopf oder einem anderen dafür prädestinierten Ort hat. Die detektierte Wirbelbewegung beginnt stromab, wenig dennoch deutlich unterhalb des Zylinderkopfes und lateral versetzt zur Symmetrieebene. Anhand der Stromlinien wird klar, daß dieser Längswirbel hauptsächlich über Fluid des Rezirkulationsgebietes gespeist wird, welches vertikal am Zylinder aufsteigt. Die Einengung durch die seitliche Scherschicht und das vom Zylinderkopf her abwärts strömende Fluid verursacht die nach innen gerichtete Rotationsbewegung, in welcher weiter stromab auch äußeres Fluid mitgerissen wird. Weitere Längswirbel dieser Art mit zeitlich und räumlich weitreichender Kohärenz konnten auf beiden Seiten des Zylinders identifiziert werden, wobei der vertikale Startpunkt infolge der seitlichen Wirbelablösung variiert. Die Wichtigkeit dieser Längswirbel wird durch ihre bereits in der gemittelten Oberflächenvisualisierung des Zylindermantels (Abbildung 7.12) erkennbaren Fußabdrücke bei etwa $z/D = -1.75$ und $\Theta = \pm 165^\circ$ untermauert. Die Beobachtung dieses Phänomens wurde durch die Strukturverfolgung wesentlich erleichtert und bekräftigt eine Reihe älterer experimenteller Untersuchungen. Bereits ETZOLD & FIEDLER (1976) haben, basierend auf dem Studium des instationären Nachlaufes, Längswirbel mit Startpunkten unterhalb des Zylinderkopfes diagnostiziert. Darauf aufbauend haben auch KAWAMURA *et al.* (1984) die Vermutung angestellt, daß die Kopfwirbel in den Wirbelabdrücken auf der Rückseite des Zylinders beginnen. Auch KRAJNOVIĆ (2008) beschreibt ähnliche Strukturen, die aber nur eine Eigenschaft der mittleren Strömung wären. Die hier vorgestellten Beobachtungen sind definitiv eine Eigenschaft der instationären Strömung, sind aber aufgrund ihrer Häufigkeit auch im gemittelten Feld enthalten. Es ist sehr wahrscheinlich, daß es genau diese kopfnahen Längswirbel sind, welche die Wirbelstärkekonzentration in den Daten von LEDER (2003) verursachen. Wegen der Überlagerung durch die globale Hauptströmung sind sie als Wirbel im Geschwindigkeitsfeld aber nicht mehr auszumachen.

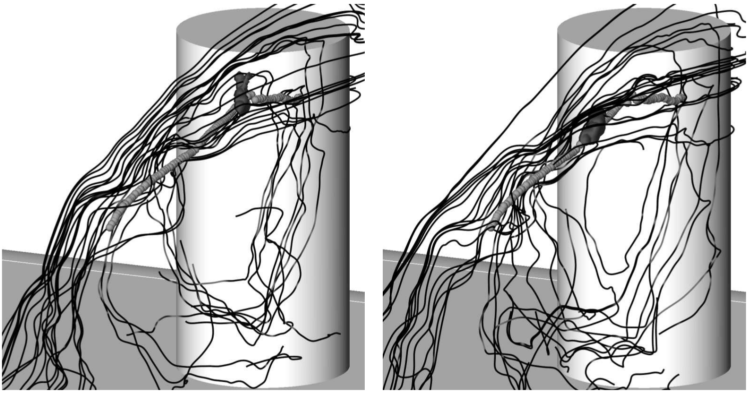
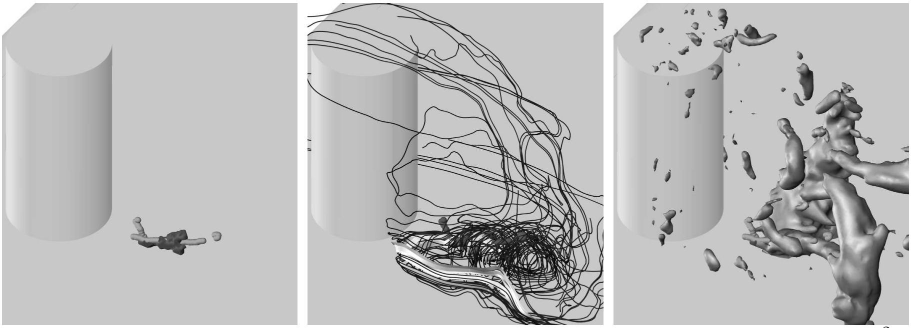


Abb. *7.114:* Kohärenter Längswirbel unterhalb des Zylinderkopfes: Struktur mit Bahnlinie und instantanen Stromlinien für zwei Zeitpunkte im Abstand $0.5D/U_\infty$

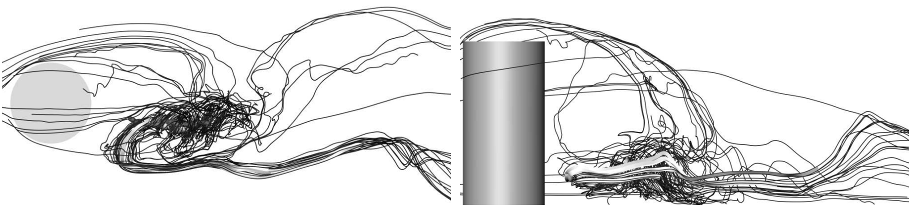
Die vorgestellte Methode CST filtert kleine Wirbelskalen heraus, wobei eine kritische, minimale Konzentration an Wirbelstärke durch den Grenzwert des Wirbelkernkriteriums eingeführt wird. Diese Eigenschaft impliziert, daß eine Struktur nicht weiter verfolgt werden kann bzw. verloren geht, wenn die kritische Konzentration nicht beibehalten wird. Umgekehrt erlaubt dieser Umstand bis zu einem gewissen Grad die Detektion von lokaler Wirbelstärkeformation, was bei der Analyse dreidimensionaler und instationärer Strömungsdaten hilfreich ist. Auf diese

Weise konnte eine wichtige Strömungserscheinung studiert werden, die nicht durch die mittlere Strömung abgebildet werden kann. Abbildung 7.115 a zeigt eine Bahnlinie und die verfolgte Struktur mit ihrem Zentrum bei $\{x,y,z\}/D = \{1.53,\, 0.26,\, -0.39\}$ zur mittleren Verfolgungszeit. Die Inspektion des zugehörigen Strömungsfeldes läßt eine fast in Strömungsrichtung orientierte Wirbelformation erkennen, wobei die Bewegung in Richtung des Zylinders stattfindet (vgl. Abbildung 7.115 b). Dieser Wirbel befindet sich in der Lücke zwischen dem sich neu entwickelnden und dem bereits stromab konvektierten seitlichen Ablösewirbel und in lateraler Richtung gegenüber des alternierenden Gegenstücks, dargestellt durch die Isofläche des instantan variierenden Druckes in Abbildung 7.115 c.

Die Gesamtverfolgungszeit dieser Struktur ist $2.65D/U_\infty$, was sich innerhalb des Zeitfensters der halben Periodendauer $3D/U_\infty$ der mittleren dominanten Wirbelfrequenz $\mathrm{St} \approx 0.167$ vollzieht. Das Studium weiterer Bahnlinien und Momentanaufnahmen manifestiert das Auftreten solcher Wirbelformationen auf beiden Seiten an ähnlichen räumlichen Positionen und Phasenlagen bezogen auf die dominante Fluidbewegung. Die sich formierenden Wirbel sind direkt mit der Kopfüberströmung verknüpft und werden teilweise von dieser gespeist (Abbildung 7.115 b). Während das abwärtsströmende Fluid durch die alternierenden Wirbel mit vertikaler Achse periodisch in lateraler Richtung verschoben wird, induziert die Kombination beider die aufgefundene Wirbelbildung. Die zeitliche Analyse ihrer periodischen Entwicklung zeigt große Variationen in Größe, aber auch geringere in räumlicher Lage und lokaler Ausrichtung. Weil sich die Turbulenzstruktur in einer Region relativ geringer Geschwindigkeiten befindet, kann sicher angenommen werden, daß diese Variationen aus der veränderlichen Interaktion der seitlichen Wirbelbildung und der Abwärtsströmung resultieren.



(a) Struktur mit Bahnlinie (b) Instantane Stromlinien (c) Isofläche $p - \overline{p} = -0.15\varrho U_\infty^2$



(d) Instantane Stromlinien in der Draufsicht (e) Instantane Stromlinien in der Seitenansicht

Abb. *7.115:* Instantane Formation eines stromauf orientierten Längswirbels

Generell erlaubt CST die Detektion vieler kleinerer Strukturen, die von der zeitlichen Mittelung gar nicht und von POD nur in einem globalen Kontext erfaßt werden. Deren Bedeutung kann aber vor allem im instationär stark ungeordneten Nachlauf für den globalen Zusammenhang relevant sein, wie vorstehend an zwei wesentlichen Beispielen gezeigt.

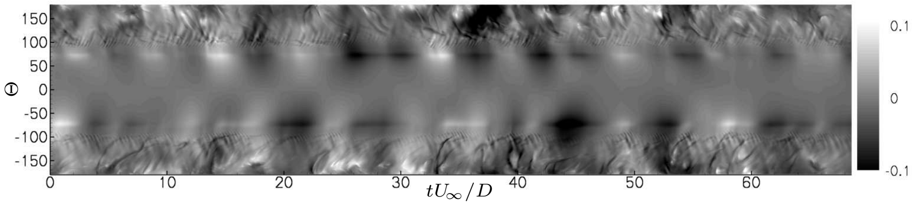
7.8 Aspekte der Instationarität und Strömungsdynamik

Nachdem mit POD statistisch existente Strukturen extrahiert und mit CST instantane Wirbelgebiete im Feld verfolgt wurden, ist es angebracht, die globale Strömungstopologie und -dynamik ausschnittsweise in ihrem instationären Verlauf zu betrachten. Zu diesem Zweck sollen einige wichtige und interessante Aspekte mit Hilfe der aufgezeichneten Datensätze analysiert werden. Dabei ist die instationäre Strömung derart komplex, daß es nicht sinnvoll ist, Einzelregionen so detailliert auszuwerten wie im Fall der mittleren Strömung. Im gleichen Sinne kann nur eine Auswahl verschiedener Phänomene erfolgen, die sich quasi beliebig erweitern ließe.

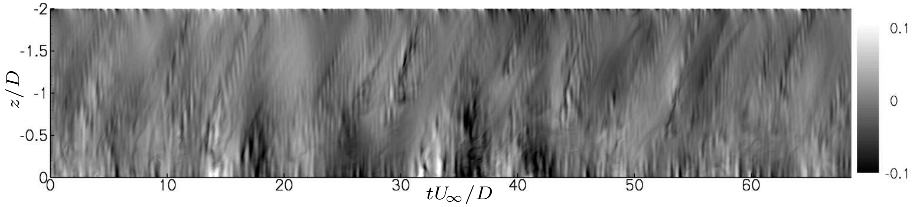
Die Identifikation von Regionen mit starken Schwankungen, also wesentlichen Unterschieden zur gemittelten Hauptströmung, ist bereits mit Hilfe von Abbildung 7.27 vorgenommen worden. Konzentriert sind derartige Gebiete auf den Bereich der Interaktion aus seitlicher Ablösung und Kopfüberströmung direkt stromab des Zylinders mit stromab zunehmender Annäherung an die Platte. Die Idee, daß symmetrische und antimetrische Bewegungsformen wesentlich an Kopfeinflüsse bzw. die seitliche Umströmung gekoppelt sind (vgl. Abbildung 7.8), ist nur noch im idealisierten Kontext zu vertreten. In der zeitlichen Entwicklung synchronisiert das Strömungsfeld durch stark periodische Bewegungen bezüglich der dominierenden Strouhal-Zahlen bei etwa 0.167 und 0.115. Durch die entstehenden subharmonischen Bewegungsformen ist es, wie in den nächsten Abschnitten hervorgehoben, nahezu unmöglich ein topologisches Modell zumindest für die Wirbelstraße (siehe z. B. ZDRAVKOVICH, 1997, S. 124) anzugeben, weil die Nachlaufstruktur stark intermittiert.

7.8.1 Harmonie der dominanten Wirbelbewegung

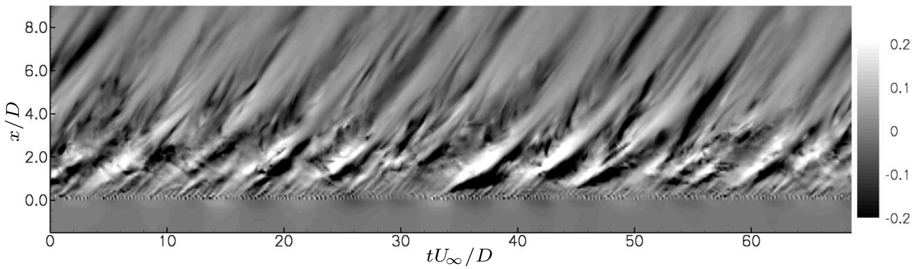
Um die Periodizität der großskaligen Nachlaufstrukturen zu analysieren, wird wiederholt auf den Druck als skalare Repräsentation des Strömungsfeldes zurückgegriffen. In Abbildung 7.116 ist die zeitliche Fluktuation des Druckes entlang verschiedener Linien im Strömungsfeld aufgetragen. Die Linie $z/D = -0.5$ in Abbildung 7.116 a befindet sich im unteren Bereich des Zylinders, wo die Wirbelablösung nicht direkt von der Kopfüberströmung beeinflußt wird. Trotzdem sind die Fußabdrücke der großskaligen seitlichen Wirbel nur teilweise streng harmonisch und alternierend. Der Abstand und die Stärke der Druckminima auf beiden Seiten des Zylinders variiert deutlich, während die Position der Ablösung stationären Charakter offenbart. Interessant ist, daß sich durchaus wiederkehrende Muster mit zeitlich kurz aufeinanderfolgenden Druckminima auf der einen und einem großen Minima auf der anderen Zylinderseite, erkennen lassen. Diese wechseln sich wenig periodisch mit ausgeprägt alternierenden Anordnungen ab. Wie aus der Linie $\Theta = 110^\circ$ ersichtlich, reichen die Druckminima teilweise bis zu zwei Drittel der Zylinderhöhe. In der zugehörigen Abbildung 7.116 b ist eine Neigung der Wirbelstruktu-



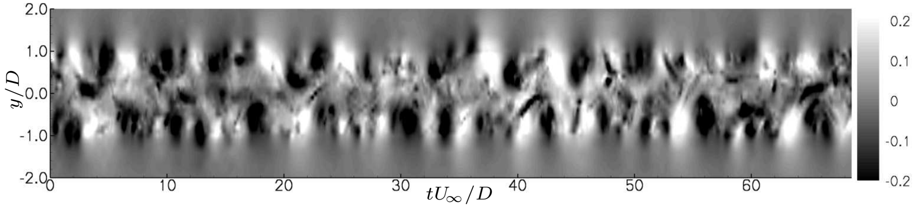
(a) Linie des Zylindermantels $z/D = -0.5$



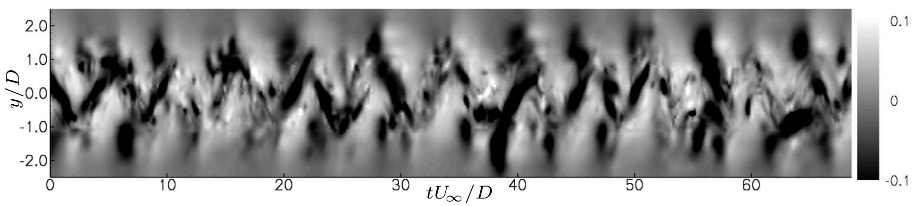
(b) Linie des Zylindermantels $\Theta = 110°$



(c) Linie entlang x im Nachlauf $y/D = 0.55$, $z/D = -0.5$



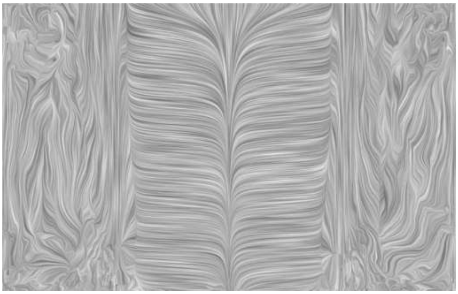
(d) Linie entlang y im Nachlauf $x/D = 2$, $z/D = -0.5$



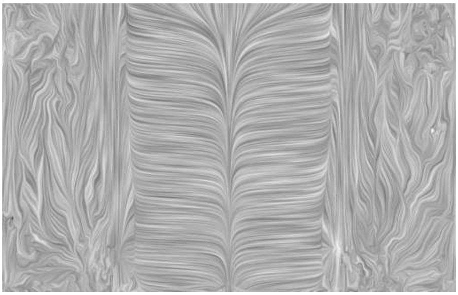
(e) Linie entlang y im Nachlauf $x/D = 5$, $z/D = -0.5$

Abb. *7.116:* Zeitlicher Verlauf der Druckfluktuation $(p-\overline{p})/(\varrho U_\infty^2)$ entlang verschiedener Linien des Strömungsfeldes ren in Strömungsrichtung mit zunehmender Entfernung zur Plattennähe erkennbar, welche aus dem Einfluß des rezirkulierenden Fluids hinter dem Zylinder resultiert. Zusätzlich sind sehr eng gestaffelte Druckfluktuationen auszumachen, die aus den kleinen Wirbeln der instabilen Scherschicht erwachsen. Die Tatsache, daß deren Druckfluktuationen teilweise gleichzeitig mit großskaligen Phänomenen existieren, ist bemerkenswert und deutet auf relativ langsam konvektierende, große kohärente Wirbelgebiete hin, in denen sich zwangsläufig die Scherschichtwirbel akkumulieren.

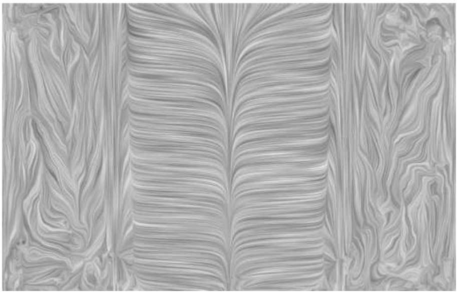
Für den Nachlauf des Zylinders sind in Abbildung 7.116 drei verschiedene Linien dargestellt: eine seitlich am Zylinder mit Orientierung in Strömungsrichtung und zwei weitere hinter dem Zylinder quer zur Strömungsrichtung in lateraler Ausrichtung. Die Linie entlang x befindet sich in der Bahn der stromab schwimmenden Wirbelgebiete. Beginnend am Zylinder sind wiederum Abdrücke der kleinen Scherschichtwirbel sowie Entwicklung großskaliger Strukturen festzustellen. Bis zu $x/D = 5$ sind die beobachtbaren Phänomene stark intermittent mit einem schwachen Maß an Periodizität. Stromab dieser Position wird die zeitliche Ordnung der vorhandenen Grobstrukturen gestärkt und die Periodendauer gleichmäßiger. Diesen Effekt zeigt auch der Vergleich zwischen den beiden lateralen Linien in Abbildung 7.116 d und Abbildung 7.116 e. Während relativ nah hinter dem Zylinder bei $x/D = 2$ die „harmonische Unordnung“ der Wirbelgebiete enorm ist, beginnt sich bei $x/D = 5$ ein auffällig alternierendes Muster auszubilden. Direkt stromab des Zylinders dominieren Interferenzen aus alternierender Wirbelformation und symmetrisch pulsierenden Einflüssen aus der Kopfüberströmung, so daß die Wirbelkonvektion beeinträchtigt wird und doppelte wie auch symmetrische Anordnungen auftreten.



(a) Beliebig gewählte Instanz t_0



(b) Instanz $t_0 + 0.5D/U_\infty$



(c) Instanz $t_0 + 3D/U_\infty$

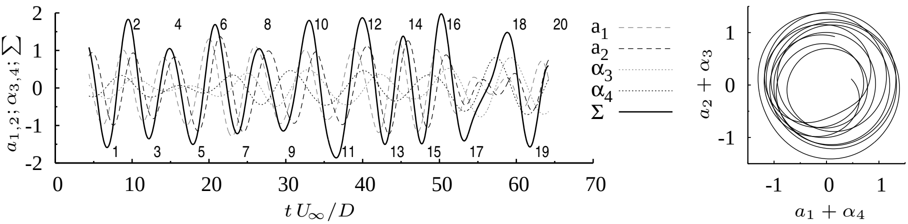
Abb. *7.117:* Instantane Geschwindigkeitsfelder am Zylindermantel mittels LIC

Obwohl die Nachlaufstruktur in unmittelbarer Nähe des Zylinders zeitlich kräftig variiert und sich das Druckfeld merklich stromauf der Ablösung auswirkt, bleibt die Position der Ablösung davon wenig beeindruckt. In Abbildung 7.117 ist das wandnächste Geschwindigkeitsfeld auf dem Zylindermantel für drei

Instanzen mit unterschiedlichem zeitlichen Abstand visualisiert. Die Lage der Ablösung bei circa $80°$ ändert sich nur unwesentlich, einzig die Linienform erfährt im unteren Zylinderbereich lokal geringe Deformationen. Auschlaggebend für die relative Stationarität der Ablösung ist der unverändert laminare Strömungscharakter der anliegenden Grenzschicht am vorderen Zylindermantel. Demgegenüber ist in der abgelösten Region dahinter der vollständig turbulente Strömungscharakter wahrnehmbar, wobei darin auch die relative Ordnung der dort anliegenden hauptsächlich aufwärtsgerichteten Rückströmung enthalten ist.

7.8.2 Intermittenter Nachlauf

Im vorherigen Abschnitt ist hervorgehoben worden, daß die abgelöste Strömung nicht unbedingt harmonische Eigenschaften besitzt bzw. diese intermittent gestört werden. Nachstehend soll in einem globalen Kontext geschildert werden, welche Phänomene auftreten und wie diese gegebenenfalls zusammenhängen. Um eine Auswahl aus den vorhandenen instationären Datensätzen zu treffen, wurden die beiden im Nachlauf identifizierten harmonischen Bewegungsformen geeignet überlagert. Dazu sind die Zeitkoeffizienten des dominanten Modenpaares ($\mathrm{St} \approx 0.167$) und die mit 0.115 gefilterten Zeitkoeffizienten des zweiten Modenpaares phasengenau aufsummiert worden. Von dem sich ergebenden, irgendwie periodischen Verlauf (Abbildung 7.118 a) sind die zu den Extrema gehörenden Zeitpunkte identifiziert worden und deren globale Strömungsstruktur in Abbildung 7.119 visualisiert. Das Phasenportrait einer differenzierten Koeffizientensummation in Abbildung 7.118 b repräsentiert eine zwar nicht perfekte, dafür aber sehr gute Harmonie. Weil sich die Periodizität der gewählten Momentanaufnahmen nicht eindeutig in der Strömungsstruktur widerspiegelt, sei darauf hingewiesen, daß die benutzten mit POD generierten Zeitkoeffizienten statistischen Charakter haben.

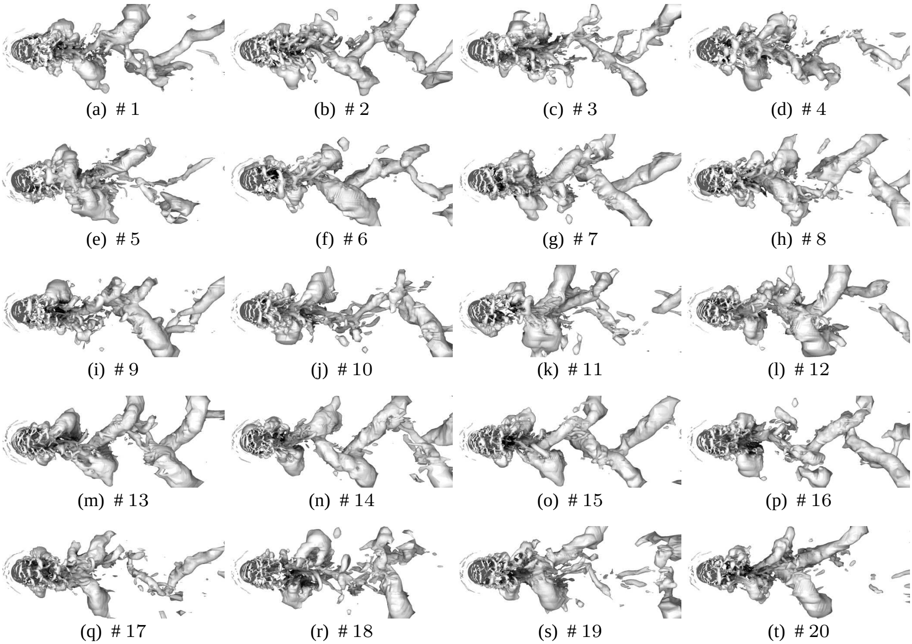


(a) Zeitkoeffizienten der dominanten Bewegungen und ihre Summe (b) Phasenportrait

Abb. *7.118:* Zeitsignal und Extrema aus der Überlagerung der dominanten Bewegungsformen

Auffällig an den instantanen Wirbelstrukturen in Abbildung 7.119 ist ihre Verschiedenheit im Sinne fehlender Harmonie. Dennoch läßt sich zumindest eine Zuordnung zu den extremalen Phasenminima und -maxima in den einzelnen Spalten der Darstellung erkennen. So ist sowohl zylindernah und wie auch im Nachlauf eine ähnliche räumliche Anordnung der Wirbelstrukturen für die Extrema $1, 5, 9$ usw. auszumachen. Darüber hinaus ist die Variabilität der kohärenten Strukturen nahezu stochastisch. Übereinstimmung zu den phasengemittelten Ergebnissen in Abbildung 7.95 kann eigentlich nur für die Instanzen 2 und $13 - 15$ festgestellt werden.

Die Wirbelanordnung ist für diese vollständig asymmetrisch ausgeprägt, wie im Fall einer alternierenden Wirbelstraße zu erwarten. Daneben finden sich in Teilen symmetrische Zustände (z. B. 4, 8 $16-18$) oder auch doppelte Formationen auf einer Seite (z. B. 3, 7, 9, 11). Diese Doppelung von Wirbeln kann stromab konvektiert werden, wie im Fall 9, oder nahe des Rezirkulationsgebietes zur Verschmelzung führen, woraus dann besonders große einseitige Wirbelgebiete entstehen (z. B. 5, 11, 18). Die durch all diese Zustände dokumentierte Intermittenz des abgelösten Nachlaufes basiert auf der Interaktion der globalen Strömungsgebiete und spiegelt sich in typischen Interferenzphänomenen wider. Beispielsweise kommt es hauptsächlich durch die symmetrisch pulsierende Bewegung im Nachlauf zu verschieden weiter Staffelung der Wirbel im vorderen Nachlauf, von relativ engen (z. B. 4, 19) bis zu großen Abständen (z. B. 6, 9). Die damit verbundenen Unterschiede in den Konvektionsgeschwindigkeiten führen zum Auseinanderreißen der Wirbelstraße, womit quasi „Löcher“ im hinteren Nachlauf entstehen (z. B. 4, 11, 17, 19).



(a) # 1 (b) # 2 (c) # 3 (d) # 4

(e) # 5 (f) # 6 (g) # 7 (h) # 8

(i) # 9 (j) # 10 (k) # 11 (l) # 12

(m) # 13 (n) # 14 (o) # 15 (p) # 16

(q) # 17 (r) # 18 (s) # 19 (t) # 20

Abb. *7.119:* Momentanaufnahmen der intermittenten Nachlaufstruktur (Instanzen entsprechend den Extrema in Abbildung 7.118; Isofläche $p-\overline{p}=-0.05\varrho U_\infty^2$; Ansicht von oben)

Der Abstand der Extremwerte beträgt bis auf eine Ausnahme durchschnittlich $2.9D/U_\infty$ (vgl. Abbildung 7.118). Die Verdoppelung dieser Zeit entspricht der Periodendauer zu der Frequenz $\mathrm{St}=0.172$. Die Ausnahme bildet der Abstand von 17 nach 18, der ungefähr dieser Periodendauer entspricht, also doppelt so groß ist als in den anderen Fällen. Wie anhand der Verläufe der einzelnen Koeffizienten zu sehen, handelt es sich hierbei um ein extremes Interferenzphänomen, welches den zeitlich lang gestreckten Zusammenbruch der globalen Korrelation in der POD-Matrix aus Abbildung 7.83 verursacht.

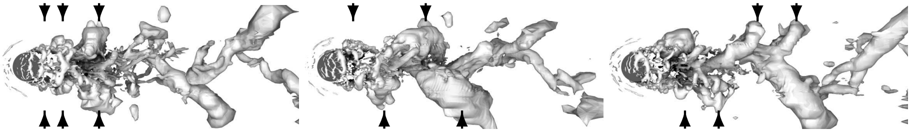
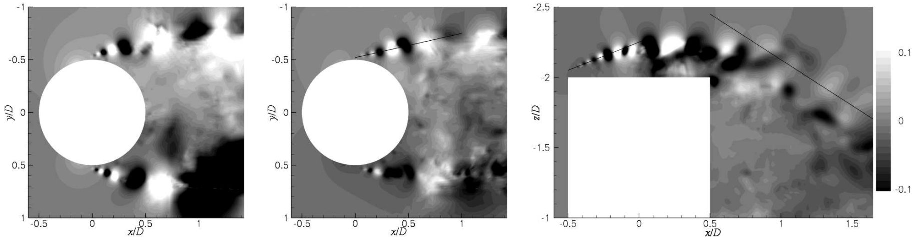


Abb. *7.120:* Typen intermittenter Nachlaufstrukturen (Zeitschritt $9D/U_\infty$ zwischen den Instanzen; Isoflächen $p - \overline{p} = -0.05\varrho U_\infty^2$; u-Geschwindigkeit als Farbwert)

Der Zusammenhang von intermittenter Nachlaufstruktur und Kopfüberströmung ist offensichtlich. Allerdings kann aufgrund des fehlenden Nachweises einer eindeutig harmonischen Einkoppelung ablösender Wirbelgebiete vom Kopf (siehe Abbildung 7.127 und zugehörige Dokumentation) in den Nachlauf keine definierte Periodendauer zwischen einzelnen Zuständen angegeben werden. Im Kopfbereich findet sich durchgängig ein Frequenzanteil bei $\mathrm{St} = 0.055$, welcher in mehreren POD-Zeitkoeffizienten auftaucht und mit den globalen harmonischen Bewegungsformen bei 0.167 und 0.115 in engem Verhältnis steht bzw. durch Linearkombination verknüpft ist. Die gezielte Auswahl zeitlicher Instanzen bezüglich dieser Frequenz ermöglicht bemerkenswerte Beobachtungen. In Abbildung 7.120 sind drei Momentanaufnahmen der globalen Wirbelgebiete in einem zeitlichen Abstand von $9D/U_\infty$ dargestellt. Dieser Zeitschritt entspricht der halben Periodendauer einer Frequenz von $\mathrm{St} = 0.055$. Von links nach rechts sind stark symmetrische Wirbelanordnung, nahezu perfekt alternierende und lokale Abwechslung von Wirbelpaaren präsentiert. Während diese Wirbelformationen im nahen Nachlauf auftauchen, ist der hintere Nachlauf mit einer Zeitverzögerung auch betroffen. Die beobachteten Zustände lassen sich gut über die Interaktion einer Wirbelstraße und der Pulsation des zylindernahen Nachlaufes erklären und sind Ursache für die nahezu periodischen Störungen mit einem zeitlichen Abstand von $18D/U_\infty$ in der schon vormals angesprochenen POD-Korrelationsmatrix.

7.8.3 Instabilitäten und Transition

Der letzte Abschnitt der Strömungsanalyse soll dem im Sinne turbulenter Strömungen wichtigen Aspekt der Turbulenzentstehung aus Instabilitäten bzw. des laminar-turbulenten Übergangs gewidmet sein. Dabei liegt das Augenmerk auf den zu beobachtenden Phänomenen der Wirbelformation innerhalb der abgelösten Scherschichten und den zugehörigen Frequenzen. Abbildung 7.121 zeigt Schnittebenen durch die beiden wichtigsten, am Zylinder ablösenden Scherschichten. Sowohl am Mantel als auch an der Vorderkante des Zylinders ist nahezu umgehend nach der Ablösung die Entwicklung von Wirbelgebieten zu erkennen. Diese konstituieren sich aus der Kelvin-Helmholtz-Instabilität, wachsen im Laufe ihrer Konvektionsbewegung an und sind letztlich Ausdruck der Transition sowie Voraussetzung für die im Nachlauf allgegenwärtige Turbulenz. Aufgrund der relativen Stationarität der Ablösung folgen die Wirbel zylindernah in etwa immer dem gleichen Pfad.

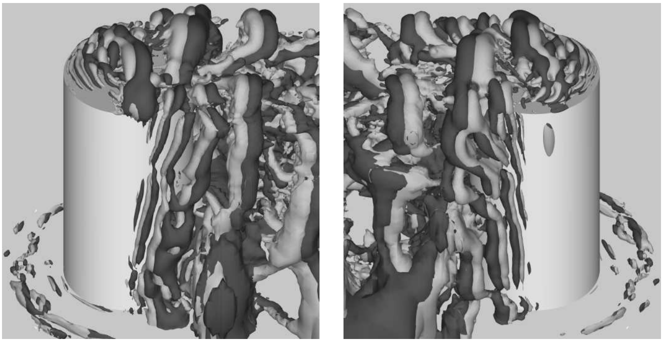


(a) Ebene $z/D = -0.5$ (b) Ebene $z/D = -1.0$ (c) Ebene $y = 0$

Abb. *7.121:* Druckfluktuation $(p - \overline{p})/(\varrho U_\infty^2)$ im Bereich der vom Zylinder abgelösten Scherschichten mit Beobachtungslinien

Eine dreidimensionale Darstellung der Scherschichtwirbel am Kopf und den Seiten einschließlich ihrer Bewegung ist in Abbildung 7.122 gegeben. Seitlich sind die Wirbelachsen mit zunehmender Höhe in Strömungsrichtung geneigt. Wegen des Rezirkulationsgebietes im zylindernahen Nachlauf existiert entgegen der Hauptströmung bewegte Fluidmasse, welche bezüglich der stromaufwärtigen Bewegung mit der Höhe fast kontinuierlich abnimmt und damit die Konvektion der seitlichen Scherschichtwirbel in gewisser Weise höhenabhängig versperrt. Deshalb sind diese in ihrer Achse geneigt und entwickeln sich dann auch kontinuierlich phasenverschoben entlang einer gedachten, nahezu vertikalen Linie wenig hinter der primären Ablöselinie.

Auch die Scherschicht an der Vorderkante des Zylinderkopfes beinhaltet direkt stromab ihrer Ablösung die kleinen, in ihrer Größe schnell anwachsenden Wirbelgebiete. Infolge der Krümmung des Zylinders sind die Scherschicht und damit auch die enthaltenen Wirbel ähnlich gekrümmt. Zu den Seiten klingt ihr Einflußgebiet durch das dort seitlich überströmende Fluid langsam ab. Letzteres unterliegt den zunehmenden Einflüssen des seitlichen Aufrollens und der Strömungstopologie auf dem Kopf. Der global (überwiegend) alternierende Ablösezustand wirkt auf die Kopfüberströmung derart zurück, daß die zentrisch formierten Wirbel meistens schnell eine einseitige Ausrichtung erfahren.



(a) (b)

Abb. *7.122:* Lage, Form und Konvektionsbewegung der Scherschichtwirbel (Isofläche $p - \overline{p} = -0.03\varrho U_\infty^2$; zwei Instanzen im Abstand $0.125 D/U_\infty$; Ansichten beider Seiten)

Die zeitliche Entwicklung der Druckfluktuation entlang der in Abbildung 7.121 b sichtbaren Linie ist für die Ebene $z/D = -0.5$, also im Bereich der primär relativ ungestörten Ablösung, in Abbildung 7.123 für ein reduziertes Zeitfenster aufgetragen. Deutlich erkennbar sind die Spuren der Scherschichtwirbel in einem zeitlichen Abstand von etwa $0.28D/U_\infty$ ganz nah am Zylinder ($x/D = 0.1$). Mit zunehmender Entfernung zur Ablöseposition wachsen diese Wirbel schnell an, so daß sich der Abstand ihrer Zentren vergrößert ($0.4D/U_\infty$ bei $x/D = 0.2$). Dabei ändern sich zwangsläufig die zugehörigen lokalen Frequenzen genauso stark, während die Konvektionsgeschwindigkeit in guter Näherung konstant ist, erkennbar anhand der nahezu geraden Linien der einzelnen Wirbelregionen. Weiterhin läßt sich das Verschmelzen zu größeren Wirbelgebieten weiter stromab erkennen. Da für die Auswertung eine räumlich fixierte Linie verwendet wurde, sind diese hinteren Regionen nur bedingt aussagekräftig. Die Wirbel schwanken in diesem Bereich seitlich sehr stark, so daß die gewählte Linie nicht mehr dem gleichen Phänomen zugehörig sein muß.

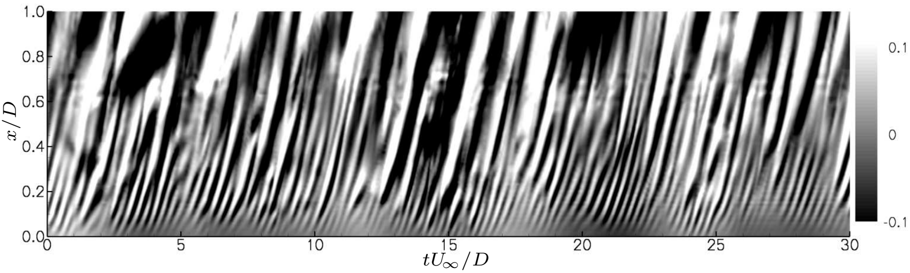
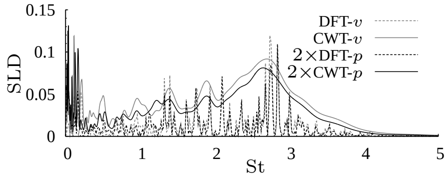
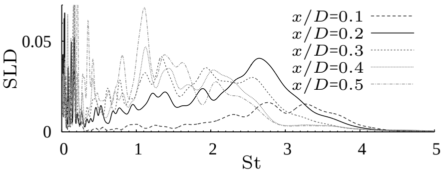


***Abb.** 7.123:* Zeitliche Entwicklung der Druckfluktuation $(p - \overline{p})/(\varrho U_\infty^2)$ entlang einer Linie im Bereich der seitlichen Scherschicht in der Ebene $z/D = -0.5$ (Ausschnitt)

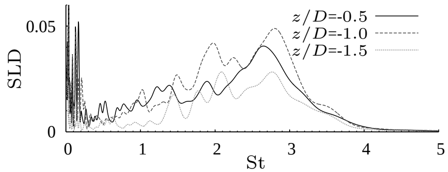
Die Frequenzspektren verschiedener Punkte entlang mehrerer Linien im Bereich der seitlichen Scherschicht sind in Abbildung 7.124 hauptsächlich basierend auf der CWT (weil glatter) und Drucksignalen aufgetragen. Gut erkennbar stimmen die Spektren der dominierenden seitlichen Schwankung mit denen des Drucksignals überein. Neben den prominenten niederfrequenten Anteilen sind besonders relativ hohe Strouhal-Zahlen im Bereich 1 bis 3.5 anzutreffen. Die hohen Frequenzen, z. B. bei $x/D = 0.2$ um 2.75, fallen, wie bereits erwähnt, mit Entfernung zur Ablösung schnell ab. In der Höhenlinie $z/D = -0.5$ wird dabei eine global ausgeprägte Spitze um $\mathrm{St} = 1$ erreicht, welche bei $x/D = 0.5$ maximal ist und im Vergleich zu Abbildung 7.123 als charakteristisch für die formierten Wirbel der ersten Stufe des Verschmelzens interpretiert werden kann. In verschiedenen Höhenlinien sind die spektralen Verläufe ähnlich, wobei die spektrale Leistungsdichte für $z/D = -1.5$ abfällt und damit den Einfluß der gestörten Wirbelformation mit zunehmender Kopfnähe wiedergibt. Im niederfrequenten Bereich sind fast alle bisher aufgefallenen Frequenzen involviert.



(a) Linienpunkt bei $x/D = 0.2$, $z/D = -0.5$



(b) Variierte Punkte einer Linie bei $z/D = -0.5$



(c) Punkte bei $x/D = 0.2$ verschieden hoher Linien

Abb. *7.124:* Frequenzspektren von Drucksignalen entlang von Linien (siehe Abbildung 7.121 b) im Bereich der seitlichen Scherschicht

Für die Scherschicht über dem vorderen Zylinderkopf ist eine ähnliche Analyse wie für die seitliche Scherschicht unternommen worden, wobei die in Abbildung 7.121 c dargestellte Linie benutzt wurde. Der strukturelle Verlauf der Wirbelstrukturen wurde bereits diskutiert und in Abbildung 7.122 bebildert. In Abbildung 7.125 ist nun die zeitliche Entwicklung der Scherschichtstrukturen in der Symmetrieebene, wiederum mit Hilfe der Druckfluktuation, gezeigt. Aufgrund der starken anfänglichen Krümmung der abgelösten Scherschicht liegt die Linie außerhalb der beginnenden Instabilität. Trotzdem ist unmittelbar hinter der Vorderkante abermals die Formation der Scherschichtwirbel in den Druckkonturen sichtbar. Der mittlere zeitliche Abstand der Abdrücke ist hier mit $0.175D/U_\infty$ deutlich geringer als für die seitlich am Zylinder ablösende Scherschicht. Der Abstand und die zugehörigen Frequenzen um $\mathrm{St} = 5.7$ bleiben auch länger sehr ähnlich, zeitlich lokal teilweise bis $x/D = -0.1$. Es sind einige sporadische Effekte zu beobachten, die aber mit großer Wahrscheinlichkeit größtenteils aus der stationären Lage der betrachteten Linie und den seitlich induzierten Verschiebungen aus dem global rückwirkenden Nachlauf resultieren.

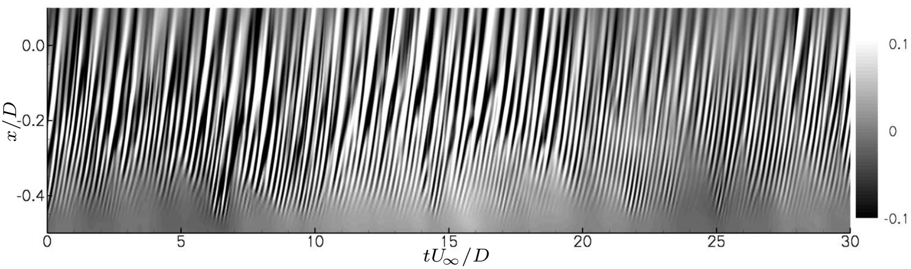
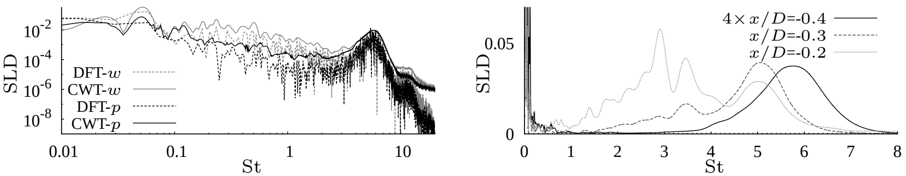


Abb. *7.125:* Zeitliche Entwicklung der Druckfluktuation $(p - \overline{p})/(\varrho U_\infty^2)$ entlang einer Linie im Bereich der Scherschicht am Zylinderkopf in der Ebene $y = 0$ (Ausschnitt)

Beispielhafte Frequenzspektren einzelner Punkte der Linie in der Scherschicht am Zylinderkopf sind in Abbildung 7.126 präsentiert. Neben der bereits bekannten Frequenz bei $\mathrm{St} = 0.055$ tritt ein breites dominantes Frequenzband um 5.7 auf, welches eklatant höher ist als für die seitliche Scherschicht. Dieses Band charakterisiert die Scherschichtwirbel, welche im Laufe ihres stromabwärtigen Transports nur unwesentlich in der Frequenz abfallen. Dieser Umstand hängt mit der Vergrößerung der Konvektionsgeschwindigkeit im vorderen Zylinderbereich zusammen, die in Abbildung 7.125 anhand der Krümmung der Drucklinien kenntlich ist.

Besonders bemerkenswert am Frequenzspektrum in Abbildung 7.126 a ist eine lokale Erhöhung im Bereich um $\mathrm{St} = 11$. Für diese Frequenz gibt es mindestens zwei mögliche Erklärungen. Die naheliegendste Interpretation führt zu der ersten Höherharmonischen des dominierenden Frequenzbandes um 5.7. Allerdings wäre auch noch eine weitere Auslegung denkbar. Untersuchungen zur Frequenz der Scherschichtinstabilität am zweidimensionalen Zylinder führten zur Bestimmung von Ausgleichsgeraden der experimentell ermittelten Werte in Bezug auf die Reynolds-Zahl, die nach PRASAD & WILLIAMSON (1997) bis zu $\mathrm{Re}_D = 200\,000$ brauchbar wären. Die gleichen Autoren schlagen für einen solchen Zusammenhang mit der Reynolds-Zahl die Geradengleichung $\mathrm{St}_{sl} = 0.0235\mathrm{Re}_D^{0.67}\mathrm{St}_k$ vor, wobei St_{sl} die Frequenz der Scherschicht und St_k diejenige der Wirbelstraße im Nachlauf sind. Eine damit durchgeführte Abschätzung für die vorliegende Konfiguration und $\mathrm{St}_k = 0.167$ liefert $\mathrm{St}_{sl} \approx 14$. Bei der beobachteten spektralen Anhebung könnte es sich also auch um die numerisch ermittelte Frequenz der Kelvin-Helmholtz-Instabilität handeln, welche für den endlichen Zylinder niedriger sein sollte, als für den unendlichen – gesetzt den Fall dieses Phänomen wäre mit der vorliegenden LES numerisch erfaßbar.



(a) Linienpunkt bei $\{x/D = -0.4, y = 0\}$

(b) Variierte Punkte einer Linie bei $y = 0$

***Abb.** 7.126:* Frequenzspektren von Drucksignalen entlang einer Linie (siehe Abbildung 7.121 c vorn) im Bereich der Scherschicht am Zylinderkopf

Bei der Untersuchung der Scherschicht am Zylinderkopf sind teilweise gestaffelte Wirbel beim Abfließen des Fluides in den Nachlauf beobachtet worden. Da bisher kein harmonischer Wirbelabwurf vom Zylinderkopf dokumentiert werden konnte, dieser in Abbildung 7.121 c aber erkennbar scheint, wurden nochmals Monitorpunkte entlang mehrerer Linien extrahiert. Eine dieser etwas höher gelegenen Linien ist ebenfalls in Abbildung 7.121 c dargestellt und folgt dem gedachten Verlauf der zu erahnenden Grobstrukturen. In Abbildung 7.127 sind Frequenzspektren verschiedener Monitorpunkte der gezeigten Linie in der Symmetrieebene aufgetragen. Diese Darstellung ist in ihren Eigenschaften repräsentativ für alle untersuchten Punkte und Linien, auch außerhalb der Symmetrieebene.

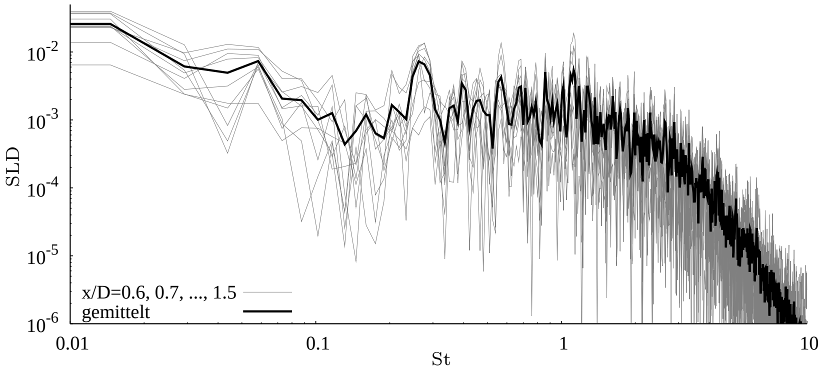


Abb. *7.127:* Gemitteltes Frequenzspektrum von Drucksignalen entlang einer Linie (siehe Abbildung 7.121 c hinten) im abgelösten Bereich hinter dem Zylinderkopf

Charakteristisch für die untersuchten und das dargestellte Spektrum sind hohe Frequenzen nahe und oberhalb von $\mathrm{St} = 1$. Im niederfrequenten Bereich ragen besonders die Frequenzen um $\mathrm{St} = 0.015$ und $\mathrm{St} = 0.055$ heraus. Die beobachteten Strukturen passen jedoch von ihrer Konvektionsbewegung zu den höheren Frequenzen, namentlich $\mathrm{St} = 0.85$. In den Frequenzspektren aus Abbildung 7.127 fällt allerdings ein neues und unerwartetes Frequenzband bei $\mathrm{St} = 0.28$ mit sehr starken Amplituden auf. Die Zuordnung einer periodischen Bewegungsform zu dieser Frequenz war bisher erfolglos. Dennoch verdeutlicht dieses spektrale Band erneut das Dilemma bei der Analyse harmonischer Bewegungsformen im untersuchten Strömungsfeld. Es handelt sich um eine Frequenz, die sich durch Addition aus den bisher als dominant identifizierten Bändern um 0.167 und 0.115 berechnen läßt. Die Verantwortlichkeit nichtlinearer Interaktion von verschiedenen Frequenzanteilen für solche Phänomene ist naheliegend, aber welche Frequenzen die Interaktion ursprünglich speisen und welche daraus entstehen kann nur ausschnittsweise ergründet werden.

8 Diskussion und Ausblick

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die auf Ergebnissen numerischer Simulationen basierende Analyse der turbulenten Umströmung eines Zylinderstumpfes mit Endscheibe. Im Anschluß an die theoretisch-numerische Beschreibung der verwendeten Simulations- und Auswerteverfahren wurde ein umfassender Literaturüberblick präsentiert und die testfallspezifische Modellbildung ausführlich dargelegt. Letzteres dient neben der Nachvollziehbarkeit der Arbeiten auch der Dokumentation mehrjähriger Projektarbeit im Schwerpunktprogramm SPP-1147.

Im Rahmen der Analyse wurde die beispielhafte, sehr komplexe Strömungskonfiguration aus vielen verschiedenen Perspektiven betrachtet. Die eingesetzten Verfahren zur Auswertung liefern jeweils Bausteine, wenn auch teilweise nur kleinste Beiträge, zum Verständnis der dominierenden Strömungsphänomene und dem Ziel einer vielfältigen, womöglich auch umfassenden Beschreibung. Dabei erschwert die vorgefundene Instationarität und Strömungsdynamik die Extraktion separierter Einzelphänomene. Im Folgenden werden die wichtigsten Erkenntnisse zusammengetragen, die benutzten Methoden nochmals kritisch diskutiert und der künftige Fortgang der Analysen bezeichnet.

8.1 Synthese

Aufbauend auf der erfolgreichen Simulation des Strömungsfeldes um die Zylinderkonfiguration mit LES ist die traditionell wichtige statistische Strömungsanalyse detailliert durchgeführt worden. Die umfangreichen, während der Simulation oder nachträglich mit den aufgezeichneten instationären Daten ausgewerteten Mittelwerte und Korrelationen ermöglichten die Identifikation einer Strömungstopologie für das zeitlich gemittelte Strömungsfeld (Abbildung 7.25). Diese setzt sich aus teilweise differenzierbaren Einzelelementen zusammen, namentlich: die beidseitige Strömungsablösung am Zylindermantel, das detailreiche Strömungsgebiet auf dem Zylinderkopf, das großskalige Rezirkulationsgebiet stromab des Zylinders, die seitlichen Kopfwirbel, das Hufeisenwirbelsystem und das Paar großer Nachlaufwirbel. Jedes dieser Gebiete wurde einer gesonderten Analyse unterzogen, in deren Rahmen zahlreiche Sekundärwirbelformationen, z. B. am Zylindermantel und auf der Deckfläche, detektiert werden konnten. Darüber hinaus konnte eine Abgrenzung verschiedener Längswirbel im Strömungsfeld bestimmt werden, sowie der nominelle Startpunkt der Kopfwirbel. Durch den Einsatz topologischer Auswertungen, z. B. Wirbelkernlinien, sind besonders am Zylinderkopf und im Rezirkulationsgebiet bisher kaum dokumentierte Einzelheiten der mittleren Strömung extrahiert worden. Aufgrund der nicht adäquat wirksamen Transitionsfixierung der Plattengrenzschicht vor dem Zylinder verbleibt der Hufeisenwirbel in der detaillierten Beschreibung der mittleren Strömung etwas unterrepräsentiert. Dafür enthält diese aber die vollständig ausgewerteten Oberflächenkräfte, dominierende Frequenzen und die statistischen Eigenschaften der beobachteten Turbulenz.

Die Simulationsergebnisse aus der LES als Referenzlösung sind bezüglich Feld- und Oberflächengrößen, topologischer Aspekte, Frequenzen und auch POD-basiert für die zeitliche Entwicklung mit vielfältigen Experimenten verglichen worden. Die dokumentierte, durchgängig sehr gute qualitative als auch quantitative Übereinstimmung von numerischen und experimentellen Resultaten validiert sowohl die Numerik als auch die Experimente. Deshalb besitzt die vorgestellte Strömungstopologie für die untersuchte Zylinderkonfiguration nachgewiesene Gültigkeit. Die Zusammenarbeit mit den verschiedenen, fast ausschließlich experimentell ausgerichteten Projektpartnern im SPP-1147 mündete dabei in mehreren gemeinsamen Publikationen, z. B. FREDERICH *et al.* (2007*c*, 2008*a*), JENSCH *et al.* (2007) und BERNS *et al.* (2009). Außerdem existiert eine Reihe von Publikationen weiterer Arbeitsgruppen unter Verwendung numerischer Daten für weitergehende Analysen, z. B. BOTCHEN *et al.* (2008), SCHAFHITZEL (2008) und VLASENKO & SCHNÖRR (2009).

Anhand instationärer Momentanaufnahmen aber auch statistischer Maße läßt sich erkennen, daß im Strömungsfeld weitläufige Gebiete durch Fluktuationsbewegungen gekennzeichnet sind, welche in ihrem Betrag vergleichbar zur Anströmung und größer als die mittlere Strömung sind. Um die dafür verantwortliche, hochgradig instationäre, weil stark turbulenzbehaftete Strömung zu analysieren, sind die konzeptionell stark verschiedenen Ansätze POD und CST etabliert worden. Dabei ist die Standardvariante von POD mit Filterungsansätzen gekoppelt worden, für unterschiedliche Teilgebiete und Strömungsgrößen angewandt, sowie der Einfluß von Gebietsgröße und Datenbasis auf die Ergebnisse untersucht worden. Damit und mit der darauf aufbauenden Phasenmittelung sind die dominanten globalen Strömungsbewegungen identifiziert worden. Lokal auftretende Kohärenz und die Interaktion verschiedener Strömungsphänomene konnten mit Hilfe der Verfolgung von Partikeln und Wirbelstrukturen untersucht werden. Um dies zu ermöglichen ist die Entwicklung einer Basisvariante des Strukturverfolgungsalgorithmus CST vorangetrieben und fachlich begleitet worden. Die gezielte visuelle Inspektion der aufgezeichneten Simulationsdaten erlaubt letztlich weitere methodisch nicht erfaßbare Eigenschaften der Strömung zu entdecken.

Das Bild des strömungsdynamischen Geschehens in der turbulenten Umströmung des Zylinderstumpfes ist in einzelnen Aspekte noch nicht vollständig, hat aber einen detaillierten Status erreicht, der hier im globalen Kontext synthetisiert werden soll. Die komplexe, dreidimensionale Nachlaufströmung wird von den beiden dominierenden Strömungsanteilen aus der seitlichen Umströmung des Zylinders und der Kopfüberströmung gespeist, während der Einfluß der plattennahen Grenzschichtströmung gering ist. Die Strömung am Zylindermantel löst an relativ stationärer Position laminar ab und wird nahezu umgehend durch Scherschichtinstabilitäten turbulent. Die sich daraus entwickelnde Wirbelstraße vertikaler Strukturausrichtung wird mit zunehmender Annäherung an den Zylinderkopf durch die Kopfüberströmung gestört. Letztere wird durch den geringeren Druck hinter dem Zylinder abwärts geführt und koppelt in die Wirbelstraße ein. Dadurch bleibt die alternierende Wirbelbewegung auf den unteren Nachlaufbereich beschränkt, und die vertikal entstandenen Strukturen werden in einer schiefen Kippbewegung stark deformiert. Die Frequenz der so in Form einer globalen Wirbelstraße abschwimmenden kohärenten Gebiete variiert um eine mittlere Strouhal-Zahl bei etwa 0.167. Dem überlagert findet sich eine Frequenz um $\mathrm{St} = 0.115$, wozu symmetrisch pulsierende Verformungen des zylindernahen Nachlaufes gehören. Die Ursache für diese Bewegung ist nicht eindeutig geklärt, allerdings eng verknüpft mit in den Nachlauf eintretendem Fluid aus der Kopfüberströmung. Die Pulsation charakterisiert den periodischen Ausstoß von Fluid aus dem Rezirkulationsgebiet, um den zylindernahen Aufstau nachrückender Strömungsmasse zu reduzieren. Wegen der allseitigen Begrenzung des Rezirkulationsgebietes durch irgendwie geartete Scherschichten kann nur so Kontinuität gewährleistet werden.

Durch die Überlagerung der beiden harmonischen Bewegungsformen treten im Nachlauf verschiedenste, intermittente Wirbelanordnungen (symmetrisch, doppelt, antimetrisch usw., vgl. Abschnitt 7.8.2) auf, welche primär auf Interferenzphänomenen fußen. Durch Interaktionen und Störungen im Nachlauf entstehen weitere Frequenzen, welche wiederum auf die Strukturentstehung rückwirken. Die Schwankungen einzelner subharmonischer Frequenzanteile sind lokal so stark ausgeprägt, daß ihre Interaktion mit den dominanten Bewegungsformen zu Linearkombinationen der beteiligten Frequenzen führen, welche nahezu exakt in die dominierenden Frequenzbänder fallen. Zusätzlich wird das Strömungsfeld stromauf des Zylinders durch das instationäre Druckfeld moduliert, was bereits in den Arbeiten von AGUI & ANDREOPOULUS (1992) geschildert wurde. Die damit einhergehende Synchronisation ist typisch für inkompressible Strömungen und beschrieben durch ein elliptisches System an Differentialgleichungen. Prominente Beispiele für Frequenzen, die mit großer Wahrscheinlichkeit aus der Interaktion entstehen, sind 0.055 und 0.28. Beide Anteile finden sich im Einflußgebiet der Kopfüberströmung und resultieren nach derzeitiger Einschätzung aus direkter Verknüpfung von Rezirkulationsgebiet und Kopfüberströmung, welche über Partikelverfolgung nachgewiesen wurde. Langwellige Schwankungen, wie z. B. bei $\mathrm{St} = 0.015$ aus der Schlagbewegung der am vorderen Zylinderkopf abgelösten Scherschicht entstanden, ändern dann außerdem noch die mittlere Strömung.

Die subharmonischen Bewegungsformen oder Interferenzen führen nachweislich auch zum zeitlich lokalen Zusammenbruch der Wirbelstraße. Dies äußert sich in quasi wirbelfreien Gebieten des hinteren Nachlaufes, was derart häufig auftritt, daß Relikte davon sogar in den phasengemittelten Strömungsfeldern zu sehen sind. Die ständig im System wiederkehrende Frequenz bei $\mathrm{St} = 0.2$ gilt in diesem Zusammenhang repräsentativ für das nicht verzögerte Ablösen im unteren Bereich des Zylindermantels, das durch fehlenden Aufstau bzw. Gegenwirkung ermöglicht wird. Bis jetzt ist der Mechanismus, der zur Reduktion der Strouhal-Zahl eines endlichen Zylinders verglichen zum unendlichen Gegenstück führt, nicht vollständig verstanden. Die instantane Wirbelformation mit Fluidbewegung in Richtung des Zylinders, die mittels CST eingebettet im Anfangsbereich der Wirbelstraße identifiziert wurde, scheint für die Erklärung ein wichtiges Element zu sein. Es ist plausibel, daß die globale Rezirkulation und nahe der Instabilitätsregion manifestierter Drehimpuls wichtige Komponenten einer verzögerten Wirbelkonvektion sind. Über die Formation so wichtiger Sekundärwirbel und deren Beteiligung an der globalen Strömungsdynamik wurde bisher in der Literatur nicht berichtet. Eine erste diesbezügliche Veröffentlichung wurde durch FREDERICH *et al.* (2009*b*) vollzogen.

Die Beobachtungen und Schlußfolgerung basieren auf den instationären Daten aus der numerischen Simulation. Die durchweg sehr gute Übereinstimmung mit verschiedensten Experimenten legt nahe, daß die beobachteten Phänomene keine irgendwie gearteten Artefakte sind.

8.2 Diskussion eingesetzter Analyseverfahren

Die statistische Auswertung des Strömungsfeldes liefert die globalen, fast kontinuierlich vorherrschenden „Strömungsbewegungen" und ermöglicht Vergleiche mit Experimenten und anderen Simulationsansätzen. Infolge langwelliger transienter Schwankungen und stochastischen Bewegungsformen sind jedoch lange Mittelungszeiten, hier etwa $250D/U_\infty$, für die Konvergenz der Statistiken notwendig. Die mittleren Schwankungsgrößen beinhalten dabei bereits die Information, daß das Strömungsfeld instationär wesentlich facettenreicher ist. Die großskaligen Schwankungsbewegungen sind algorithmisch mit zwei unterschiedlichen Verfahren erfaßt worden, deren zugrunde liegende Konzeption von Kohärenz sich beträchtlich unterscheidet. Die mittels POD bestimmten Modenpaare stellen im Allgemeinen große, konvektierende Strukturen dar, die (teilweise) Bezug zu globalen, physikalisch bedeutenden harmonischen Bewegungsformen haben. Die Strukturverfolgung CST korreliert zeitlich und räumlich lokale Wirbelregionen um instantane Kohärenzbewegungen zu extrahieren. Die qualitative Kongruenz beider Ansätze steigt und fällt mit der Komplexität der betrachteten Strömung, z. B. quantifizierbar durch die Frequenzseparation zwischen POD-Moden, welche im vorliegenden Fall schwach ist. Trotzdem ist die Dokumentation intermittierender Effekte und instantaner Wirbelformation durch POD und die entwickelte Methode CST wesentlich vereinfacht worden.

8.2.1 Bemerkungen zu den POD-basierten Analysen

Die Extraktion frequenzspezifischer Strömungsstrukturen ist für die vorliegende Strömungskonfiguration mit POD nur bedingt möglich. Die Frequenzseparation ist bei der Definition des Ansatzes in keiner Weise berücksichtigt. Dennoch können die dominierenden Frequenzen des Systems bestimmt werden, weil in der Regel die energetisch dominanten Moden mit diesen verknüpft sind. Der Großteil weiterer (höherer) Moden wird durch Linearkombination der dominierenden Frequenzen angeregt. Dieser Umstand kann von POD durch das lineare Basissystem sehr wohl berücksichtigt werden, nicht aber durch die globale, energetische optimale Korrelation der Schwankungsgrößen. Die Vermischung verschiedener spektraler Anteile führt zu sichtbaren Interferenzen in den Zeitkoeffizienten, welche auch häufig durch Schwebungen, resultierend aus sehr ähnlichen Frequenzen, gekennzeichnet sind. Eine weitere Beschränkung für die Separation dedizierter Einzelphänomene stellt die vom Ansatz vorgegebene Orthogonalität der Moden dar. Dennoch bietet gerade die Berechnung der Korrelationsmatrix und die energetische Sortierung der Moden im Rahmen von POD Vorteile bei der Extraktion der dominanten Phänomene bzw. der Systemreduktion. So können für die Phasenmittelung idealerweise Zeitverläufe benutzt werden, die direkt dem System entnommen sind. Ähnlich praktisch kann bei den anschließenden Filteransätzen die bereits vorhandene zeitlich-räumliche Zerlegung ausgenutzt sowie eine stark komprimierte Datenbasis für weitere Schritte verwendet werden.

Aufgrund der Komplexität und Stochastik des betrachteten Strömungsfeldes ist die physikalische Interpretierbarkeit auf wenige der ersten Moden beschränkt. Trotzdem sind durchaus auch niedrig energetische Moden denkbar, die sehr wichtig für die Strömungsdynamik sind, wie z. B. bei Ilak & Rowley (2008) beschrieben. Im Sinne des anwendungsnahen Einsatzes von POD ist deren Identifikation nahezu ausgeschlossen, weil die Unterscheidung der Moden nach ihrer Relevanz im Falle dreidimensional interagierender Turbulenz schwerlich möglich ist – zumal die physikalische Interpretation von POD-Moden fast generell physikalisches Vorwissen voraussetzt. Da im Grunde jeder einzelne Schnappschuß zur Konstruktion jeder Mode beiträgt, beinhalten letztere nur statistisch existente Kohärenz. Abweichungen gegenüber dem ‚normalen' Strömungsverhalten, z. B. der alternierenden Wirbelstraße, führen dann zu eigenen Moden bzw. Modenpaaren. Ein gutes Beispiel dafür ist das Modenpaar [5,6] des Geschwindigkeitsfeldes, das von den beteiligten Frequenzen und der räumlichen Struktur dem dominanten Modenpaar ähnelt, aber ungefähr zwei Extrema in den Geschwindigkeitskomponenten mehr aufweist als das Paar [1,2]. Dadurch werden die häufig auftretenden Änderungen in den Wirbelabständen erfaßt, während die Kombination beider Modenpaare lokale Auslöschung und Verstärkung der Wirbelstrukturen beschreiben kann.

Die Begrenzung der POD-Auswertung auf Teilgebiete des Strömungsfeldes ist genau dann von Vorteil, wenn das lokale Strömungsareal aufgrund geringer Fluktuationsniveaus in der globalen Korrelierung aller Schwankungsbewegungen unzureichend gewichtet wird. Der Kopfbereich der Umströmung des Zylinderstumpfes ist genau ein solches Teilgebiet, das sich zusätzlich als eigenständige Strömungsregion von den Turbulenzbewegungen im Nachlauf sinnvoll separieren läßt. Im Gegenzug ist die Auswahl einer partiellen Region des Nachlaufes bei der Analyse mit POD benachteiligt, da die globale Zuordnung lokaler Einzelphänomene zueinander gegenüber der Gesamtdomain verschlechtert ist und in differenzierten Einzelstrukturen (Moden) mündet. Generell sollte die interessierende Grobstruktur vom gewählten Teilgebiet abgedeckt werden.

Die genutzten Filterkonzepte über das Druckfeld bzw. TH-POD sind für das betrachtete Strömungsfeld nur eingeschränkt erfolgreich. Das Druckfeld führt wohl global zu geglätteten kohärenten Strukturen, da aber auch die in den Geschwindigkeitskomponenten unkorrelierten Schwankungen in einem Skalarfeld vereint werden, wird die Frequenztrennung nicht verbessert. Die Interpretation der Moden ist wegen der skalaren Druckfluktuationen dabei deutlich intuitiver und Störungen, wie beispielsweise in der Korrelationsmatrix, auffälliger. Die harmonische Filterung mit TH-POD offenbart die Merkmale eines Bandpaßfilters. Aufgrund der betraglichen Nähe der zu separierenden Frequenzen konnten nur wenige Vorteile aus dem Ansatz gezogen werden, z. B. die Isolation der zweiten harmonischen Bewegung im Nachlauf. Die Reduktion der Bandbreite des Filters wäre wahrscheinlich nur sinnvoll im Frequenzraum zu erreichen, womit das grundlegende Konzept hinfällig würde.

8.2.2 Bemerkungen zur Strukturverfolgung

Um die Instationarität ohne Einsatz von Statistiken zu analysieren, ist die Strukturverfolgungsmethode CST entworfen und erfolgreich eingesetzt worden. Die Basisvariante ist in der Lage, eine Vielfalt verschiedener λ_2-Strukturen zu verfolgen und kann als Indikator für Wirbelstärkeformation benutzt werden. Während POD die Detektion primärer periodischer Strukturen erlaubt, können mit CST zusätzlich sekundäre Phänomene erfaßt werden. Allerdings ist die Verfolgung globalen Wirbelstärketransports durch das eingesetzte Wirbelkernkriterium limitiert. Außerdem ist eine Glättung und Beschränkung auf die größeren Skalen notwendig, um Strukturen zu differenzieren. Dazu wird momentan ein dreistufiger Glättungsalgorithmus verwendet, der zentral auf einer Partikelverfolgung basiert.

Die Beschreibung kohärenter Strömungsstrukturen kann über zusammenhängende Gebiete sowohl eines Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes als auch eines Kontinuums erfolgen. CST nutzt offensichtlich eine Eulersche Betrachtung, obwohl die inhärente Partikelverfolgung einer Lagrangeschen Betrachtung entspringt. Die mittels dem Kriterium λ_2 definierten Wirbelregionen beinhalten in ihrer zeitlichen Entwicklung nicht die gleiche Fluidmasse. Die Entkoppelung von den Fluidpartikeln und Konzentration auf formierte Wirbelstärke führt teilweise zu stark diskontinuierlichen Strukturen. Deshalb sind die Struktureigenschaften, wie Volumen und mittlere Geschwindigkeit, momentan nicht ausreichend glatt, um weitere Merkmale abzuleiten. Dies betrifft vor allem an der Bewegung beteiligte Frequenzen und die Strukturereignisse wie Abspaltung und Verschmelzung. Trotz ihrer Defizite ist die derzeitige Implementierung funktionell und bei der Inspektion des turbulenten Strömungsfeldes äußerst hilfreich. Konzepte zur Überarbeitung des Verfahrens werden von SCOUTEN (2009) diskutiert.

8.3 Künftige Arbeiten

Für die Erarbeitung eines umfassenden topologischen Modells für die instationäre Strömung sind noch eine Reihe von Detailfragen ausführlicher zu beantworten. Dazu zählen beispielsweise die mögliche Periodizität der intermittenten Störungen, aber auch die Identifikation zeitweise harmonischer Wirbelkonvektion aus dem Gebiet der Kopfüberströmung in den Nachlauf. Im ersten Schritt kann zu diesem Zweck die Anzahl der Momentanaufnahmen aus gespeicherten Rohdaten von derzeit rund $2\,750$ auf $3\,970$ Datensätze erhöht werden, womit dann eine Zeitspanne von etwa $100D/U_\infty$ abgedeckt wäre. Dadurch kämen weitere mögliche Störphänomene in der Korrelationsmatrix von POD in Reichweite. Außerdem würde der Zeitraum und die statistische Basis für die Modenauswertung erhöht, was sich bereits bei der planaren POD der experimentellen Daten als vorteilhaft herausgestellt hat. Des weiteren könnten auch viele der hier nicht dokumentierten Auswerteansätze, wie Lagrangesche Statistiken und Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen auf eine breitere Basis gestellt werden, womit dann auch die Analyse der Intermittenz der Turbulenz selbst, wie beispielsweise von BIFERALE *et al.* (2005) vorgestellt, greifbar wird. Erste diesbezügliche Ergebnisse (z. B. Abbildung 8.1) wurden schon im Konferenzvortrag zu FREDERICH *et al.* (2008*a*) präsentiert.

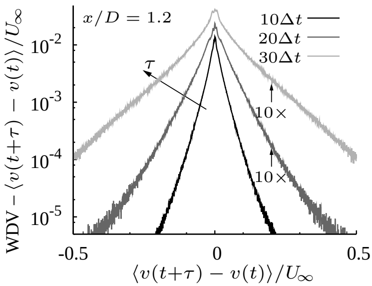
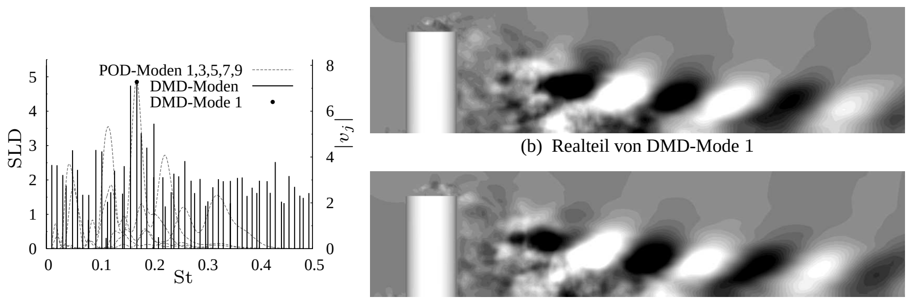


***Abb.** 8.1:* WDV Lagrangescher Geschwindigkeitsinkremente

Die Struktur der Korrelationsmatrix aus POD für das Druckfeld (Abbildung 7.83) ist vergleichbar mit einem sog. Rekurrenzdiagramm (engl. recurrence plot). Die Analyse derartiger Diagramme ist sehr effektiv, um Übergänge in der Systemdynamik von Zeitreihen zu detektieren. MARWAN *et al.* (2007) beschreiben die diesbezügliche Datenanalyse ausführlich und gehen auf mögliche Schwierigkeiten ein. Im Zusammenhang mit der Umströmung des Zylinderstumpfes soll vorerst überprüft werden, inwieweit eine derartige Analyse darauf anwendbar ist und ob die Interaktion sowie Synchronisation verschiedener Strömungsgebiete damit untersucht werden kann.

Da die Frequenzseparation mit POD speziell für das untersuchte Strömungsfeld nicht zu erreichen ist, soll dafür ein anderer Ansatz benutzt werden, der im Grundkonzept Frequenzen berücksichtigt. Eine solche Methode ist kürzlich für die Anwendung auf fluiddynamische Probleme unter dem Namen *Dynamic Mode Decomposition* (DMD) von SCHMID & SESTERHENN (2008) etabliert worden. Das Vorgehen basiert im Wesentlichen auf der funktionalen Abbildung aufeinanderfolgender Schnappschüsse, welche aufgrund der Konstruktion Moden mit spezifischer Frequenz und zusätzlich eine Anfachungsrate liefern. Die als dynamische oder im generalisierten Ansatz von ROWLEY *et al.* (2009) als *Koopman*-Moden bezeichneten Strömungsstrukturen werden basierend auf einem mathematischen Verfahren berechnet, das bereits von SAAD (1980) beschrieben wurde, und sind einem fixierten Frequenzwert zugeordnet. Durch die Differenzierung bezüglich einer globalen Energienorm können die Frequenzen und Moden wiederum bezüglich ihrer Relevanz sortiert werden. Die bisher veröffentlichen Anwendungsbeispiele, z. B. ein Strahl in Querströmung bei ROWLEY *et al.* (2009), weisen in ihrem Betrag deutlich voneinander getrennte, interagierende Frequenzen auf, deren räumliche Schwankungen in den allgemein nicht orthogonalen Moden hervorragend separiert sind. Ob dies auch für betraglich ähnliche und vor allem variierende Frequenzen im dreidimensionalen Feld gelingt bleibt zu prüfen. Erste Resultate aus Voruntersuchungen in planaren Daten der Symmetrieebene, welche beispielhaft in Abbildung 8.2 dargestellt sind, sind diesbezüglich erfolgversprechend, da von POD bekannte Strukturen zu erwarteten Frequenzen extrahiert werden. Von besonderem Interesse ist auch inwieweit die bestehende POD-basierte Zerlegung bzw. niederdimensionale Beschreibung in diesem Rahmen genutzt werden kann.



(a) Frequenzspektren

(b) Realteil von DMD-Mode 1

(c) Imaginärteil von DMD-Mode 1

***Abb.** 8.2:* Beispielhafte Ergebnisse einer planaren DMD-Zerlegung des Druckfeldes in der Ebene $y = 0$; Basis der Implementierung von LUCHTENBURG (2010)

Die Erkenntnisse über die Strömungsphysik bei dem untersuchten Zylinderstumpf gelten vorerst nur für genau diese Konfiguration. Einige Details sind bereits für Konfigurationen mit anderen Reynolds-Zahlen und Seitenverhältnissen dokumentiert (vgl. Abschnitt 5.3), andere wie die instantane Wirbelformation nahe des Zylinders noch nicht. Der Nachweis derartiger Phänomene für andere Konfigurationen wäre experimentell durchzuführen und dienlich für die Bekräftigung der beschriebenen Zusammenhänge. Aus der engen Zusammenarbeit mit den Experimentatoren sollen zudem weitere gemeinsame Publikationen, neben solcher zur Strömungsdynamik (z. B. FREDERICH & THIELE, 2010), entstehen.

Literatur

ACHENBACH, E. (1968) Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to $Re = 5 \times 10^6$. *Journal of Fluid Mechanics* **34** (4), 625–639.

AGUI, J. H. & ANDREOPOULUS, J. (1992) Experimental investigation of a three-dimensional boundary-layer flow in the vicinity of an upright-wall mounted cylinder. *ASME Journal of Fluids Engineering* **114**, 566–576.

AYOUB, A. & KARAMCHETI, K. (1982) An experiment on the flow past a finite circular cylinder at high subcritical and supercritical Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **118**, 1–26.

BABAN, F. & SO, R. M. C. (1991) Aspect ratio effect on flow-induced forces on circular cylinders in a cross-flow. *Experiments in Fluids* **10** (6), 313–321.

BAKER, C. J. (1980) The turbulent horseshoe vortex. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **6**, 9–23.

BARDINA, J., FERZIGER, J. H. & REYNOLDS, W. C. (1980) Improved subgrid-scale models for large-eddy simulation. In *13th Fluid and Plasma Dynamics Conference*. Snowmass, Colorado, AIAA 80–1357.

BERKOOZ, G., HOLMES, P. & LUMLEY, J. L. (1993) The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **25**, 539–575.

BERNS, A., BUDER, U., OBERMEIER, E., WOLTER, A. & LEDER, A. (2008) Application of AeroMEMS surface pressure sensor arrays in experimental fluid mechanics. In *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, Jan. 2008, Paper-Nr. AIAA-2008-271.

BERNS, A., BUDER, U., OBERMEIER, E., WOLTER, A., LEDER, A., FREDERICH, O. & THIELE, F. (2009) Aero-Micro-Electromechanical System sensor arrays for time resolved wall pressure measurements. *AIAA Journal* **47** (4), 863–873.

BERNS, A. & OBERMEIER, E. (2009) AeroMEMS sensor arrays for time resolved wall pressure and wall shear stress measurements. In Nitsche & Dobriloff (2009), S. 227–236.

BIFERALE, L., BOFFETTA, G., CELANI, A., DEVENISH, B. J., LANOTTE, A. & TOSCHI, F. (2005) Lagrangian statistics of particle pairs in homogeneous isotropic turbulence. *Physics of Fluids* **17** (11), 115101.

BOASHASH, B. (1992) Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. Part I (Fundamentals) and Part II (Algorithms and applications). *Proceedings of the IEEE*, Bd. 80(4), S. 520–538 and 540–568.

BOTCHEN, R. P., LAUSER, A., WEISKOPF, D. & ERTL, T. (2008) Flow feature visualization using logical operators on multivariate fields. In *Electronic Proceedings of 13th International Symposium on Flow Visualization*. Nizza, Frankreich.

BOTCHEN, R. P., WEISKOPF, D. & ERTL, T. (2006) Interactive visualization of uncertainty in flow fields using texture-based techniques. In *Electronic Proceedings of 12th International Symposium on Flow Visualization*. Göttingen.

BRADSHAW, P. (1971) *An Introduction to Turbulence and its Measurement*. Pergamon Press, Oxford.

BREUER, M. (2002) *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Habilitationsschrift, Universität Erlangen-Nürnberg, Shaker Verlag, Aachen.

BREUER, M., POURQUIÉ, M. & RODI, W. (1996) Large-eddy simulation of internal and external flows. In *Special Issue of ZAMM, Issue 4: Applied Sciences – Especially Mechanics* (Hrsg. E. Kreuzer & O. Marhenholtz), S. 235–238. Akademie Verlag, Berlin.

BUESSOW, R. (2007) An algorithm for the continuous morlet wavelet transform. ai:arXiv.org:0706.0099, Internetpublikation.

BUNGE, U. (2004) Numerische Simulation turbulenter Strömungen im Kontext der Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur. Dissertation, Technische Universität Berlin.

CABRAL, B. & LEEDOM, L. C. (1993) Imaging vector fields using line integral convolution. In *Computer Graphics Proceedings '93*, S. 263–270. Addison-Wesley, ACM SIGGRAPH, Aug. 1993, Anaheim, Kalifornien, USA.

CASH, J. R. & KARP, A. H. (1990) A variable order Runge-Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **16** (3), 201–222.

CHATTERJEE, A. (2000) An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science* **78** (7), 808–817.

CHOW, F. K., STREET, R. L., XUE, M. & FERZIGER, J. H. (2005) Explicit filtering and reconstruction turbulence modeling for large-eddy simulation of neutral boundary layer flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* **62**, 2058–2077.

COMB, W. M. (1990) *The physics of turbulence, Oxford Engineering Science,* Bd. 25. Claredon Press.

COMTE-BELLOT, G. & CORRSIN, S. (1971) Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, 'isotropic' turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **48**, 273–337.

DAUBECHIES, I. (1992) *Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, Bd. 61. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

DEARDORFF, J. W. (1970) A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* **91**, 1–16.

DOBRILOFF, C. (2006) Persönliche Kommunikation. Technische Universität Berlin.

DOBRILOFF, C. (2009) Persönliche Kommunikation. Technische Universität Berlin.

DOBRILOFF, C. & NITSCHE, W. (2009) Surface pressure and wall shear stress measurements on a wall mounted cylinder. In Nitsche & Dobriloff (2009), S. 197–206.

DOMHARDT, J. (2009) Persönliche Kommunikation. Technische Universität Berlin.

DOMHARDT, J., PELTZER, I. & NITSCHE, W. (2009) Measurement of distributed unsteady surface pressures by means of Piezoelectric Copolymer Coating. In Nitsche & Dobriloff (2009), S. 217–226.

DURST, F. (2006) *Grundlagen der Strömungsmechanik*. Springer Verlag.

EDWARDS, J. R. & CHANDRA, S. (1996) Comparison of eddy viscosity-transport turbulence models for three-dimensional, shock-separated flowfields. *AIAA Journal* **34** (4), 756–763.

EHRENFRIED, K. (2004) *Strömungsakustik, Skript zur Vorlesung*. Mensch & Buch Verlag, ISBN 3-89820-699-8.

ETZOLD, F. & FIEDLER, H. (1976) The near-wake structure of a cantilavered cylinder in a cross-flow. *Zeitschrift für Flugwissenschaften* **24** (2), 77–82.

FAGE, A. & FALKNER, V. M. (1931) Further experiments on the flow around a circular cylinder. *Aeronautical Research Council London, Reports and Memoranda* **1369**.

FARIVAR, D. (1981) Turbulent uniform flow around cylinders of finite length. *AIAA Journal*

19 (3), 275–281.

FEHLBERG, E. (1969) *Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems*. NASA Marshall Space Flight Center, Technical report NASA TR R-315.

FERZIGER, J. H. & PERIĆ, M. (1999) *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Verlag.

FIEDLER, H. E. (2003) Turbulente Strömungen. Vorlesungsskript, Technische Universität Berlin.

FRANKE, M. (2003) Untersuchung zum Potential höherwertiger Turbulenzmodelle für den aerodynamischen Entwurf. Dissertation, Technische Universität Berlin.

FREDERICH, O. (2003) Numerische Simulation oszillierender Profile in turbulenter Strömung mit URANS und DES im Vergleich. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin.

FREDERICH, O., BUNGE, U., MOCKETT, C. & THIELE, F. (2009*a*) Flow prediction around an oscillating NACA0012 airfoil at Re=1 000 000. In *IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flows and their Control* (Hrsg. M. Braza & K. Hourigan), *IUTAM Bookseries*, Bd. 14, S. 49–62. Springer Verlag, ISBN 978-1-4020-9897-0.

FREDERICH, O., LUCHTENBURG, M., WASSEN, E. & THIELE, F. (2007*a*) Analysis of the unsteady flow around a wall-mounted finite cylinder at Re=200 000. In *Advances in Turbulence XI, Proceedings of the 11th EUROMECH European Turbulence Conference* (Hrsg. J. M. L. M. Palma & A. Silva Lopes), *Springer Proceedings in Physics* 117, S. 85–87. Springer Verlag, ISBN 978-3-540-72603-6.

FREDERICH, O., SCOUTEN, J., LUCHTENBURG, D. M. & THIELE, F. (2009*b*) Large-scale dynamics in the flow around a finite cylinder with ground plate. In *Proceedings of the 6th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP-6*, Bd. III, S. 1331–1336.

FREDERICH, O., SCOUTEN, J., LUCHTENBURG, D. M. & THIELE, F. (2009*c*) Numerical simulation and analysis of the flow around a wall-mounted finite cylinder. In Nitsche & Dobriloff (2009), S. 207–216.

FREDERICH, O., SCOUTEN, J., LUCHTENBURG, M. & THIELE, F. (2007*b*) Database variation and structure identification via POD of the flow around a wall-mounted finite cylinder. In *Proceedings of the BBVIV5 - Fifth Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations*, S. 185–188.

FREDERICH, O., SCOUTEN, J., LUCHTENBURG, M., THIELE, F., JENSCH, M., HÜTTMANN, F., BREDE, M. & LEDER, A. (2008*a*) Joint numerical and experimental investigation of the flow around a finite wall-mounted cylinder at a reynolds number of 200000. In *Proceedings of the ERCOFTAC International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, ETMM7*, S. 517–522.

FREDERICH, O. & THIELE, F. (2010) Flow dynamics caused by a truncated cylinder. In *Proceedings of the ERCOFTAC International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, ETMM8*, S. 337–342.

FREDERICH, O., WASSEN, E. & THIELE, F. (2005*a*) Flow simulation around a finite cylinder on massively parallel computer architecture. In *Parallel Computational Fluid Dynamics 2005*, S. 85–92. Elsevier, ISBN-13 978-0-444-52206-1.

FREDERICH, O., WASSEN, E. & THIELE, F. (2005*b*) Large-eddy simulation of the flow around a wall-mounted finite cylinder. In *Proceedings of the Euromech Colloquium 469: Large-Eddy Simulation of Complex Flows*, S. 57–58.

FREDERICH, O., WASSEN, E. & THIELE, F. (2008*b*) Prediction of the flow around a short wall-mounted cylinder using LES and DES. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)* **3** (3-4), 231–247.

FREDERICH, O., WASSEN, E., THIELE, F., JENSCH, M., BREDE, M., HÜTTMANN, F. & LEDER, A. (2007*c*) Numerical simulation of the flow around a finite cylinder with ground plate in comparison to experimental measurements. In *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics VI* (Hrsg. C. Tropea, S. Jakirlic, H.-J. Heinemann, R. Henke & H. Hönlinger), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Bd. 96, S. 348–355. Springer Verlag, ISBN 978-3-540-74458-0.

FRÖHLICH, J. (2006) *Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. Teubner Verlag.

FRÖHLICH, J. & RODI, W. (2004) LES of the flow around a cylinder of finite height. *International Journal of Heat and Fluid Flow* **25** (3), 537–548.

FRÖHLICH, J., RODI, W., DEWAN, A. & FONTES, J. P. (2003) Large-eddy simulation of the flow around the free end of a circular cylinder. In *Numerical Flow Simulation III* (Hrsg. E. H. Hirschel), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Bd. 82, S. 191–202. Springer Verlag, ISBN 3-540-44130-1.

FU, S., WANG, L., CARNARIUS, A., MOCKETT, C. & THIELE, F. (2010) Modeling supersonic and hypersonic flow transition over three-dimensional bodies. In *Seventh IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition* (Hrsg. P. Schlatter & D. S. Henningson), *IUTAM Bookseries*, Bd. 18, S. 493–496. Springer Verlag, ISBN 978-90-481-3722-0.

GARNIER, E., SAGAUT, P. & DEVILLE, M. (1999) Large-eddy simulation of shock/homogeneous turbulence interaction. In *Proceedings of the Isaac Newton Institute Symposium / ERCOFTAC Workshop* (Hrsg. P. R. Voke, N. D. Sandham & L. Kleiser), *Direct and Large-Eddy Simulation* III, S. 123–134. Springer Verlag.

GEORGE, W. K. & DAVIDSON, L. (2004) Role of initial conditionsin establishing asymptotic flow behaviour. *AIAA Journal* **42** (3), 447–456.

GERMANO, M. (1986) A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids* **29** (7), 2323–2324.

GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P. & CABOT, W. H. (1991) A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids* **A 3** (7), 1760–1765.

GHOSAL, S. & MOIN, P. (1995) The basic equations of Large Eddy Simulation of turbulent flows in complex geometry. *Journal of Computational Physics* **118** (1), 24–37.

GIBSON, C. H. & SCHWARZ, W. H. (1963) The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields. *Journal of Fluid Mechanics* **16** (3), 365–384.

GOUPILLAUD, P., GROSSMAN, A. & MORLET, J. (1984) Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration* **23**, 85–102.

GROSSMANN, A. & MORLET, J. (1984) Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **15** (4), 723–736.

HAIN, R., KÄHLER, C. J. & MICHAELIS, D. (2008) Tomographic and time resolved PIV measurements on a finite cylinder mounted on a flat plate. *Experiments in Fluids* **45**, 715–724.

HALLER, G. (2002) Lagrangian coherent structures from approximate velocity data. *Physics of Fluids* **14** (6), 1851–1861.

HEISENBERG, W. (1948) Zur statistischen Theorie der Turbulenz. *Zeitschrift für Physik* **124** (7–12), 628–657.

HOLMES, P., LUMLEY, J. L. & BERKOOZ, G. (1996) *Turbulence, Coherent Structures, Dyna-*

mical Systems and Symmetry. Cambridge University Press.

HULIN, J. P., GUYON, E. & PETITJEANS, P. (2003) Avions et tourbillons. *Bulletin de l'Union des Physiciens* **852**, 377–386.

HUNT, J. C. R., WRAY, A. A. & MOIN, P. (1988) *Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows*. Center for Turbulence Research, Report CTR-S88.

HURST, D. & VASSILICOS, J. C. (2007) Scalings and decay of fractal-generated turbulence. *Physics of Fluids* **19**, 035103.

HUSSAIN, A. K. M. F. (1986) Coherent structures and turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **173**, 303–356.

ILAK, M. & ROWLEY, C. W. (2008) Modeling of transitional channel flow using balanced proper orthogonal decomposition. *Physics of Fluids* **20** (3), 034103.

JAYNES, E. T. (1957) Information theory and statistical mechanics. *Physical Review Letters* **106** (4), 620–630.

JENSCH, M. (2008) Persönliche Kommunikation. Universität Rostock.

JENSCH, M., BREDE, M., HÜTTMANN, F., LEDER, A., FREDERICH, O., WASSEN, E. & THIELE, F. (2007) Time-Resolved Stereo-PIV Messungen im Kopfbereich und Nachlauf eines Kreiszylinderstumpfes. In *Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik - 15. Fachtagung der GALA e.V. 2007* (Hrsg. A. Leder, M. Brede, F. Hüttmann, B. Ruck & D. Dopheide), S. 19.1–19.7. Universität Rostock.

JENSCH, M., BREDE, M., LEDER, A., FREDERICH, O. & THIELE, F. (2008) Use of POD to visualize coherent structures from time resolved PIV data. In *Proceedings of the 14th International Symposium on Applied Laser Techniques to Fluid Mechanics*.

JENSCH, M., BREDE, M., RICHTER, F. & LEDER, A. (2006) Verwendung des Time-Resolved Stereo-PIV Messsystems zur Ermittlung zeitaufgelöster Geschwindigkeitsfelder im Nachlauf eines Kreiszylinders. In *Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik - 14. Fachtagung der GALA e.V. 2006* (Hrsg. D. Dopheide, H. Müller, V. Strunck, B. Ruck & A. Leder), S. 39.1–39.8. PTB Braunschweig.

JENSCH, M., HÜTTMANN, F., BREDE, M. & LEDER, A. (2009) Optical measurements in the wake of a circular cylinder of finite length at a high Reynoldsnumber. In Nitsche & Dobriloff (2009), S. 185–195.

JOENG, J. & HUSSAIN, F. (1995) On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics* **285**, 69–94.

JONES, W. P. & LAUNDER, B. E. (1972) Prediction of laminarization with a two-equation turbulence model. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **15**, 301–314.

KAPPLER, M. (2002) Experimentelle Untersuchung der Umströmung von Kreiszylindern mit ausgeprägt dreidimensionalen Effekten. Dissertation, Universität Karlsruhe.

KARHUNEN, K. (1946) Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A* **37**.

KAWAMURA, T., HIWADA, M., HIBINO, T., MABUCHI, I. & KUMADA, M. (1984) Flow around a finite circular cylinder on a flat plate. *Bulletin of the JSME (Japan Society of Mechanical Engineers)* **27** (232), 2142–2151.

KIM, J., MOIN, P. & MOSER, R. (1987) Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* **177**, 133–166.

KLINE, S. J., REYNOLDS, W. C., SCHRAUB, F. A. & RUNSTADLER, P. W. (1967) The structure of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics* **30**, 741–773.

KOLMOGOROV, A. N. (1941) Dissipation of energy in a locally isotropic turbulence. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **32** (1), englische Übersetzung in: Proceedings Mathematical and Physical Sciences **434**(1890), 1991.

KRAJNOVIĆ, S. (2008) Flow around a surface-mounted finite cylinder: A challenging case for LES. In *Advances in Hybrid RANS-LES Modelling* (Hrsg. S.-H. Peng & W. Haase), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Bd. 97, S. 305–315. Springer Verlag.

KRAJNOVIĆ, S. & DAVIDSON, L. (2004) Large-Eddy Simulation of the flow around simplified car model. *SAE (Society of Automotive Engineers, Inc.)* 2004-01-0227.

LANE, D. A. (1995) *Visualization of numerical unsteady fluid flows*. NASA Ames Research Center, Technical report NAS-95-017.

LEDER, A. (2003) 3D-Flow structures behind truncated circular cylinders. In *Proceedings of 4th ASME/JSME Joint Fluid Engineering Conference*. Honolulu, Hawaii, USA, juli 2003, Paper-Nr. FEDSM2003-45083.

LEONARD, A. (1974) Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Advances in Geophysics* **18A**, 237–248.

LILLY, D. K. (1967) The representation of smallscale turbulence in numerical simulation experiments. In *Proceedings of IBM Scientific Computing Symposium on Environmental Sciences*, S. 195–210.

LOÈVE, M. M. (1945) Functions aleatoire de second ordre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)* **220**.

LUCHTENBURG, D. M. (2008) Persönliche Kommunikation. Technische Universität Berlin.

LUCHTENBURG, D. M. (2010) Low-dimensional modelling and control of separated shear flows. Dissertation, Technische Universität Berlin.

LUMLEY, J. L. (1967) The structure of inhomogeneous turbulent flows. In *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation* (Hrsg. A. M. Yaglom & V. I. Tatarski), S. 166–178. Nauka, Moskau.

LUMLEY, J. L. (1970) *Stochastic Tools in Turbulence*, *Applied Mathematics and Mechanics*, Bd. 12. Academic Press.

LUMLEY, J. L. & NEWMAN, G. R. (1977) The return to isotropy of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **82**, 161–178.

MALLAT, S. (1999) *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 2nd edition.

MARWAN, N., ROMANO, M. C., THIEL, M. & KURTHS, J. (2007) Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports* **438** (5-6), 237–329.

MAUß, J. (2005) Untersuchung und Optimierung der Finite-Volumen-Diskretisierung bei der Anwendung auf krummlinigen Netzen. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin.

MENTER, F. R., LANGTRY, R. B. & VOLKER, S. (2006) Transition modelling for general purpose CFD codes. *Flow, Turbulence and Combustion* **77**, 277–303.

MIELKE, C. (1999) Numerische Untersuchungen zur Turbulenzentstehung in dreidimensionalen kompressiblen Grenzschichtströmungen. Dissertation, ETH Zürich.

MIKSAD, R. W. (1973) Experiments on nonlinear interactions in the transition of a free shear layer. *Journal of Fluid Mechanics* **59** (1), 1–21.

MOCKETT, C. (2009) A comprehensive study of detached-eddy simulation. Dissertation, Technische Universität Berlin.

MOCKETT, C., GRESCHNER, B., KNACKE, T., PERRIN, R., YAN, J. & THIELE, F. (2008)

Demonstration of improved DES methods for generic and industrial applications. In *Advances in Hybrid RANS-LES Modelling* (Hrsg. S.-H. Peng & W. Haase), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Bd. 97, S. 222–231. Springer Verlag.

MOIN, P. & MAHESH, K. (1998) Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics* **30**, 539–578.

MOSER, R. D. & MOIN, P. (1987) The effects of curvature in wall-bounded turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics* **175**, 479–510.

NIKITIN, N. V., NICOUD, F., WASISTHO, B. & SQUIRES, K. D. (2000) An approach to wall modeling in large-eddy simulations. *Physics of Fluids* **12** (7), 1629–1632.

NITSCHE, W. & DOBRILOFF, C., Hrsg. (2009) *Results of the DFG Priority Programme 1147 "Imaging Measurement Methods for Flow Analysis" 2003-2009*, *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Bd. 106. Springer Verlag.

NOACK, B. R. (2006) Niederdimensionale Galerkin-Modelle für laminare und transitionelle freie Scherströmungen. Habilitation, Technische Universität Berlin.

NOACK, B. R., AFANASIEV, K., MORZYŃSKI, M., TADMOR, G. & THIELE, F. (2003) A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics* **497**, 335–363.

OBERLACK, M. (2000) *Symmetrie, Invarianz und Selbstähnlichkeit in der Turbulenz*. Habilitationsschrift, RWTH Aachen.

OERTEL, H. (1999) *Strömungsmechanik*. Vieweg Verlag.

OKAMOTO, S. (1982) Turbulent shear flow behind hemisphere-cylinder placed on a ground plane. In *Turbulent shear flows, 3rd International Symposium*, Bd. 3, S. 171–185. Springer Verlag.

OKAMOTO, S. & SUNABASHIRI, Y. (1992) Vortex shedding from a circular cylinder of finite length placed on a ground plane. *ASME Journal of Fluids Engineering* **114**, 512–521.

OKAMOTO, T. & YAGITA, M. (1973) The experimental investigation on the flow past a circular cylinder of finite length placed normal to the plane surface in a uniform flow. *Bulletin of the JSME* **16** (95), 805–814.

ORSZAG, S. A. & PATTERSON, G. S. (1972) Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Physical Review Letters* **28** (2), 76–79.

OSHER, S. & FEDKIW, R. P. (2001) Level set methods: An overview and some recent results. *Journal of Computational Physics* **169** (2), 463–502.

OUELLETTE, N. T., XU, H., BOURGOIN, M. & BODENSCHATZ, E. (2006) Small-scale anisotropy in Lagrangian turbulence. *New Journal of Physics* **8**, 102.

PARK, C.-W. & LEE, S.-J. (2000) Free end effects on the near wake flow structure behind a finite circular cylinder. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **88**, 231–246.

PARK, C.-W. & LEE, S.-J. (2002) Flow structure around a finite circular cylinder embedded in various atmospheric boundary layers. *Fluid Dynamics Research* **30**, 197–215.

PARK, C.-W. & LEE, S.-J. (2004) Effects of free-end corner shape on flow structure around a finite cylinder. *Journal of Fluids and Structures* **19**, 141–158.

PATANKAR, S. V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York.

PATANKAR, S. V. & SPALDING, D. B. (1972) A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **15**, 1787–1806.

PATTENDEN, R. J., BRESSLOFF, N. W., TURNOCK, S. R. & ZHANG, X. (2007) Unsteady simulations of the flow around a short surface-mounted cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **53**, 895–914.

PATTENDEN, R. J., TURNOCK, S. R. & BRESSLOFF, N. W. (2003) An experimental and computational study of three-dimensional unsteady flow features found behind a truncated cylinder. In *24th Symposium on Naval Hydrodynamics*. Fukuoka, Japan.

PATTENDEN, R. J., TURNOCK, S. R. & ZHANG, X. (2005) Measurements of the flow over a low-aspect-ratio cylinder mounted on a ground plane. *Experiments in Fluids* **39** (1), 10–21.

PELLER, N. & MANHART, M. (2006) Turbulent channel flow with periodic hill constrictions. In *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics V* (Hrsg. H. J. Rath, C. Holze, H.-J. Heinemann, R. Henke & H. Hönlinger), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Bd. 92, S. 504–512. Springer Verlag.

PERRIN, R., BRAZA, M., CID, E., CAZIN, S., BARTHET, A., SEVRAIN, A., MOCKETT, C. & THIELE, F. (2007) Obtaining phase averaged turbulence properties in the near wake of a circular cylinder at high reynolds number using POD. *Experiments in Fluids* **43** (2-3), 341–355.

PIOMELLI, U., CABOT, W. H., MOIN, P. & LEE, S. (1991) Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flows. *Physics of Fluids A* **3**, 1766–1771.

POPE, S. B. (2000) *Turbulent flows*. Cambridge University Press.

PRANDTL, L. (1942) *Führer durch die Strömungslehre*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 3. Auflage.

PRASAD, A. & WILLIAMSON, C. H. K. (1997) The instability of the shear layer separating from a bluff body. *Journal of Fluid Mechanics* **333**, 375–402.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. & FLANNERY, B. P. (2007) *Numerical Recipes*, 3rd Aufl. Cambridge University Press.

RÉGERT, T., RAMBAUD, P. & RIETHMÜLLER, M. L. (2005) Investigation of the link between physics and POD modes. *Recent Developments in Non-Intrusive Measurement Technology for Military Application of Model- and Full-Scale Vehicles* AVT 124, NATO Meeting, Budapest.

REYNOLDS, O. (1895) On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A* **186-I**, 123–164.

RHIE, C. M. & CHOW, W. L. (1983) Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal* **21** (11), 1525–1532.

RICHARDSON, L. F. (1922) *Wheater Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press.

RICHTER, F. (2005) Experimentelle Untersuchungen zur Charakterisierung der Strömungs- und Turbulenzstrukturen im Nachlauf eines Kreiszylinderstumpfes unter Berücksichtigung der Zentrifugalbeschleunigung. Dissertation, Universität Rostock.

ROBINSON, S. K. (1991) Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics* **23**, 601–639.

ROH, S. C. & PARK, S. O. (2003) Vortical flow over the free end surface of a finite circular cylinder mounted on a flate plate. *Experiments in Fluids* **34** (1), 63–67.

ROTTA, J. C. (1968) Über eine Methode zur Berechnung turbulenter Strömungen. *Mitteilungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, Rep. 69* **A14**.

ROWLEY, C. W., MEZIĆ, I., BAGHERI, S., SCHLATTER, P. & HENNINGSON, D. S. (2009) Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics* **641**, 115–127.

RUDOLPH, I., REYER, M. & NITSCHE, W. (2009) Infrared-based visualization of wall shear stress distributions. In Nitsche & Dobriloff (2009), S. 237–246.

RUNG, T. (2000) Entwicklung anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen mit Hilfe von Projektionstechniken. Dissertation, Technische Universität Berlin.

RUNG, T. (2002) Statistische Turbulenzmodellierung. Vorlesungsskript, Technische Universität Berlin.

RUNG, T., LÜBCKE, H. & THIELE, F. (2000) Universal wall-boundary conditions for turbulence-transport models. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **81** (1), 1756–1758.

RUNG, T. & THIELE, F. (1996) Computational modelling of complex boundary-layer flows. In *Proceedings of 9th International Symposium on Transport Phenomenain Thermal-Fluid Engineering*. Singapore.

SAAD, Y. (1980) Variations on Arnoldi's method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices. *Linear Algebra and its Applications* **34**, 269–295.

SAGAUT, P., MEYERS, J. & LUCOR, D. (2008) Uncertainty modeling, error charts and improvement of subgrid models. In *Advances in Hybrid RANS-LES Modelling* (Hrsg. S.-H. Peng & W. Haase), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Bd. 97, S. 37–44. Springer Verlag.

SAKAMOTO, H. & ARIE, M. (1983) Vortex shedding from a rectangular prism and a circular cylinder placed vertically in a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* **126**, 147–165.

SCHADE, H. (1999) *Tensoranalysis*. de Gruyter.

SCHADE, H. & KUNZ, E. (1980) *Strömungslehre*. de Gruyter.

SCHÄFER, F. (2007) Zeitlich hochaufgelöste Visualisierung und Analyse dreidimensionaler Simulationsdaten turbulenter Strömungen. Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg.

SCHAFHITZEL, T. (2008) Particle tracing methods for visualization and computer graphics. Dissertation, Universität Stuttgart.

SCHAFHITZEL, T., TEJADA, E., WEISKOPF, D. & ERTL, T. (2007) Point-based stream surfaces and path surfaces. In *Proceedings of Graphics Interface 2007*, S. 289–296. Montreal, Kanada.

SCHATZ, M. (2003) Numerische Simulation der Beeinflussung instationärer Strömungsablösung durch frei bewegliche Rückströmklappen auf Tragflügeln. Dissertation, Technische Universität Berlin.

SCHLICHTING, H. (1968) *Grenzschichttheorie*. Braun Verlag Karlsruhe.

SCHMID, P. & SESTERHENN, J. (2008) Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. In *61st Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*, S. 7–+.

SCOUTEN, J. (2009) Coherent structure tracking with application to the wake flow behind a wall-mounted finite circular cylinder. Studienarbeit, Technische Universität Berlin.

SHUR, M., SPALART, P., STRELETS, M. & TRAVIN, A. (1996) Navier-stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with backward splitter plate. In *Computational Fluid Dynamics '96, Proceedings of the Third ECCOMAS CFD Conference* (Hrsg. J.-A. Désidéri, C. Hirsch, P. L. Tallec, M. Pandolfi & J. Périaux), S. 676–682. Wiley, Paris, Sept. 2009.

SHUR, M. L., SPALART, P. R., STRELETS, M. K. & TRAVIN, A. K. (2008) A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow* **29** (6), 1638–1649.

SIROVICH, L. (1987) Turbulence and the dynamics of coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics* **5**, 561–590.

SMAGORINSKY, J. (1963) General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review* **91** (3), 99–164.

SPALART, P. R. (2000) Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow* **21** (3), 252–263.

SPALART, P. R. (2001) *Young-person's guide to Detached-Eddy Simulation grids*. NASA Langley Research Center, technical report NASA CR-2001-211032.

SPALART, P. R. (2009) Detached-Eddy Simulation. *Annual Review of Fluid Mechanics* **41**, 181–202.

SPALART, P. R. & ALLMARAS, S. R. (1992) A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Journal* **92–0439**.

SPALART, P. R., DECK, S., SHUR, M. L., SQUIRES, K. D., STRELETS, M. K. & TRAVIN, A. (2006) A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **20** (3), 181–195.

SPALART, P. R., JOU, W.-H., STRELETS, M. & ALLMARAS, S. R. (1997) Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach. In *Advances in DNS/LES, Proceedings of 1st AFOSR International Conference on DNS/LES* (Hrsg. C. Liu & Z. Liu), S. 137–147. Greyden Press, Columbus.

SPEZIALE, C. G., ABID, R. & ANDERSON, E. C. (1992) Critical evaluation of two-equation models for near-wall turbulence. *AIAA Journal* **30** (2), 324–331.

SREENIVASAN, K. R. (1995) On the universality of the Kolmogorov constant. *Physics of Fluids* **7** (11), 2778–2784.

STOLZ, S. & ADAMS, N. A. (1999) An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation. *Physics of Fluids* **11** (7), 1699–1701.

STONE, H. L. (1968) Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **5** (3), 530–558.

SUMNER, D., HESELTINE, J. L. & DANSEREAU, O. J. P. (2004) Wake structure of a finite circular cylinder of small aspect ratio. *Experiments in Fluids* **37** (5), 720–730.

TADMOR, G., BISSEX, D., NOACK, B. R., MORZYŃSKI, M., COLONIUS, T. & TAIRA, K. (2008) Temporal-Harmonic specific POD mode extraction. *AIAA* 2008-4190, 4th Flow Control Conference, Seattle, Washington.

TANEDA, S. (1952) Studies on wake vortices I. *Report of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University* **1**, 131–143.

TENNEKES, H. & LUMLEY, J. L. (1972) *A first course in turbulence*. MIT Press.

TEOLIS, A. (1998) *Computational Signal Processing with Wavelets*. Birkhäuser.

TRAVIN, A., SHUR, M., STRELETS, M. & SPALART, P. R. (2002) Physical and numerical upgrades in the detached-eddy simulation of complex turbulent flows. In *Advances in LES of Complex Flows* (Hrsg. R. Friedrich & W. Rodi), *Fluid Mechanics and Its Applications*, Bd. 65, S. 239–254. Springer Netherlands, Erstveröffentlichung als Konferenzbeitrag in: Proceedings of the 412th Euromech Colloquium on LES and Complex Transitional and Turbulent Flows, München 2000.

TRAVIN, A. K., SHUR, M. L., SPALART, P. R. & STRELETS, M. K. (2006) Improvement of Delayed Detached-eddy simulation for LES with wall modelling. In *ECCOMAS CFD 2006, Proceedings European Congress on Computational Fluid Dynamics* (Hrsg. P. Wesseling, E. Onãte & J. Périaux). Delft University of Technology, Niederlande.

TROPEA, C. (2005) Technische Strömungslehre. Vorlesungsunterlagen, Technische Universität Darmstadt.

UEMATSU, Y. & YAMADA, M. (1994) Aerodynamic forces on circular cylinders of finite height. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **51**, 249–265.

VAN ATTA, C. (1991) Local isotropy of the smallest scales of turbulent scalar and velocity fields. In *Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on, Proceedings Mathematical and Physical Sciences*, Bd. 434, S. 139–147. The Royal Society, London.

VAN DRIEST, E. R. (1956) On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences* **23** (11), 1007–1011.

VAN REEUWIJK, M., JONKER, H. J. J. & HANJALIĆ, K. (2008) Leray-alpha simulations of wall-bounded turbulent flows. ai:arXiv.org:0805.3633, Internetpublikation.

VLASENKO, A. & SCHNÖRR, C. (2009) Variational approaches to image fluid flow estimation with physical priors. In Nitsche & Dobriloff (2009), S. 247–256.

WEIZSÄCKER, C. F. (1948) Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen. *Zeitschrift für Physik* **124** (7–12), 614–627.

WIESELSBERGER, C. & BETZ, A. (1923) Versuche über den Luftwiderstand gerundeter und kantiger Körper. In *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. II. Lieferung* (Hrsg. L. Prandtl), S. 22–35. Verlag R. Oldenbourg.

WILCOX, D. C. (1988) Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal* **26** (11), 1299–1310.

WILLIAMSON, C. H. K. (1996) Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics* **28**, 477–539.

XUE, L. (1998) Entwicklung eines effizienten parallelen Lösungsalgorithmus zur dreidimensionalen Simulation komplexer turbulenter Strömungen. Dissertation, Technische Universität Berlin.

YAN, J., MOCKETT, C. & THIELE, F. (2005) Investigation of alternative length scale substitutions in Detached-Eddy Simulation. *Flow, Turbulence and Combustion* **74**, 85–102.

ZDRAVKOVICH, M. M. (1997) *Flow Around Circular Cylinders, Vol. 1: Fundamentals*. Oxford University Press, New York.

ZDRAVKOVICH, M. M., BRAND, V. P., MATHEW, G. & WESTON, A. (1989) Flow past short circular cylinders with two free ends. *Journal of Fluid Mechanics* **203**, 557–575.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

A Isotropie und Anisotropie

A.1 Spektren isotroper Turbulenz

Ein charakteristischer Teil des Energiespektrums ist der spektrale Energieabfall im Trägheitsbereich entsprechend der Proportionalität (2.10). Die Abweichungen von dieser spektralen Energieverteilung im Produktionsbereich (Maximum durch Energiezufuhr) und im Dissipationsbereich (deutlich stärkerer Abfall durch Dissipation) lassen sich mit Hilfe von Korrekturfunktionen berücksichtigen. Nach POPE (2000, S. 232 ff.) kann ein entsprechendes Modellspektrum für die isotrope Turbulenz durch (A.1) repräsentiert werden.

$$E(\kappa) = C_K \, \varepsilon^{\frac{2}{3}} \, \kappa^{-\frac{5}{3}} \, f_L(\kappa L) \, f_\eta(\kappa\eta) \tag{A.1}$$

Die Korrekturfunktionen und enthaltenen Konstanten sind dabei auf Basis verschiedener Skalierungen und experimenteller Daten formuliert.

$$f_L(\kappa L) = \left\{ \frac{\kappa L}{[(\kappa L)^2 + c_L]^{1/2}} \right\}^{5/3+p_0} \tag{A.2}$$

$$f_\eta(\kappa\eta) = \exp\left(-\beta[(\kappa\eta)^4 + c_\eta^4]^{1/4} - c_\eta\right) \tag{A.3}$$

Die Zahlenwerte der verwendeten Konstanten sind:

C_K	p_0	C_L	β	C_η
1.5	2.0	6.78	5.2	0.40

Das Dissipationsspektrum wird bestimmt durch Gewichtung des Energiespektrums mit der zweiten Potenz der Wellenzahl κ^2 und der Fluideigenschaft ν.

$$D(\kappa) = 2\nu\kappa^2 E(\kappa) \tag{A.4}$$

Für die Darstellung in Abbildung 2.4 wurden zusätzlich die Werte $\varepsilon = 1.0$, $\eta = 0.001$ sowie $L \cong l_0 = 0.178; 1.0; 5.623; 9.457; 31.623$ gewählt, so daß sich entsprechend der Skalierung (2.4 a) etwa die Reynolds-Zahlen $\mathrm{Re}_L = 10^3; 10^4; 10^5; 2\cdot 10^5; 10^6$ ergeben. Die Werte für ν und u_η können aus den Kolmogorov-Skalen (2.1) und für k aus dem Integral (2.9 a) oder aber auch aus $\mathrm{Re}_L = \sqrt{k}L/\nu$ bestimmt werden. Das maximale Längenmaß (minimale Wellenzahl) wurde mit $L_{max} = 6L$ festgelegt (POPE, 2000).

A.2 Anisotropie der Reynolds-Spannungen

Im Abschnitt 2.5.3 ist die Zerlegung des Reynolds-Spannungstensors in Intensität und Struktur der Turbulenz vorgestellt worden. Der Strukturanteil isoliert mit Hilfe des Tensors b_{ij}, definiert durch (2.58), die Anisotropieeigenschaften der Reynolds-Spannungen. Die Idee dieser Zerlegung ist bereits bei LUMLEY & NEWMAN (1977) beschrieben, wobei dort gezielt das Abklingen anisotroper Eigenschaften hin zu Isotropie untersucht wurde. Für isotrope Turbulenz verschwindet der Anisotropietensor der Reynolds-Spannungen, d. h. alle Komponenten sind identisch null. LUMLEY & NEWMAN (1977) verwenden die skalaren Invarianten dieses Tensors, um deren asymptotisches Verhalten zu ergründen und gehen gezielt auf das Realisierbarkeitsprinzip ein. RUNG (2000) benutzt ebenfalls die Invarianten, um die Eigenschaften von Turbulenzmodellen bezüglich der physikalisch realisierbaren Zustände zu untersuchen bzw. neue anisotrope Modelle zu formulieren.

Die Definition der drei Invarianten I_b, II_b und III_b läßt sich z. B. aus der zugehörigen Eigenwertgleichung ableiten. Aufgrund der Spurfreiheit des Anisotropietensors ($b_{ii} = 0$) ist die erste Invariante nicht von Interesse, und für die anderen beiden können die Definitionsgleichungen sofort vereinfacht werden.

$$\mathrm{I}_b = b_{ii} = 0 \tag{A.5}$$

$$\mathrm{II}_b = \frac{1}{2}(b_{ii}b_{jj} - b_{ij}b_{ji}) = -\frac{1}{2}b_{ij}b_{ji} \tag{A.6}$$

$$\mathrm{III}_b = \frac{1}{6}(b_{ii}b_{jj}b_{kk} - 3b_{ii}b_{jk}b_{kj} + 2b_{ij}b_{jk}b_{ki}) = \frac{1}{3}b_{ij}b_{jk}b_{ki} \tag{A.7}$$

Die Berechnung der Eigenwerte ξ^i und zugehörigen Eigenvektoren des Anisotropietensors erlaubt die Hauptachsentransformation, so daß $b_{ij} = \xi^i \delta_{ij}$ in Diagonalform vorliegt. Für die Eigenwerte gilt $-\frac{1}{3} \leq \xi^i \leq \frac{2}{3}$ (RUNG, 2000). Die vereinfachten Invarianten sind identisch mit denen des hauptachsentransformierten Tensors, allerdings lassen sich diese mit den Eigenwerten sehr kompakt und vor allem einheitlich darstellen.

$$\mathrm{I}_b = b_{ii} = \sum_{i=1}^{3} (\xi^i) = 0 \tag{A.8}$$

$$\mathrm{II}_b = -\frac{1}{2}b_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{3} (\xi^i)^2 \tag{A.9}$$

$$\mathrm{III}_b = \frac{1}{3}b_{ij}b_{jk}b_{ki} = \sum_{i=1}^{3} (\xi^i)^3 \tag{A.10}$$

Um einzig die Invarianten II_b und III_b zu diskutieren, muß die Hauptachsentransformation nicht durchgeführt werden. Diese können direkt in der sog. Invariantenkarte (Abbildung A.1) übereinander aufgetragen werden und anschließend der lokale Turbulenzzustand identifiziert werden. Diese Art der Identifikation eignet sich besonders gut für sehr große Strömungsfelder, bei denen die Berechnung der Eigenwerte in jedem Gitterpunkt sehr aufwendig wäre.

Die Invariantenkarte in Abbildung A.1 enthält eine Reihe charakteristischer Elemente, nämlich das segelförmige Dreieck mit seinen Eckpunkten und Grenzlinien. Alle möglichen strukturellen Zustände des Reynolds-Spannungstensors sind innerhalb der Grenzlinien lokalisiert. Die genaue mathematische Herleitung der Definitionen für die Randelemente findet sich z. B. bei LUMLEY & NEWMAN (1977) oder RUNG (2000) – erstere Autoren vernachlässigen allerdings die konstanten Vorfaktoren bei den Invarianten. Allgemein gilt, daß nur die Punkte innerhalb des segelförmigen Dreiecks den definitionsgemäß spurfreien Anisotropietensor aufweisen, also

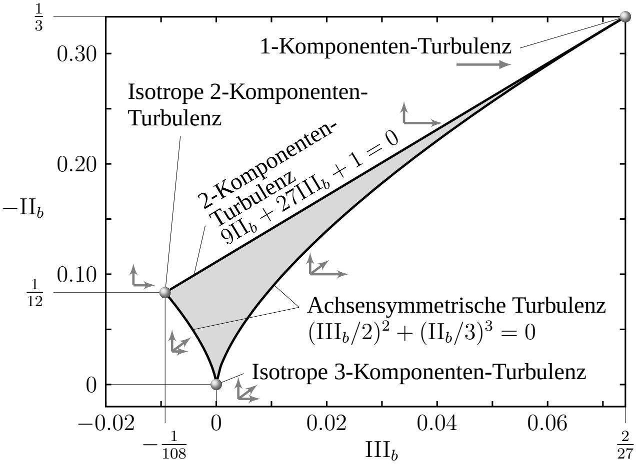


Abb. *A.1:* Invariantenkarte des Anisotropietensors der Reynolds-Spannungen (nach RUNG, 2000) mit Kennzeichnung verschiedener Turbulenzeigenschaften

auch die Summe ihrer Eigenwerte verschwindet. Der Charakter der unterschiedlichen, relevanten Turbulenzzustände ist in Abbildung A.1 durch Komponentenpfeile gekennzeichnet, ohne daß hier die quantitative Angabe der Eigenwerte von Interesse ist.

B RANS – Mittelung und Turbulenzmodelle

B.1 Rechenregeln für statistische Mittelwerte

Die Verwendung einer momentanen Strömungsgröße ϕ, zerlegt in ihren Mittelwert $\overline{\phi}$ und einen Schwankungswert ϕ', ist der Ausgangspunkt für die Herleitung statistisch gemittelter Transportgleichungen (siehe Abschnitt 2.5). Für die Herleitung ist es notwendig, einige Rechenregeln für statistische Mittelwerte zu beachten, insbesondere in Kombination mit einer zweiten Strömungsgröße $\psi = \overline{\psi} + \psi'$.

- Mehrfache Mittelwertbildung: $\overline{\overline{\phi}} = \overline{\phi}$
- Mittelwert einer Schwankungsgröße: $\overline{\phi'} = 0$
- Mittelwert einer Summe von Momentangrößen: $\overline{\phi + \psi} = \overline{\phi} + \overline{\psi}$
- Mittelwert eines Produkts von Momentangrößen: $\overline{\phi\psi} = \overline{\phi}\,\overline{\psi} + \overline{\phi'\psi'}$
- Mittelwert eines Produkts aus Mittelwert und Momentangröße: $\overline{\overline{\phi}\psi} = \overline{\phi}\,\overline{\psi}$
- Mittelwert eines Produkts von Schwankungsgrößen: $\overline{\phi'\psi'} \neq 0$
- Mittelwert eines Gradienten: $\overline{\frac{\partial \phi}{\partial \xi}} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \xi}$
- Mittelwert eines Integrals: $\overline{\int \phi \,\mathrm{d}\xi} = \int \overline{\phi} \,\mathrm{d}\xi$

B.2 Verwendete RANS-Turbulenzmodelle

Bei den vorliegenden numerischen Untersuchungen wurden genau zwei Turbulenzmodelle benutzt. Die Auswahl basiert auf den fachgebietsinternen und persönlichen Präferenzen.

B.2.1 Spalart-Allmaras-Modell

Das Eingleichungsmodell von SPALART & ALLMARAS (1992) ist speziell für Gleichgewichtsströmungen im Bereich der wandnahen Grenzschicht entwickelt worden. Die Modellierung besteht aus einer Transportgleichung für eine modifizierte Wirbelviskosität $\widetilde{\nu}$, Wanddämpfungstermen und einer rudimentären Transitionsbehandlung. Das Modell hat sich bei Grenzschichten mit positiven Druckgradienten bewährt und kommt aufgrund von Robustheit und Effizienz häufig zum Einsatz. Eingehende Untersuchungen mit dem SA-Modell zeigen eine Überbewertung der Diffusion in freien Scherschichten auf und offenbaren Schwächen bei der Vorhersage von Ablösungen (FRANKE, 2003). Die Vor- und Nachteile des Modells lassen sich beiderseits auf die Formulierung über den Wandabstand d_w zurückführen.

Im Strömungslöser *ELAN* ist eine Variante des Spalart-Allmaras-Modells mit Modifikationen von EDWARDS & CHANDRA (1996) implementiert. Diese wurde ausschließlich benutzt, weshalb auf eine gesonderte Kennzeichnung des modifizierten Modells, z. B. als SA-E, größtenteils verzichtet wird. Zuerst ist die originale Formulierung des Modells von SPALART & ALLMARAS (1992) angegeben und dann wird auf die Modifikationen hingewiesen.

Die Transportgleichung (B.1) für die modifizierte Wirbelviskosität $\tilde{\nu}$ enthält neben dem instationären Term, wie üblich Produktion $P^{\tilde{\nu}}$, Diffusion $D^{\tilde{\nu}}$ und einen Dissipationsterm $\varepsilon^{\tilde{\nu}}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} &= P^{\tilde{\nu}} + D^{\tilde{\nu}} - \varepsilon^{\tilde{\nu}} \\
P^{\tilde{\nu}} &= c_{b1}\,(1 - f_{t2})\,\tilde{S}\tilde{\nu} \\
D^{\tilde{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu + \tilde{\nu}}{\sigma}\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}\right) + \frac{c_{b2}}{\sigma}\left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}\right)^2 + f_{t1}\Delta U^2 \\
\varepsilon^{\tilde{\nu}} &= \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}}{d_w}\right)^2
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

Die Wirbelviskosität ν_t ist über einen nichtlinearen Zusammenhang mit $\tilde{\nu}$ verknüpft.

$$
\nu_t = f_{v1}\tilde{\nu} \quad \text{mit} \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad \text{und} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \tag{B.2}
$$

Der Produktionsterm ist proportional zu einer skalaren Form des Deformationstensors, wobei die originale Variante über den Rotationsanteil Ω formuliert ist.

$$
\tilde{S} = \Omega + f_{v2}\frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d_w^2} \quad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad \text{und} \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \tag{B.3}
$$

Die Wanddämpfung ist im Dissipationsterm durch die Funktion f_w enthalten.

$$
f_w = g\left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6}\right)^{\frac{1}{6}} \quad \text{mit} \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad \text{und} \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d_w^2} \tag{B.4}
$$

Die Funktionen f_{t1} und f_{t2} sollen den glatten Übergang von einer spezifizierten laminaren zur modellierten turbulenten Region ermöglichen. Da diese Funktionalität nicht verwendet wird, sollten beide Funktionen identisch null sein. Die Wiedergabe des korrekten Ablöseverhaltens einer laminaren Grenzschicht mit dem Ansatz von SHUR *et al.* (1996, vgl. Abschnitt 6.2.3) bzw. ein sehr geringes Niveau an Wirbelviskosität ist jedoch nur dann gewährleistet, wenn die Funktion f_{t2} aktiv ist.

$$
f_{t2} = c_{t3}\mathrm{e}^{-c_{t4}\chi^2} \tag{B.5}
$$

Die kalibrierten Modellkonstanten sind nachstehend aufgeführt.

$$c_{b1} = 0.1355 \qquad c_{b2} = 0.622 \qquad \sigma = \frac{2}{3} \qquad \kappa = 0.41 \qquad c_{v1} = 7.1$$
$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \qquad c_{w2} = 0.3 \qquad c_{w3} = 2 \qquad c_{t3} = 1.2 \qquad c_{t4} = 0.5$$

Die Edwards-Modifikation

Die Modifikationen von EDWARDS & CHANDRA (1996) zielen darauf ab, das wandnahe numerische Verhalten des Modells zu verbessern. Durch die Änderung am Produktionsterm über den skalaren Deformationswert $\tilde{S}$ wollten die Autoren das Konvergenzverhalten verbessern, indem stets positive Produktion garantiert ist. Dabei wird wieder der generell übliche Scherratenanteil S der Geschwindigkeitsgradienten eingesetzt.

$$\tilde{S} = S\left(\frac{1}{\chi} + f_{v1}\right) \qquad \text{mit} \qquad S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \tag{B.6}$$

Die Modifikation von $\tilde{S}$ hat auch Einfluß auf den Wanddämpfungsterm, so daß dort der betroffene Sensor r noch angepaßt wurde.

$$r = \frac{1}{\tanh(1.0)} \tanh\left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d_w^2}\right) \tag{B.7}$$

Die Funktion f_{t2}, welche bei Anwendung der Edwards-Modifikation typischerweise ignoriert wird, ist aus bereits genannten Gründen aktiviert.

B.2.2 LLR k-ω Modell

Als Vertreter der Zweigleichungsmodelle wird das am Fachgebiet entwickelte LLR k-ω Modell (Local Linear Realizable) von RUNG & THIELE (1996) eingesetzt. Hierbei handelt es sich um eine Weiterentwicklung der Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und die spezifische Dissipationsrate ω des Modells von WILCOX (1988). Durch die Formulierung der Proportionalitätsfaktoren in den Transportgleichungen und in der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in Abhängigkeit von den Geschwindigkeitsgradienten wird übermäßige Produktion von turbulenter kinetischer Energie vermieden. Die Herleitung aus lokalen Nichtgleichgewichtszuständen in Abhängigkeit von der turbulenten Reynolds-Zahl und die Berücksichtigung physikalischer Realisierbarkeit ermöglichen gute Ergebnisse für ein breites Spektrum an Strömungszuständen. Als Vorteile dieses Modells gelten die Berechnung des turbulenten Längenmaßes aus lokalen Turbulenzgrößen sowie die Beschränkung auf einen linearen Ansatz.

Die Transportgleichungen des Modells unterscheiden sich vom Wilcox-Modell im Produktionsterm P^ω und den beiden Dissipationstermen ε^k und ε^ω. Zu beachten ist jedoch, daß beim LLR-Modell die spezifische Dissipationsrate ohne den Anisotropieparameter c_μ definiert ist, $\omega = \varepsilon/k$.

$$
\begin{aligned}
\frac{Dk}{Dt} &= P^k + D^k - \varepsilon^k \\
P^k &= \nu_t S^2 \\
D^k &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \\
\varepsilon^k &= \beta_k k \omega
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{D\omega}{Dt} &= P^\omega + D^\omega - \varepsilon^\omega \\
P^\omega &= S^2 \sqrt{c_\mu} f_1 \left(c_1 - \frac{c_\mu S}{\omega}\right) \\
D^\omega &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] \\
\varepsilon^\omega &= \beta_\omega \omega^2
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

Die Wirbelviskosität wird über die Transportgrößen sowie einen von den Scher- und Wirbelraten abhängigen Anisotropieparameter c_μ berechnet.

$$
\nu_t = c_\mu \frac{k}{\omega} \quad \text{mit} \quad c_\mu = \frac{f_\mu}{4 + A_s \tilde{U}} \,, \quad f_\mu = \frac{1/80 + R_\mu}{1 + R_\mu} \,, \quad \tilde{U} = \frac{\sqrt{0.5(S^2 + \Omega^2)}}{\omega}
\tag{B.10}
$$

Die verschiedenen Parameter und Koeffizienten nach RUNG & THIELE (1996) hängen im Wesentlichen von der turbulenten Reynolds-Zahl Re_t ab.

$$
\begin{aligned}
&A_s = 3\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\sqrt{6} S_{ij} S_{jk} S_{ki}}{(S_{ij} S_{ij})^{1.5}}\right)\right] \,, \quad R_\mu = \left(\frac{\mathrm{Re}_t}{70}\right)^\alpha \,, \quad \mathrm{Re}_t = \frac{k}{\omega \nu} \\
&\alpha = 1 + \left[0.9\,\mathrm{sign}\left(1, \frac{\mathrm{Re}_t}{70} - 0.9\right)\right] \,, \quad f_1 = \frac{1/90 + (\mathrm{Re}_t/70)^2}{1 + (\mathrm{Re}_t/70)^2} \\
&c_1 = \max\left(0.43, \frac{S/\omega}{S/\omega + 5}\right) \,, \quad \beta_k = \frac{\frac{0.83}{3} + R_k}{1 + R_k} \,, \quad \beta_\omega = \frac{1.83}{1 + \sqrt{c_\mu \frac{\nu}{\nu + \nu_t}}} - 1 \\
&R_k = \left[A^* \left(\frac{\mathrm{Re}_t}{100}\right)^{2.5}\right] + \left[(1 - A^*)\left(\frac{\mathrm{Re}_t}{100}\right)^{0.5}\right] \,, \quad A^* = \tanh\left(0.5\sqrt{\frac{\mathrm{Re}_t}{100}}\right)
\end{aligned}
$$

Die noch fehlenden Konstanten sind die turbulenten Prandtl-Zahlen Pr_k und Pr_ω.

$$
\mathrm{Pr}_k = \mathrm{Pr}_\omega = 2.0
$$

Die Implementierung in *ELAN* und damit auch die verwendete Variante des Modells ist in einigen Teilen leicht abweichend von den publizierten Hilfsfunktionen. Diese zusätzlichen Modifikationen haben sich offenbar als nützlich erwiesen.

$$
\begin{aligned}
&c_\mu = \max\left[0.04, \min\left(0.1, \frac{f_\mu}{4 + A_s \tilde{U}}\right)\right] \,, \quad A_s = A_s^{2D,analyt.} = 2.12 \\
&c_1 = \max\left(0.43, \frac{S/\omega}{S/\omega + 4.265}\right)
\end{aligned}
$$

C LES – Filterung und Feinstrukturmodell

C.1 Rechenregeln bei der Filterung

Bei der LES-typischen Aufteilung einer Strömungsgröße ϕ in ihren Grobstrukturanteil $\widetilde{\phi}$ und den verbleibenden Feinstrukturanteil ϕ' wird formal eine Filteroperation zur Definition der Grobstrukturvariable verwendet. Im Unterschied zur Mittelwertbildung bei RANS wird eine Zeitreihe jedoch nicht auf einen Skalarwert reduziert, sondern lediglich „gefiltert".

Die mehrfache Anwendung einer Filteroperation verändert i. A. das betrachtete Zeitsignal auch mehrfach. Die Ausnahme bildet dabei die Anwendung des Fourier-Filters im Spektralraum.

$$\widetilde{\widetilde{\phi}} \neq \widetilde{\phi} \tag{C.1}$$

Die Filterung einer Feinstruktur-Zeitreihe ist allgemein nicht null.

$$\widetilde{\phi'} \neq 0 \tag{C.2}$$

Die Existenz von Feinstrukturspannungen $\tau_{ij}^{sgs} = \varrho(\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j)$ ist mathematisch durch den Unterschied aus der Vertauschung von Filterung und Multiplikation gegeben.

$$\widetilde{\phi\psi} \neq \widetilde{\phi}\widetilde{\psi} \tag{C.3}$$

Das Vertauschen von Filterungsoperation und Differentiation führt bei variabler Filterweite zu einem Kommutationsfehler, der von zweiter Ordnung ist (GHOSAL & MOIN, 1995).

$$\widetilde{\partial\phi} = \partial\widetilde{\phi} + \mathcal{O}(\Delta^2) \tag{C.4}$$

C.2 Das Smagorinsky-Feinstrukturmodell

Zur Bestimmung einer Wirbelviskosität bzw. Feinstrukturviskosität ν_{sgs} wird entsprechend den Erklärungen im Abschnitt 2.5.2 ein charakteristisches Längenmaß L_c und ein Geschwindigkeitsmaß U_c benötigt. Die aktivsten und damit zur Charakterisierung wichtigsten Feinstrukturelemente in einer LES sind diejenigen nahe dem Grenzlängenmaß $l_c = 1/\kappa_c$. Das charakteristische Längenmaß L_c dieser Strukturen ist notwendigerweise von der Größenordnung der Filterweite Δ. Die Proportionalität zwischen beiden Längen wird mit einer Konstante C_S aufgelöst.

$$L_c = C_S \Delta \tag{C.5}$$

Das charakteristische Geschwindigkeitsmaß U_c hängt stark vom untersuchten Strömungsproblem ab, weshalb eine Definition meist nur empirisch möglich ist. Basierend auf der Mischungsweghypothese bietet sich die Definition über Geschwindigkeitsgradienten an. In der Verallgemeinerung der Mischungsweghypothese auf dreidimensionale Probleme tritt dann der Scherratentensor S_{ij} auf. SMAGORINSKY (1963) verwendet letztlich den Scherratentensor des Grobstrukturfeldes $\widetilde{S}_{ij}$, um ein charakteristisches Geschwindigkeitsmaß zu formulieren.

$$U_c = L_c \left|\widetilde{S}_{ij}\right| \qquad \text{mit} \qquad \left|\widetilde{S}_{ij}\right| = \sqrt{2\widetilde{S}_{ij}\widetilde{S}_{ij}} \tag{C.6}$$

Die Berechnungsvorschrift für die Wirbelviskosität ergibt sich abschließend aus der Multiplikation von L_c und U_c.

$$\nu_{sgs} = L_c^2 \left| \widetilde{S}_{ij} \right| = (C_S \Delta)^2 \sqrt{2 \widetilde{S}_{ij} \widetilde{S}_{ij}} \tag{C.7}$$

Der Proportionalitätsfaktor C_S wird als Smagorinsky-Konstante bezeichnet. Ihr Wert läßt sich theoretisch auf der Basis isotroper Turbulenz zu 0.18 ableiten (LILLY, 1967). Für die LES wird in den meisten Fällen allerdings 0.1 verwendet, um dem Scherströmungscharakter technischer Anwendungsfälle gerecht zu werden.

D DES – Konvektion und Erweiterungen

D.1 Hybrides Konvektionsschema für DES

Im Abschnitt 2.7.3 wird auf die Notwendigkeit eines hybriden Konvektionsschemas, das je nach Strömungslösung und lokalen Stabilitätsanforderungen ein aufwindbasiertes (z. B. TVD) oder ein Zentraldifferenzen-basiertes Konvektionsschema (z. B. CDS 2. Ordnung) bevorzugt, eingegangen. Die Wichtung zwischen beiden Schemata wird mit Hilfe der Funktion σ, ähnlich dem Flux Blending, auf den Flächenwert der Strömungsgröße ϕ^f angewendet.

$$\phi^f_{hyb} = (1-\sigma)\phi^f_{CDS} + \sigma\phi^f_{TVD} \tag{D.1}$$

Die benutzte Wichtungsfunktion σ von TRAVIN *et al.* (2002) hängt von der lokalen Gitterlänge Δ, der Scherung S_{ij}, der Wirbelstärke Ω_{ij} und der Wirbelviskosität ν_t ab. Die Bestimmungsgleichung basiert auf numerischen Experimenten einer Zylinderumströmung mit DES und dem SA-Hintergrundmodell.

$$\sigma = \sigma_{max} \tanh\left\{\left[C_{H2}\,\max\left(\frac{C_{DES}\Delta}{l_t}\frac{1}{g} - 0.5, 0\right)\right]^{C_{H1}}\right\} \tag{D.2}$$

Das enthaltene turbulente Längenmaß l_t ist definiert über die Wirbelviskosität ν_t sowie Beträgen des Scherratentensors $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ und des Wirbelstärketensors $\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ im Parameter K.

$$l_t = \sqrt{\frac{\nu_t + \nu}{C_\mu^{3/2}K}} \qquad \text{mit} \qquad K = \max\left(\sqrt{\frac{S^2+\Omega^2}{2}}, \frac{0.1}{\tau_c}\right) \tag{D.3}$$

Die charakteristische Konvektionszeit $\tau_c = L/U$ der Strömungskonfiguration wird aus den Referenzgrößen für Länge und Geschwindigkeit berechnet. Der Parameter g stellt sicher, daß in den Bereichen gestörter rotationsarmer Strömung, wo die Wirbelstärke sehr klein ist, Scherraten aber sehr wohl existieren, das aufwindbasierte Schema dominiert.

$$g = \tanh\left\{\left[C_{H3}\Omega\frac{\max(S,\Omega)}{\max\left(\frac{S^2+\Omega^2}{2}, \epsilon\right)}\right]^4\right\} \qquad \text{mit} \qquad \epsilon = 10^{-14} \tag{D.4}$$

Um Singularitäten in Gleichung (D.2) zu vermeiden, ist das Produkt von l_t und g begrenzt durch 10^{-15}. Letztlich sind die vorgeschlagenen Werte für die Konstanten der Wichtungsfunktion von TRAVIN *et al.* (2002) übernommen worden.

$$\sigma_{max} = 1.0 \qquad C_{H1} = 3.0 \qquad C_{H2} = 1.0 \qquad C_{H3} = 2.0$$

In *ELAN* war zum Zeitpunkt der Simulation die Wichtungsfunktion mit einer kleiner Modifikation implementiert. Das darin auftretende Verhältnis von Längenmaß der DES zu turbulenten Längenmaß wird im wandnahen Bereich durch den Wandnormalenabstand d_w minimiert. Der Einfluß dieser Änderung ist nicht untersucht worden.

$$\sigma = \sigma_{max} \tanh\left\{\left[C_{H2}\,\max\left(\frac{\min\left(d_w, C_{DES}\Delta\right)}{l_t}\frac{1}{g} - 0.5, 0\right)\right]^{C_{H1}}\right\} \tag{D.5}$$

Das vorgestellte und benutzte hybride Konvektionsschema ist keinesfalls als universell anzusehen. Wenn die Struktur der zu berechnenden Strömung bekannt ist, sollten explizite Ansätze auf Basis von geometrisch spezifizierten Funktionen effizienter sein, als die hier gemachte nichtlineare Definition. Die dargestellte Funktion ist eine heuristische Formulierung und ist angepaßt auf Zylinderumströmungen.

D.2 Korrekturfunktion Ψ für das SA-Modell

Um das Smagorinsky-ähnliche Verhalten der benutzten DES-Variante zu gewährleisten, wird eine Korrekturfunktion Ψ im DES-Längenmaß integriert. Diese Funktion verhindert zum einen die Aktivierung vorhandener Wanddämpfungsterme und stellt zum anderen sicher, daß analog zum Smagorinsky-Feinstrukturmodell die zu C_S vergleichbare Modellkonstante nahezu konstant ist (siehe dazu MOCKETT, 2009). Die ursprüngliche Idee und erste Ableitung der Funktion Ψ für das SA-Modell geht auf SPALART *et al.* (2006) zurück. Die Herleitung der modellspezifischen Varianten für die im Strömungslöser *ELAN* implementierten Hintergrundmodelle wurde von MOCKETT (2009) erstmalig zusammengestellt. Dort findet sich auch die hier benutzte Funktion für das SA-Modell mit Edwards-Modifikation, wobei die „Transitionsterme" (trip terms) des Modells unbeachtet bleiben.

$$\Psi^2 = \min\left[100, \frac{1}{f_{\nu 1}\left(\frac{1}{\chi} + f_{\nu 1}\right)}\right] \tag{D.6}$$

Die Definition der Modellparameter $f_{\nu 1}$ und χ ist im Anhang B.2.1 angegeben.

D.3 Schutzfunktion für D-DES

Die generalisierte Schutzfunktion f_d, um die turbulente Grenzschicht vom LES-Bereich zu trennen, wurde von SPALART *et al.* (2006) vorgeschlagen.

$$f_d = 1 - \tanh\left[(8 r_d)^3\right] \qquad \text{mit} \qquad r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\kappa^2 d_w^2 \max\left(\sqrt{\frac{\partial u_i}{x_j}\frac{\partial u_i}{x_j}}, 10^{-10}\right)} \tag{D.7}$$

Die Sensorfunktion r_d hat ihre Wurzeln in der Funktion r des SA-Modells und ist 1 für ein logarithmisches Wandprofil und 0 für eine freie Scherschicht. Mit ihrer Hilfe ergibt sich innerhalb der turbulenten Grenzschicht $f_d = 0$, so daß in der Beziehung (2.72) die DES-Modifikation nicht vollzogen wird. In dem Sinne ist dort der RANS-Modus aktiv. Die hyberbolische Tangensfunktion sorgt letztlich dafür, daß am Rand der Grenzschicht ein glatter Übergang auf den Wert $f_d = 1$ vollzogen wird. Damit ist die Aktivierung des LES-Modus wieder möglich.

D.4 Funktionen für WM-LES

Die ursprüngliche Definition von $\Delta = h_{max} = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ bei der Berechnung des DES-Längenmaßes liefert die lokal größte Gitterlänge. Dies ist bei ähnlichen Gitterabmessungen in allen Raumrichtungen, z. B. in einem LES-Gitter entfernt der Wand, unbedenklich. In unmittelbarer Wandnähe schlagen TRAVIN *et al.* (2006) hingegen einen linearen Anstieg von Δ mit dem Wandabstand d_w vor. Ihre weiteren Überlegungen führen auf das reduzierte Längenmaß (D.8).

$$\widetilde{\Delta} = \min\left[\max(c_w d_w, c_w h_{max}, c_w h_{wn}), h_{max}\right] \tag{D.8}$$

Die neue Definition enthält, neben der maximalen lokalen Gitterweite h_{max} und der wandnormalen Gitterweite h_{wn}, auch eine empirische Konstante c_w, deren Wert mit 0.15 angegeben ist. Das neue Gittermaß ist unmittelbar an der Wand $c_w h_{max}$, entfernt der Wand h_{max} und verwendet für Gitter mit stärkerem Aufweitungsverhältnis als $c_w + 1 = 1.15$ den Term $c_w d_w$. Die Anpassung des ursprünglichen Δ kann auch als lokale Adaption der Modellkonstante C_{DES} verstanden werden, da beide immer in der Linearkombination $C_{DES}\Delta$ vorkommen.

Wie die Definition (2.73) zeigt, wird bei WM-LES statt des einfachen Vergleichs von Längenmaßen $\max(l_{RANS}, C_{DES}\Delta)$ der Standard-DES eine Wichtungsfunktion f_B für die Addition der Längenmaße im RANS- und LES-Bereich verwendet. Diese Wichtungsfunktion ist nur gitterabhängig und definiert über das Verhältnis des Wandabstandes d_w zur größten lokalen Gitterweite h_{max}. Nahe der Wand ist ihr Wert 1, so daß der Term mit l_{RANS} aktiv ist, und fernab der Wand 0 für $C_{DES}\widetilde{\Delta}$.

$$f_B = \min\left(2\mathrm{e}^{-9\alpha^2}, 1\right) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = 0.25 - \frac{d_w}{h_{max}} \tag{D.9}$$

Die Verstärkungsfunktion f_e ist dazu gedacht, eine fälschliche Reduktion des Reynolds-Spannungsniveaus aufgrund der Interaktion von RANS und LES zu vermeiden. Ihre Wirkungsweise läßt sich als Anpassung des notwendigen Niveaus verstehen. Die Funktion ist passiv für die beiden Fälle: ausreichende Gitterauflösung entsprechend einer wandaufgelösten LES und effektiver Einsatz von RANS (SHUR *et al.*, 2008).

$$f_e = \max(f_{e1} - 1, 0)\Psi f_{e2} \tag{D.10}$$

Während die in (D.10) enthaltene Funktion f_{e1} die vordefinierte Form der Niveauanpassung beinhaltet, steuert die zweite Funktion f_{e2} deren Stärke über die Sensorfunktionen f_l bzw. f_t. Die Sensoren r_{dt} bzw. r_{dl} detektieren die viskose (laminare) Unterschicht bzw. den logarithmischen (turbulenten) Teil der Wandgrenzschicht.

$$f_{e1} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-11.09\alpha^2} & \text{für} \alpha \geq 0 \\ 2\mathrm{e}^{-9.0\alpha^2} & \text{für} \alpha < 0 \end{cases} \tag{D.11}$$

$$f_{e2} = 1 - \max(f_t, f_l) \tag{D.12}$$

$$f_t = \tanh\left[(c_t^2 r_{dt})^3\right] \ \text{mit} r_{dt} = \frac{\nu_t}{\kappa^2 d_w^2 \max\left(\sqrt{\frac{\partial u_i}{x_j}\frac{\partial u_i}{x_j}}, 10^{-10}\right)} \tag{D.13}$$

$$f_l = \tanh\left[(c_l^2 r_{dl})^{10}\right] \text{mit} r_{dl} = \frac{\nu}{\kappa^2 d_w^2 \max\left(\sqrt{\frac{\partial u_i}{x_j}\frac{\partial u_i}{x_j}}, 10^{-10}\right)} \tag{D.14}$$

Die zusätzlichen Modellkonstanten c_l und c_t sind auf das verwendete Hintergrundmodell anzupassen, so daß die Passivität der Verstärkungsfunktion gesichert ist. SHUR *et al.* (2008) geben für das SA-Modell die nachstehenden Werte an.

$$c_l = 3.55 \qquad c_t = 1.63$$

Die Idee und Definition von WM-LES wurde von TRAVIN *et al.* (2006) erstmals publiziert. Aus Konsistenzgründen ist hier die angepaßte und kompaktere Notation nach SHUR *et al.* (2008) benutzt worden.

D.5 Modifizierte Schutzfunktion für ID-DES

Um D-DES und WM-LES in dem gemeinsamen Ansatz (2.74) vereinigen zu können, werden die ursprüngliche Schutzfunktion f_d von D-DES und die Wichtungsfunktion f_B in einer modifizierten Schutzfunktion zusammengeführt (SHUR *et al.*, 2008). Allerdings wird jetzt nur noch r_{dt}, das turbulente Analogon von r_d, verwendet.

$$\widetilde{f}_d = \max\left(1 - f_{dt}\,,\, f_B\right) \qquad \text{mit} \qquad f_{dt} = 1 - \tanh\left[(8 r_{dt})^3\right] \tag{D.15}$$

Bei der ID-DES wird generell die reduzierte Filterweite $\widetilde{\Delta}$ für die Längenmaß-Ersetzung benutzt.

E Geometrische Infrastruktur in *ELAN*

Bei der Ableitung der im Abschnitt 3.4 angegebenen Koeffizienten und Quellterme werden eine Reihe geometrischer Einflußgrößen verwendet, die lokale Eigenschaften des Simulationsgitters wiedergeben und deren Berechnung programmspezifisch ist. Die Vorschriften zur Berechnung, wie im eingesetzten Löser *ELAN* verwendet, sollen hier angegeben werden.

Der geometrische Mittelpunkt der Fläche x_i^f wird als Mittelwert der zur Fläche f gehörigen Eckpunkte $F1 \ldots F4$ berechnet.

$$x_i^f = \frac{1}{4}(x_i^{F1} + x_i^{F2} + x_i^{F3} + x_i^{F4}) \tag{E.1}$$

Der Interpolationsfaktor ϑ ergibt sich aus dem normierten Hebelarm des Kontrollvolumenzentrums P zu der Fläche f, wobei damit der zweite Interpolationsfaktor $(1 - \vartheta)$ ist.

$$\vartheta = \frac{|x_i^f - x_i^P|}{|x_i^f - x_i^P| + |x_i^f - x_i^F|} \tag{E.2}$$

Die kovarianten Basisvektoren $\underset{1}{g_i}$, $\underset{2}{g_i}$, $\underset{3}{g_i}$ werden aus den Koordinaten der Kontrollvolumenzentren P und F, sowie den Flächeneckpunkten $F1 \ldots F4$ bestimmt.

$$\begin{aligned}
\underset{1}{g_i} &= x_i^F - x_i^P \\
\underset{2}{g_i} &= \frac{1}{2}(-x_i^{F1} + x_i^{F2} - x_i^{F3} + x_i^{F4}) \\
\underset{3}{g_i} &= \frac{1}{2}(-x_i^{F1} - x_i^{F2} + x_i^{F3} + x_i^{F4})
\end{aligned} \tag{E.3}$$

Der kontravariante Basisvektor $\overset{1}{g}_j$ ist der einzig verwendete Vektor der kontravarianten Basis und wird zur Definition eines dualen Vektorraums von der kovarianten Basis abgeleitet.

$$\overset{1}{g}_j = \frac{\underset{2}{g_i}\,\epsilon_{ijk}\,\underset{3}{g_k}}{\underset{1}{g_n}\underset{2}{g_m}\,\epsilon_{mno}\,\underset{3}{g_o}} = \frac{A_j^f}{\underset{1}{g_n} A_n^f} \tag{E.4}$$

Der Flächenvektor A_j^f basiert auf den Flächeneckpunkten und kann über die kovariante Basis berechnet werden.

$$A_j^f = \underset{2}{g_i}\,\epsilon_{ijk}\,\underset{3}{g_k} \tag{E.5}$$

Das Volumen V^P des beliebig geformten achteckigen Kontrollvolumens (Hexaeder) mit dem Zentrum P wird durch Zerlegung in sechs Tetraeder bestimmt. Für die Berechnung der Teilvolumina eines jeden Tetraeders T wird jeweils das Spatprodukt dreier Kantenvektoren $r_i^{1,T}$, $r_i^{2,T}$, $r_i^{3,T}$ berechnet. Die Definition dieser Vektoren ist abhängig von der Eckenbezeichnung des Kontrollvolumens.

$$V^P = \sum_{T=1}^{6} V^T \quad \text{mit} \quad V^T = \frac{1}{6} r_i^{1,T}\,\epsilon_{ijk}\,r_k^{2,T} r_j^{3,T} \tag{E.6}$$

F Brückenspannungen virtueller Wandhitzdrähte

Im begleitenden Experiment von DOBRILOFF & NITSCHE (2009) wurde der Zylindermantel mit den Wandhitzdrahtsonden ausgestattet, um die tangentialen Oberflächenkräfte zu messen. Aufgrund des Fehlens einer geeigneten Kalibrierung (für den gekrümmten Mantel) können von den ermittelten Brückenspannungen keine quantitativen Aussagen über die Reibungskräfte abgeleitet werden. Um dennoch den Vergleich der Reibungskräfte bzw. Wandschubspannungen auf dem Zylindermantel im Abschnitt 7.4.3 zu ermöglichen, werden die numerisch errechneten Wandschubspannungsvektoren in Brückenspannungen virtueller, vertikal ausgerichteter Wandhitzdrähte überführt (DOBRILOFF, 2009).

Wegen der Abhängigkeit des Meßergebnisses vom Winkel unter dem der Wandschubspannungsvektor auf den Hitzdraht trifft, wird zuerst der zugehörige Winkel δ lokal auf dem Zylindermantel berechnet.

$$\delta = \arcsin\left(\left|\frac{\tau_z}{\tau_w}\right|\right) \tag{F.1}$$

Die effektiv meßbare Wandschubspannung wird unter Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit des Hitzdrahtes berechnet.

$$\tau_{w,eff} = \tau_w \sqrt{\cos^2\delta + k_T \sin^2\delta} \quad \text{mit} \quad k_T = 0.1 \tag{F.2}$$

Die Brückenspannung der virtuellen Hitzdrähte berechnet sich dann mit Hilfe einer invertierten, generischen Kalibrierfunktion.

$$U_B = \sqrt{A + B\tau_{w,eff}^n} \quad \text{mit} \quad A = 1.0,\ B = 0.3 \text{ und } n = 0.57 \tag{F.3}$$

Abschließend wird analog zum Experiment eine lokale Normierung über die zugehörigen Extremwerte durchgeführt. Im vorliegenden Fall sind diese für jede Gitterebene $z/D = \text{const.}$ ermittelt worden.

$$U_{B,norm} = \frac{U_B - U_{B,min}}{U_{B,max} - U_{B,min}} \tag{F.4}$$

Zugehörige Ergebnisse im Vergleich von Experiment und Numerik sind in Abbildung 7.58 und Abbildung 7.59 dargestellt.

G Darstellung weiterer Moden aus POD und TH-POD

G.1 Zusätzliche POD-Moden des Geschwindigkeitsvektorfeldes

In Ergänzung zu den bereits im Abschnitt 7.6.2 dargestellten Moden bzw. Modenpaarungen aus der POD des Geschwindigkeitsfeldes sind nachstehend weitere interessante, im Sinne der energetischen Sortierung wichtige Moden visualisiert.

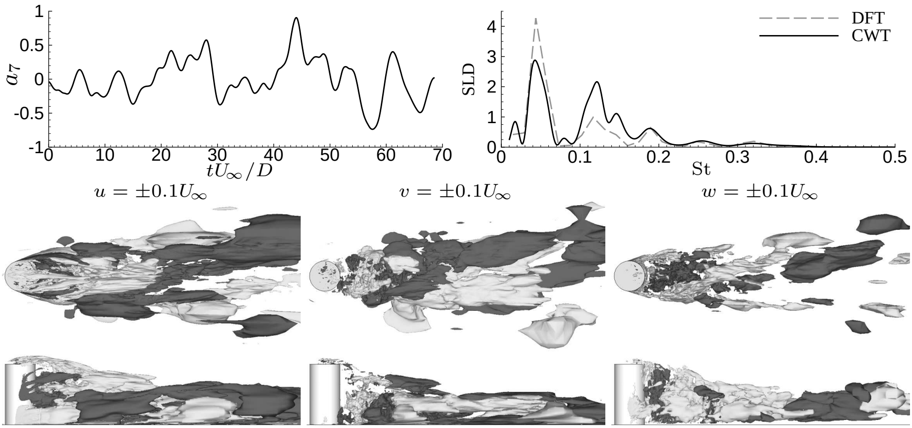


Abb. *G.1:* Mode 7 der Geschwindigkeiten (analog zu Abbildung 7.76)

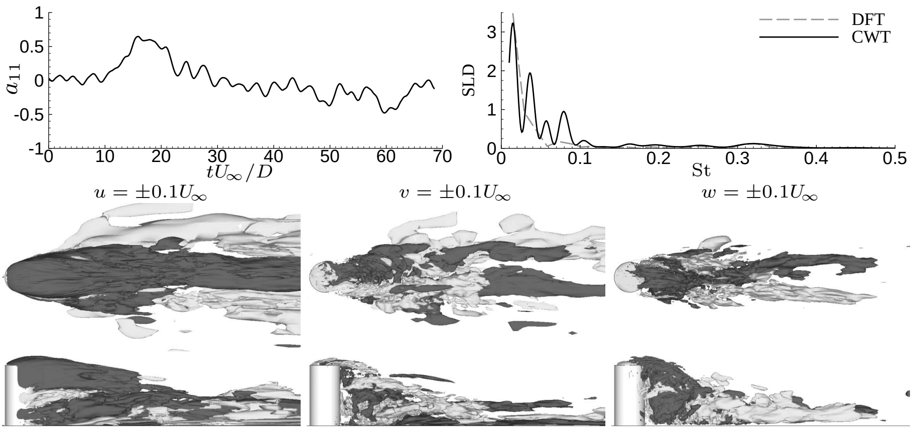
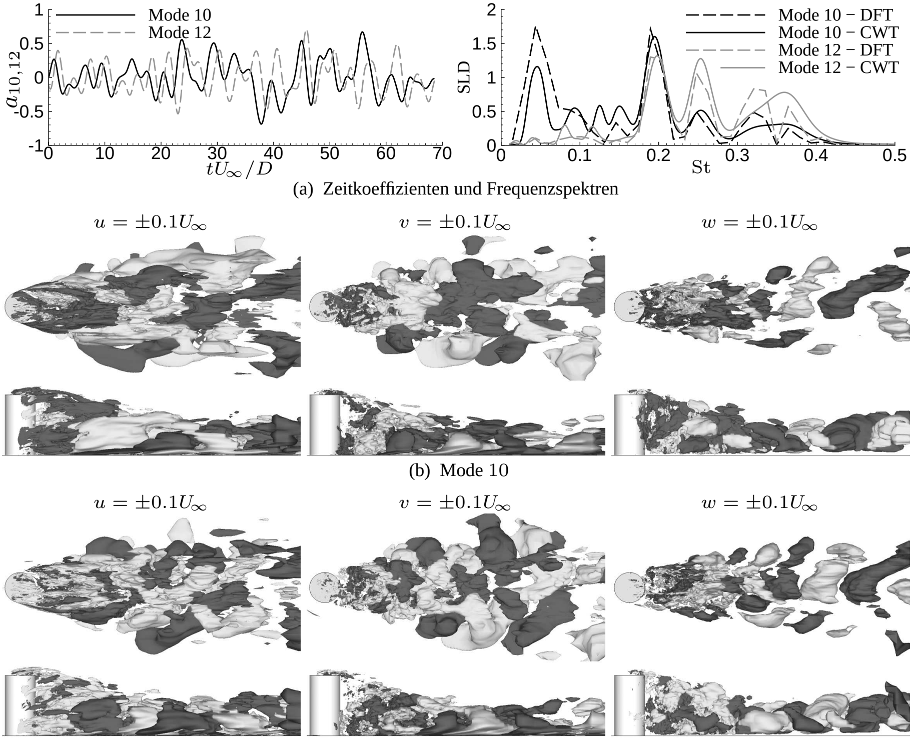


Abb. *G.2:* Mode 11 der Geschwindigkeiten (analog zu Abbildung 7.76)



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

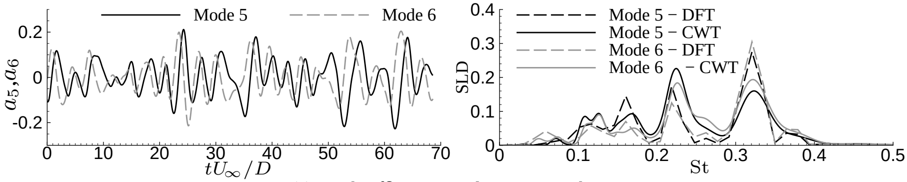
(b) Mode 10

(c) Mode 12

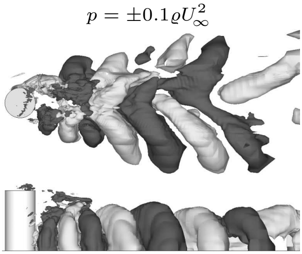
Abb. *G.3:* Modenpaar [10,12] der Geschwindigkeiten (analog zu Abbildung 7.76)

G.2 Zusätzliche POD-Moden des Druckfeldes

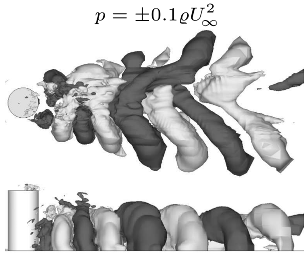
Zur Ergänzung der energetisch wichtigen POD-Moden des Druckfeldes im Abschnitt 7.6.3 finden sich hier weitere Abbildungen.



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

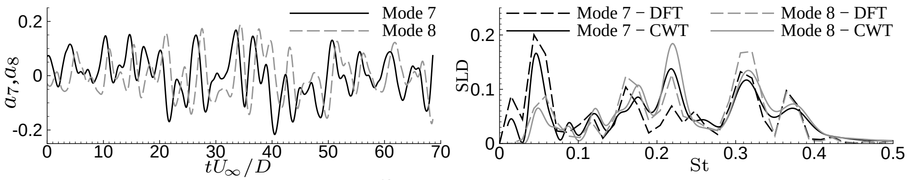


(b) Mode 5

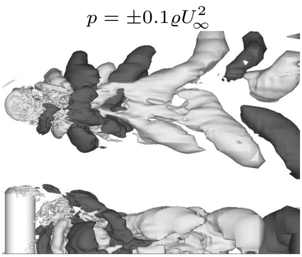


(c) Mode 6

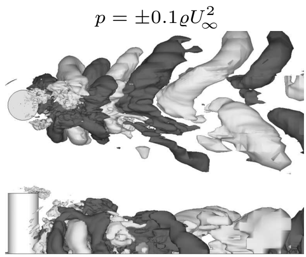
Abb. *G.4:* Harmonisches Modenpaar [5,6] des Druckfeldes (analog zu Abbildung 7.87)



(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren

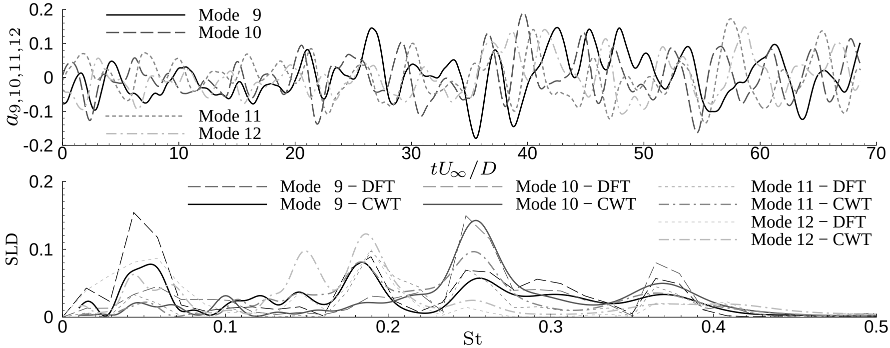


(b) Mode 7

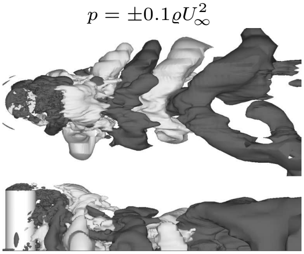


(c) Mode 8

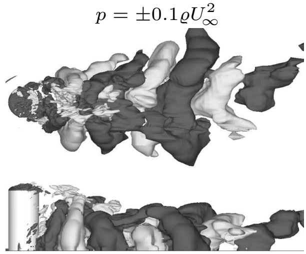
Abb. *G.5:* Harmonisches Modenpaar [7,8] des Druckfeldes (analog zu Abbildung 7.87)



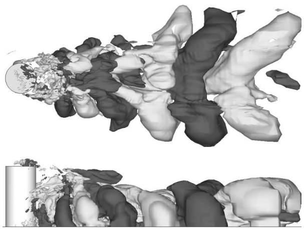
(a) Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren



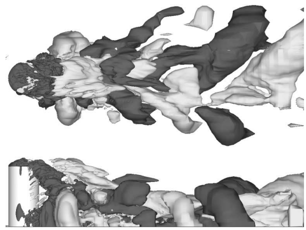
(b) Mode 9



(c) Mode 10



(d) Mode 11

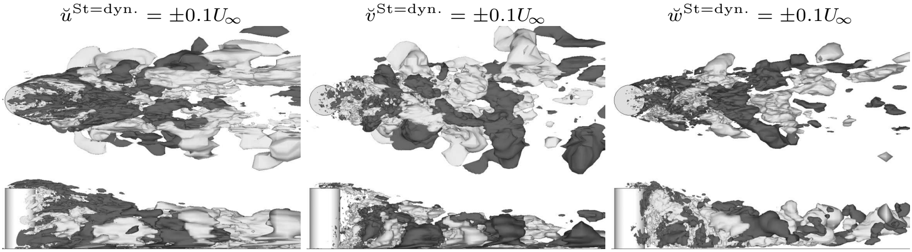


(e) Mode 12

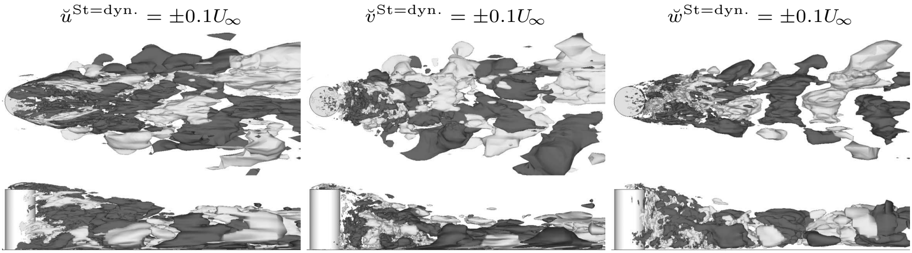
Abb. *G.6:* Moden 9, 10, 11 und 12 des Druckfeldes (analog zu Abbildung 7.87)

G.3 Ausgewählte Modenpaare nach Filterung mit TH-POD

Eine kurze Diskussion der dargestellten Modenpaare findet sich im Abschnitt 7.6.5.

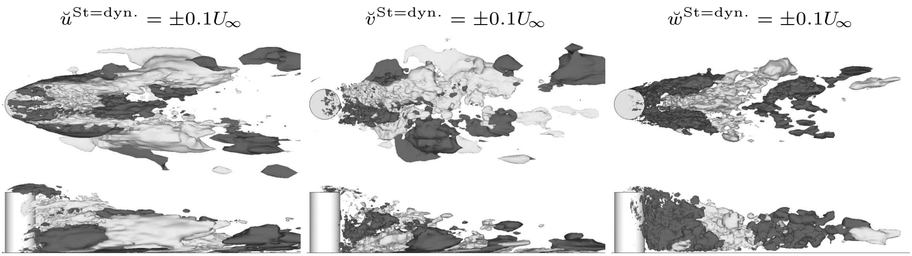


(a) Mode 3

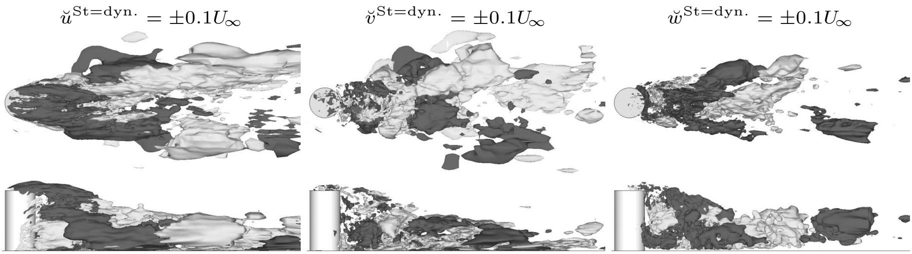


(b) Mode 4

***Abb.** G.7:* Modenpaar [3,4] nach Filterung mit $\mathrm{St} = \mathrm{dyn.}$: Isoflächen der Geschwindigkeitskomponenten mit Ansichten von oben und von der Seite (+ hell; − dunkel)



(a) Mode 5



(b) Mode 6

***Abb.** G.8:* Modenpaar [5,6] nach Filterung mit $\mathrm{St} = \mathrm{dyn.}$ (analog zu Abbildung G.7)

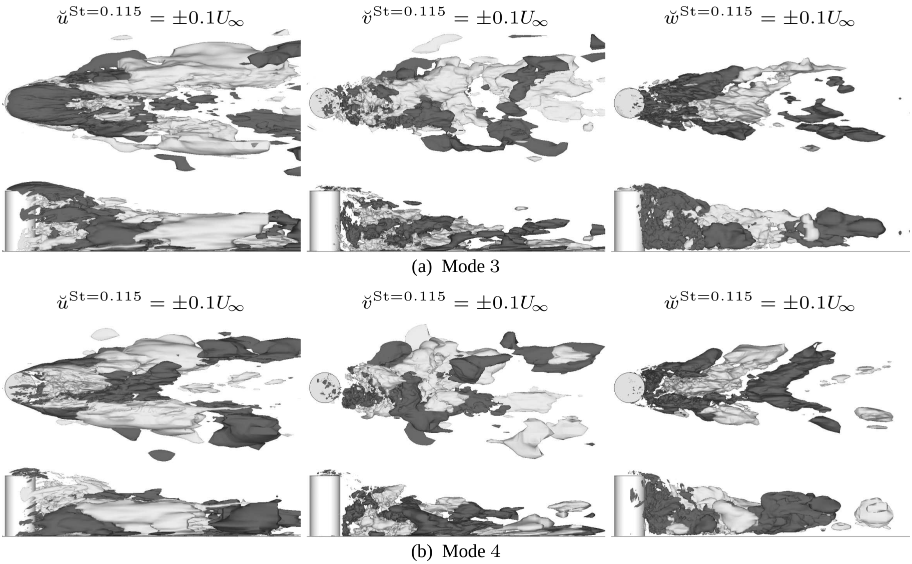


Abb. *G.9:* Modenpaar [3,4] nach Filterung mit $\mathrm{St} = 0.115$ (analog zu Abbildung G.7)

G.4 Zusätzliche POD-Moden im Kopfbereich

Weitere Zeitkoeffizienten, deren Frequenzspektren und räumliche Moden der POD-Zerlegung im Kopfbereich (siehe Abschnitt 7.6.7) sind nachstehend visualisiert.

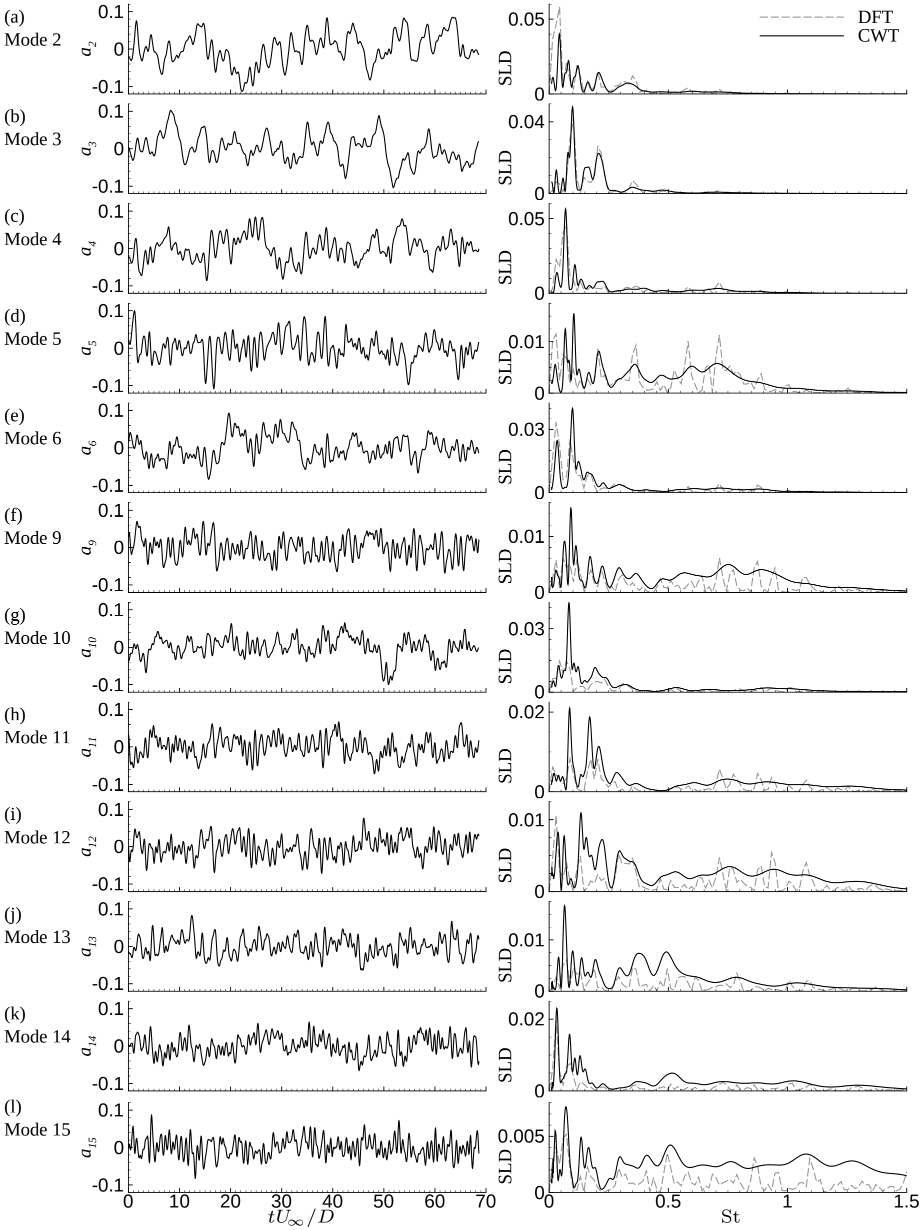
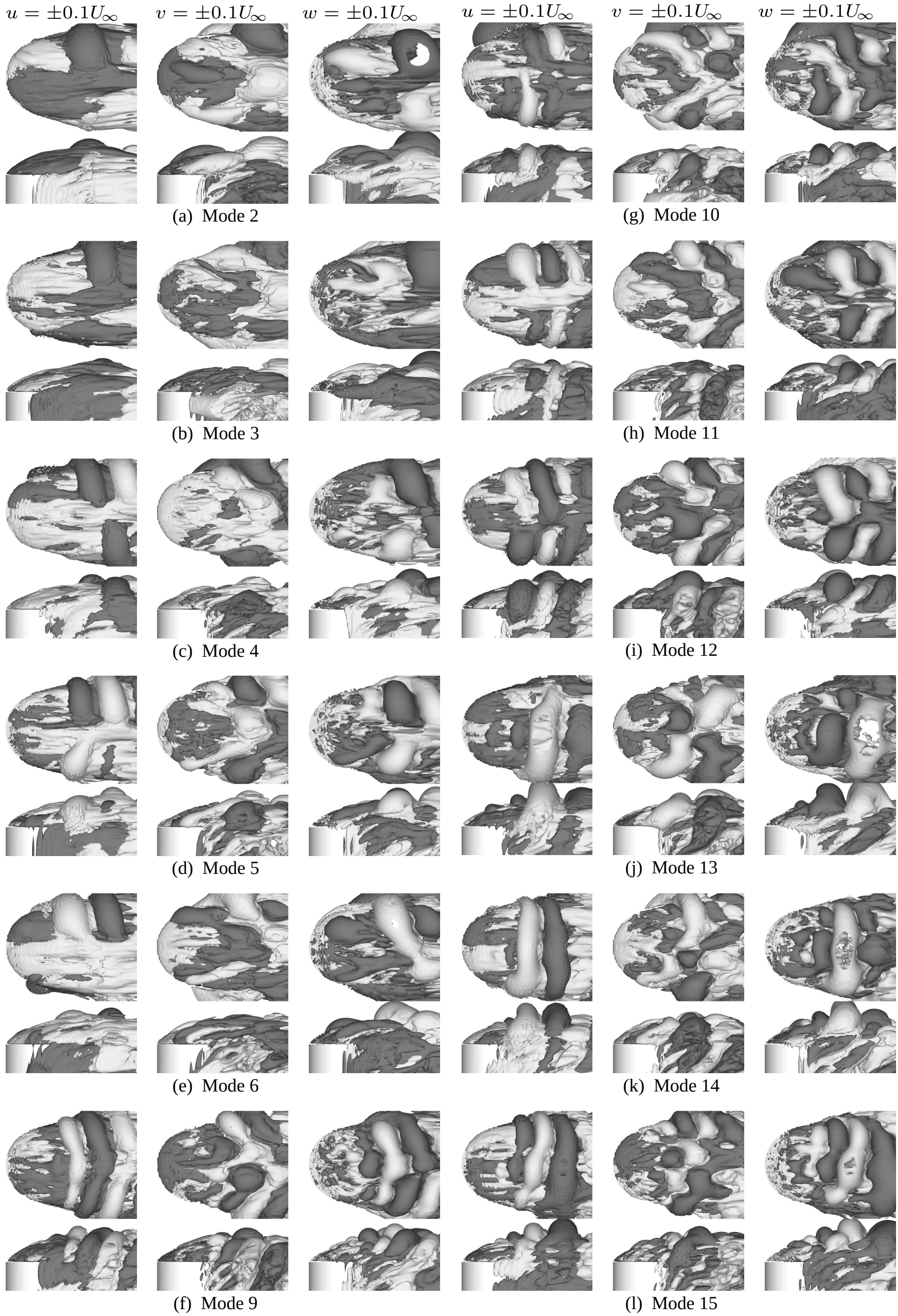


Abb. *G.10:* Zeitkoeffizienten und Frequenzspektren weiterer POD-Moden im Kopfbereich



(a) Mode 2
(g) Mode 10
(b) Mode 3
(h) Mode 11
(c) Mode 4
(i) Mode 12
(d) Mode 5
(j) Mode 13
(e) Mode 6
(k) Mode 14
(f) Mode 9
(l) Mode 15

Abb. *G.11:* Weitere POD-Moden im Kopfbereich: Isoflächen der Geschwindigkeitskomponenten mit Ansichten von oben und von der Seite ($+$ hell; $-$ dunkel)