

# Entwicklung numerischer Methoden und Simulation von Kontakt und Reibung mit Elastomeren

vorgelegt von  
Dipl.-Ing., Dipl.-Math.  
Silvio Kürschner  
geb. in Bützow

von der  
Fakultät V für Verkehrs- und Maschinensysteme  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften  
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. C. O. Paschereit

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. V. Popov

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. M. Kröger

Tag der Wissenschaftlichen Aussprache: 23. Juni 2014

Berlin 2014

D83



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Universität in Berlin.

Mein besonderer Dank gilt dem Leiter des Fachgebietes für Systemdynamik und Reibungsphysik, Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov. Er regte diese Arbeit an, betreute mich über die Jahre hinweg und ließ mir gleichzeitig genügend Freiraum, um meinen eigenen Ideen nachzugehen. Weiterhin danke ich Prof. Dr.-Ing. Kröger von der Technischen Universität Bergakademie Freiberg für seine Tätigkeit als Gutachter und Prof. Dr.-Ing. Paschereit für die Übernahme des Vorsitzes im Prüfungsausschuss.

Meinen Kollegen danke ich für fünf tolle Jahre, an die ich mich gern zurück erinnere. Stellvertretend für alle möchte ich Dr.-Ing. Roman Pohrt danken, der mich tatkräftig bei der Implementierung der numerischen Verfahren unterstützte und mir auch seine eigenen Algorithmen überließ. Und nicht zuletzt gilt mein Dank Dr. Rainer Heise, der mir stets helfend zur Seite stand und mir in täglichen Diskussionen neue Denkanstöße gab.

Berlin, im April 2014

Silvio Kürschner



# Kurzfassung / Abstract

## Entwicklung numerischer Methoden und Simulation von Kontakt und Reibung mit Elastomeren

Die vorliegende Arbeit behandelt Kontakt und Reibung von Elastomeren. Die Behandlung dieser Probleme ist, trotz aller Fortschritte, sehr kompliziert. Die Ursachen dafür sind, dass die beteiligten Längen- und Zeitskalen viele Größenordnungen umfassen können und dass vielfältige Wechselwirkungen unterschiedlicher Natur zu berücksichtigen sind.

Die Methode der Dimensionsreduktion ist ein einfach aufgebautes und sehr schnelles Verfahren, das unter bestimmten Voraussetzungen angenäherte oder sogar exakte Lösungen für Kontakt- und Reibungsprobleme liefert. In dieser Arbeit wird die Erweiterung der Methode auf Elastomere vorgenommen. Es wird gezeigt, wie Modelle für linear viskoelastische Materialgesetze zu konstruieren sind.

Im Anschluss werden der Normalkontakt und die Reibung mit einem linear viskosen Modell-Elastomer untersucht. Dabei kommen zum einen rotationssymmetrische Indenter und zum anderen solche mit zufällig rauhen, selbst-affinen Oberflächen zum Einsatz. Es werden jeweils das dreidimensionale Originalproblem und das Modellproblem nach der Methode der Dimensionsreduktion gelöst und die Ergebnisse miteinander verglichen.

## **Development and application of numerical methods for contact and friction of elastomers**

This thesis deals with contact and friction of elastomers. While some progress has been achieved before, the treatment of these problems is still troublesome. There are several reasons for that. The length- and timescales involved usually span numerous orders of magnitude and several interactions of different nature have to be factored.

The method of dimensionality reduction is a simple and very fast approach. Under certain conditions, it delivers approximate or even exact solutions of contact and frictional problems. The present work applies this approach to elastomers. Suitable models of linearly viscoelastic materials are constructed.

As applications the contact and friction of a linearly viscous model-elastomer with both axially symmetric and randomly rough self-affine indenters are studied in detail. The considerations are performed with respect to the original three-dimensional system as well as to the one-dimensional model problem and the results are compared to each other.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>Kurzfassung / Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion</b>	<b>5</b>
2.1. Das Grundprinzip . . . . .	5
2.2. Hintergründe und Voraussetzungen . . . . .	7
2.3. Elastischer Normalkontakt eines rotationssymmetrischen Indenters . . . . .	8
2.4. Normalkontakt eines Indenters mit fraktaler Rauigkeit . . . . .	14
2.5. Zusammenfassung und Verallgemeinerung . . . . .	18
<b>3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere</b>	<b>21</b>
3.1. Kontakte mit Elastomeren . . . . .	21
3.2. Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen . . . . .	22
3.3. Materialmodelle . . . . .	24
3.4. Die Greensche Funktion des viskosen Kontakts . . . . .	29
3.5. Das allgemeine viskoelastische Materialgesetz . . . . .	32
3.6. Vereinfachungen . . . . .	37
3.7. Fazit . . . . .	41
<b>4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer</b>	<b>43</b>
4.1. Vorbetrachtung . . . . .	43
4.2. Indentierung zylindrischer Stempel . . . . .	46
4.3. Indentierung rotationssymmetrischer Körper . . . . .	57
4.4. Indentierung rauer Körper . . . . .	71
4.5. Fazit . . . . .	82
<b>5. Reibung mit einem viskosen Elastomer</b>	<b>85</b>
5.1. Vorbetrachtung . . . . .	85
5.2. Das globale Verhalten . . . . .	91
5.3. Der stationäre Reibungskoeffizient . . . . .	96
5.4. Die Reibung mit ausgewählten Indentertypen . . . . .	104
5.5. Fazit und Ausblick . . . . .	111
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>113</b>

*Inhaltsverzeichnis*

<b>A. Anhang</b>	<b>115</b>
A.1. Randelemente-Verfahren: elastischer Normalkontakt . . . . .	115
A.2. Randelemente-Verfahren: viskoser Normalkontakt . . . . .	117
A.3. Randelemente-Verfahren: viskoses Reibungsproblem . . . . .	119
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>122</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>125</b>
1. Lateinische Großbuchstaben . . . . .	125
2. Lateinische Kleinbuchstaben . . . . .	126
3. Griechische Großbuchstaben . . . . .	126
4. Griechische Kleinbuchstaben . . . . .	127
5. Symbole . . . . .	127
6. Koordinatensysteme . . . . .	127
<b>Index</b>	<b>125</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>134</b>

# 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist in das Gebiet der Kontaktmechanik und Tribologie einzuordnen. Dieses Feld vereinigt weite Bereiche der Ingenieur- und Naturwissenschaften und birgt vielfältige Anwendungsmöglichkeiten in ganz unterschiedlichen Disziplinen. Viele Fragen sind von hohem theoretischen, praktischen und auch wirtschaftlichen Interesse. Insbesondere Reibung und der damit verbundene Verschleiß verursachen enorme Kosten. Im Gegenzug bergen sie ein erhebliches Potenzial zur Einsparung von Ressourcen und bieten dadurch große Anreize für die Forschung.

Dieses Gebiet der Wissenschaften ist weder besonders exotisch noch besonders neu. Schon seit Jahrhunderten wird es von namhaften Wissenschaftler wie Leonardo da Vinci, Leonard Euler, Guillaume Amontou und Charles Augustin de Coulomb bearbeitet, um nur einige wenige zu nennen. Eine detaillierte Behandlung der Geschichte der Tribologie findet man bei Dowson [1].

Umso bemerkenswerter ist es, dass viele Fragen der Tribologie immer noch nicht befriedigend beantwortet sind. Die Herausforderungen sind dabei vielfältig. Da sind zum einen die beteiligten Längenskalen, die oftmals viele Größenordnungen umfassen und so jede theoretische, experimentelle oder numerische Behandlung erschweren. Die beteiligten Zeitskalen verstärken dies oft noch zusätzlich. Hinzu treten vielfältige Wechselwirkungen. Das sind zum Beispiel räumliche getrennte Kontaktbereiche, die sich gegenseitig beeinflussen oder Temperatureffekte, die die Materialeigenschaften verändern - um nur zwei zu nennen.

Im Laufe der Zeit wurden eine ganze Reihe von Modellen und Lösungen für einzelne Probleme vorgeschlagen. Hier zu nennen sind die klassische Kontakttheorie von Hertz [2], die umfangreichen Arbeiten von Bowden und Tabor [3], das Modell von Greenwood und Williamson [4] und die Theorie von Persson [5, 6]. Sie (und viele andere mehr) haben alle Anwendungsgebiete in denen sie brauchbare Lösungen liefern und solche, in denen sie nicht verwendbar sind.

Popov und Psakhie haben in [7] ein besonders einfaches Modell vorgeschlagen: die Methode der Dimensionsreduktion. Die Kernidee dieser Methode ist die Abbildung eines dreidimensionalen Problems auf ein eindimensionales Modell. Unter bestimmten Voraussetzungen können so Aufgaben der Kontaktmechanik, der Tribologie oder verwandter Disziplinen wenigstens näherungsweise oder sogar exakt gelöst werden.

Die erste Anwendung der Reduktionsmethode war der Normalkontakt elastischer Körper. Seit 2007 wurden das Verfahren weiterentwickelt und verallgemeinert und weitere Anwendungsfelder erschlossen. Zahlreiche Publikationen sind dazu erschienen, und auch mehrere Promotionen widmeten sich diesem Thema, so Geike [8] (2008), Heß [9] (2011) und Pohrt [10] (2013).

Die vorliegende Dissertation baut auf diesen Vorarbeiten auf und leistet einen weite-

## 1. Einleitung

ren Beitrag zur Weiterentwicklung dieser Methode. Die Arbeit verfolgt dabei zwei Ziele: Die Methode der Dimensionsreduktion wird auf Kontakt- und Reibungsprobleme mit Elastomeren erweitert. Außerdem wird ihre Anwendung für ein spezielles Materialgesetz demonstriert. Die Wahl fiel hier auf den einfachsten nicht-elastischen Fall: ein linear viskoses Modell-Elastomer, dessen Materialeigenschaften denen einer Newtonschen Flüssigkeit gleichen. Beide Materialien unterscheiden sich allerdings stark in den Oberflächen-Eigenschaften und den Randbedingungen. Das Modell ist daher zur Beschreibung von Flüssigkeiten in dieser Form nicht geeignet.

Welchen Wert hat nun aber dieses Modell? Die Zielrichtung dieser Arbeit ist nicht praktischer und anwendungsorientierter, sondern theoretischer Natur. Auf einige direkt verwertbare Ergebnisse wird jedoch im Verlauf der Arbeit hingewiesen. Als wichtigste praktische Anwendung liefert das Modell Erkenntnisse über einen Grenzfall der Elastomer-Reibung, in dem die viskosen Eigenschaften das Gesamtverhalten tatsächlich dominieren können.

Für theoretische Betrachtungen hat das ausgewählte Materialmodell einige Vorteile. Es unterscheidet sich in seinem Verhalten ausreichend stark vom linear elastischen Verhalten ist aber gleichzeitig einfach genug, um den Aufwand überschaubar zu halten. Die Ergebnisse weichen in wesentlichen Punkten deutlich von denen elastischer Kontaktprobleme ab. Sie sind keineswegs banal, manchmal überraschend, lassen sich aber in den meisten Fällen anschaulich erklären.

Nicht zuletzt ist dieses Materialmodell ein wichtiger Schritt, auf dem folgende Arbeiten zu komplexeren Elastomermodellen aufbauen können. Rein elastisches Verhalten wurde bereits in der Vergangenheit detailliert studiert. Die vorliegende Arbeit liefert nun den zweiten Baustein zur Beschreibung viskoelastischer Materialien. Insbesondere ermöglicht sie die weiteren Arbeiten, wenn eine lineare Rheologie angenommen wird. In diesem Fall lassen sich elastische und viskose Eigenschaften superponieren.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Das zweite Kapitel ist eine kurze Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion. Die wesentlichen Elemente des Verfahrens werden vorgestellt und die Voraussetzungen und Annahmen genannt. Im Anschluss wird die Anwendung der Methode an einigen Beispielen zum elastischen Normalkontakt vorgeführt. So soll der Einstieg für diejenigen Leser erleichtert werden, die mit der Reduktionsmethode nicht vertraut sind. Darüber hinaus sind die Beispiele und ihre Ergebnisse auch selbst von Interesse. Sie werden in den folgenden Kapiteln immer wieder aufgegriffen, als Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen genutzt oder für Vergleiche und Abschätzungen herangezogen. In diesem Kapitel werden außerdem einige wesentliche Begriffe definiert und die Notation eingeführt.

Ich betone ausdrücklich, dass ich nicht der Urheber der Inhalte dieses zweiten Kapitels bin. Es ist vielmehr eine Rekapitulation vorhandenen Wissens und gibt den Kenntnisstand wieder, auf dem meine Arbeit aufbaut. In diesem Abschnitt sind auch zahlreiche Verweise auf Publikationen zu diesem Thema enthalten.

Im dritten Kapitel erfolgt die Erweiterung der Methode der Dimensionsreduktion auf Elastomere. Das zentrale Werkzeug ist dabei das Prinzip der Funktionalgleichungen. Dieses Verfahren geht auf Lee und Radok zurück. Mit ihm lassen sich Lösungen viskoelastischer Kontaktprobleme aus vergleichbaren elastischen Problemen konstruieren. Dabei wird ausgenutzt, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Einflüsse der Geometrie, der Belastung und des Materialverhaltens auf das Kontaktproblem bis zu einem gewissen Grad entkoppelt werden können. In dem Kapitel wird zunächst das Prinzip der Funktionalgleichungen, seine Voraussetzungen und seine Grenzen erläutert und die drei verwendeten Materialmodelle werden vorgestellt.

Die Anwendung des Prinzips wird an der Konstruktion der Greenschen Funktion für den viskosen Normalkontakt demonstriert. Diese wird an späterer Stelle mehrfach benutzt.

Im Hauptteil des Kapitels wird gezeigt, dass die Methode der Dimensionsreduktion auf linear viskoelastische Materialien anwendbar ist und wie die entsprechenden Modelle konstruiert werden können. Im Anschluss werden einige Vereinfachungen vorgenommen.

Diese münden letztendlich in dem linear viskosen Modell-Elastomer, welches im Mittelpunkt der verbleibenden beiden Kapitel steht. In ihnen wird die Anwendung der Reduktionsmethode in Verbindung mit dem Prinzip der Funktionalgleichungen demonstriert. Sie sind daher mit vielen Anwendungen dieser Verfahren bestückt. Das wichtigere Ziel ist jedoch zu zeigen, dass die so gewonnenen Erkenntnisse auch für das dreidimensionale Originalsystem gültig sind. Aus diesem Grund werden die Betrachtungen mit der Reduktionsmethode durch Abschätzungen (sofern vorhanden) und numerische Simulationen des Originalsystems ergänzt und die Ergebnisse miteinander verglichen.

Im vierten Kapitel wird der Normalkontakt eines starren Indenters mit dem linear viskosen Modell-Elastomer untersucht. Einige grundlegende Erkenntnisse lassen sich bereits ableiten, wenn ein Indenter in der Form eines zylindrischen Stempels betrachtet wird. Hier ist auch die Analogie zu dem vergleichbaren elastischen Problem besonders ausgeprägt.

Darauf aufbauend wird der Fall eines Indenters studiert, dessen Oberfläche durch die Rotation eines Monoms erzeugt wird. Nach allgemeinen Betrachtungen wird auf zwei konkrete Indenter genauer eingegangen. Der Kegel bietet sich an, weil er besonders einfach zu handhaben ist. Das Rotationsparaboloid ist von besonderem Interesse, weil es in vielen Theorien und Anwendungen als Modell für einen einzelnen Kontakt benutzt wird.

Abgeschlossen wird das Kapitel durch die Behandlung von Indentern mit zufällig rauen, selbst-affinen Oberflächen. Der zufällige Charakter dieser Indenter schafft hierbei die zusätzliche Herausforderung, dass sowohl die Modelle als auch die Ergebnisse nur im statistischen Sinn vergleichbar sind.

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit der Reibung zwischen einem starren Indenter und dem linear viskosen Elastomer. Dazu wird ein einfaches Reibungsmodell konstruiert. Anschließend wird das globale Verhalten des tribologischen Systems studiert. Die wichtigste Erkenntnis dabei ist, dass sich eine stationäre Indentierungstiefe einstellt.

Im Hauptteil des Kapitels wird der stationäre Reibungskoeffizient hergeleitet. Hierbei werden zunächst nur sehr schwache Voraussetzungen an die Form des Indenters gestellt. Im Anschluss daran werden diese Resultate auf konkrete Indenter angewandt. Speziell

## 1. *Einleitung*

handelt es sich dabei wieder um den Kegel und das Rotationsparaboloid. Für beide wird beispielhaft untersucht, wie der Reibungskoeffizient von der Geschwindigkeit abhängt, mit der der Indenter verschoben wird.

Im Anhang wird das Randelemente-Verfahren für das viskose Kontaktproblem beschrieben, mit dem die numerischen Simulationen des Originalsystems durchgeführt wurden. Der Algorithmus selbst wurde vom Autor unter Verwendung des Prinzips der Funktionalgleichungen aus einem gängigen Verfahren für den elastischen Normalkontakt entwickelt.

## 2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion

In diesem Kapitel werden in knapper Form die für das Verständnis wesentlichen Grundlagen der Methode der Dimensionsreduktion rekapituliert. Dies geschieht am Beispiel des elastischen Normalkontakts. Es geht hierbei jedoch ausdrücklich nicht um eine vollständige Abhandlung dieser Thematik.<sup>1</sup> Stattdessen liegen die Schwerpunkte bei der Vorstellung der wesentlichen Ideen der Methode und beim Festhalten ausgewählter Ergebnisse, die entweder für das allgemeine Verständnis oder für die folgenden Kapitel von Bedeutung sind.

Im ersten Abschnitt wird zunächst das Grundprinzip der Methode an einem sehr einfachen Beispiel motiviert. Anschließend werden die wesentlichen Voraussetzungen und Annahmen dargelegt und die Grenzen der Anwendbarkeit aufgezeigt. In den darauf folgenden Abschnitten wird die Methode der Dimensionsreduktion eingehender dargestellt. Im Fokus des dritten Abschnitts steht der Kontakt mit einem rotations-symmetrischen Indenter. Im vierten Abschnitt erfolgt die Betrachtung von Indentern mit zufällig rauen Oberflächen. Da dieses Kapitel in wesentlichen Punkten auf Beispielen beruht, werden im fünften Abschnitt einige Verallgemeinerungen vorgenommen und die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst.

### 2.1. Das Grundprinzip

Das Grundprinzip der Methode der Dimensionsreduktion lässt sich an einem einfachen Beispiel demonstrieren. Dazu wird ein starrer zylindrischer Stempel mit dem Radius  $a$  betrachtet. Dieser wird mit der Kraft  $F_N$  in die ursprünglich ebene Oberfläche eines inkompressiblen, elastischen Körpers mit dem Schubmodul<sup>2</sup>  $G$  eingedrückt. Die Abmessungen dieses Körpers sollen dabei sehr viel größer sein als der Radius  $a$ .

In Abbildung 2.1 ist das schematisch dargestellt. Der Indenter ist grau gefärbt, seine ursprüngliche Position ist gestrichelt angedeutet. Der elastische Körper ist grün dargestellt.<sup>3</sup>

Wie tief wird der Zylinder in den elastischen Körper eingedrückt? Das ist eine klassische Aufgabe, die in vielen Lehrbüchern zur Kontaktmechanik zu finden ist. Die Eindringtiefe

---

<sup>1</sup>Eine solche kann beispielsweise dem kürzlich erschienen Buch zur Methode der Dimensionsreduktion [11] entnommen werden.

<sup>2</sup>Die elastischen Eigenschaften werden hier überwiegend durch den Schubmodul und den Kompressionsmodul  $K$  beschrieben. Die Gründe dafür werden im nächsten Kapitel deutlich.

<sup>3</sup>Diese farbliche Kennzeichnung wird durchgehend verwendet, sofern sie möglich und sinnvoll ist. Starre Körper sind dann grau, elastische grün und viskose (oder viskoelastische) blau gefärbt.

## 2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion

$\delta$  ergibt sich laut [11] zu

$$\delta = \frac{F_N}{8aG}. \quad (2.1)$$

Die wesentliche Aussage in diesem Zusammenhang ist, dass Normalkraft und Eindringtiefe über den Kontaktradius  $a$  miteinander verknüpft sind, nicht über die Kontaktfläche  $A = a^2\pi$ . Das ist eine Schlüsseleigenschaft für die Anwendbarkeit der Methode der Dimensionsreduktion.

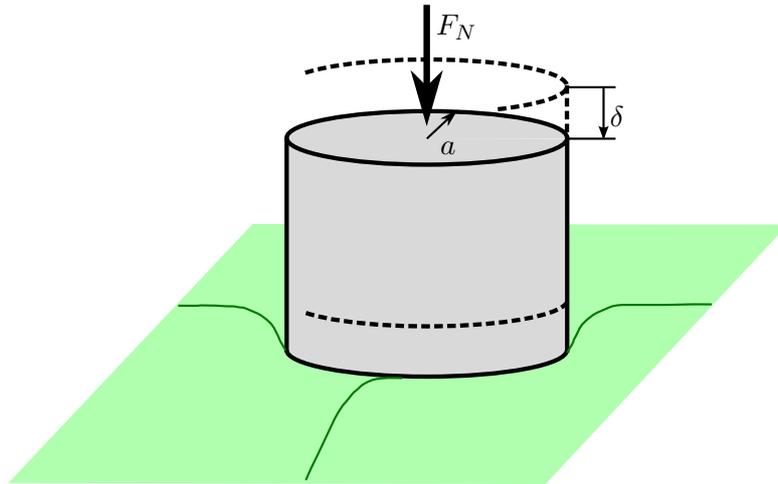


Abbildung 2.1.: Ein starrer, zylindrischer Stempel wird in einen elastischen Körper eingedrückt. Die ursprüngliche Position des Stempels ist gestrichelt angedeutet.

Offensichtlich gilt die Relation (2.1) auch für den Eindruck eines starren Rechtecks der Breite  $2a$  in eine Winkler-Bettung (vergleiche z.B. [12], S. 104 ff.), das heißt in ein eindimensionales System aus unabhängigen linearen Federelementen. In diesem Fall muss lediglich die Steifigkeit der einzelnen Federn zu

$$k_N = 4Gb \quad (2.2)$$

gewählt werden. Hierbei ist  $b$  die Breite eines Federelements, also die Diskretisierungslänge (Abb. 2.2).

Es ist somit möglich, zumindest die Kraft-Eindringtiefe-Beziehung (2.1) des dreidimensionalen Systems (Abb. 2.1) anhand eines eindimensionalen Ersatzsystems (Abb. 2.2) zu bestimmen. Hierbei ist es wesentlich, dass beide Größen über den Kontaktradius miteinander verbunden sind. Es wird sich zeigen, dass auch andere globale Größen, die mit dem Kontaktradius in erster Potenz korrelieren, anhand eines eindimensionalen Ersatzsystems bestimmt werden können.

Im Allgemeinen ist es dagegen nicht möglich, Größen mit einem solchen Modell zu berechnen, wenn sie von der Kontaktfläche abhängen. Ebenso ist es in der Regel nicht ohne

## 2.2. Hintergründe und Voraussetzungen

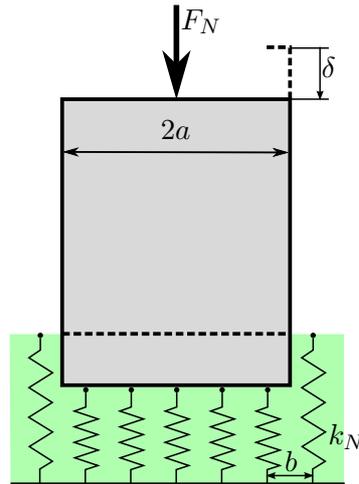


Abbildung 2.2.: Ein starres Rechteck wird in eine elastische Bettung eingedrückt.

Weiteres möglich, lokale Größen<sup>4</sup> zu berechnen. So liefert das eindimensionale Modell beispielsweise keine Auskunft über die Deformation außerhalb des Kontaktgebiets.

Die grundsätzliche Vorgehensweise zur Bestimmung der Kraft-Eindrucktiefe-Beziehung zwischen einem starren Indenter und einem elastischen Gegenkörper mit der Methode der Dimensionsreduktion lässt sich wie folgt formulieren: Die Oberfläche des Ersteren wird auf eine starre Linie und der Letztere auf eine Winkler-Bettung abgebildet. Wie das genau geschieht, wird in den folgenden Abschnitten gezeigt. Aus dem Eindruck der Linie in die Winkler-Bettung ergibt sich die Beziehung zwischen Kraft und Eindringtiefe des ursprünglichen Kontaktproblems. Allerdings ist die Berechnung viel einfacher als im Originalsystem.

## 2.2. Hintergründe und Voraussetzungen

Popov und Psakhie [7] haben 2007 die Methode der Dimensionsreduktion vorgeschlagen. In dieser Publikation lassen sich auch die wesentlichen Voraussetzungen<sup>5</sup> finden.

A

Die erste besteht in der Beschränkung auf kleine Geschwindigkeiten. Konkret sollen die auftretenden charakteristischen Geschwindigkeiten viel kleiner sein als die kleinste (für das jeweilige Problem maßgebliche) Schallgeschwindigkeit. In diesem Fall kann das Problem als quasistatisch angesehen werden.

Die zweite Voraussetzung besteht darin, dass sich die elastischen und die Trägheitseigenschaften separieren lassen. Viele Kontaktprobleme erfüllen diese Bedingung, wenn sie der ersten Voraussetzung genügen. Mit dieser Eigenschaft ist die Möglichkeit einer Ent-

---

<sup>4</sup>Die Begriffe lokal und global werden so verwendet, wie es in der Analysis üblich ist. Lokal bezieht sich stets auf das Verhalten im Kleinen (in einer offenen Umgebung eines Punktes), global stets auf das Verhalten im Großen, vergleiche [13], Vorwort.

<sup>5</sup>Um das Auffinden von wichtigen Voraussetzungen und Annahmen zu erleichtern, sind diese durch die Marginalie A markiert.

## 2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion

koppelung der beteiligten Längenskalen verbunden. Während die kleinen Längenskalen (die Konfiguration des Kontaktgebiets) ausschlaggebend für die elastischen Eigenschaften sind, bestimmen die großen Längenskalen (die Abmessungen der betrachteten Körper) die Trägheitseigenschaften.

Die dritte Voraussetzung wurde bereits im vorhergehenden Abschnitt herausgestellt. Die Methode der Dimensionsreduktion ist nur anwendbar auf Probleme, welche mit einer Längeneinheit (wie dem Kontaktradius  $a$ ) verknüpft sind. Dies ist insbesondere der Fall bei der Kraft-Eindrucktiefe-Relation, die eingangs betrachtet wurde.

Im weiteren Verlauf werden einige -durchaus tief greifende- zusätzliche Annahmen vorgenommen. Diese sind jedoch nicht ursächlich mit der Methode der Dimensionsreduktion verbunden, sondern dienen einer Vereinfachung der im Einzelfall betrachteten Aufgabenstellung. Sie sind im Allgemeinen aus Sicht der Methode der Dimensionsreduktion nicht notwendig. Aus diesem Grund werden die problemspezifischen Annahmen an späterer Stelle aufgeführt.

### 2.3. Elastischer Normalkontakt eines rotationssymmetrischen Indenters

Im ersten Abschnitt wurde der Eindruck eines starren Stempels in einen elastischen Körper betrachtet. Dieses Beispiel ist als motivierender Einstieg gedacht und daher besonders simpel.

In diesem und dem nächsten Abschnitt wird die Methode eingehender dargelegt und etwas anspruchsvollere Beispiele vorgestellt.

Das geschieht an einer speziellen Klasse von Problemen, nämlich dem Normalkontakt eines starren Indenters mit einem elastischen Halbraum. Diese Vorgehensweise entspricht der chronologischen Entwicklung der Methode der Dimensionsreduktion, vergleiche [14], [15]. Zum anderen verspricht sie einfache Ergebnisse, die in anschaulicher Weise interpretiert werden können. Eine weitere Vereinfachung wird dadurch erreicht, dass in diesem Abschnitt der elastische Körper stets als inkompressibel angesehen wird. Adhäsion wird nicht betrachtet.

Die Behandlung des elastischen Körpers als Halbraum impliziert einige zusätzliche Annahmen, die an dieser Stelle erwähnt werden sollen. Die Halbraumnäherung geht davon aus, dass der so dargestellte Körper in allen Richtungen sehr viel größer ist als das Kontaktgebiet. Die Deformationen und die Steigungen der Oberflächen im Kontakt sind klein. In unendlicher Entfernung vom Kontakt gehen die Deformationen gegen null.

#### Allgemeine Betrachtung rotationssymmetrischer Indenter

In diesem Abschnitt werden rotationssymmetrische Indenter betrachtet. Für diese hat Heß in seiner Dissertation [9] gezeigt, dass mit der Methode der Dimensionsreduktion stets ein eindimensionales Modell konstruiert werden kann, welches die Beziehung zwischen Kraft und Eindrucktiefe exakt wiedergibt. Er stützt sich dabei insbesondere auf die Arbeiten von Segedin [16] und Sneddon [17].

### 2.3. Elastischer Normalkontakt eines rotationssymmetrischen Indenters

Als Erstes wird ein Indenter betrachtet, dessen Oberfläche durch die Rotation eines Monoms  $g_n$ ,

$$g_n(r) = c_n r^n, \quad (2.3)$$

vom Grad  $n \in \mathbb{N}$  beschrieben wird.

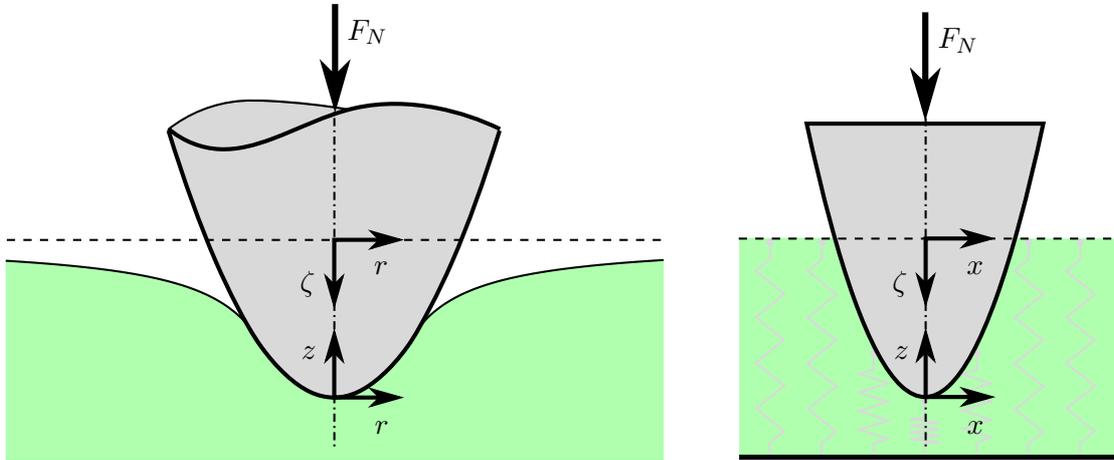


Abbildung 2.3.: Koordinatensysteme im dreidimensionalen Originalsystem<sup>6</sup>(links) und im zugehörigen Modell nach der Methode der Dimensionsreduktion (rechts)

Dabei wird ein zylindrisches Koordinatensystem  $(r, \varphi, z)$  mit  $r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}$  zugrunde gelegt, dessen Ursprung sich an der Spitze des Körpers befindet. Die  $z$ -Achse fällt mit der Rotationsachse des erzeugenden Monoms zusammen und die positive  $z$ -Richtung zeigt in den Indenter hinein (vergleiche Abbildung 2.3, linkes Bild). Zur Beschreibung der Deformationen wird dagegen das ortsfeste, zylindrische Koordinatensystem  $(r, \psi, \zeta)$ , verwendet. Dessen Ursprung liegt auf der nicht-deformierten Oberfläche des Halbraums und zwar -sofern vorhanden- im Schnittpunkt mit der Symmetrieachse des Indenters. Die  $(r, \psi)$ -Ebene ist mit der nicht-deformierten Oberfläche identisch, die  $\zeta$ -Achse zeigt in den Halbraum hinein. In der Abbildung 2.3 wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Darstellung der  $\varphi$ - respektive  $\psi$ -Achse verzichtet.

Analog zum dreidimensionalen Fall werden auch für das Modell nach der Methode der Dimensionsreduktion zwei Koordinatensysteme benutzt. Für die Beschreibung des Indenters wird das körperfeste  $(x, z)$  System verwendet, die Indentierung wird im ortsfesten  $(x, \zeta)$ -System beschrieben. Beide sind im rechten Teil der Abbildung 2.3 zu sehen.

Bei Anwendung der Vorschrift (2.3) entsteht für ein Monom ersten Grades ein Kegellindenter (Konus), für ein Monom zweiten Grades ein Rotationsparaboloid. Letzteres wird auch häufig als Näherung für eine Kugel und für die Darstellung eines einzelnen Kontakts (Asperiten) verwendet und ist daher von besonderem Interesse.

<sup>6</sup>Im späteren Verlauf werden sporadisch auch kartesische Varianten  $(x, y, z)$  bzw.  $(x, y, \zeta)$  der beiden Koordinatensysteme in drei Dimensionen verwendet.

## 2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion

Heß [9] zeigt, wie der Indenter für das eindimensionale Modell konstruiert werden kann. Das Monom  $g_n$  wird symmetrisch zur  $z$ -Achse fortgesetzt und mit einem Skalierungsfaktor  $\varkappa_n$ ,

$$\varkappa_n \equiv \varkappa(n) := \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad (2.4)$$

gestreckt. Mit  $\Gamma$  ist dabei die Gammafunktion  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  gemeint. Heß bezeichnet  $\varkappa_n$  als Formfaktor. Zur Vermeidung von Verwechslungen mit einem ähnlichen Parameter wird er hier stattdessen als Tiefenskalierung bezeichnet.<sup>7</sup> In Abbildung 2.4 ist der Verlauf dieser Funktion dargestellt. Für die oben genannten Beispiele des Kegels und des Rotationsparaboloids sind  $\varkappa_1 = \frac{\pi}{2}$  respektive  $\varkappa_2 = 2$ .

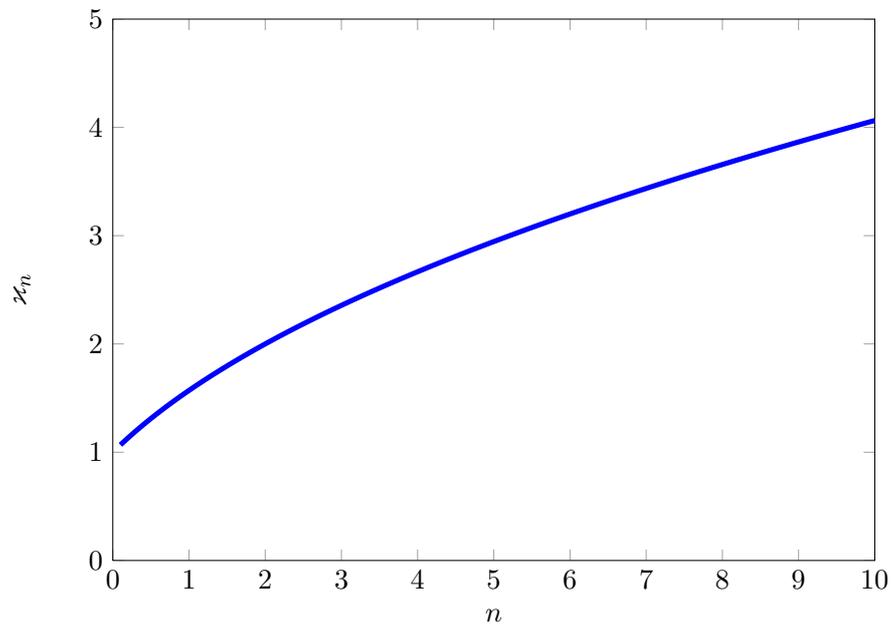


Abbildung 2.4.: Tiefenskalierung  $\varkappa_n$  in Abhängigkeit vom Exponenten. Mit Hinblick auf die spätere Verallgemeinerung erfolgt die Darstellung für reelle Exponenten.

Gemäß dieser Konstruktion ergibt sich für den Indenter im eindimensionalen Modell die Oberfläche  $\tilde{g}_n$ ,<sup>8</sup>

$$\tilde{g}_n(x) = \varkappa_n c_n |x|^n, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

<sup>7</sup>Vergleiche Polarskalierung  $\vartheta$  im Kapitel 5.4.

<sup>8</sup>Zur besseren Unterscheidung zwischen der originalen (zweidimensionalen) Oberfläche und der zugehörigen (eindimensionalen) Oberfläche in der Methode der Dimensionsreduktion wird Letztere durch eine Tilde gekennzeichnet.

### Anmerkung: Verwendung dimensionsloser Größen

Mit Hinblick auf die Implikationen der Halbraum-Näherung ist es vorteilhaft, für die Parametrisierung der Indentergeometrie (2.3) statt des einheitenbehafteten Arguments  $r$  eine dimensionslose Größe zu verwenden. Das lässt sich stets durch Division mit einer geeigneten Längeneinheit erreichen. Ist zum Beispiel  $R$  eine solche Größe von der Dimension einer Länge (z.B. der Krümmungsradius im folgenden Beispiel des Rotationsparaboloids), so lässt sich äquivalent zu Gleichung (2.3) das formgebende Monom auch durch

$$\bar{g}_n(\rho) = \bar{c}_n \rho^n \quad \text{mit} \quad \rho := \frac{r}{R} \quad (2.6)$$

definieren. Der Koeffizient  $\bar{c}_n$  hat dann die Dimension einer Länge. Zusätzlich ließe sich auch die linke Seite der Gleichung in eine dimensionslose Größe umwandeln.

Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass sehr einfach feststellbar ist, ob die Implikationen der Halbraumnäherung erfüllt sind.

Aus Gründen der Anschaulichkeit werden jedoch in der vorliegenden Schrift überwiegend dimensionsbehaftete Argumente  $r$  verwendet. Dennoch (oder gerade deswegen) ist stets im Auge zu behalten, ob die Voraussetzungen kleiner Deformationen und kleiner Steigungen überhaupt erfüllt sind. Dies ist insbesondere von Bedeutung, da die mathematischen Formalismen keineswegs versagen, wenn dies nicht (mehr) der Fall ist. Stattdessen liefern sie auch dann Lösungen, wenn die Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind. Diese sind jedoch wertlos, und man kann ihnen das nicht ohne Weiteres ansehen.

Diese Anmerkung gilt sinngemäß auch für die eindimensionalen Oberflächen  $\tilde{g}$  nach der Methode der Dimensionsreduktion.

### Beispiel: Rotationsparaboloid

Im Folgenden wird eine detailliertere Betrachtung am Beispiel des Rotationsparaboloids vorgenommen. Dabei steht zunächst der dreidimensionale Indenter im Blickpunkt (Abb. 2.5, linkes Bild). Das formgebende Monom lässt sich durch die Funktion

$$g_2(r) = \frac{1}{2R} r^2 \quad (2.7)$$

beschreiben, wobei  $c_2 = \frac{1}{2R}$  gewählt wurde. Der Parameter  $R$  hat dabei eine anschauliche Bedeutung. Es ist genau der Radius der Kugel, für welche die Spitze des Paraboloids  $g_2$  die Näherung zweiter Ordnung ist.<sup>9</sup> Insbesondere ist  $R$  ein wohldefinierter Wert, der geeignet ist, die Krümmung des Paraboloids zu beschreiben. Er wird anschaulich als Krümmungsradius bezeichnet.

Im ersten Schritt soll die notwendige Kraft  $F_N$  berechnet werden, um den Indenter bis in die Tiefe  $\zeta = \delta$  in den elastischen Halbraum einzudrücken. Für hinreichend kleine Eindringtiefen  $\delta \ll R$ , kann diese Aufgabe mit der Kontakttheorie von Hertz [2] behandelt werden. Außer an der angegebenen Stelle ist ihre Lösung auch in vielen Lehrbüchern zur

<sup>9</sup>Man kann sich davon leicht durch Taylorreihen-Entwicklung der Kugel mit Radius  $R$  überzeugen.

## 2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion

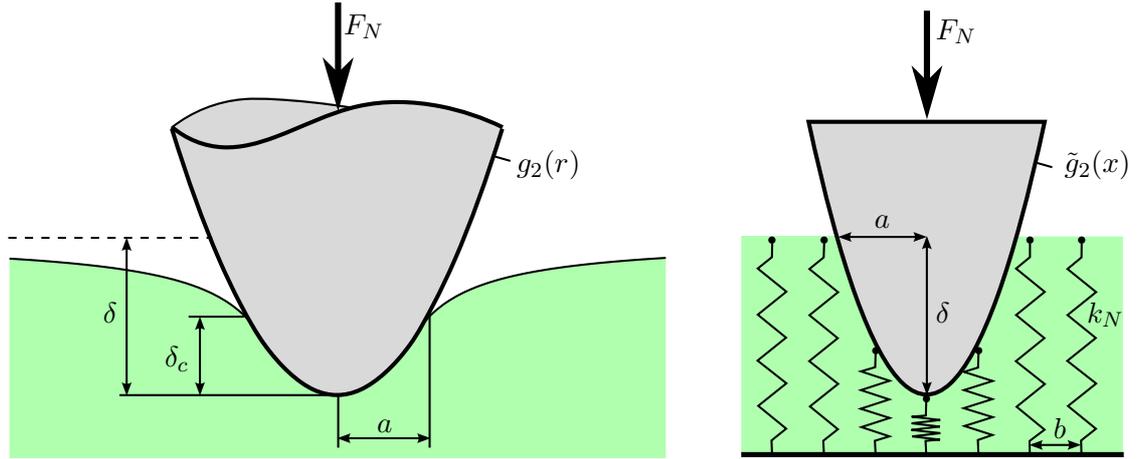


Abbildung 2.5.: Indentierung des elastischen Halbraums mit einem Rotationsparaboloid (links) und dem zugehörigen eindimensionalen Modell (rechts)

Kontaktmechanik, zum Beispiel [12], [18], zu finden. Die notwendige Kraft ist

$$F_N = \frac{16}{3} G \sqrt{R \delta^3}. \quad (2.8)$$

Das Gebiet, in dem der Indenter mit der Oberfläche des Halbraums in Kontakt ist, hat den Radius

$$a = \sqrt[3]{\frac{3RF_N}{16G}} = \sqrt{R\delta}. \quad (2.9)$$

Er wird anschaulich als Kontaktradius bezeichnet. Die Höhe  $z = \delta_c$ , bis zu welcher der Indenter in Kontakt mit dem elastischen Material ist, lässt sich aus seiner Geometrie bestimmen. Mit Gleichung (2.9) folgt aus (2.7) unmittelbar

$$\delta_c = \frac{\delta}{2}. \quad (2.10)$$

Es ist damit offensichtlich, dass diese Größe nicht mit der Eindringtiefe identisch ist. Stattdessen ist in der Letztgenannten zusätzlich die Absenkung der Oberfläche außerhalb des Kontaktgebiets enthalten (vergleiche Abbildung 2.5, linkes Bild). In Analogie zum Kontaktradius  $a$  wird die Größe  $\delta_c$  hier als Kontakttiefe bezeichnet. Heß nennt sie in seiner Dissertation [9] die kontaktgebende Eindringtiefe.

Die Betrachtung des Quotienten  $\frac{\delta}{\delta_c}$  offenbart die Beziehung

$$\varkappa_2 = \frac{\delta}{\delta_c}. \quad (2.11)$$

Diese Übereinstimmung ist nicht zufällig. Tatsächlich gilt allgemein [9]:

$$\varkappa_n = \frac{\delta}{\delta_c}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

### 2.3. Elastischer Normalkontakt eines rotationssymmetrischen Indenters

Die Tiefenskalierung  $\varkappa_n$  hat somit eine anschauliche Bedeutung. Sie ist das Verhältnis zwischen der Eindringtiefe  $\delta$  und der Kontakttiefe  $\delta_c$ .

Damit ist die Behandlung des dreidimensionalen Rotationsparaboloids zunächst abgeschlossen. Im Vergleich dazu wird jetzt das zugehörige Modell nach der Methode der Dimensionsreduktion betrachtet (Abb. 2.5, rechtes Bild). Durch Anwendung der Gleichungen (2.5) und (2.4) auf (2.7) erhält man eine Beschreibung der Oberfläche für den Indenter im eindimensionalen Modell:

$$\tilde{g}_2(x) = \varkappa_2 c_2 g_2(|x|) = \frac{1}{R} x^2. \quad (2.13)$$

Gleichung (2.13) zeigt, dass bei der Transformation des Rotationsparaboloids auf das eindimensionale Modell der Krümmungsradius halbiert wird (vergleiche auch [8]).<sup>10</sup>

Wird dieser Indenter in das eindimensionale Modell des elastischen Halbraums gedrückt, zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zum Verhalten des dreidimensionalen Systems. Da die einzelnen Elemente der Winkler-Bettung voneinander unabhängig sind, tritt außerhalb des Kontaktgebiets keine Deformation der Federn, das heißt kein Absinken der Oberfläche, auf. In diesem Modell sind Eindringtiefe  $\delta$  und Kontakttiefe  $\delta_c$  identisch. Der Begriff der Kontakttiefe wird daher im Folgenden nicht für das eindimensionale Modell verwendet. Das dient insbesondere der Vermeidung von Missverständnissen und Fehlinterpretationen.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Beziehung zwischen Eindringtiefe  $\delta$  und Kontaktradius  $a$  im Modell mit der im Originalsystem übereinstimmt. In beiden Fällen gilt

$$\delta = \frac{a^2}{R}. \quad (2.14)$$

Abschließend soll die Kraft  $F_N$  berechnet werden, die im Ersatzmodell benötigt wird, um den Indenter genau bis zur Tiefe  $\delta$  in die elastische Bettung zu drücken. Dazu muss lediglich über alle einzelnen Federkräfte addiert bzw. integriert werden. Eine einzelne Feder an der Stelle  $x$  übt auf den Indenter eine Normalkraft vom Betrag  $f_N(x)$ ,

$$f_N(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > a; \\ 4Gb(\delta - \tilde{g}_2(x)) & , |x| \leq a \end{cases} \quad (2.15)$$

aus. Dabei wurde die in Gleichung (2.2) vorgenommene Wahl der Federsteifigkeit benutzt. Es ist darauf zu achten, dass die Breite der einzelnen Federelemente sehr viel kleiner als der Kontaktradius ist, also  $b \ll a$ . Die Gesamtkraft  $F_A$  ergibt sich aus der Addition der Kräfte über alle Federn. Durch den Übergang  $b \rightarrow dx$  lässt sich schließlich diese Summe in ein Integral überführen, welches in diesem Fall sehr einfach ausgewertet werden kann. Der Betrag der gesamten Kraft  $F_A$  aller Federn auf den Indenter ist

$$F_A = \int_{-a}^a 4G(\delta - \tilde{g}_2(x)) dx = \frac{16}{3R} G \sqrt{R\delta^3}. \quad (2.16)$$

<sup>10</sup>Für die Fortführung dieses Beispiels wird jedoch auf die Definition eines zugehörigen Krümmungsradius  $\tilde{R}$  im eindimensionalen Modell verzichtet. Stattdessen wird weiterhin auf den Krümmungsradius  $R$  des Originalsystems Bezug genommen.

## 2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion

Da der Indenter genau bis zur Tiefe  $\delta$  eingedrückt werden soll, muss dort die Summe der Federkräfte gerade der äußeren Kraft das Gleichgewicht halten, das heißt  $F_N = F_A$ . Durch den Vergleich mit Gleichung (2.8) wird ersichtlich, dass auch die Beziehung zwischen Kraft und Eindringtiefe exakt mit der des Originalsystems übereinstimmt. Damit ist das Beispiel des Rotationsparaboloids abgeschlossen.

### 2.4. Normalkontakt eines Indenters mit fraktaler Rauigkeit

Eine weitere Klasse von Indentern, für die eine Transformation in ein eindimensionales Modell im Sinne der Methode der Dimensionsreduktion bekannt ist, sind solche mit zufällig rauen, selbst-affinen Oberflächen. Eine umfassende Behandlung solcher Oberflächen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher werden nur die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften motiviert und ansonsten auf weiterführende Literatur verwiesen.

Während im vorherigen Abschnitt eine exakte Abbildung zwischen dem dreidimensionalen Indenter und seinem eindimensionalen Modell bestand, ist das jetzt nicht der Fall. Aufgrund ihrer zufälligen Natur sind nun Indenter und Modell lediglich statistisch äquivalent. Das heißt, dass die wesentlichen statistischen Kennwerte der Original-Oberflächen mit denen der Modell-Oberflächen übereinstimmen.

Seien im Folgenden wieder  $g$  die Oberfläche eines dreidimensionalen Indenters und  $\tilde{g}$  eine statistisch äquivalente Oberfläche gemäß der Methode der Dimensionsreduktion. Bei den für wesentlich erachteten Parametern handelt es sich in erster Linie um die mittlere Rauigkeit<sup>11</sup>

$$h := \sqrt{\langle g^2 \rangle} \quad (2.17)$$

und die mittlere Steigung

$$h' := \sqrt{\langle (g')^2 \rangle} \quad (2.18)$$

der Oberfläche. Mit  $g'$  wird hierbei die Steigung der Oberfläche bezeichnet. Diese Definitionen gelten sinngemäß auch für die Oberfläche des Modells nach der Reduktionsmethode. Sofern erforderlich werden die Größen dabei durch eine Tilde gekennzeichnet.

Im Folgenden geht es also darum, eine Vorschrift zu finden, mit der sich eine zufällig raue Oberfläche unter Beibehaltung dieser beiden Parameter in eine Linie abbilden lässt, die zudem noch den Anforderungen der Methode der Dimensionsreduktion genügt.

Eine gebräuchliche Methode zur Beschreibung rauer Oberflächen ist die Verwendung des Leistungsspektrums. Diese Größe beschreibt den Einfluss der Rauigkeiten auf verschiedenen Längenskalen und ist auch mit den beiden oben genannten statistischen Kenngrößen verknüpft.

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an Persson et al. [19]. Unter Berücksichtigung der Isotropie, lässt sich das Leistungsspektrum einer selbst-affinen Oberfläche durch

$$C_{2D}(q) = C_0 q^{-2(H+1)}, \quad q_{\min} \leq q \leq q_{\max}. \quad (2.19)$$

ausdrücken. Dabei sind  $C_0$  ein konstanter Koeffizient,  $q$  die (normalisierte) Wellenzahl und  $q_{\min}$  und  $q_{\max}$  die kleinste respektive größte (normalisierte) Wellenzahl, für welche

<sup>11</sup>englisch: root mean square(rms) roughness

## 2.4. Normalkontakt eines Indenters mit fraktaler Rauigkeit

die Beziehung (2.19) gültig ist. Die Größe  $H$  ist der Hurst-Exponent.<sup>12</sup> Durch Angabe des Leistungsspektrums einer Oberfläche gemäß Gleichung (2.19) sind auch ihre mittlere Rauigkeit  $h$  und ihre mittlere Steigung  $h'$  festgelegt.

Wenn im Weiteren von rauen Oberflächen die Rede ist, sind damit stets zufällig raue Oberflächen gemeint, die auf allen darstellbaren Längenskalen selbst-affin und fraktal sind. Die kleinste und die größte Wellenzahl werden stets durch die Diskretisierungslänge respektive durch die makroskopischen Abmessungen des Indenters bestimmt. Darüber hinaus erfolgt die Beschränkung auf homogene und isotrope Oberflächen. Dass die so charakterisierten Oberflächen nur eine Unterklasse aller möglichen Arten von rauen Oberflächen sind, ist davon unbenommen. A

Geike und Popov [14] haben einen Weg vorgeschlagen, wie eine solche Oberfläche  $g$  in eine statistisch äquivalente Linie  $\tilde{g}$  transformiert werden kann. Dazu ist eine Linie mit dem Leistungsspektrum

$$C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q), \quad q_{\min} \leq q \leq q_{\max}. \quad (2.20)$$

zu erzeugen. Diese hat gemäß Konstruktion dieselbe mittlere Rauigkeit und Steigung wie die ursprüngliche Oberfläche und auch der Hurst-Exponent als geometrische Eigenschaft der Selbst-Affinität bleibt erhalten.

Im Vergleich zu den Indentern des vorherigen Abschnitts besteht nun die Schwierigkeit, dass aufgrund der zufälligen Natur verschiedene Oberflächen mit identischen Parametern auch im kontaktmechanischen Verhalten voneinander abweichen werden. Um dennoch aussagekräftige Ergebnisse zu gewinnen, müssen eine ausreichend große Anzahl von Oberflächen mit identischen Parametern betrachtet und die Ergebnisse gemittelt werden. Detaillierte Untersuchungen sind in den Dissertationen von Geike [8] und Pohrt [10] zu finden.

Eine Größe, die bei Betrachtung rauer Oberflächen unter physikalischen und technischen Gesichtspunkten von einiger Bedeutung ist, ist die differentielle Steifigkeit des Normalkontakts

$$k := \frac{\partial F_N}{\partial \delta}, \quad (2.21)$$

wobei  $F_N$  die Normalkraft und  $\delta$  die Indentierungstiefe<sup>13</sup> bezeichnen [22]. Im Folgenden wird diese Größe kürzer als Kontaktsteifigkeit bezeichnet.

2012 publizierten Pohrt und Popov [22] sowie Pohrt, Popov und Filippov [23] Ergebnisse zu einer Studie der Kontaktsteifigkeit: Werden Indenter mit rauen Oberflächen (Flächeninhalt der Grundfläche  $A_0$ , mittlere Rauigkeit  $h$ ) unter der Wirkung einer Normalkraft  $F_N$  in einen Halbraum eingedrückt, und ist der effektive Elastizitätsmodul<sup>14</sup>  $\bar{E}$ ,

<sup>12</sup>Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Hurst-Exponenten im Intervall  $[0, 1]$  betrachtet. Erweiterungen über diesen Bereich hinaus wurden von Pohrt und Popov [20] vorgeschlagen.

<sup>13</sup>Von einigen Autoren wird die Kontaktsteifigkeit mit Bezug auf den mittleren Abstand (mean gap width/ mean surface separation) der kontaktierenden Körper anstelle der Indentierungstiefe definiert, vergleiche z.B. [21]. Die Ergebnisse stimmen insbesondere bei hohen Belastungen nicht zwangsläufig überein.

<sup>14</sup>Siehe Gleichung (2.25)

## 2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion

dann ist der Zusammenhang zwischen der normalisierten Kontaktsteifigkeit  $\bar{k}$  und der normalisierten Kraft  $\bar{F}$  mit

$$\bar{k} := \frac{k}{E\sqrt{A_0}} \quad \text{respektive} \quad \bar{F} := \frac{F_N}{Eh\sqrt{A_0}} \quad (2.22)$$

ein Potenzgesetz der Gestalt

$$\bar{k} = k_0 \bar{F}^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{1+H}. \quad (2.23)$$

Die Gültigkeit dieses Zusammenhangs ist dabei auf kleine Kräfte beschränkt, für  $\bar{F} \approx 1$  ist die normalisierte Kontaktsteifigkeit bereits im Übergang zur Sättigung. Bei  $k_0$  handelt es sich um eine Konstante der Größenordnung eins, die sich zumindest numerisch bestimmen lässt. Auf ihre Angabe wird an dieser Stelle jedoch verzichtet. Die Details können in [23] nachgelesen werden.

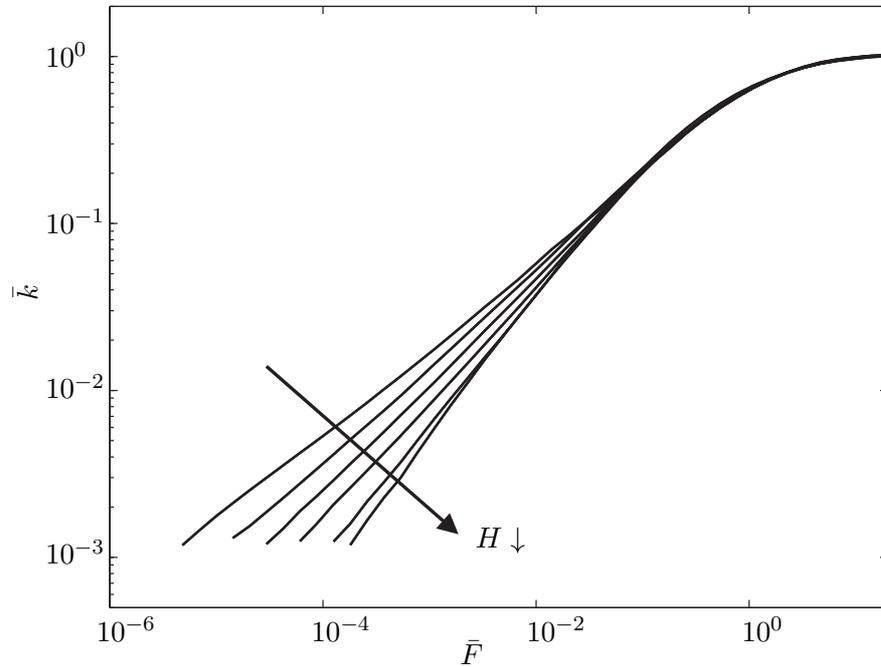


Abbildung 2.6.: Kontaktsteifigkeit in Abhängigkeit der Normalkraft<sup>15</sup>

In Abbildung 2.6 ist der Verlauf der normalisierten Kontaktsteifigkeit als Funktion der normalisierten Kraft für Oberflächen der fraktalen Dimensionen  $D_f = 2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3$  (entspricht den Hurst-Exponenten  $H = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0$ ) entsprechend dem Pfeil in der Abbildung dargestellt. Jede Kurve entspricht dem Mittelwert von 60 Indentierungen mit verschiedenen zufälligen Realisationen rauher Oberflächen mit identischen Parametern. Alle Indentierungen wurden mit einem Randlemente-Verfahren simuliert.

<sup>15</sup>Die Abbildung 2.6 ist aus [23] übernommen, die Darstellung wurde geringfügig abgeändert.

#### 2.4. Normalkontakt eines Indenters mit fraktaler Rauigkeit

Es ist gut zu erkennen, dass für  $\bar{F} < 0.1$  alle Verläufe näherungsweise Geraden darstellen, die sich in ihren Steigungen unterscheiden. Da beide Achsen logarithmisch aufgetragen sind, spiegelt dieses Verhalten genau die Gleichung (2.23) wider.

Ab etwa diesem Wert gehen die Kurven in einen konstanten Wert über, der für alle Hurst-Exponenten identisch ist. Ab diesem Punkt spielen die Rauigkeiten der Oberflächen keine Rolle mehr. Das Verhalten wird nun von den makroskopischen Abmessungen des Indenters dominiert.

Dasselbe Verhalten zeigen Simulationen mit der Methode der Dimensionsreduktion, wenn statistisch äquivalente Linien nach der Vorschrift (2.20) definiert werden. Lediglich im Bereich des Übergangs von der Potenzfunktion zur konstanten Steifigkeit etwa im Bereich  $0.1 < \bar{F} < 1$  zeigen sich geringfügige Unterschiede.

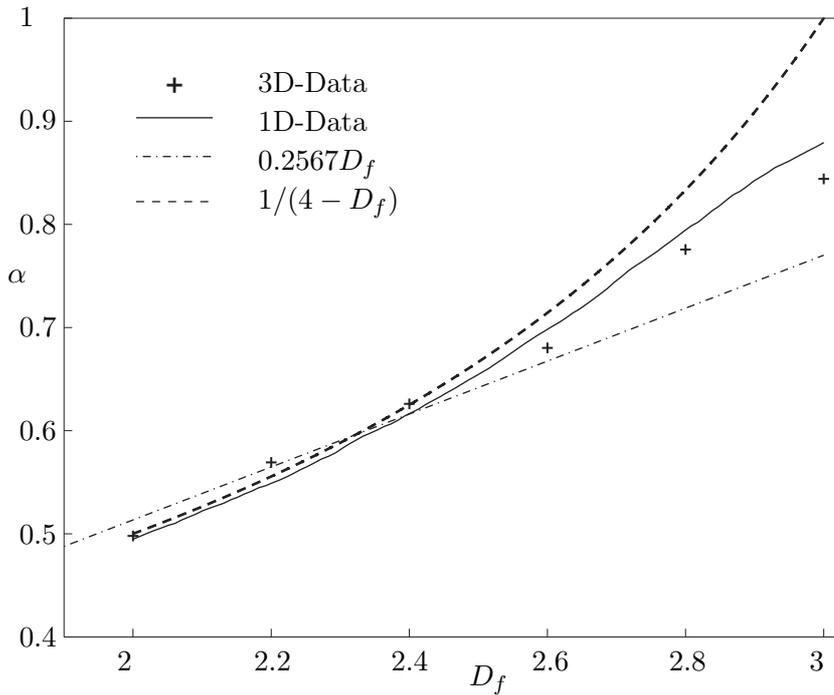


Abbildung 2.7.: Der Exponent  $\alpha$  in Abhängigkeit der fraktalen Dimension<sup>16</sup>

Wie gut die Übereinstimmung zwischen der analytischen Beschreibung (2.23) und den beiden Simulationsverfahren ist, kann aus Abbildung 2.7 ersehen werden. Abweichend von den hier vorgenommenen Betrachtungen, sind die Ergebnisse dort allerdings nicht auf den Hurst-Exponenten, sondern auf die fraktale Dimension  $D_f = 3 - H$  bezogen.

Die Kreuze markieren die Ergebnisse der Randelemente-Simulationen für sechs verschiedene Hurst-Exponenten, die durchgezogene Linie die für Simulationen mit der Reduktionsmethode. Die Kurve  $\alpha = 1/(1 + H)$  ist als gestrichelte Linie dargestellt. Die

<sup>16</sup>Die Abbildung 2.7 ist aus [23] entnommen, die Darstellung wurde geringfügig abgeändert.

## 2. Einführung in die Methode der Dimensionsreduktion

Strich-Punkt-Linie zeigt zusätzlich eine Gerade, die für große Werte von  $H$  (kleine Werte von  $D_f$ ) eine lineare Näherung für den Exponenten  $\alpha$  abgibt. Auf Letztere wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen.

Für beide numerischen Verfahren wurden die Ergebnisse auf folgende Weise ermittelt: Es wurden für verschiedene Indenter jeweils Indentierungen mit unterschiedlichen Normalkräften simuliert. Aus diesen Daten wurden die Kontaktsteifigkeiten bestimmt und über verschiedene Realisationen gemittelt. Anschließend wurde der Exponent  $\alpha$  durch eine Kurvenanpassung an eine Potenzfunktion ermittelt.

Es ist zu erkennen, dass die Simulationen mit der Methode der Dimensionsreduktion für Hurst-Exponenten größer 0.4 (fraktale Dimensionen kleiner 2.6) gut mit der analytischen Lösung übereinstimmt. Für kleinere Werte des Hurst-Exponenten sind die Abweichungen zwar deutlich größer, der Verlauf selbst aber nicht völlig unbrauchbar. Die Randelemente-Simulationen zeigen ein vergleichbares Verhalten, allerdings sind die Abweichungen größer als bei der Reduktionsmethode.

Damit endet diese Einführung in die Anwendung der Dimensionsreduktion auf selbst-affine raue Oberflächen. Ziel war es, die Abbildung auf statistisch äquivalente Linien vorzustellen und ein konkretes Beispiel anzugeben. Aufgrund der Natur dieser Oberflächen lassen sich nur wenige exakte Ergebnisse ableiten, so dass vermehrt auf statistische Aussagen zurückgegriffen werden muss. Auch diese Vorgehensweise wurde demonstriert. An späterer Stelle werden die Ergebnisse dieses Abschnitts jedoch noch einmal aufgegriffen.

## 2.5. Zusammenfassung und Verallgemeinerung

In den vorhergehenden Abschnitten wurde die Anwendung der Methode der Dimensionsreduktion auf elastische Normalkontakt-Probleme vorgestellt. Dabei wurde überwiegend auf konkrete Beispiele Bezug genommen. In diesem Abschnitt werden die einzelnen Ergebnisse zusammengefasst und zum Teil verallgemeinert. Er orientiert sich an den Kapiteln drei bis sechs des Buches von Popov und Heß [11]. Dort kann auch eine umfassende Behandlung der Thematik gefunden werden.

Das Kontaktproblem zwischen zwei elastischen Körpern, beschrieben durch ihre Elastizitätsmoduln  $E_1, E_2$  und ihre Poisson-Zahlen  $\nu_1, \nu_2$ , wird im Rahmen der Methode der Dimensionsreduktion auf ein eindimensionales Ersatzsystem abgebildet. Bei Betrachtung eines reinen Normalkontakt-Problems ohne Reibung und ohne Adhäsion werden die elastischen Eigenschaften (beider Körper) einer Winkler-Bettung aus unabhängigen Federn mit der Steifigkeit

$$k_N = \bar{E}b \quad (2.24)$$

zugeordnet. Dabei sind  $b$  die Breite der einzelnen Federelemente und  $\bar{E}$  der effektive Elastizitätsmodul des Kontakts. Dieser ist durch

$$\frac{1}{\bar{E}} := \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (2.25)$$

definiert. Beim Kontakt eines starren Körpers mit einem inkompressiblen vereinfacht sich obige Gleichung zu  $\bar{E} = 4G$ . Das wurde bei Gleichung (2.2) berücksichtigt.

## 2.5. Zusammenfassung und Verallgemeinerung

Die geometrische Beschreibung der Oberflächen wird dagegen auf eine starre Linie abgebildet. Für bestimmte Typen von Oberflächen sind diese Transformationen bekannt.

Namentlich sind das die Vorschrift (2.5) bei rotationssymmetrischen Körpern und Gleichung (2.20) bei selbst-affinen Oberflächen mit zufälligen Rauheiten. Die Lösung des Normalkontakt-Problems erhält man unmittelbar durch eine analytische oder numerische Auswertung des Eindrückens der starren Linie in die Winkler-Bettung.

Die Konstruktion der eindimensionalen Indenter lässt sich in mehrfacher Hinsicht verallgemeinern. So bleibt die Vorschrift (2.5) für die rotationssymmetrischen Indenter auch bei erzeugenden Monomen mit positiven reellen Exponenten  $n \in \mathbb{R}^+$  gültig [9]. Die Einschränkung auf natürliche Exponenten ist unnötig. Darüber hinaus lassen sich mehrere Monome superponieren, wenn die Kontaktgebiete identisch sind [11]. Das eröffnet insbesondere die Möglichkeit, komplizierter Indentergeometrien in Taylorreihen zu entwickeln. Und auch die Superposition von rotationssymmetrischen Indentern und zufälligen Rauigkeiten ist zulässig, vergleiche [20]. Auf eine ausführlichere Behandlung wird an dieser Stelle jedoch verzichtet.

Vermutlich kann die Methode der Dimensionsreduktion noch auf eine deutlich größere Menge von Oberflächen angewandt werden. Allerdings sind die notwendigen Transformationen auf eine eindimensionale Linie noch nicht bestimmt.

Eine andere Verallgemeinerung betrifft nicht die beteiligten Oberflächen, sondern die Aufgabenstellung selbst. Mit der Methode der Dimensionsreduktion lassen sich auch Tangentialkontakt-Probleme behandeln. Eine recht einfache Beschreibung erhält man für den Fall elastisch ähnlicher Kontaktpartner, die der Bedingung

$$\frac{1 - 2\nu_1}{G_1} = \frac{1 - 2\nu_2}{G_2} \quad (2.26)$$

genügen. Hierbei sind  $G_1$  und  $G_2$  die Schubmoduln<sup>17</sup> der Kontaktpartner. In diesem Fall müssen den Federelementen neben der Normalsteifigkeit  $k_N$  zusätzliche die Tangentialsteifigkeit

$$k_T = \bar{G}b \quad (2.27)$$

mit dem effektiven Schubmodul gemäß

$$\frac{1}{\bar{G}} := \frac{2 - \nu_1}{4G_1} + \frac{2 - \nu_2}{G_2} \quad (2.28)$$

zugeordnet werden. Solche Probleme werden zum Beispiel in [24] und [25] betrachtet.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann dieses Modell auch für die Untersuchung von Rollkontakten verwendet werden. Ergebnisse dazu wurden in [26] und [27] publiziert. Die Berücksichtigung der Adhäsion ist möglich, vergleiche [28, 29]. Und auch zur Untersuchung von Reibungsproblemen eignet sich das Verfahren, siehe dazu [30, 31, 32, 33]

Eine dritte Möglichkeit, die Reduktionsmethode zu erweitern, besteht in der Art der beteiligten Materialien. Die vorliegende Schrift ist dieser Aufgabe gewidmet.

---

<sup>17</sup>Eine ausführlichere Auseinandersetzung mit den elastischen Konstanten erfolgt im Abschnitt 3.3.



## 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

Im vorherigen Kapitel wurde zunächst die Grundidee der Methode der Dimensionsreduktion am Beispiel elastischer Kontaktprobleme vorgestellt. Das entspricht der geschichtlichen Entwicklung der Methode. Darüber hinaus empfiehlt sich dieses Anwendungsgebiet durch einen verhältnismäßig geringen Schwierigkeitsgrad. Allerdings ist die Methode der Dimensionsreduktion keineswegs auf diese Klasse von Problemen beschränkt. Tatsächlich lässt sie sich auf viele andere Gebiete übertragen, wenn die früher genannten Voraussetzungen erfüllt sind. In diesem Kapitel erfolgt die Übertragung der Methode auf Kontakte mit Elastomeren.

Im ersten Abschnitt wird der grundsätzliche Unterschied zwischen rein elastischen Kontakten und solchen mit Elastomeren herausgestellt. Die Übertragung selbst beruht auf Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen, welches im zweiten Abschnitt vorgestellt wird. Das Prinzip basiert auf dem Austausch von Materialeigenschaften auf Grundlage der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen. Im dritten Abschnitt werden die verwendeten Materialmodelle eingeführt und die Notation festgehalten. Der vierte Abschnitt demonstriert die Anwendung des Verfahrens an einem Beispiel. Hier wird die Greensche Funktion des viskosen Kontakts konstruiert, auf die an späterer Stelle häufig zurückgegriffen wird. Der Hauptteil dieses Kapitels ist der fünfte Abschnitt. Dort erfolgt die Übertragung der Methode der Dimensionsreduktion auf ein Elastomer mit einer linearen viskoelastischen Rheologie. Im Abschnitt sechs werden einige Vereinfachungen vorgenommen. Insbesondere wird die Reduktion auf das linear viskose Modell-Elastomer dargestellt, welches im Mittelpunkt der folgenden Kapitel steht.

Wesentliche Inhalte dieses Kapitels wurden bereits von Kürschner, Popov und Heß in den Kapitel 7 und 19 des Buches [11] veröffentlicht.

### 3.1. Kontakte mit Elastomeren

Elastomere zeichnen sich, von einem technisch orientierten Standpunkt betrachtet, durch zwei Eigenschaften aus. Zum einen besitzen sie einen im Vergleich zu anderen Festkörpern sehr kleinen Elastizitätsmodul. Dieser liegt bei vielen typischen Elastomeren im Bereich einiger Megapascal. Zum anderen sind sie extrem stark deformierbar. Viele technische Anwendungen beruhen auf diesen beiden Eigenschaften. Deren Ursprung liegt im Aufbau der Elastomere aus langen, verkäuelten und miteinander verbundenen Molekülketten [18].

Werden Kontaktprobleme mit Elastomeren untersucht, so sind einige weitere Besonderheiten zu berücksichtigen. Während Metalle innerhalb gewisser Grenzen oftmals als rein

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

elastische Werkstoffe behandelt werden können, besitzen Elastomere sowohl elastische als auch viskose Eigenschaften. Diese Art des Materialverhaltens wird als Viskoelastizität bezeichnet. Es bringt einige Herausforderungen mit sich, die bei rein elastischen Werkstoffen nicht auftreten. So ist beim Hookeschen Gesetz einem Verzerrungszustand eindeutig ein Spannungszustand zugeordnet. Wie dieser Zustand erreicht worden ist, zum Beispiel durch monoton zunehmende Belastung oder durch Entlastung aus einem Zustand höherer Belastung, ist dabei unerheblich. Im Gegensatz dazu muss bei Elastomeren in der Regel die gesamte Historie der Belastung berücksichtigt werden. Bei diesem Materialverhalten ergibt sich jeweils ein Verzerrungszustand als Ergebnis eines zeitabhängigen Spannungsprozesses oder umgekehrt ein Spannungszustand aus einem Verzerrungsprozess.

Die zeitliche Abhängigkeit sorgt für eine starke Erhöhung des Schwierigkeitsgrades bei der Behandlung von Kontaktproblemen mit Elastomeren. Allerdings gibt es einige Analogien zwischen elastischen und viskoelastischen Problemen. Diese können unter Umständen genutzt werden, um ein viskoelastisches Kontaktproblem auf ein (leichter lösbares) elastisches zurückzuführen. Diesen Weg beschreitet Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen.

### 3.2. Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen

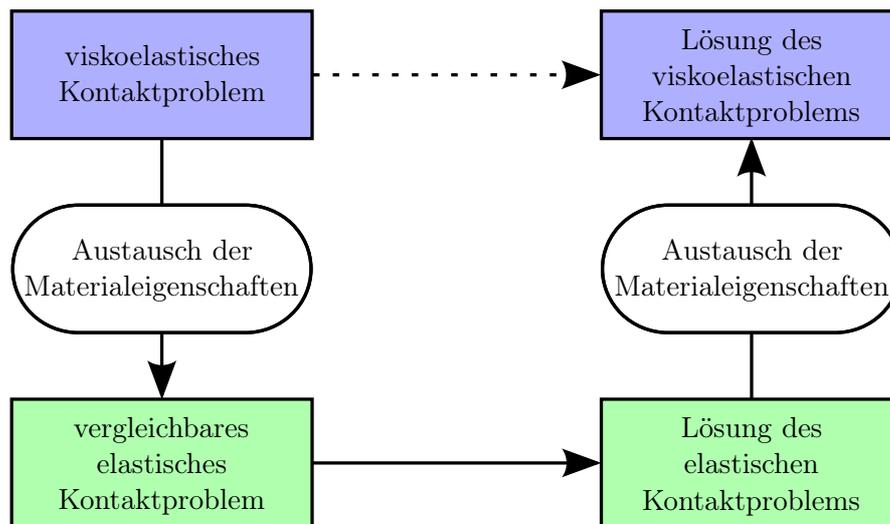


Abbildung 3.1.: Schematische Darstellung des Prinzips der Funktionalgleichungen

Lee [34] stellte 1955 eine Methode zur Lösung viskoelastischer Kontaktprobleme vor. Sie beruht im Wesentlichen auf der oben erwähnten Rückführung eines viskoelastischen Kontaktproblems auf ein elastisches. Das Verfahren wurde von Radok [35] verallgemeinert und ging als Prinzip der Funktionalgleichungen in die Literatur ein. Als Voraussetzungen nennen Lee und Radok [34, 35] Quasistationarität, Isotropie und die Beschränkung auf

A

lineare Materialgesetze.<sup>18</sup>

Im Rahmen einer linearen Theorie können die geometrischen, die materialspezifischen und die belastungsspezifischen Einflüsse eines Kontaktproblems bis zu einem gewissen Grad entkoppelt werden. Diese Eigenschaft nutzt das Prinzip der Funktionalgleichungen aus.

Ausgangspunkt ist stets ein gegebenes Kontaktproblem mit einem Elastomer. Die Geometrie, die Belastung und die Materialeigenschaften sind definiert. Letztere sind entweder direkt als Spannungs-Verzerrungs-Beziehung gegeben oder lassen sich auf eine solche zurückführen.

Die Idee von Lee und Radok ist es, dieses Problem auf ein vergleichbares elastisches Problem zurückzuführen. Dazu wird das ursprüngliche Materialgesetz durch ein linear-elastisches Verhalten ersetzt. Die Geometrie und die Belastung bleiben im Wesentlichen unverändert. Im zweiten Schritt wird das vergleichbare elastische Kontaktproblem gelöst. Das gestaltet sich in der Regel sehr viel einfacher, als es bei dem ursprünglichen System der Fall wäre. Je nach Aufgabenstellung ist es auch oftmals möglich, Lehrbuchlösungen zu benutzen, die für Standardaufgaben der Elastizitätstheorie vielfach vorhanden sind. Als Letztes wird in die so erhaltene Lösung wieder das viskoelastische Materialgesetz substituiert. In Abbildung 3.1 ist die Vorgehensweise schematisch dargestellt.

Der Austausch des Materialgesetzes geschieht auf der Basis der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen. Diese werden in der Regel in zwei Anteile aufgespalten, Kompression und Scherung. Erstere wird durch die Kugeltensoren beschrieben, Letztere durch die zugehörigen Spannungs- respektive Verzerrungs-Deviatoren.

Die weitere Vorgehensweise ist variabel. So ist es möglich, die Materialgleichungen in Reihen linearer Differentialoperatoren nach der Zeit zu entwickeln. Alternativ können die weiteren Schritte auch mit zeitabhängigen Relaxationsfunktionen durchgeführt werden.<sup>19</sup> Oftmals kommt dabei die Laplace-Transformation zur Anwendung, entweder direkt für die Ersetzung des Materialverhaltens (Lee [34]) oder für die Lösung der daraus resultierenden Gleichungen (Radok [35]).

Nach der ersten Veröffentlichung der Methode durch Lee [34] gab es zunächst eine rasante Entwicklung. So publizierten Lee [36] sowie Bland und Lee [37] Aufsätze zur Anwendung auf diskrete Materialmodelle und zur Bestimmung der benötigten Parameter. Lee, Radok und Woodward [38] vertieften das und demonstrierten die Behandlung von Problemen, bei denen die Laplace-Transformation nicht anwendbar ist. Morland und Lee [39] berücksichtigten Temperatureinflüsse. Die Anwendung des Prinzips auf Materialeigenschaften, welche durch integrale Relaxations- oder Kriechfunktionen definiert sind, behandelten Lee und Rogers [40] sowie Yang [41].

Ab 1960 zeigte sich ein Schwachpunkt der Methode, der bei schrumpfenden Kontaktgebieten zu unphysikalischen Ergebnissen führen kann. Erste, spezielle Lösungen für dieses Problem veröffentlichte Hunter [42]. Allgemeinere Ansätze gehen auf Graham [43, 44] und Ting [45, 46] zurück.

---

<sup>18</sup>Mit linearem Materialverhalten ist stets gemeint, dass die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen bezüglich der Spannungen, der Verzerrungen und deren Zeitableitungen linear sind.

<sup>19</sup>Beide Möglichkeiten werden in den folgenden Abschnitten demonstriert.

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

Damit war dieses Problem grundsätzlich gelöst, allerdings zum Preis eines immens hohen Aufwandes. Insbesondere beinhalten die Verfahren mehrfache numerische Integrationen und Differentiationen, die scheinbar von weiteren Arbeiten abschreckten.<sup>20</sup> Danach finden sich nur noch vereinzelte Veröffentlichungen zum Prinzip der Funktionalgleichungen, beispielsweise von Graham [48] sowie Graham und Golden [49]. Zusammengefasste Darstellungen der Methode, zum Teil auch mit ausführlichen Beispielen, finden sich bei Christensen [50], Pipkin [51] und Johnson [12].

2010 hat Greenwood [47] das Prinzip erneut aufgegriffen und ein daraus abgeleitetes, einfacheres Verfahren vorgeschlagen.

Im Rahmen dieser Arbeit genügen die ursprünglichen Ideen von Lee [34] und Radok [35], ergänzt durch die Verallgemeinerung von Lee und Rogers [40] sowie Yang [41]. Insbesondere hat die geschilderte Problematik bei schrumpfenden Kontaktgebieten keine unmittelbare Auswirkung auf den hier vorliegenden Sachverhalt.

### 3.3. Materialmodelle

Die zentrale Idee des Prinzips der Funktionalgleichungen beruht auf der Manipulation der Materialgesetze. In diesem Abschnitt werden drei Materialmodelle vorgestellt. Dabei handelt es sich um ein linear elastisches, ein linear viskoses und ein allgemeines linear viskoelastisches Material. Isotropie und Homogenität werden stets vorausgesetzt.

Vorbereitend werden zunächst einige Begriffe und Konventionen vorgestellt. Die folgenden Ausführungen orientieren sich dabei lose an Landau und Lifschitz [52] sowie Szabó [53, 54].

Die Notation wird überwiegend in Index-Schreibweise vorgenommen. Die Indizes können jeweils die Werte 1, 2 und 3 annehmen. Es finden das Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  und die Summenkonvention von Einstein Anwendung (vergleiche zum Beispiel de Boer [55]).

Der Spannungszustand eines Körpers wird durch den Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  beschrieben.<sup>21</sup> Dieser lässt sich in eindeutiger Weise aufspalten:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij}. \quad (3.1)$$

Der erste Summand ist eine Diagonalmatrix. Ihre Diagonalelemente sind alle identisch und gleich dem Mittelwert  $\frac{1}{3}\sigma_{kk}$  der Komponenten auf der Hauptdiagonale des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$ . Dieser Summand wird als Kugeltensor bezeichnet. Er beschreibt den hydrostatischen Spannungszustand. Die Summe der Diagonalelemente (die ersten Invarianten) des Kugeltensors ist mit der des Spannungstensors identisch.

Der zweite Summand wird als Deviator bezeichnet. Er beschreibt die Abweichung des Spannungstensors vom Kugeltensor. Für einen gegebenen Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  ist der zugehörige Spannungsdeviator  $s_{ij}$  durch Gleichung (3.1) eindeutig bestimmt. Die Summe

---

<sup>20</sup>Vergleiche die entsprechenden Kommentare von Greenwood [47].

<sup>21</sup>Da die Gefahr von Missverständnissen nicht besteht, wird das Symbol  $\sigma_{ij}$  sowohl für den Tensor selbst als auch für seine Komponenten benutzt. Das gilt sinngemäß auch für die im weiteren Verlauf eingeführten Tensoren.

der Diagonalelemente (die erste Invariante) des Spannungsdeviators ist identisch Null. Die Komponenten außerhalb der Hauptdiagonale sind mit denen des Spannungstensors identisch, das heißt  $s_{ij} = \sigma_{ij}$ , für  $i \neq j$ .

Analog dazu wird der Deformationszustand eines Körpers durch den Verzerrungstensor  $\varepsilon_{ij}$  beschrieben. Auch dieser kann eindeutig aufgespalten werden:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + e_{ij}. \quad (3.2)$$

Der erste Summand ist wiederum der Kugeltensor. Er beschreibt die homogene Dilatation<sup>22</sup>, mithin die Volumenänderung der Körper. Der zweite Summand  $e_{ij}$  ist der Verzerrungsdeviator. Er beschreibt eine reine Scherung des Körpers, das heißt seine Gestaltänderung. Die oben genannten Eigenschaften des Spannungstensors und seiner Zerlegung gelten sinngemäß auch für den Verzerrungstensor.

### Das linear elastische Material

Nach den vorbereitenden Ausführungen beginnt nun die Betrachtung des linear elastischen Materialgesetzes. Dieses kann den gängigen Lehrbüchern zur Elastizitätstheorie entnommen werden, z.B. Landau und Lifschitz [52]:

$$\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij}. \quad (3.3)$$

Als Materialkonstanten wurden hier, aus Gründen die gleich offensichtlich werden, der Schubmodul  $G$  und der Kompressionsmodul  $K$  benutzt. Häufiger ist jedoch die Verwendung des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Querkontraktionszahl (Poissonzahl)  $\nu$  zu finden. Von diesen vier Materialkonstanten sind jeweils nur zwei unabhängig voneinander. Die übrigen lassen sich stets durch diesen beiden darstellen. So gilt für die Beziehung der vier Konstanten untereinander beispielsweise:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (3.4)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad \text{sowie} \quad (3.5)$$

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad \text{und} \quad (3.6)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{3K - 2G}{3K + G}. \quad (3.7)$$

Die in den Gleichung (3.1) und (3.2) vorgenommene Zerlegung und die aufgeführten Eigenschaften bieten die Möglichkeit, auch im Materialgesetz (3.3) die Volumenänderung und die Gestaltänderung einzeln zu betrachten. Das führt unmittelbar zu den beiden Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen:

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}, \quad (3.8)$$

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}. \quad (3.9)$$

<sup>22</sup>Eine andere gebräuchliche Bezeichnung ist hydrostatische Kompression.

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

Im vorherigen Abschnitt wurde erwähnt, dass das Materialgesetz (3.8) und (3.9) in Reihen linearer Differentialoperatoren nach der Zeit entwickelt werden kann. Dieser Schritt wird nun demonstriert. Sowohl Vorgehensweise als auch Notation orientieren sich an Radok [35]. Es werden zunächst zwei solcher Reihen,  $P$  und  $Q$ , definiert:

$$P := \sum_{n=0}^{n_p} p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \quad (3.10)$$

$$Q := \sum_{n=0}^{n_q} q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}. \quad (3.11)$$

In diesen Formeln sind  $p_n$  und  $q_n$  konstante Koeffizienten,  $n_p, n_q \in \mathbb{N}_0$  die höchste in  $P$  respektive  $Q$  vorkommende (Ableitungs-) Ordnung und  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  die Menge der nichtnegativen, ganzen Zahlen.

Diese Reihen werden zur Entwicklung der rechten Seiten von (3.8) und (3.9) benutzt. So lässt sich für Erstere schreiben:

$$3K\varepsilon_{ii} = P\varepsilon_{ii} = \left( \sum_{n=0}^{n_p} p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) \varepsilon_{ii}. \quad (3.12)$$

Da in Gleichung (3.8) keine Zeitableitungen von  $\varepsilon_{ii}$  vorkommen, besteht die Reihe nur aus dem Glied nullter Ordnung. Durch Vergleich der Koeffizienten zeigt sich

$$3K = P = p_0. \quad (3.13)$$

Diese Vorgehensweise wird analog auch auf die rechte Seite der Gleichung (3.9) angewandt. Es ergibt sich wiederum eine banale Zuordnung:

$$2Ge_{ij} = Qe_{ij} = \left( \sum_{n=0}^{n_q} q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) e_{ij} \quad \text{sowie} \quad (3.14)$$

$$2G = Q = q_0. \quad (3.15)$$

Völlig analog lassen sich zwei weitere Reihen definieren und zur Entwicklung der linken Seiten von (3.8) und (3.9) verwenden. Bei dieser Vorgehensweise werden dann insgesamt vier Reihen linearer Differentialoperatoren zur Formulierung der Materialkonstanten benutzt. Auf diese Weise lassen sich differentielle und integrale Beziehungen abbilden. Sowohl Lee [34] als auch Radok [35] sehen diese Möglichkeit grundsätzlich vor. Sie ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch weder notwendig noch trägt sie zum besseren Verständnis bei. Um den Abstraktionsgrad nicht unnötig zu erhöhen, wird daher auf diese allgemeinere Vorgehensweise verzichtet.

Damit ist die Behandlung des linear elastischen Materialverhaltens zunächst abgeschlossen. In den folgenden Abschnitten werden diese Ergebnisse jedoch wieder aufgegriffen.

### Das linear viskose Material

Als zweites Materialmodell wird ein linear viskoses Verhalten betrachtet. Als Grundlage werden die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen verwendet, wie sie zum Beispiel von Landau und Lifschitz [56] für die Beschreibung einer zähen Flüssigkeit benutzt werden:

$$\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \zeta\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij}. \quad (3.16)$$

In dieser Gleichung wird durch einen Punkt die zeitliche Ableitung gekennzeichnet,  $(\dot{\phantom{x}}) := \frac{\partial}{\partial t}(\phantom{x})$ . Des Weiteren werden mit  $K$ ,  $\zeta$  und  $\eta$  der Schubmodul, die Volumenviskosität sowie die Scherviskosität<sup>23</sup> bezeichnet. Analog zum Fall des elastischen Materials werden die Einflüsse von Dilatation und Scherung separiert und deren rechte Seiten (gemeint sind die, welche sich auf die Verzerrungen beziehen) in Reihen nach dem Vorbild der Gleichungen (3.10) bzw. (3.11) entwickelt. Für die Dilatation ergeben sich das Materialgesetz

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii} + 3\zeta\dot{\varepsilon}_{ii} \quad (3.17)$$

und die Reihenentwicklung

$$3K\varepsilon_{ii} + 3\zeta\dot{\varepsilon}_{ii} = P\varepsilon_{ii} = \left(p_0 + p_1\frac{\partial}{\partial t}\right)(\varepsilon_{ii}) \quad (3.18)$$

mit den Koeffizienten

$$p_0 = 3K, p_1 = 3\zeta. \quad (3.19)$$

Die entsprechenden Beziehungen für die Scherdeformation sind:

$$s_{ij} = 2\eta\dot{e}_{ij}, \quad \text{mit der Reihenentwicklung} \quad (3.20)$$

$$2\eta\dot{e}_{ij} = Qe_{ij} = \left(q_0 + q_1\frac{\partial}{\partial t}\right)(e_{ij}) \quad \text{und} \quad (3.21)$$

$$q_0 = 0, q_1 = 2\eta. \quad (3.22)$$

Insbesondere im Zusammenhang mit diesem Materialverhalten ist ein kurzer Hinweis bezüglich Inkompressibilität angebracht. Wird das betrachtete Material als inkompressibel angesehen, dann gilt [52]:

$$\varepsilon_{ii} = 0. \quad (3.23)$$

Gleichzeitig muss auch  $\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$  gelten und der Kompressionsmodul gegen unendlich gehen. Die Gleichungen (3.17) bis (3.19) lassen in diesem Fall keine sinnvolle Auswertung zu. Im inkompressiblen Fall bleibt daher nur die Gleichung für die Scherdeformation übrig und diese beschreibt ein rein linear viskoses Verhalten, das heißt eine lineare Abhängigkeit zwischen den Spannungen und den Deformationsgeschwindigkeiten  $\dot{e}_{ij}$ .

Die beiden behandelten Materialgesetze können als entartete Sonderfälle von Viskoelastizität betrachtet werden, die nur elastisches oder nur viskoses<sup>24</sup> Verhalten zeigen.

<sup>23</sup>Eine andere gebräuchliche Bezeichnung ist dynamische Viskosität.

<sup>24</sup>Für das viskose Materialgesetz gilt das streng genommen nur für die vorgestellte Annahme eines inkompressiblen Stoffes.

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

Die einfachsten Modelle, die sowohl elastische als auch viskose Eigenschaften beinhalten, sind das Kelvin-Modell und das Maxwell-Modell. Auf diese wird im Abschnitt 3.6 eingegangen.

#### Das linear viskoelastische Material

Als Drittes wird ein linear viskoelastisches Materialgesetz vorgestellt. Dabei erfolgt die Beschränkung auf den Fall, dass ein Spannungszustand auf Basis einer bekannten Deformationsgeschichte berechnet werden soll, vergleiche Abschnitt 3.1. Die Lösung des umgekehrten Problems verläuft analog, so dass eine eingehende Behandlung beider Möglichkeiten nicht notwendig ist.

Die folgenden Betrachtungen orientieren sich vor allem an Christensen [50] und in geringerem Umfang an Pipkin [51]. Eine kurze Einführung in die Materie ist jedoch in vielen Büchern über Kontaktmechanik enthalten, z.B. Popov [18] oder Johnson [12].

Die vermutlich gebräuchlichste Formulierung des allgemeinen viskoelastischen Verhaltens lautet

$$\sigma_{ii}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t K(t-\tau)\dot{\epsilon}_{ii}(\tau) d\tau, \quad (3.24)$$

$$s_{ij}(t) = 2 \int_{\tau=-\infty}^t G(t-\tau)\dot{\epsilon}_{ij}(\tau) d\tau. \quad (3.25)$$

Mit  $K(t)$  und  $G(t)$  werden die Relaxationsfunktionen bezüglich der Kompression respektive der Scherung bezeichnet. An dieser Stelle wurde die bisher praktizierte Trennung zwischen Volumenänderung und Gestaltänderung beibehalten. Diese Trennung ist so jedoch nicht zwingend notwendig, diesbezüglich sind sowohl Verallgemeinerungen als auch Vereinfachungen möglich.

Die Relaxationsfunktionen selbst sind ein zentrales Hilfsmittel zur Beschreibung von Elastomeren. Sie können auf mehrere Weisen interpretiert werden. Aus der obigen Darstellung wird unmittelbar die Interpretation als Gewichtungsfunktionen sichtbar. Offensichtlich machen sie eine Aussage darüber, wie stark die Deformationszustände zu unterschiedlichen Zeitpunkten den momentanen Spannungszustand beeinflussen. Eine andere Interpretation ist die, ebenfalls naheliegende, Deutung als zeitabhängiger Kompressions- bzw. Schubmodul.

Vor allem bei der zweiten Deutung muss jedoch im Gedächtnis behalten werden, dass in den Integralen nicht die Deformationen selbst, sondern ihre zeitlichen Ableitungen vorkommen. Unter weiteren Annahmen lassen sich jedoch die rechten Seiten von (3.24) und (3.25) mit Hilfe partieller Integration so umformen, dass die Integration über die zeitliche Ableitung der Relaxationsfunktion und die Deformationen selbst vorzunehmen ist.

Dass die Formulierung gemäß den Gleichungen (3.24) und (3.25) möglich ist, folgt mit dem Darstellungssatz von Riesz aus ganz fundamentalen Annahmen. Das sind zum

A

### 3.4. Die Greensche Funktion des viskosen Kontakts

einen, dass der momentane Spannungszustand nicht nur vom gegenwärtigen Deformationszustand, sondern auch von (allen) früheren abhängt (Gedächtnis-Hypothese). Die zweite Annahme ist, dass der Deformationsverlauf ausreichend glatt ist (Glattheits-Hypothese) [50].

Ein letzter Hinweis betrifft den Vorfaktor 2 in Gleichung (3.25). Mit Hinblick auf die Theorie erscheint es sinnvoll, mit Hilfe des Schubmoduls die Verzerrungen  $\varepsilon_{ij}$ <sup>25</sup> mit den Spannungen zu verknüpfen. Das wurde in den vorherigen Abschnitten praktiziert. In Hinblick auf die experimentelle Bestimmung dieser Materialkonstante bzw. -funktion ist es jedoch naheliegend und üblich, diese nicht auf die Verzerrung, sondern auf die Gleitung  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  zu beziehen.

In der Literatur wird dieser Umstand unterschiedlich behandelt. Die vorliegende Arbeit orientiert sich in Übereinstimmung mit Lee und Radok [57] an der zweiten Betrachtungsweise. Demzufolge wird davon ausgegangen, dass der zeitabhängige Schubmodul eine Funktion der Gleitung ist,  $G = G(t, \gamma)$ . Der Vorfaktor 2 in Gleichung (3.25) berücksichtigt, dass dort abweichend auf die Verzerrung Bezug genommen wird. Dies ist wegen  $G(t, \gamma) = G(t, 2\varepsilon) = 2G(t, \varepsilon)$  möglich, da Linearität vorausgesetzt ist.

Für die auftretenden Faltungsintegrale wird im Folgenden sporadisch auf die übliche Notation

$$(\varphi * \psi)(t) := \int_{\tau=-\infty}^t \varphi(t-\tau)\psi(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

zurückgegriffen.

Eingangs wurde erwähnt, dass auch die umgekehrte Betrachtung praktikabel ist. Dabei wird jeweils einer Belastungshistorie ein Deformationszustand zugeordnet. Unter Beibehaltung der Separation von Dilatation und Scherung erhält man analog zwei Beziehungen

$$\varepsilon_{ii}(t) = (I * \dot{\sigma}_{ii})(t) \quad \text{und} \quad e_{ij}(t) = \frac{1}{2}(J * \dot{s}_{ij})(t). \quad (3.27)$$

Die hier benutzten Funktionen  $I(t)$  und  $J(t)$  sind die Kriechantwort<sup>26</sup> bezüglich der Kompression bzw. der Scherung. Diese sind in gewisser Weise invers zu den vorher genannten Relaxationsfunktionen.<sup>27</sup>

## 3.4. Die Greensche Funktion des viskosen Kontakts

In den vorhergehenden Abschnitten wurden das Prinzip der Funktionalgleichungen eingeführt und die zur Anwendung kommenden Materialmodelle vorgestellt. In diesem Abschnitt wird die Anwendung an einem einfachen Beispiel demonstriert.

Betrachtet wird ein Halbraum mit einer linear viskosen Rheologie gemäß der Gleichung (3.16). Die Materialeigenschaften werden durch den Kompressionsmodul  $K$ , die

<sup>25</sup>Beachte: Für die Komponenten der Tensoren gilt nach Gleichung (3.2) für  $i \neq j$  stets  $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$ .

<sup>26</sup>Scheinbar hat sich keine deutsche Übersetzung für den englischen Begriff creep compliance durchgesetzt. Meistens wird auch in deutschsprachigen Veröffentlichungen die englische Bezeichnung verwendet. Eher selten findet man die Begriffe Kriechantwort und Kriechnachgiebigkeit.

<sup>27</sup>Vergleiche dazu die Beziehung (3.57) und die zugehörigen Erläuterungen.

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

Volumenviskosität  $\zeta$  und die Scherviskosität  $\eta$  beschrieben. Inkompressibilität wird zunächst nicht vorausgesetzt, jedoch am Ende des Abschnitts gesondert betrachtet.

Gesucht ist die Deformation der Oberfläche des Halbraums unter der Wirkung einer konstanten Einheits-Normalkraft  $F_N$ . Dieses Beispiel hat nicht nur akademischen Charakter. Seine Lösung wird als Greensche Funktion (für dieses Problem) bezeichnet. Greensche Funktionen sind die Grundlage vieler Lösungsverfahren für Randwertprobleme und haben daher eine ganz konkrete, praktische Bedeutung. Zu Greenschen Funktionen und ihren Anwendungen wird auf das Buch von Duffy [58] verwiesen.

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 3.2 ist der erste Schritt das Definieren eines vergleichbaren elastischen Problems. Das ist in diesem Fall die Deformation eines elastischen Halbraums unter der Wirkung dieser Kraft. Zur Vermeidung von Verwechslungen werden im Folgenden die Größen, die sich auf das vergleichbare elastische Problem beziehen, durch eine Tilde gekennzeichnet. Die Eigenschaften des elastischen Halbraums werden durch den Kompressionsmodul  $\tilde{K}$  und den Schubmodul  $\tilde{G}$  beschrieben.

Im zweiten Schritt ist das vergleichbare elastische Problem zu lösen. In diesem Fall kann die Lösung direkt aus Lehrbüchern zur Elastizitätstheorie entnommen werden, z.B. Landau und Lifschitz [52]. Eine Normalkraft  $F$  bewirkt im Abstand  $r$  zum Kraftangriffspunkt die Deformation:

$$\tilde{u}(r) = \frac{F(1 - \tilde{\nu})}{2\pi\tilde{G}r}, \quad (3.28)$$

bzw. nach Ersetzung der Querkontraktionszahl gemäß Gleichung (3.7):

$$\tilde{u}(r) = \frac{F}{4\pi r} \frac{3\tilde{K} + 4\tilde{G}}{\tilde{G}(3\tilde{K} + \tilde{G})}. \quad (3.29)$$

Auch in der Lösung des vergleichbaren elastischen Problems muss, zumindest formal, der zeitliche Verlauf der Belastung spezifiziert werden. In Hinblick auf die Aufgabenstellung kann angenommen werden, dass die Kraft zu einem Zeitpunkt  $t = 0$  zu wirken beginnt und dann konstant bleibt. Auf diese Weise lässt sich der zeitliche Verlauf der Normalkraft mit Hilfe der Heaviside-Funktion  $H$  beschreiben:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Die Einheits-Normalkraft genügt damit der Beschreibung

$$F(t) = F_N H(t) \quad (3.31)$$

und für die Lösung des vergleichbaren elastischen Problems folgt

$$\tilde{u}(r) = \frac{F_N H(t)}{\pi r} \frac{3\tilde{K} + 4\tilde{G}}{2\tilde{G}(6\tilde{K} + 2\tilde{G})}. \quad (3.32)$$

Im dritten Schritt wird das ursprüngliche Materialverhalten wieder in Gleichung (3.32) eingesetzt. Dazu werden erst die Materialparameter gemäß den Gleichungen (3.13) und

### 3.4. Die Greensche Funktion des viskosen Kontakts

(3.15) durch ihre jeweiligen Reihenentwicklungen ausgedrückt:

$$\tilde{u}(r) = \frac{F_N H(t)}{\pi r} \frac{\tilde{P} + 2\tilde{Q}}{\tilde{Q}(2\tilde{P} + \tilde{Q})}. \quad (3.33)$$

Anschließend werden formal  $\tilde{P}$  durch  $P$  und  $\tilde{Q}$  durch  $Q$  ersetzt:

$$u(r) := \tilde{u}(r) \Big|_{\substack{\tilde{P} \rightarrow P \\ \tilde{Q} \rightarrow Q}} = \frac{F_N H(t)}{\pi r} \frac{P + 2Q}{Q(2P + Q)} \quad (3.34)$$

und dann gemäß (3.18) und (3.21) die Materialparameter des viskosen Mediums substituiert:

$$u(r) = \frac{F_N H(t)}{\pi r} \frac{(3K + 3\zeta \frac{\partial}{\partial t}) + (4\eta \frac{\partial}{\partial t})}{(2\eta \frac{\partial}{\partial t}) (2(3K + 3\zeta \frac{\partial}{\partial t}) + (2\eta \frac{\partial}{\partial t}))}. \quad (3.35)$$

Diese Gleichung wird mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{x\} := \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (3.36)$$

in den Bildbereich übertragen. Das Symbol  $s$  bezeichnet die komplexe Variable im Bildbereich. Obwohl die Auswertung dieses Integrals zumindest in einfachen Fällen möglich ist, ist die Verwendung von Korrespondenztabelle meist weniger aufwendig. Diese lassen sich üblicherweise in Büchern zur Laplace-Transformation (z.B. Weber und Ulrich [59] oder Föllinger und Kluwe [60]) und vielen mathematischen Übersichts- oder Tabellenwerken (z.B. Bronstein et al. [61]) finden. Für die Laplace-Transformierte der Gleichung (3.35) erhält man

$$u^*(s) := \mathcal{L}\{u\} = \frac{F_N}{\pi r s} \frac{3K + 3\zeta s + 4\eta s}{4\eta s (3K + 3\zeta s + \eta s)}. \quad (3.37)$$

Größen im Bildbereich sind durch einen Stern kenntlich gemacht. Diese Art der Kennzeichnung wird auch im weiteren Verlauf beibehalten. Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt mittels

$$\mathcal{L}^{-1}\{x^*\} := \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^*(s) e^{st} ds. \quad (3.38)$$

Dabei sind  $i = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit und  $\gamma$  eine reelle Zahl, die die Konvergenz des Integrals sicherstellt.<sup>28</sup> Oftmals einfacher ist wiederum die Nutzung von Korrespondenztabelle. Dazu wird Gleichung (3.37) einer Partialbruchzerlegung unterzogen:

$$u^*(s) = \frac{F_N}{4\pi r \eta} \left[ \frac{\omega}{s^2(s + \omega)} + \frac{3\zeta + 4\eta}{3\zeta + \eta} \frac{1}{s(s + \omega)} \right], \quad \omega := \frac{3K}{3\zeta + \eta}. \quad (3.39)$$

<sup>28</sup>Auf eine detaillierte Behandlung wird an dieser Stelle verzichtet. Stattdessen wird auf die Fachliteratur verwiesen, z.B. Weber und Ulrich [59], Föllinger und Kluwe [60] oder der Klassiker von Carslaw und Jaeger [62].

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert die Greensche Funktion für den viskosen Normalkontakt:

$$u(r, t) := \mathcal{L}^{-1}\{u^*\} = \frac{F_N}{4\pi r} \left[ \frac{t}{\eta} + \frac{1}{K}(1 - e^{-\omega t}) \right]. \quad (3.40)$$

In der Lösung sind zwei Einflüsse erkennbar. Zum einen existiert ein linearer Term, der nur von der Scherviskosität beeinflusst wird. Der zweite Term zeigt exponentielles Verhalten. Während seine Amplitude durch die Kompressibilität bestimmt ist, ist die charakteristische Zeit durch das in Gleichung (3.39) angegebene Verhältnis der Materialparameter vorgegeben.

Wird nun zusätzlich Inkompessibilität vorausgesetzt, also  $K \rightarrow \infty$  und  $\zeta \rightarrow 0$ , dann verschwindet der zweite Summand in Gleichung (3.40) und man erhält die Greensche Funktion für den inkompressiblen, viskosen Normalkontakt:

$$u(r, t) = \frac{F_N t}{4\pi \eta r} \quad (\text{inkompressibel}). \quad (3.41)$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn direkt in der Greenschen Funktion (3.28) des elastischen Kontakts Inkompessibilität durch die Wahl  $\tilde{\nu} = \frac{1}{2}$  erzwungen wird. Die vorgeführten Umformungen haben ihren Ausgangspunkt dann nicht in Gleichung (3.28), sondern in

$$\tilde{u}(r) = \frac{F_N}{4\pi \tilde{G} r} \quad (\text{inkompressibel}). \quad (3.42)$$

Die Analogie zwischen den Greenschen Funktionen des (inkompressiblen) elastischen und des (inkompressiblen) viskosen Normalkontakts wird besonders deutlich, wenn man die zeitliche Ableitung von Gleichung (3.41) betrachtet:

$$\dot{u}(r) = \frac{F_N}{4\pi \eta r} \quad (\text{inkompressibel}). \quad (3.43)$$

Offenbar geht die elastische Lösung (3.42) in die viskose Lösung (3.43) über durch die Transformation

$$u \rightarrow \dot{u}, \quad G \rightarrow \eta, \quad (3.44)$$

das heißt, wenn die Deformation durch die Deformationsgeschwindigkeit und der Schubmodul durch die Scherviskosität ersetzt werden. An dieser Stelle sei betont, dass diese Aussage nur für das zu Grunde liegende Materialgesetz in Verbindung mit dem Kraftgesetz (3.30) gültig ist, vergleiche [63].

## 3.5. Das allgemeine viskoelastische Materialgesetz

In den vorherigen Abschnitten wurden die Grundlagen des Verfahrens dargelegt und an einem einfachen Beispiel demonstriert. Nun folgt der eigentliche Kern dieses Kapitels. Mit Hilfe des Prinzips der Funktionalgleichungen erfolgt die formale Erweiterung der Methode der Dimensionsreduktion von elastischen Materialien auf solche mit beliebiger

linearer Rheologie. Dabei wird von der Situation ausgegangen, dass die Lösung eines Kontaktproblems mit einem Elastomer gesucht ist. Zum anderen wird vorausgesetzt, dass ein vergleichbares elastisches Problem existiert, mit der Methode der Dimensionsreduktion gelöst werden kann und diese Lösung auch bekannt ist.

Zur Vermeidung von Missverständnissen wird hervorgehoben, dass in keiner Weise der Anspruch erhoben wird, dass diese Voraussetzungen grundsätzlich erfüllt sind. Stattdessen wird, einer mathematisch motivierten Herangehensweise entsprechend, die Gültigkeit der folgenden Betrachtungen auf solche Fälle eingeschränkt. Dass es Fragestellungen gibt, die mit der Methode der Dimensionsreduktion nicht beantwortet werden können, ist davon unbenommen.

Betrachtet wird ein reibungsfreies Normalkontakt-Problem ohne Adhäsion, welches der Halbraum-Näherung genügt. Die Kontaktpartner sind ein starrer Indenter und ein Elastomer, dessen Rheologie durch zeitabhängige Relaxationsfunktionen gemäß den Gleichungen (3.24) und (3.25) beschrieben wird. Gesucht ist eine Lösung des Problems mit der Methode der Dimensionsreduktion. A

Im ersten Schritt ist es notwendig, eine Formulierung des Kontaktproblems mit Hilfe der Methode der Dimensionsreduktion zu finden. Erst in einem zweiten Schritt soll es dann auch gelöst werden. Das vergleichbare elastische Problem besteht demnach darin, zunächst eine Formulierung eines Normalkontakts ohne Reibung und Adhäsion zwischen einem starren Indenter und einem elastischen Halbraum zu finden. Die Materialeigenschaften des Letzteren werden durch den Schubmodul  $\tilde{G}$  und den Kompressionsmodul  $\tilde{K}$  beschrieben.

Die gesuchte Formulierung wurde im Abschnitt 2.5 vorgestellt: Der elastische Halbraum wird auf eine eindimensionale Anordnung unabhängiger, linearer Federelemente abgebildet und die Oberfläche des starren Indenters gemäß einer vorgegebenen Transformation<sup>29</sup> auf eine starre Linie. An jedem einzelnen Element gilt zwischen Kraft und Verschiebung die Beziehung

$$\tilde{f}_N(t) = \frac{2\tilde{G} (6\tilde{K} + 2\tilde{G})}{3\tilde{K} + 4\tilde{G}} b\tilde{u}(t). \quad (3.45)$$

Das folgt aus Gleichung (2.24) in Verbindung mit (2.25) und den Beziehungen (3.6) und (3.7). Gleichung (3.45) ist - in Verbindung mit den zugehörigen Erläuterungen - die gesuchte Formulierung des vergleichbaren elastischen Normalkontakt-Problems. Gemäß Voraussetzung ist die Lösung des elastischen Problems bekannt.

Um nun das konkrete viskoelastische Problem zu lösen, sind zwei Wege denkbar. Einerseits ist es möglich, in der Lösung des konkreten elastischen Problems das ursprüngliche Materialverhalten zu substituieren. Diese Vorgehensweise ist oftmals bei einer analytischen Untersuchung vorteilhafter. Andererseits ist es aber auch möglich, die Ersetzung der Materialparameter bereits in der Formulierung des vergleichbaren elastischen Problems (3.45) vorzunehmen und auf dieser Grundlage die viskoelastische Lösung zu bestimmen. Dieser Weg ist häufig für numerische Untersuchungen sinnvoller.

<sup>29</sup>Im Fall eines rotationssymmetrischen Indenters ist das die Gleichung (2.5).

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

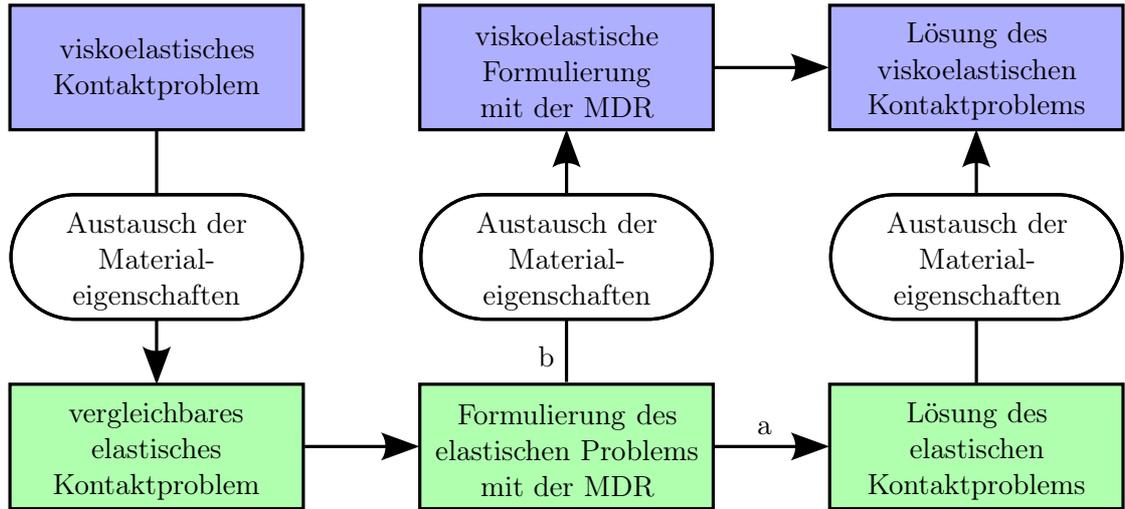


Abbildung 3.2.: Übertragung der Methode der Dimensionsreduktion (MDR) auf viskoelastische Kontaktprobleme. Die zwei denkbaren Wege der Rücktransformation sind im Bild mit a bzw. b gekennzeichnet.

In der Abbildung 3.2 ist die Vorgehensweise schematisch dargestellt. Die beiden Möglichkeiten der Rücktransformation sind mit a beziehungsweise b gekennzeichnet. In Abschnitt 4.2 wird die Thematik erneut aufgegriffen und mit Beispielen unterlegt.

Wird die erste Möglichkeit verfolgt, so ist der nächste Schritt banal. Die Existenz einer Lösung für das vergleichbare elastische Problem im Rahmen der Methode der Dimensionsreduktion wurde eingangs vorausgesetzt. Der abschließende Schritt besteht in der Resubstitution des viskoelastischen Verhaltens in die elastische Lösung. Dass auf diese Weise die Konstruktion der gesuchten Lösung möglich ist, ist unter den getätigten Annahmen naheliegend. Ob die tatsächliche Bestimmung dieser Lösung aber für jedes denkbare konkrete Problem und jedes beliebige Materialverhalten durchführbar ist, ist damit nicht gesichert. Ein allgemeingültiger Beweis lässt sich auf dieser Abstraktionsebene jedenfalls schwerlich finden.

Wie stellt sich aber die Lage bei Wahl der zweiten Möglichkeit dar? Hier wird die Resubstitution des Materialverhaltens unmittelbar in der Formulierung des Problems vorgenommen. In Anlehnung an Lee und Rogers [40] und Yang [41] werden zunächst in Gleichung (3.45) die elastischen Konstanten durch ihre Reihenentwicklungen ausgedrückt. Mit den Gleichungen (3.13) und (3.15) ergibt sich

$$\tilde{f}_N(t) = b \left( \frac{\tilde{Q} (2\tilde{P} + \tilde{Q})}{\tilde{P} + 2\tilde{Q}} \right) \tilde{u}(t). \quad (3.46)$$

### 3.5. Das allgemeine viskoelastische Materialgesetz

Anschließend wird diese Gleichung einer Laplace-Transformation unterzogen:

$$\tilde{f}_N^*(s) = b \left( \frac{\tilde{Q}^* (2\tilde{P}^* + \tilde{Q}^*)}{\tilde{P}^* + 2\tilde{Q}^*} \right) \tilde{u}^*(s). \quad (3.47)$$

In dieser Gleichung sollen  $\tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$  durch ihre viskoelastischen Entsprechungen ersetzt werden. Dazu werden zuvor die Materialgesetze (3.24) und (3.25) ebenfalls in den Laplacebereich übertragen:

$$\sigma_{ii}^*(s) = K^*(s) s \varepsilon_{ii}^*(s), \quad (3.48)$$

$$s_{ij}^*(s) = 2G^*(s) s e_{ij}^*(s). \quad (3.49)$$

Hierbei wird ausgenutzt, dass die Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich der Multiplikation im Bildbereich entspricht. In Analogie zur Bestimmung der Reihen linearer Differentialoperatoren im Abschnitt 3.3 werden die Entsprechungen

$$\sigma_{ii}^*(s) = P^*(s) \varepsilon_{ii}^*(s) \text{ mit } P^*(s) := sK^*(s), \quad (3.50)$$

$$s_{ij}^*(s) = Q^*(s) e_{ij}^*(s) \text{ mit } Q^*(s) := 2sG^*(s) \quad (3.51)$$

identifiziert. Die so definierten Funktionen  $P^*$  und  $Q^*$  beschreiben das viskoelastische Verhalten im Bildbereich. Im nächsten Schritt werden sie in die Gleichung (3.47) substituiert

$$f_N^*(s) := \tilde{f}_N^*(s) \Big|_{\substack{\tilde{P} \rightarrow P \\ \tilde{Q} \rightarrow Q}} = b \left( \frac{Q^* (2P^* + Q^*)}{P^* + 2Q^*} \right) u^*(s) \quad (3.52)$$

und gemäß den Gleichungen (3.50) und (3.51) wieder durch die Relaxationsfunktionen ersetzt:

$$\begin{aligned} f_N^*(s) &= b \left( \frac{2sG^* (2sK^* + 2sG^*)}{sK^* + 4sG^*} \right) u^*(s) \\ &= 4b \left( \frac{G^* (K^* + G^*)}{K^* + 4G^*} \right) (su^*(s)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich schlussendlich:

$$f_N(t) := \mathcal{L}^{-1}\{f_N^*\} = 4b \int_{\tau=0}^t V(t-\tau) \dot{u}(\tau) \, d\tau. \quad (3.54)$$

Hierbei beschreiben

$$V^*(s) := \frac{G^* (K^* + G^*)}{K^* + 4G^*} \text{ und} \quad (3.55)$$

$$V(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V^*\}. \quad (3.56)$$

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

das Materialverhalten im Bild- bzw. Zeitbereich. Die Form der Gleichung (3.54) ermöglicht unmittelbar eine Interpretation, wie die Formulierung des viskoelastischen Normalkontakts mit der Methode der Dimensionsreduktion aussieht. Wie beim elastischen Kontakt wird der Indenter auf eine starre Linie abgebildet. Der Halbraum dagegen wird durch eine verallgemeinerte Winkler-Bettung dargestellt, das heißt durch eine Kette unabhängiger Elemente mit der generalisierten Steifigkeit  $V(t)$ . Abbildung 3.3 stellt das schematisch dar.

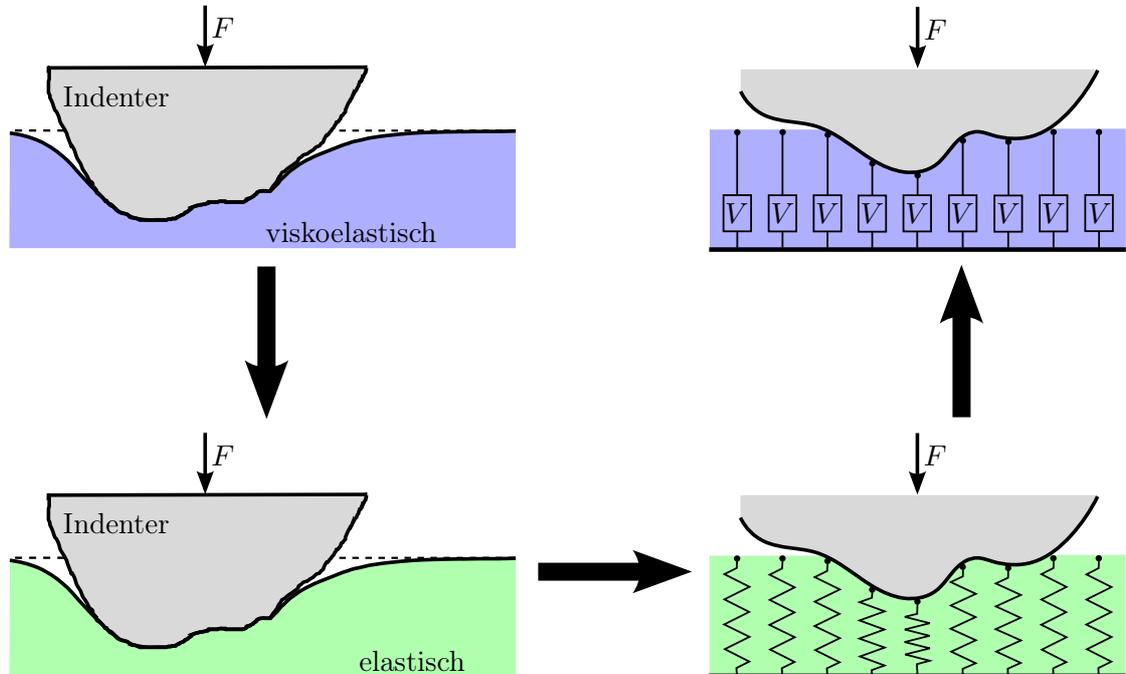


Abbildung 3.3.: Schematische Darstellung zur Modellierung viskoelastischen Materialverhaltens in der Methode der Dimensionsreduktion. Die senkrechten Pfeile markieren den Austausch der Materialeigenschaften mit dem Prinzip der Funktionalgleichungen, der waagerechte Pfeil die Transformation auf eine Dimension.

Dasselbe Ergebnis erhält man auch, wenn das Materialverhalten nicht durch die Relaxationsfunktionen (3.24) und (3.25) definiert ist, sondern durch die Kriechantworten  $I(t)$  und  $J(t)$  gemäß Gleichung (3.27). Davon kann man sich leicht überzeugen. Durch Laplace-Transformation der Gleichungen (3.27) und anschließendem Vergleich mit (3.48) und (3.49) ergeben sich im Bildbereich unmittelbar die Beziehungen

$$s^2 K^*(s) = \frac{1}{I^*(s)} \quad \text{und} \quad s^2 G^*(s) = \frac{1}{J^*(s)}. \quad (3.57)$$

Die entsprechenden Herleitungen finden sich beispielsweise bei Christensen [50].

Werden die in diesem Abschnitt vorgenommenen Betrachtungen sinngemäß für ein durch die Kriechantworten (3.27) definiertes Materialverhalten vorgenommen, ergibt sich ein

zu (3.54) und (3.55) analoges Resultat. Mit Hilfe der Beziehungen (3.57) lässt sich zeigen, dass beide Ergebnisse äquivalent sind. Auf die Vorführung des Beweises wird jedoch an dieser Stelle verzichtet.

Stattdessen wird kurz auf ein Detail eingegangen, das leicht übersehen werden könnte. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die folgenden Betrachtungen auf die Kompressions-Relaxationsfunktion  $K(t)$  und die Kompressions-Kriechantwort  $I(t)$  beschränkt. Sie gelten jedoch sinngemäß auch für die Scherung. Das elastische Analogon zur Aussage (3.57) ist, dass Kompressionsmodul  $K$  und Kompressibilität  $1/K$  reziprok zueinander sind. Diese Aussage ist banal, lässt sich aber auch formal aus den beiden (äquivalenten) Darstellungen

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii} \quad \text{und} \quad 3\varepsilon_{ii} = \frac{1}{K}\sigma_{ii} \quad (3.58)$$

der Gleichung (3.8) ableiten. Offensichtlich sind aber die beiden Beziehungen aus (3.58) auch die elastischen Entsprechungen zu (3.24) und (3.27):

$$\sigma_{ii} = (K * \dot{\varepsilon}_{ii}) \quad \text{und} \quad \varepsilon_{ii} = (I * \dot{\sigma}_{ii}). \quad (3.59)$$

Im Gegensatz zu Kompressionsmodul  $K$  und Kompressibilität  $1/K$  sind die Relaxationsfunktion  $K(t)$  und die zugehörige Kriechantwort  $I(t)$  nicht reziprok, sondern gehorchen der Gleichung (3.57). Es lässt sich jedoch zeigen (vergleiche Christensen [50]), dass sich dieses Verhalten in den Grenzen wieder auf Reziprozität reduziert:

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{I(t)} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{I(t)}. \quad (3.60)$$

Es wurde in diesem Abschnitt gezeigt, dass die Methode der Dimensionsreduktion auch auf viskoelastische Normalkontakt-Probleme anwendbar ist, wenn diese den eingangs genannten Voraussetzungen genügen. Zugleich wurde die Vorgehensweise skizziert. Es muss allerdings auch eingeräumt werden, dass einer wesentlichen Schwierigkeit ausgewichen wurde. In den Gleichungen (3.55) und (3.56) wurde zwar gezeigt, wie das Übertragungsverhalten der generalisierten Federelemente konstruiert wird. Allerdings kann die Rücktransformation in den Zeitbereich erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Das betrifft insbesondere solche Fälle, wo die Beschreibung des Materialverhaltens durch Relaxationsfunktionen tatsächlich sinnvoll ist.

### 3.6. Vereinfachungen

Anknüpfend an die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts, werden nun einige Vereinfachungen vorgestellt.

#### Inkompressibilität

In vielen Fällen können Elastomere näherungsweise als inkompressibel angenommen werden. Dadurch ergibt sich eine deutliche Vereinfachung. Die Betrachtung von (3.55) zeigt:

$$V^*(s) = \left( \frac{K^* + 4G^*}{G^* (K^* + G^*)} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{G^*} + \frac{3}{K^* + G^*} \right)^{-1}. \quad (3.61)$$

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

Für den Fall der Inkompressibilität gilt  $K^* \rightarrow \infty$ , der zweite Summand in Gleichung (3.61) geht gegen Null und es folgt  $V^* \rightarrow G^*$ . Eingesetzt in Gleichung (3.54) ergibt sich unmittelbar:

$$f_N(t) = 4b \int_{\tau=0}^t G(t-\tau) \dot{u}(\tau) \, d\tau \quad (\text{inkompressibel}) \quad . \quad (3.62)$$

Ein inkompressibles Elastomer wird in der Reduktionsmethode somit durch eine Kette unabhängiger Elemente mit der generalisierten Steifigkeit gemäß (3.54) abgebildet. Diese wird direkt durch den zeitabhängigen Schubmodul  $G(t)$  und außerdem nur von der Diskretisierungslänge  $b$  bestimmt.

Dasselbe Ergebnis erhält man auch, wenn Inkompressibilität bereits in der Formulierung des vergleichbaren elastischen Problems, das heißt in Gleichung (3.45), berücksichtigt wird.

### Diskrete Modelle

Eine weitere Vereinfachung lässt sich erreichen, wenn die kontinuierliche Zeitabhängigkeit des Materialverhaltens durch diskrete Relaxationszeiten  $\tau_i$  angenähert wird. Diese Vorgehensweise war besonders in der Anfangszeit der Modellierung viskoelastischer Medien verbreitet. Das lässt sich im Wesentlichen auf zwei Ursachen zurückführen. Einerseits war die Berücksichtigung viskoelastischer Eigenschaften auf andere Weise schlichtweg nicht zu bewältigen. Andererseits konnten aber auch bekannte Ergebnisse von verwandten Gebieten, insbesondere der Elektrotechnik, unmittelbar auf diese Problematik übertragen werden. Hier ist insbesondere die Monografie von Gross [64] zu erwähnen, die diesen Sachverhalt systematisch behandelt und an der sich dieser Abschnitt orientiert.

Auch in heutiger Zeit findet diese Möglichkeit Anwendung, wie aktuelle Untersuchungen zeigen, z.B. Liu et al. [65], Vandamme und Ulm [66] oder Dubois et al. [67]. Sie bietet sich vor allem an, wenn die Materialeigenschaften tatsächlich von wenigen charakteristischen Zeitkonstanten dominiert werden.

Die umfassende Behandlung von diskreten Modellen ist in diesem Abschnitt weder vorgesehen noch überhaupt möglich. Stattdessen soll lediglich die generelle Vorgehensweise demonstriert werden. Dabei erfolgt die Beschränkung auf inkompressible Materialien. Diese Einschränkung ist jedoch nicht notwendig, sondern wird vorgenommen, um eine unnötig komplizierte Behandlung zu vermeiden.

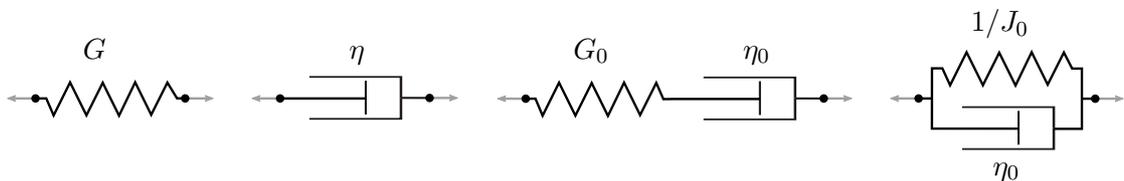


Abbildung 3.4.: Die einfachsten diskreten Materialmodelle, von links nach rechts: Feder, Dämpfer, Maxwell-Element, Kelvin-Element

Die einfachsten diskreten Modelle (vergleiche Abbildung 3.4) sind die lineare Feder und der lineare Dämpfer, welche zur Modellierung linear elastischen bzw. viskosen Verhaltens verwendet werden können.

Aus diesen beiden lassen sich komplexere Modelle konstruieren. Durch die Kombination einer Feder mit einem Dämpfer in Reihenschaltung entsteht das Maxwell-Element. Dieses beschreibt eine exponentiell abklingende (Relaxations-)Funktion:

$$G(t) = G_0 e^{-t/\tau_0}, \quad (3.63)$$

wobei  $G_0$  die Federkonstante ist und die Zeitkonstante  $\tau_0 := \eta_0/G_0$  durch das Verhältnis aus dieser und dem Viskositätsparameter  $\eta_0$  des Dämpfers festgelegt wird.

Werden dagegen eine Feder und ein Dämpfer parallel geschaltet, erhält man ein Kelvin-Element, welches eine Kriechfunktion der Form

$$J(t) = J_0(1 - e^{-t/\tau_0}) \quad (3.64)$$

beschreibt. Dabei sind  $1/J_0$  die Federkonstante,  $\tau_0 := \eta_0 J_0$  die Zeitkonstante und  $\eta_0$  wiederum die Viskositätskonstante des Dämpfers.

Mit den Gleichungen (3.63) und (3.64) lassen sich die einfachsten Fälle viskoelastischen Verhaltens abbilden. Zur Modellierung komplizierterer Materialien werden Kombinationen dieser Elemente herangezogen. So erhält man aus der Parallelschaltung mehrerer Maxwell-Elemente oder aus der Reihenschaltung mehrerer Kelvin-Elemente das verallgemeinerte Maxwell-Element respektive das verallgemeinerte Kelvin-Element.

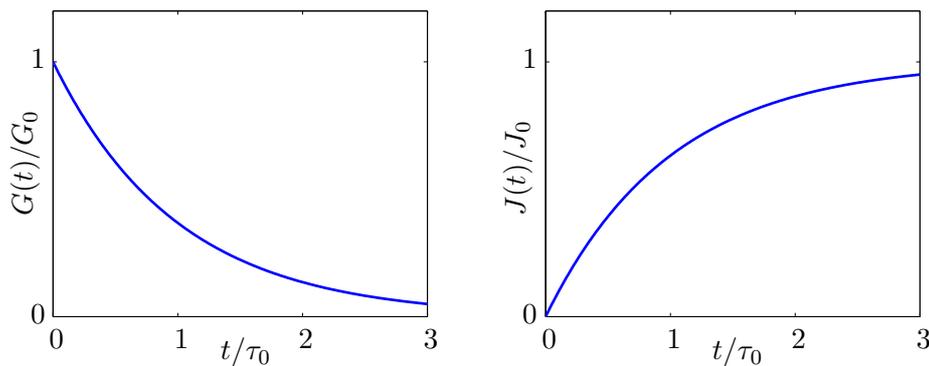


Abbildung 3.5.: Verlauf der Relaxationsfunktion nach Gleichung (3.63) (links) und der Kriechfunktion gemäß Gleichung (3.64)

Bereits Gross [64] hat gezeigt, dass mit diesen Modellen reale Relaxationsfunktionen bzw. Kriechfunktionen approximiert werden können. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass die Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich eine rationale Funktion (in  $s$ ) ist. Diese lässt sich durch Partialbruchzerlegung stets auf wenige elementare Funktionen mit bekannten Korrespondenzfunktionen im Zeitbereich zurückführen. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass zumindest grundsätzlich die Rücktransformation in

### 3. Übertragung der Reduktionsmethode auf Elastomere

den Zeitbereich durchführbar ist. Das verbleibende Problem besteht in der Partialbruchzerlegung, insbesondere in der Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms.

Eine Diskussion einfacher Elemente und die Verbindung zum Prinzip der Funktionalgleichungen haben Lee [36] sowie Bland und Lee [37] veröffentlicht. Aktuellere Anwendungen dieses Verfahrens finden sich unter anderem bei Vandamme und Ulm [66] sowie bei Wang und Nie [68]. Dort ist auch erkennbar, wie schnell der mathematische Aufwand bei der Verwendung komplexerer Modelle ansteigt.

#### Linear viskose Medien

Als Abschluss des Kapitels erfolgt nun die Übertragung der Methode der Dimensionsreduktion auf ein rein viskoses Medium. Nach den vorherigen Betrachtungen ist dies keine echte Herausforderung mehr, sondern dient eher einer formalen Bestätigung. Gleichzeitig ist dieser Abschnitt jedoch Grundlage und Überleitung für die folgenden Kapitel, in denen es um die Behandlung eben dieses Materialgesetzes geht.

Ziel des Abschnittes ist eine Formulierung der Methode der Dimensionsreduktion für ein inkompressibles Elastomer mit einer linear viskosen Rheologie. Wie bisher werden Isotropie und die Halbraumnäherung vorausgesetzt. Adhäsion wird nicht berücksichtigt.

Das äquivalente elastische Problem ist analog zum Abschnitt 3.5 die Formulierung der Methode der Dimensionsreduktion für ein inkompressibles elastisches Material. Diese besteht aber aus der Abbildung des elastischen Halbraums auf eine Kette linearer Federelemente mit der Kraft-Verschiebungs-Beziehung

$$\tilde{f}_N(t) = 4\tilde{G}b\tilde{u}(t). \quad (3.65)$$

Das ergibt sich durch Berücksichtigung der Inkompressibilität in Gleichung (3.45).

In der Lösung des elastischen Problems wird nun das linear viskose Materialverhalten eingesetzt. Dazu wird der Schubmodul  $\tilde{G}$  nach Gleichung (3.15) durch seine Reihenentwicklung ersetzt:

$$\tilde{f}_N(t) = 2\tilde{Q}b\tilde{u}(t), \quad (3.66)$$

diese wiederum durch ihr viskoses Analogon  $Q$  ersetzt und letztendlich die Parameter des viskosen Materials gemäß (3.21) und (3.22) substituiert:

$$f_N(t) = 4b\eta \frac{\partial}{\partial t} u(t). \quad (3.67)$$

Damit ist die Formulierung der Methode der Dimensionsreduktion für das inkompressible, viskose Elastomer gefunden: Der viskose Halbraum wird auf eine Kette unabhängiger Dämpfer abgebildet, deren Verhalten durch das Gesetz

$$f_N(t) = 4b\eta \dot{u}(t) \quad (3.68)$$

beschrieben wird. Dabei sind  $\eta$  die Viskosität des Elastomers,  $b$  die Diskretisierungslänge und  $\dot{u}$  die Eindrückgeschwindigkeit des jeweiligen Dämpfers.

### 3.7. Fazit

In diesem Kapitel wird das Prinzip der Funktionalgleichungen benutzt, um die Methode der Dimensionsreduktion auf Kontaktprobleme mit Elastomeren anzuwenden. Hierbei wird das Elastomer auf eine Kette unabhängiger Elemente abgebildet. Die Charakteristik dieser Elemente, also der Zusammenhang zwischen Kraft und Deformation, wird während der Konstruktion des Modells bestimmt. Das geschieht mit Hilfe der Gleichung (3.56).

Eine wesentliche Schwierigkeit kann dabei die Rücktransformation der Übertragungsfunktion in den Zeitbereich darstellen. Aus diesem Grund werden einige Vereinfachungen vorgestellt. Dabei wird auch das linear viskose Modell-Elastomer motiviert, das in den folgenden Kapiteln untersucht wird.



## 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

Dieses Kapitel ist das erste von zweien, in denen die Eigenschaften des linear viskosen Modell-Elastomers untersucht werden. In diesem Kapitel steht dabei das Normalkontakt-Problem im Mittelpunkt der Betrachtungen.

Zwei wesentliche Ziele werden mit diesem Kapitel verfolgt. Die Anwendung der Reduktionsmethode auf Kontaktprobleme mit Elastomeren soll anhand von Beispielen durchgeführt werden. Außerdem sollen die so gewonnenen Ergebnisse mit unabhängigen Verfahren überprüft werden. Dies geschieht anhand analytischer Berechnungen am dreidimensionalen Original-System und mit der Randelemente-Methode.

Darüber hinaus sind die Ergebnisse dieses Kapitels (und auch des nächsten) als Bausteine gedacht, die auch bei der Modellierung komplexerer Elastomer-Modell verwendet werden können. Insbesondere unter der Annahme einer linearen Rheologie, können die verschiedenen Aspekte des Materialverhaltens superponiert werden. Kapitel vier (und fünf) liefern dafür den viskosen Anteil. Dieser modulare Aufbau komplexer Modelle wird auch von anderen Autoren verfolgt, vergleiche zum Beispiel Kröger, Moldenhauer und Gäbel [69, 70].

Im ersten Abschnitt werden die maßgeblichen Voraussetzungen und Annahmen zusammengefasst und wesentliche Grenzen des Modells aufgezeigt. Dem schließt sich eine Untersuchung des globalen Verhaltens an, aus dem bereits erste Resultate abgeleitet werden können.

Detailliertere Ergebnisse erhält man für Indenter mit speziellen Oberflächen. Im zweiten Abschnitt wird der Normalkontakt mit einem zylindrischen Stempel eingehend betrachtet. Im Mittelpunkt des dritten Abschnitts stehen Indenter, deren Oberflächen durch die Rotation eines Monoms entstehen. Indenter mit zufällig rauen, selbst-affinen Oberflächen werden im vierten Abschnitt behandelt.

### 4.1. Vorbetrachtung

Der Gegenstand dieses Kapitels ist der reibungsfreie Normalkontakt mit einem isotropen, inkompressiblen und linear viskosen Elastomer. Adhäsion und Trägheitseffekte werden wie bisher nicht berücksichtigt. Das Elastomer wird stets als Halbraum mit ursprünglich ebener Oberfläche behandelt. Im Gegenzug wird der Indenter als Starrkörper betrachtet. Es kommen weiterhin die in Abschnitt 2.3 eingeführten Koordinatensysteme zur Anwendung.

Die Beschreibung des Materialverhaltens wurde bereits im Abschnitt 3.3 erarbeitet. Im Abschnitt 3.4 wurde eine Greensche Funktion für dieses Materialmodell hergeleitet.

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

Die Behandlung mit der Methode der Dimensionsreduktion wurde im Abschnitt 3.6 vorgestellt.

### Randbedingungen

A

An der Oberfläche des Halbraums werden die üblichen Randbedingungen des Normalkontakts angenommen: In den Punkten, die sich in Kontakt mit dem Indenter befinden, ist die Deformation der Elastomer-Oberfläche passend zur Geometrie des Indenters,

$$u(r, \varphi, z = 0, t) = \delta(t) - g(r, \varphi). \quad (4.1)$$

Dabei sind  $u$  das Deformationsfeld,  $g$  die Parametrisierung der Oberfläche des Indenters und  $\delta$  die Indentierungstiefe, das heißt die Tiefe des tiefsten Punktes des Indenters unterhalb der ursprünglichen Oberfläche des Halbraums.

Die Menge aller Punkte, in denen Indenter und Halbraum in Kontakt sind, wird als Kontaktgebiet  $A_c$  bezeichnet, sein Flächeninhalt als Kontaktfläche. Überall innerhalb des Kontaktgebiets wirken negative Normalspannungen, das heißt Druckspannungen. Weiterhin stimmen innerhalb des Kontaktgebiets die Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{u}$  an der Oberfläche des Elastomers und die Geschwindigkeit  $\dot{\delta}$  des Indenters überein. Das ist anschaulich klar, folgt aber auch formal durch Ableitung der Gleichung (4.1) nach der Zeit. Diese Bedingung und Gleichung (4.1) werden im Folgenden zusammen als Kontaktbedingung bezeichnet.

In den Punkten der Elastomer-Oberfläche, die nicht zum Kontaktgebiet gehören, verschwindet die Normalspannung. Zusätzlich gehorcht in diesen Punkten die Deformation der Ungleichung

$$u(r, \varphi, z = 0, t) > \delta(t) - g(r, \varphi). \quad (4.2)$$

Da der Kontakt als reibungsfrei angenommen wird, ist die gesamte Oberfläche des Halbraums frei von Schubspannungen.

### Globales Verhalten

Für die Untersuchung des Normalkontakt-Problems bieten sich zwei Vorgehensweisen besonders an. Entweder wird der Indenter unter der Wirkung einer vorgegebenen Kraft in das Elastomer gedrückt oder dies geschieht mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit. Beide Möglichkeiten sind gleichberechtigt und haben jeweils ihre Vor- und Nachteile. In der vorliegenden Schrift erfolgt die Indentierung stets mit einer vorgegebenen Kraft.

A

Der Nachteil dieser Vorgehensweise wird sichtbar, wenn der erste Kontakt des Indenters mit dem Elastomer genauer betrachtet wird. In dieser Phase ist, von wenigen speziellen Indenterformen abgesehen, die Kontaktfläche nahe Null. Da die Normalkraft einen konstanten, endlichen Wert innehat, muss die Normalspannung im Kontakt gegen unendlich gehen. Zudem verhält sich gemäß Materialgesetz die Deformationsgeschwindigkeit proportional zur Normalspannung und geht daher auch gegen unendlich. Dasselbe gilt aufgrund der Kontaktbedingung auch für die Geschwindigkeit des Indenters. Dieses Verhalten ist offensichtlich unphysikalisch.

Abgemildert wird diese Problematik durch zwei Faktoren. Zum einen wächst das Kontaktgebiet in der Anfangsphase, bedingt durch die hohe Indentierungsgeschwindigkeit, sehr schnell an. Die Normalspannungen und damit auch die Indentierungsgeschwindigkeit fallen deshalb innerhalb einer sehr kurzen Zeitspanne auf ein realistisches Niveau ab. Dadurch ist die gesamte Problematik auf die sehr kurze Phase des ersten Kontakts beschränkt und hat quasi keine Auswirkungen auf den späteren Verlauf der Indentierung. Zum anderen finden in den numerischen Simulationen diskrete Flächenelemente Verwendung. Diese haben stets eine endliche Fläche. Dadurch können die Normalspannungen zwar immer noch sehr groß werden, bleiben aber zumindest endlich. Im Gegensatz dazu tritt jedoch in analytischen Betrachtungen der Deformationsgeschwindigkeit im ersten Kontakt eine Singularität auf.

Es sind mehrere Möglichkeiten denkbar, um diese Problematik auszuräumen. Würde beispielsweise die Trägheit des Indenters berücksichtigt werden, würde sich das Problem so gar nicht stellen. Allerdings würde dadurch die Masse des Indenters als zusätzlicher Parameter auftauchen. Eine andere Möglichkeit wäre die Definition einer minimalen Kontaktfläche, ab der das Kontaktproblem überhaupt erst betrachtet wird. Streng genommen fällt die oben genannte diskrete Behandlung in diese Kategorie. Eine dritte Option stellt die Verwendung eines ganz anderen, besser geeigneten Modells für die Phase des ersten Kontakts dar.

Alle diese Möglichkeiten haben jedoch zwei Merkmale gemeinsam. Sie gehen mit der Notwendigkeit einher, weitere Parameter einzuführen, und sie dienen ausschließlich dazu, das Verhalten in der Phase des allerersten Kontakts zu verändern. Da es hier in erster Linie darum geht, das Materialverhalten zu charakterisieren, sind sie allesamt unbefriedigend. Aus diesem Grund wird die pragmatische Lösung gewählt und das Modell so beibehalten, wie es ist. Im Gegenzug ist damit klar, dass die Ergebnisse dieser Phase nur sehr beschränkte Aussagekraft haben.

Als Nächstes wird ein beliebiger Zeitpunkt im Verlauf einer Indentierung betrachtet. Welche allgemeinen Aussagen lassen sich ableiten? Die äußere Kraft hat einen definierten, endlichen Wert und auch das Kontaktgebiet ist von endlicher Größe. Dann müssen im Kontaktgebiet endliche Normalspannungen auftreten. Aufgrund des Materialgesetzes erzwingen diese auch endliche Deformationsgeschwindigkeiten, zumindest an irgendwelchen Punkten im Kontaktgebiet. Die Kontaktbedingung erfordert, dass dort die Geschwindigkeit des Indenters mit der Deformationsgeschwindigkeit der Elastomer-Oberfläche übereinstimmt. Darüber hinaus wird der Indenter als Starrkörper betrachtet. Alle Punkte des Indenters haben dieselbe Geschwindigkeit und das muss auch für die Elastomer-Oberfläche im Kontaktgebiet gelten.

Somit folgt, dass der Indenter zu jedem Zeitpunkt mit einer positiven Geschwindigkeit (bezogen auf die  $\zeta$ -Achse, vergleiche Abbildung 2.3) in das Elastomer eingedrückt wird. Außerdem werden alle Punkte der Halbraum-Oberfläche, die zum Kontaktgebiet gehören, mit dieser Geschwindigkeit deformiert. Unter den oben genannten Annahmen ist daher ausgeschlossen, dass der Indenter stehenbleibt oder gar aus dem Elastomer herausgedrückt wird.

Wie sieht nun das Verhalten nach einer sehr langen Zeit aus? Dazu erfolgt die formale Beschränkung auf einen Indenter mit endlicher räumlicher Ausdehnung. In diesem Fall

A

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

ist auch die Kontaktfläche beschränkt. Solange die Halbraum-Näherung gültig ist, ist die Abweichung zwischen dem Flächeninhalt der gekrümmten Kontaktfläche und dem ihrer Projektion auf die  $(r, \varphi)$ -Ebene vernachlässigbar. Daher lässt sich das maximale Kontaktgebiet durch die Grundfläche  $A_0$  des Indenters abschätzen. Als Grundfläche wird dabei die Projektion des Indenters auf die ursprüngliche, ebene Oberfläche des Halbraums angesehen.

Aufgrund der vorhergehenden Ausführungen ist klar, dass für sehr große Zeiten,  $t \rightarrow \infty$ , das tatsächliche Kontaktgebiet mit dem maximalen Kontaktgebiet identisch ist. Insbesondere ist seine Fläche aber endlich (und von Null verschieden). Die äußere Kraft ist ebenfalls endlich und von Null verschieden. Das muss aber auch für die Normalspannungen im Kontaktgebiet, für die zugehörigen Deformationsgeschwindigkeiten und letztlich auch für die Indentierungsgeschwindigkeit gelten. Damit lässt sich die oben formulierte Schlussfolgerung verschärfen. Unter den oben getätigten Annahmen nähert sich die Indentierungsgeschwindigkeit einem von Null verschiedenen Wert asymptotisch an. Das bedeutet aber auch, dass die Indentierungstiefe sich nicht gegen einen maximalen Wert entwickelt, sondern streng monoton anwächst. Dann wird aber zwangsläufig immer die zugrunde gelegte Halbraumnäherung verletzt, wenn man nur lange genug wartet.

In ausreichender Entfernung vom Kontaktgebiet lässt sich der Kontakt zwischen Indenter und Elastomer durch die Wirkung einer (punktförmigen) Einzelkraft annähern. Die zugrunde liegenden Betrachtungen wurden bereits im Abschnitt 3.4 vorgenommen. Ein Punkt der Halbraum-Oberfläche, der im Abstand  $r$  zum Angriffspunkt der (aus den Normalspannungen) resultierenden Normalkraft liegt, erfährt die durch Gleichung (3.43)

$$\dot{u}(r) = \frac{F_N}{4\pi\eta r}$$

beschriebene Deformationsgeschwindigkeit, sofern der Abstand  $r$  nur sehr viel größer ist als die größte Abmessung des Kontaktgebiets. Das Verschiebungsfeld gehorcht unter den gleichen Voraussetzungen der Gleichung (3.41):

$$u(r, t) = \frac{F_N t}{4\pi\eta r}.$$

## 4.2. Indentierung zylindrischer Stempel

In diesem Abschnitt wird der Normalkontakt mit einem zylindrischen Stempel betrachtet. Dabei wird auf die Ergebnisse des vergleichbaren elastischen Problems zurückgegriffen. Diese wurden bereits im Abschnitt 2.1 erarbeitet, als es darum ging, die Methode der Dimensionsreduktion am Beispiel des elastischen Normalkontakts zu motivieren.

Neben der Bestimmung einiger grundlegender Ergebnisse selbst, verfolgt dieser Abschnitt noch einige untergeordnete Ziele. Zum einen werden die in Abschnitt 3.5 ange-rissenen Möglichkeiten der Rücktransformation (vergleiche Abbildung 3.2 und Erläuterungen) mit Beispielen unterlegt. Zum anderen sollen die mit der Methode der Dimensionsreduktion gewonnenen Ergebnisse mit denen eines unabhängigen Verfahrens, nämlich der Randlemente-Methode, verglichen werden.

Die Stirnfläche eines zylindrischen Stempels (vergleiche Abbildung 2.1) wird unter der Wirkung einer konstanten äußeren Kraft in den viskosen Halbraum gedrückt. Gesucht ist die Eindringtiefe  $\delta$ . Im Folgenden werden die verschiedenen Möglichkeiten zur Lösung dieses Kontaktproblems vorgeführt. Alle vorgestellten Lösungswege beruhen auf Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen. Im Gegensatz dazu ist bei diesem einfachen Beispiel die Methode der Dimensionsreduktion nicht unbedingt erforderlich.

Das betrachtete Beispiel ist eines, bei dem die Methode der Dimensionsreduktion das exakte Ergebnis liefert. Alle vorgestellten Lösungswege führen daher zum selben Ergebnis. Einige Schritte kommen in mehreren Lösungswegen vor. In diesem Fall werden sie nur beim ersten Auftauchen ausführlich erläutert. Die Lösungswege A bis D sind in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt.

Ein Teil der Ergebnisse dieses Abschnitts wurde von Kürschner und Filippov [63] sowie von Kürschner, Popov und Filippov [71] publiziert.

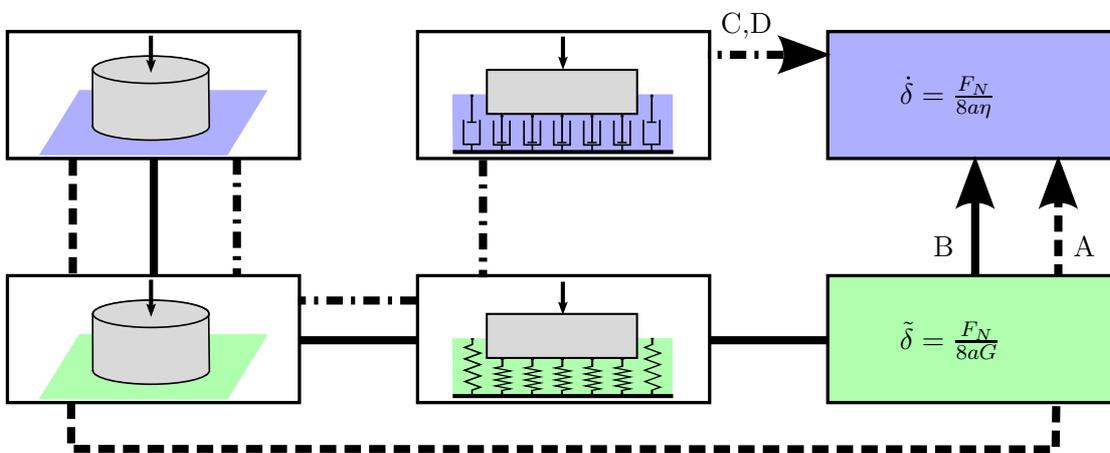


Abbildung 4.1.: Schematische Darstellung der Lösungswege A (gestrichelt), B (durchgezogen) sowie C und D (Strich-Punkt); obere Reihe von links nach rechts: viskoses 3D-Kontaktproblem, 1D-Modell und Lösung, untere Reihe analog für das vergleichbare elastische Problem; Lösungsweg E ist nicht dargestellt

### Lösungsweg A: Analytische Behandlung des Originalsystems

Zuerst wird ein Lösungsweg betrachtet, welcher von der Methode der Dimensionsreduktion unabhängig ist: die analytische Betrachtung des dreidimensionalen Systems.

Der erste Schritt ist laut den Ausführungen des vorherigen Kapitels die Formulierung eines vergleichbaren elastischen Problems. Das ist aber einfach der Eindruck desselben Stempels in einen inkompressiblen elastischen Halbraum. Eben dieses Problem war bereits Inhalt des Abschnitts 2.1 und auch dessen Lösung ist dort aufgeführt (vergleiche

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

Gleichung (2.1)). Die Eindringtiefe  $\tilde{\delta}$  des vergleichbaren elastischen Problems ist somit:

$$\tilde{\delta} = \frac{F_N}{8aG}. \quad (4.3)$$

Dabei sind  $a$  der Radius der Stirnfläche,  $G$  der Schubmodul des elastischen Materials und  $F_N$  die äußere Kraft. Weiterhin ist für dieses Problem auch die Spannungsverteilung im Kontaktgebiet bekannt. Diese ist radialsymmetrisch und gehorcht dem Gesetz (vergleiche zum Beispiel [18]):

$$\tilde{\sigma}(r) = \sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}, \quad r \leq a \quad (4.4)$$

mit der zentralen Spannung

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{2\pi a^2}. \quad (4.5)$$

In der Lösung für das vergleichbare elastische Problem müssen nun die Materialparameter durch die des viskosen Problems ersetzt werden. Das wurde sehr detailliert bereits in Abschnitt 3.4 vorgeführt. Die Ausführungen an dieser Stelle sollen daher etwas knapper ausfallen. Offenbar genügt das hier betrachtete Kontaktproblem den Annahmen des Abschnitts 3.4. Insbesondere wird dasselbe Materialgesetz verwendet und der Verlauf der äußeren Kraft lässt sich durch die Gesetzmäßigkeit (3.31) beschreiben, was die Anwendung der Transformation (3.44) gestattet. Das bedeutet, dass in der Lösung des vergleichbaren elastischen Problems lediglich der Schubmodul durch die Viskosität und die Deformation durch die Deformationsgeschwindigkeit ersetzt werden müssen.

Für das viskose Kontaktproblem ergeben sich so die folgenden Ergebnisse: Aus Gleichung (4.3) erhält man die Geschwindigkeit  $\dot{\delta}$  mit der die Indentierung erfolgt:<sup>30</sup>

$$\dot{\delta} = \frac{F_N}{8a\eta}. \quad (4.6)$$

Diese Lösung beinhaltet noch eine weitreichendere Folgerung. Der viskose Normalkontakt (mit einem starren Indenter) ist durch die konstante Deformationsgeschwindigkeit im Kontakt definiert. Von der Geometrie des Indenters geht nur die Eigenschaft ein, dass die Querschnittsfläche ein Kreis mit dem Radius  $a$  ist. Abgesehen von dieser Einschränkung ist die genaue Gestalt der Oberfläche offenbar ohne Bedeutung, vergleiche [63]. Im folgenden Abschnitt wird diese Überlegung eine zentrale Rolle spielen.

Durch Integration der Gleichung (4.6) über die Zeit ergibt sich daraus die Indentierungstiefe:

$$\delta(t) = \frac{F_N}{8a\eta}t. \quad (4.7)$$

Hierbei wurde die Anfangsbedingung  $\delta(t=0) = 0$  verwendet.

---

<sup>30</sup>Die Kontaktbedingung erzwingt, dass innerhalb des Kontaktgebiets die Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{u}$  der Halbraum-Oberfläche mit der Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$  übereinstimmt. Im weiteren Verlauf wird wiederholt auf Gleichung (4.6) verwiesen. Dabei wird fallweise auch auf die Deformationsgeschwindigkeit Bezug genommen, ohne dass besonders auf diesen Umstand hingewiesen wird.

Die Spannungsverteilung (4.4) und die zentrale Spannung (4.5) sind offenbar nicht vom Materialverhalten des Halbraums abhängig und gelten unverändert auch für das viskose Problem.

Insbesondere dieses letzte Resultat ist auf den ersten Blick überraschend. Auf den zweiten Blick ist es jedoch nachvollziehbar. Dass der funktionale Zusammenhang (4.4) sowohl für den elastischen als auch für den viskosen Kontakt gilt, wird offenbar, wenn das gestellte Problem genauer betrachtet wird. In beiden Fällen ist derselbe Typ einer Differential- bzw. Integralgleichung (abhängig von der konkreten Formulierung) zu lösen. Das wird beispielsweise in der Randintegral-Formulierung deutlich, in der sich die Deformationen bzw. Deformationsgeschwindigkeiten aus dem Faltungsintegral der Spannungsverteilung mit der Greenschen Funktion (3.42) bzw. (3.43) ergeben. Beide Formulierungen unterscheiden sich lediglich in der Bezeichnung der Variablen, die aber unerheblich ist.

Zusätzlich sind auch die rechten Seiten bei beiden Problemen gleich. In einem Fall wird die Lösung für eine (im Kontaktgebiet) konstante Deformation gesucht, im anderen Fall für eine (im selben Kontaktgebiet) konstante Deformationsgeschwindigkeit. Der einzige Unterschied liegt wiederum in der Bezeichnung der Variablen. Dasselbe gilt auch für die Randbedingungen. Unter diesen Voraussetzungen müssen aber zwangsläufig auch die Lösungen, das heißt die Spannungsverteilungen, vom selben Typ sein und können sich höchstens um einen konstanten Faktor unterscheiden. Tatsächlich ist nicht einmal das der Fall. Das folgt unmittelbar, weil das Integral der Spannungen über die Kontaktfläche gerade die äußere Kraft ergeben muss, die in beiden Problemen denselben Wert hat. Aus diesem Grund sind die Spannungsverteilungen (4.4) tatsächlich identisch und auch die zentralen Spannungen (4.5) stimmen überein.

## Lösungsweg B: Dimensionsreduktion und Rücktransformation der elastischen Lösung

Als Zweites erfolgt die Lösung des Kontaktproblems durch Resubstitution der Materialparameter in der Lösung des vergleichbaren elastischen Problems unter Zuhilfenahme der Methode der Dimensionsreduktion, vergleiche Abbildung 4.1. Das entspricht der ersten in Abschnitt 3.5 genannten Möglichkeit zur Resubstitution der Materialparameter. In der Abbildung 3.2 ist dieser Weg mit a bezeichnet.

Auch bei dieser Vorgehensweise besteht der erste Schritt darin, ein vergleichbares elastisches Problem zu identifizieren. Das ist bereits im ersten Lösungsweg geschehen, auf eine Wiederholung wird verzichtet.

Der nächste Schritt ist das Finden einer Formulierung dieses elastischen Problems mit der Methode der Dimensionsreduktion. Diese Formulierung wurde im Abschnitt 2.1 vorgestellt: Der elastische Halbraum wird auf eine Kette unabhängiger Federn mit der Steifigkeit  $k_N = 4Gb$  (Gleichung (2.2)) abgebildet. Das eindimensionale Modell des zylindrischen Stempels ist ein Rechteck der Breite  $2a$ . Im Lösungsweg C wird dieses Modell erneut aufgegriffen.

An dieser Stelle wird jedoch nun das vergleichbare elastische Problem mit der Methode der Dimensionsreduktion gelöst. Das geschieht, indem das Rechteck mit der Kraft  $F_N$  in die elastische Bettung eingedrückt wird (vergleiche Abbildung 2.2). Beide Körper sind

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

auf der Länge  $2a$  in Kontakt. Die Federn haben jeweils den Abstand  $b$ . Somit verteilt sich die Last auf  $2a/b$  Federn. Da die einzelnen Federn voneinander unabhängig sind, verteilt sich die äußere Kraft  $F_N$  gleichmäßig auf diese Federn. An jeder einzelnen greift daher die Kraft

$$f_N = F_N \frac{b}{2a} \quad (4.8)$$

an. Laut Federgesetz führt das mit der oben genannten Steifigkeit zu einer Stauchung der Federn um

$$\tilde{u} = \frac{F_N}{8aG}. \quad (4.9)$$

Aufgrund der Kontaktbedingung ist die Deformation  $\tilde{u}$  mit der Verschiebung des Indenters, sprich der Indentierungstiefe  $\tilde{\delta}$ , identisch:

$$\tilde{\delta} = \frac{F_N}{8aG}. \quad (4.10)$$

Gleichung (4.10) ist die Lösung des vergleichbaren elastischen Kontaktproblems mit der Methode der Dimensionsreduktion. Wie bereits im Abschnitt 2.1 gezeigt wurde, stimmt diese mit der entsprechenden Lösung (4.3) des dreidimensionalen Problems überein. Die Spannungsverteilung lässt sich auf diesem Wege nicht unmittelbar berechnen. Heß hat jedoch in seiner Dissertation [9] gezeigt, wie sich auch diese aus dem eindimensionalen Modell ermitteln lässt (vergleiche dort den Abschnitt 2.3).

Der letzte Schritt ist die Resubstitution der Parameter des viskosen Materials. Er verläuft exakt wie im Lösungsweg A und reproduziert die Gleichungen (4.6) und (4.7). Auf die erneute Darstellung dieses Schrittes wird verzichtet.

#### Lösungsweg C: Dimensionsreduktion und Rücktransformation des Modells

Bei dieser Vorgehensweise wird das Kontaktproblem auch erst auf ein vergleichbares elastisches Problem zurückgeführt und dieses dann auf ein eindimensionales Modell abgebildet. Diese Schritte wurden bereits im Zuge des Lösungsweges B vorgeführt. Dort wurde eine Lösung für das vergleichbare elastische Modell gesucht und dann die Resubstitution der Materialparameter in dieser Lösung vorgenommen wurde. Hier wird stattdessen das Materialgesetz im Modell ersetzt und dann eine Lösung für das viskose Modell gesucht.

Nachdem also die Formulierung des vergleichbaren elastischen Problems mit der Methode der Dimensionsreduktion gefunden wurde, wird in dieser das elastische Materialverhalten durch das viskose ausgetauscht. Gemäß Abschnitt 3.6 werden dazu die Federn der elastischen Bettung durch Dämpfer mit der Charakteristik

$$f_N(t) = 4b\eta\dot{u}(t) \quad (4.11)$$

ersetzt.

Als letzter Schritt wird das viskose Kontaktproblem anhand des eindimensionalen Modells gelöst. Analog zur Argumentation im Lösungsweg B, verteilt sich die äußere Kraft gleichmäßig auf alle Dämpfer im Kontaktgebiet, so dass an jedem die Kraft

$$f_N = F_N \frac{b}{2a} \quad (4.12)$$

angreift. Diese bewirkt laut Gleichung (4.11) eine Deformation mit der Geschwindigkeit

$$\dot{u}(t) = \frac{F_N}{8a\eta}. \quad (4.13)$$

Aufgrund der Kontaktbedingung ist diese mit der Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$  identisch. Damit ist wiederum die Lösung (4.6) reproduziert und Gleichung (4.7) ergibt sich daraus durch Integration nach der Zeit.

Zusätzlich zu den drei vorgeführten Möglichkeiten der analytischen Lösung, lässt sich das Kontaktproblem auch numerisch simulieren. Von den vielen denkbaren Möglichkeiten sollen hier nur zwei angerissen werden.

### Lösungsweg D: Numerische Simulation mit der Methode der Dimensionsreduktion

Im Lösungsweg C wurde ein eindimensionales viskoses Modell nach der Methode der Dimensionsreduktion konstruiert. Dieses lässt sich sehr einfach programmieren. Die besonderen Eigenschaften der Methode, nämlich die Betrachtung eines eindimensionalen Systems und die Unabhängigkeit der einzelnen Dämpfer, führen zu einem im Vergleich zu anderen Verfahren sehr schnellen Algorithmus.

Das hier betrachtete Problem erlaubt es darüber hinaus sogar, das gesamte Kontaktgebiet als ein Element der Länge  $2a$  zu betrachten. Es ist daher naheliegend, dass auch eine numerische Implementierung der Methode der Dimensionsreduktion das Ergebnis (4.6) bzw. (4.7) reproduziert. Die Spannungsverteilung lässt sich aus dem Modell wiederum nicht unmittelbar ablesen. Dasselbe gilt für die Deformation außerhalb des Kontaktgebiets.

### Lösungsweg E: Numerische Simulation mit der Randelemente-Methode

Als letzter Lösungsweg wird die numerische Simulation mit der Randelemente-Methode betrachtet. Das zugrunde liegende Verfahren beruht auf der Greenschen Funktion (3.43) des viskosen Normalkontakts. Eine kurze Beschreibung des Verfahrens ist in den Abschnitten A.1 und A.2 enthalten. Die Komplexität ist zwar viel höher als bei der Methode der Dimensionsreduktion, aber wiederum deutlich geringer als bei einer Diskretisierung des betrachteten Volumens. Dafür liefert das Randelemente-Verfahren auch die Spannungsverteilung und die Deformation der Elastomer-Oberfläche außerhalb des Kontaktgebiets.

In den Abbildungen 4.2 und 4.3 sind Ergebnisse für eine numerische Simulation mit Randelementen gezeichnet. Für das dargestellte Beispiel wurde ein Stempel mit dem Radius  $a = 1$  m unter der Wirkung einer Normalkraft  $F_N = 1$  N in einen viskosen Halbraum gedrückt, dessen Viskosität  $\eta = 1$  Pa·s beträgt. Von der Oberfläche des Halbraums wird ein Quadrat von 2 m Kantenlänge in 129x129 Elemente diskretisiert. Zu sehen ist jeweils nur eine Hälfte dieses Bereichs.

In Abbildung 4.2 ist die Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{u}$  der Elastomer-Oberfläche dargestellt. Diese ist auf die analytische Lösung (4.6) der Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

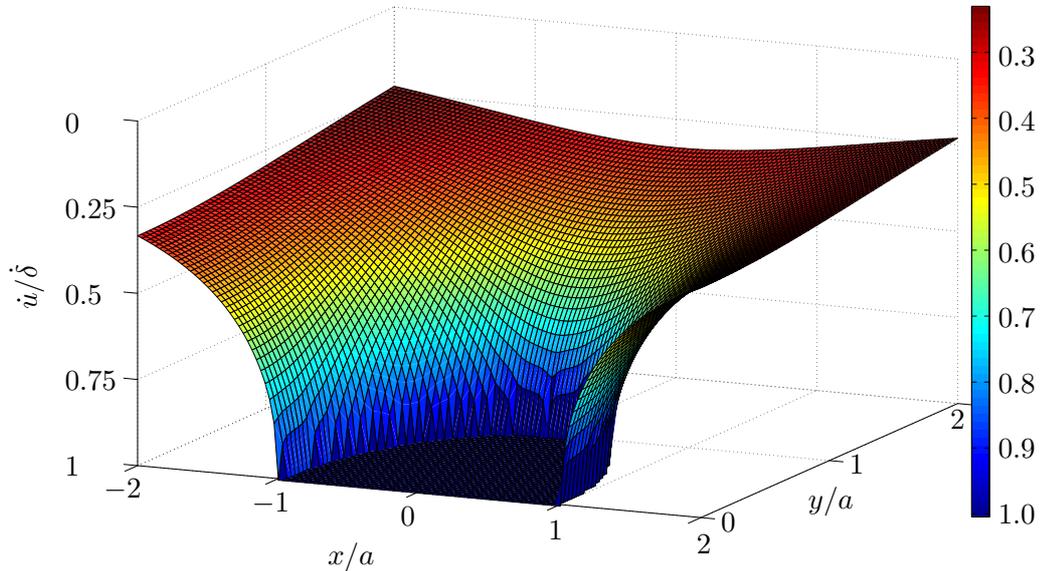


Abbildung 4.2.: Darstellung der numerisch ermittelten Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{u}$ , normiert auf die analytische Lösung (4.6) der Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$

normalisiert. In der Mitte ist ein ebener Bereich auf dem Niveau  $\dot{u}/\dot{\delta} = 1.0021$  zu erkennen. Das ist das Kontaktgebiet. Die Abweichung von eins lässt sich als Diskretisierungsfehler erklären. Auf diese Problematik wird im Anschluss kurz eingegangen. Außerhalb des Kontaktgebiets fällt die Deformationsgeschwindigkeit proportional zum Kehrwert des Abstands ab und nähert sich asymptotisch der Null an. Hierin lässt sich die Greensche Funktion (3.43) erkennen (vergleiche dazu den letzten Teil des Abschnitts 4.1).

Denselben Verlauf zeigt auch die Deformation  $u$  zu einem beliebigen festen Zeitpunkt  $t > 0$ , wenn sie auf die analytische Lösung (4.7) der Indentierungstiefe  $\delta$  normalisiert wird. Dass das so sein muss, lässt sich durch einfache Überlegungen zeigen. Die Funktionen für die Deformation und die Indentierungstiefe unterscheiden sich von denen für die Deformationsgeschwindigkeit respektive die Indentierungsgeschwindigkeit jeweils nur durch einen zusätzlichen Faktor, der Indentierungsdauer  $t$ . In der normalisierten Deformation, also dem Quotient aus Deformation und Indentierungstiefe, kürzt sich dieser Faktor für  $t > 0$  wieder heraus. Somit sind die normalisierte Deformation  $u/\delta$  und die normalisierte Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{u}/\dot{\delta}$  (bis auf numerische Fehler) identisch. Auf die gesonderte Darstellung der Deformation wird daher verzichtet.

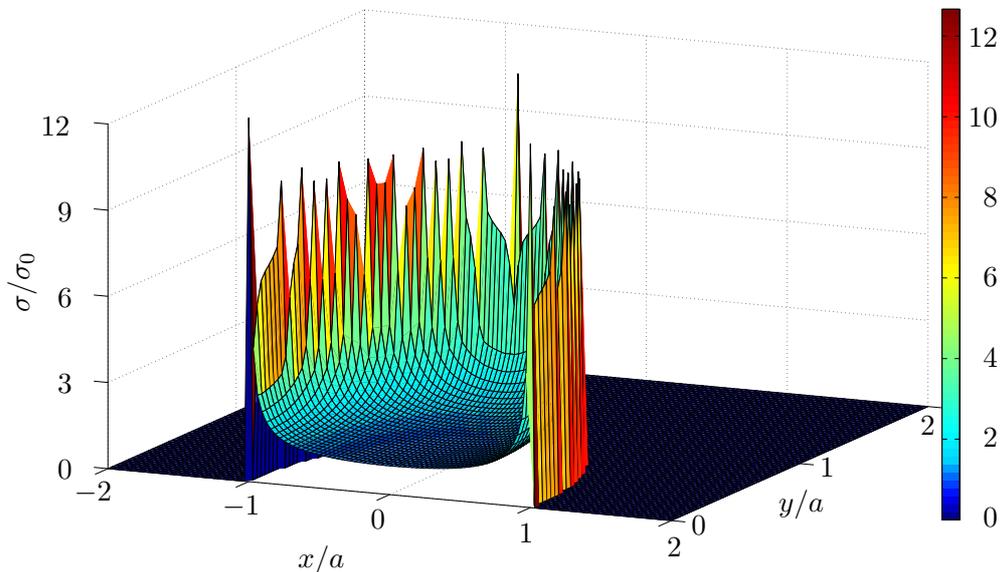


Abbildung 4.3.: Darstellung der numerisch ermittelten Spannungsverteilung  $\sigma$ , normiert auf die analytische Lösung (4.5) der zentralen Spannung  $\sigma_0$ , Erläuterungen im Text

In Abbildung 4.3 ist die Spannungsverteilung über der diskretisierten Fläche zu sehen. Diese wurde auf die analytische Lösung (4.5) der zentralen Spannung  $\sigma_0$  normalisiert. In der Nähe des Koordinatenursprungs lässt sich die Spannungsverteilung (4.4) erahnen. Zu sehen ist ein leicht gewölbtes Plateau, das im Zentrum den Wert  $\sigma/\sigma_0 = 0.9991$  aufweist. Die Abweichung von eins ist wiederum eine Folge der Diskretisierung. Am Rand des Kontaktgebiets ist die für dieses Problem charakteristische Ringsingularität zu sehen. Es ist gut zu erkennen, dass die Elemente direkt auf dem Rand des Kontaktgebiets stark von der Diskretisierung beeinflusst werden. Der Bereich außerhalb des Kontaktgebiets ist spannungsfrei.

Für die Abbildungen 4.2 und 4.3 wurden Randelemente-Simulationen mit  $129^2$  Elementen durchgeführt. Die Größenordnung ist hauptsächlich der grafischen Darstellung geschuldet. Das behandelte Beispiel des zylindrischen Stempels ist sehr robust und wenig sensitiv gegenüber der Diskretisierung. Bei aufwendigeren Oberflächen und insbesondere bei rauen Oberflächen ist dagegen eine geeignete Diskretisierung die Grundvoraussetzung für brauchbare Ergebnisse.

Um den Einfluss der Diskretisierung an diesem Beispiel sichtbar zu machen, wird im

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

Folgendes das vorgestellte System mit unterschiedlich feinen Diskretisierungen simuliert. Dazu wird die betrachtete Fläche, das heißt das Quadrat mit 2 m Kantenlänge, nacheinander in

$$N = (2^n + 1)^2, \quad n = 4, \dots, 11 \quad (4.14)$$

Elemente zerlegt. Im ersten Fall,  $n = 4$ , sind das 17x17 Elemente und im letzten 2049x2049. Der Exponent  $n$  in der Gleichung (4.14) wird in den folgenden Abbildungen als Parameter zur Beschreibung der Diskretisierung benutzt.

Im linken Teil der Abbildung 4.4 ist der relative Fehler  $\Delta A$  für den Flächeninhalt der Stirnfläche des Stempels in Abhängigkeit von der Diskretisierung, ausgedrückt durch den Exponenten  $n$ , dargestellt. Der relative Fehler ist definiert durch

$$\Delta A := \left| \frac{A_n - A}{A} \right|. \quad (4.15)$$

Dabei sind  $A_n$  der Flächeninhalt der Stirnfläche des diskretisierten Stempels und  $A = \pi a^2$  der entsprechende Wert für den Originalstempel. Da bei dieser Indenterform die gesamte Stirnfläche in Kontakt mit dem Elastomer ist, ist die in Gleichung (4.15) definierte Größe zugleich der relative Fehler für den Flächeninhalt des Kontaktgebiets.

Bei der größten Diskretisierung,  $n = 4$ , beträgt der relative Fehler der Kontaktfläche knapp drei Prozent. Wie nicht anders zu erwarten, verkleinert sich dieser mit jedem Übergang zu einer feineren Diskretisierung. Bei der feinsten ist er auf  $10^{-4}$  abgefallen. Es sei darauf hingewiesen, dass die Abszisse linear, die Ordinate aber logarithmisch eingeteilt ist. Das ist auch für die folgenden Graphen der Fall.

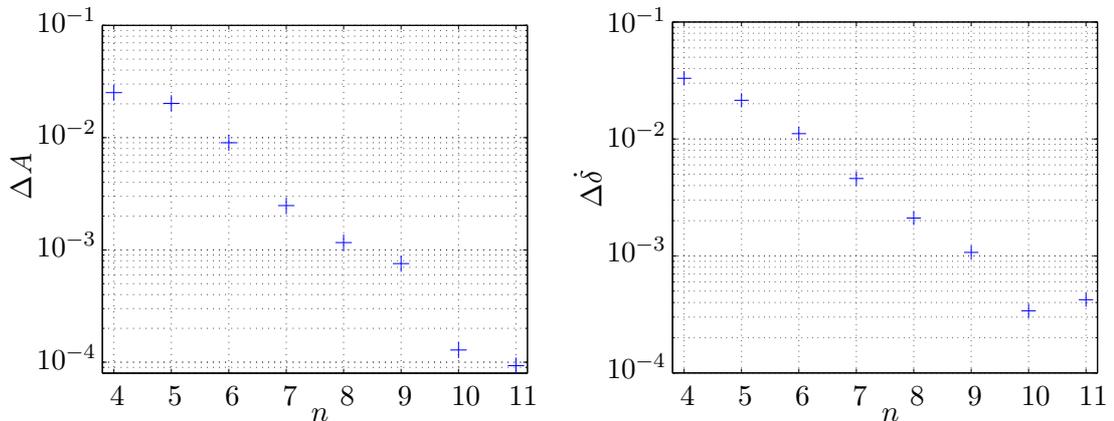


Abbildung 4.4.: Logarithmische Darstellung des relativen Fehlers  $\Delta A$  der Kontaktfläche (links) bzw. der Indentierungsgeschwindigkeit  $\Delta \dot{\delta}$  (rechts) jeweils für verschiedene feine Diskretisierungen, Erläuterungen im Text

Im rechten Teil der Abbildung 4.4 ist der relative Fehler der Indentierungsgeschwindigkeit,

$$\Delta \dot{\delta} := \left| \frac{\dot{\delta}_n - \dot{\delta}}{\dot{\delta}} \right| \quad (4.16)$$

gezeigt. Die Größen  $\hat{\delta}_n$  und  $\hat{\delta}$  sind die numerisch bestimmte Indentierungsgeschwindigkeit und ihr analytischer Wert gemäß der Gleichung (4.6). Die Abhängigkeit dieses Fehlers von der Diskretisierung folgt im Wesentlichen dem gleichen Gesetz wie der relative Fehler der Kontaktfläche. Auch das ist mit Hinblick auf Gleichung (4.6) nicht überraschend. Offenbar fällt der Fehler für die feinste Diskretisierung etwas aus der Reihe. Das ist vermutlich damit zu erklären, dass diese Simulation aufgrund eines anderen Abbruchkriteriums (als die Simulationen mit gröberer Diskretisierung) beendet wurde und das Ergebnis daher nicht bis zur selben Genauigkeit iteriert wurde.<sup>31</sup>

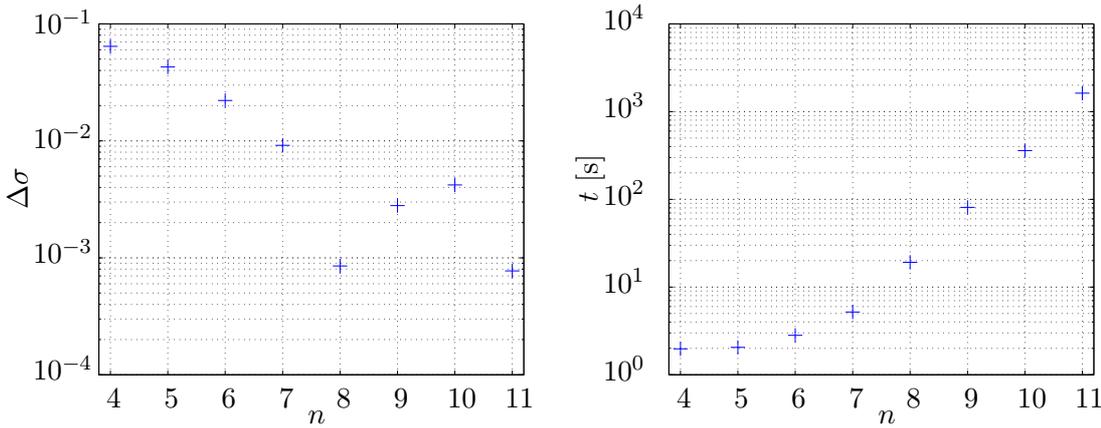


Abbildung 4.5.: Logarithmische Darstellung des relativen Fehlers der zentralen Spannung  $\Delta\sigma$  (links) sowie der Dauer  $t$  der Berechnung (rechts) jeweils für verschiedenen feine Diskretisierungen, Erläuterungen im Text

Der linke Teil der Abbildung 4.5 zeigt den relativen Fehler der zentralen Spannung  $\Delta\sigma$ . Diese ist analog zu den vorherigen Größen durch

$$\Delta\sigma := \left| \frac{\sigma_{0,n} - \sigma_0}{\sigma_0} \right| \quad (4.17)$$

definiert und  $\sigma_{0,n}$  bzw.  $\sigma_0$  sind die numerisch bestimmte zentrale Spannung respektive ihr analytischer Wert gemäß Gleichung (4.5). Auch dieser Fehler folgt einem ähnlichen Trend wie die vorherigen. Allerdings ist sein Absinken nicht ganz so stark ausgeprägt und zusätzlich größeren Schwankungen unterworfen. Die lassen sich dadurch erklären, dass sich in diesem Fall auch die Singularität am Rand des Kontaktgebiets auswirkt. Auf den Diskretisierungs-Elementen in unmittelbarer Nähe der Singularität kann die Spannung im Prinzip beliebig groß werden. Da das Integral über alle Spannungen aber gerade die äußere Kraft ergeben muss, wird so auch das Spannungsniveau im Zentrum des Kontaktgebiets beeinflusst.

Zur Verdeutlichung, zu welchem Preis diese Erhöhung der Genauigkeit erkaufte wird, ist im rechten Teil von Abbildung 4.5 die benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit der Diskretisierung grafisch dargestellt. Die Werte für die größten Diskretisierungen unterscheiden

<sup>31</sup>Eine kurze Beschreibung des Algorithmus ist im Anhang zu finden.

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

sich fast nicht. In diesem Bereich ist der Wasserkopf<sup>32</sup> umfangreicher als die eigentliche Berechnung. Selbstredend sind die absoluten Werte stark von der Hardware und den Einzelheiten der Implementierung abhängig und daher wenig aussagekräftig. Die eigentliche Information liegt daher nicht in den absoluten Werten, sondern in ihrem Verhältnis. Für die größten Diskretisierungen wurde das Ergebnis mit zwei Iterationsschritten von jeweils wenigen Millisekunden Länge berechnet. Für die zweitfeinste sind es dagegen 22 Iterationsschritte je 15 Sekunden, für die feinste 26 Schritte je 60 Sekunden.

#### Diskussion der Ergebnisse

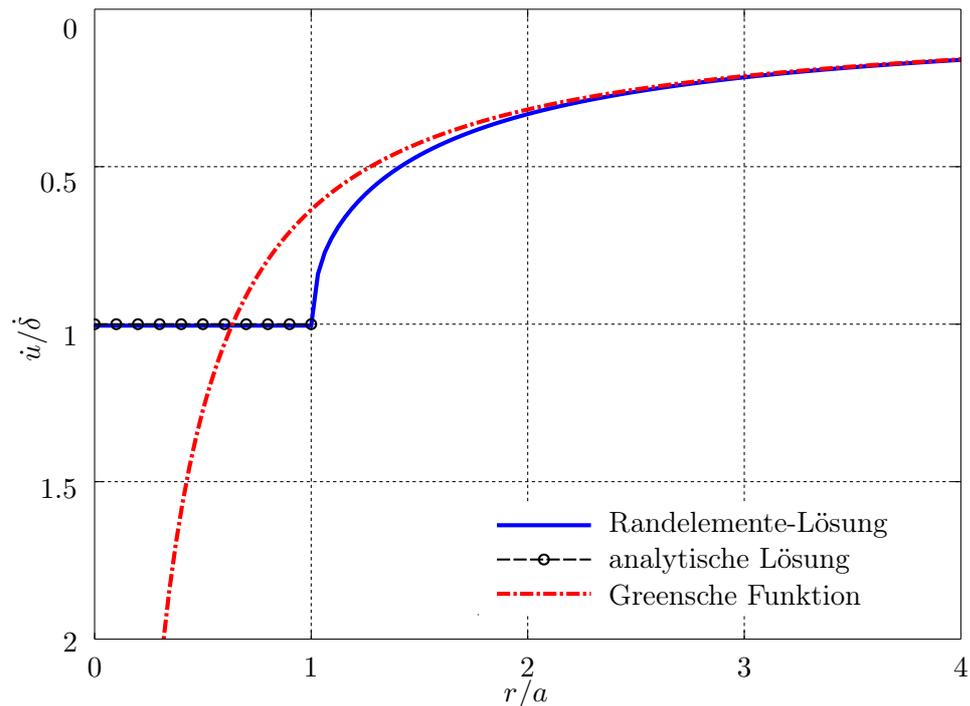


Abbildung 4.6.: Vergleich der normalisierten Deformationsgeschwindigkeit nach den verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten

Alle fünf Lösungswege führen auf dasselbe Ergebnis sowohl für die Indentierungstiefe als auch für die Indentierungsgeschwindigkeit. Die analytischen Verfahren liefern dabei die exakten Werte, die numerischen können aufgrund ihrer Natur geringfügig davon abweichen. Hierbei ist grundsätzlich das Randelemente-Verfahren anfälliger für numerische Fehler als die Simulationen mit der Methode der Dimensionsreduktion.

In Abbildung 4.6 sind die verschiedenen Ergebnisse für die normalisierte Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{u}/\dot{\delta}$  als Funktion des Abstandes  $r$  (normiert auf den Kontaktradius  $a$ )

<sup>32</sup>Datenfelder initialisieren, Dateien anlegen, Grafiken erstellen etc.

### 4.3. Indentierung rotationssymmetrischer Körper

zu sehen. Für das Randelemente-Verfahren ist hier, abweichend von den bisherigen Betrachtungen, ein größerer Bereich diskretisiert, nämlich ein Quadrat mit der Kantenlänge  $L = 8$  m. Die Diskretisierungslänge  $b$  ist unverändert, dafür ist die Anzahl der Elemente auf  $513^2$  erhöht. Die übrigen Parameter werden beibehalten.

Die analytische Lösung für die Deformationsgeschwindigkeit im Kontaktgebiet ist durch die schwarze gebrochene Linie gekennzeichnet und zusätzlich durch Kreise hervorgehoben. Diese Kurve steht stellvertretend für die analytische Lösung des Originalsystems (Lösungsweg A), die analytische Lösung mit Hilfe der Dimensionsreduktion (Lösungswege B und C) und auch für die numerische Lösung mit dieser Methode (Lösungsweg D). Die blaue durchgezogene Kurve zeigt die Lösung mit der Randelemente-Methode. Innerhalb des Kontaktgebiets weicht sie geringfügig von der analytischen Lösung ab. Dafür liefert diese Methode auch die Deformationsgeschwindigkeit außerhalb des Kontaktgebiets. In ausreichender Entfernung, etwa ab dem doppelten Radius des Stempels, stimmt diese mit der Greenschen Funktion (3.43) überein,<sup>33</sup> welche hier durch die rote Strich-Punkt-Linie dargestellt ist. Die Methode der Dimensionsreduktion (Lösungswege B bis D) macht keine Aussage über die Deformation bzw. Deformationsgeschwindigkeit außerhalb des Kontaktgebiets.

In Abbildung 4.7 ist der Verlauf der Normalspannung dargestellt. Die analytische Lösung (4.4) nach Lösungsweg A ist als blaue Linie gezeichnet, die Lösung nach der Randelemente-Methode (Lösungsweg E) durch schwarze Kreise dargestellt. Beide Verläufe weichen nur minimal voneinander ab, was am Rand des Kontaktgebiets sichtbar ist. Die Methode der Dimensionsreduktion liefert den Verlauf der Spannung erst nach einer nachgeordneten Berechnung und ist deshalb nicht dargestellt. Die Details dazu sind in der Dissertation von Heß [9] nachlesbar.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der Eindruck eines zylindrischen Stempels in einen viskosen Halbraum mit allen vorgestellten Lösungswegen erfolgreich behandelt werden kann.

### 4.3. Indentierung rotationssymmetrischer Körper

Im vorherigen Abschnitt wurde der Eindruck eines zylindrischen Stempels in einen viskosen Halbraum detailliert untersucht. In diesem Abschnitt werden nun axialsymmetrische Indenter betrachtet, deren Oberflächen durch die Rotation eines Monoms erzeugt werden. Im Abschnitt 2.3 wurde bereits das vergleichbare elastische Problem angerissen und die Notation eingeführt. Darauf wird nun wieder Bezug genommen. Allerdings wurde dort nur der Spezialfall des Rotationsparaboloids detailliert betrachtet und gelöst.

In diesem Abschnitt werden drei verschiedene Lösungsansätze verfolgt: die analytische Betrachtung des dreidimensionalen Problems, die Anwendung der Methode der Dimensionsreduktion und die numerische Simulation mit der Randelemente-Methode. Auf die Darstellung der verschiedenen Lösungswege unter Nutzung der Methode der Dimensionsreduktion wird verzichtet. Dennoch sind sie, analog zum vorherigen Abschnitt, anwendbar

---

<sup>33</sup>Vergleiche dazu die Ausführungen zum globalen Verhalten.

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

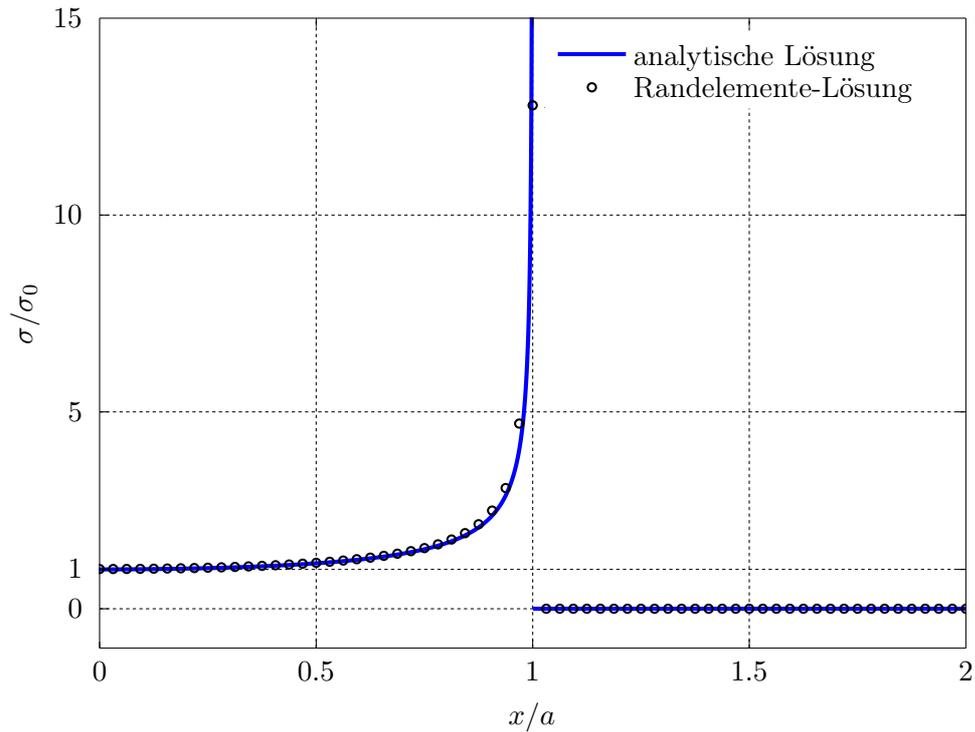


Abbildung 4.7.: Vergleich der numerischen und der analytischen Lösung der normalisierten Spannungsverteilung

und führen (bis auf mögliche Diskretisierungsfehler im Falle des numerischen Verfahrens) stets zum selben Ergebnis.

#### Lösungsweg A: analytische Behandlung des Originalsystems

Aufbauend auf Abschnitt 2.3 wird ein Indenter betrachtet, dessen Oberfläche durch die Rotation eines Monoms

$$g_p(r) = c_p r^p, \quad (4.18)$$

vom Grad  $p \in \mathbb{R}^+$  erzeugt wird.

Da der Indenter rotationssymmetrisch ist, ist in jeder beliebigen Höhe  $z > 0$  die Querschnittsfläche kreisförmig. Beim Eindruck des Indenters in einen isotropen Körper mit ebener Oberfläche ist daher das Kontaktgebiet ebenfalls kreisförmig, sofern die Symmetrieachse des Indenters senkrecht zur Oberfläche des Gegenkörpers ist. Davon wird im Folgenden stets ausgegangen. Da der Indenter außerdem als starr angenommen wird, bewegen sich alle Punkte seiner Oberfläche mit derselben Geschwindigkeit, nämlich der Indentierungsgeschwindigkeit. Die Kontaktbedingung erzwingt, dass alle Punkte des Gegenkörpers, die zum Kontaktgebiet gehören, sich ebenfalls mit der Indentierungsgeschwindigkeit bewegen. Diese Eigenschaft ist von der genauen Form der Indenter-Oberfläche,

### 4.3. Indentierung rotationssymmetrischer Körper

das heißt von dem Monom  $g_p$ , unabhängig. Damit liegen genau die Eigenschaften vor, die im vorherigen Abschnitt die Grundlage für die Gleichung (4.6) zur Berechnung der Deformationsgeschwindigkeit im Kontaktgebiet eines zylindrischen Stempels bildeten.

Offenbar ist zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  die Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}(t)$  durch die zu (4.6) analoge Beziehung

$$\dot{\delta}(t) = \frac{F_N}{8\eta a(t)} \quad (4.19)$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $a(t) > 0$  den gegenwärtigen Radius des Kontaktgebiets. Im Abschnitt 2.3 wurde die Tiefe des Kontaktgebiets als Kontakttiefe  $\delta_c$  bezeichnet (vergleiche Abbildung 2.5). Mit Hilfe der Indentergeometrie (4.18) lässt sich der Kontaktradius mit der Kontakttiefe in Verbindung bringen:

$$\delta_c(t) = g_p(r = a(t)) = c_p a(t)^p. \quad (4.20)$$

Zusammen mit der Beziehung (2.12) zwischen Eindrucktiefe  $\delta$  und Kontakttiefe folgt daraus

$$a(t) = \left( \frac{\delta(t)}{c_p \varkappa_p} \right)^{1/p}, \quad (4.21)$$

wobei  $\varkappa_p$  die in Gleichung (2.4) definierte Tiefenskalierung ist. Durch Einsetzen von Gleichung (4.21) in (4.19) und Umformulierung der Indentierungsgeschwindigkeit als Ableitung der Indentierungstiefe nach der Zeit ergibt sich:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{F_N}{8\eta} \left( \frac{c_p \varkappa_p}{\delta} \right)^{1/p}. \quad (4.22)$$

Trennung der Variablen und Integration mit der Anfangsbedingung  $\delta(t = 0) = 0$  liefern

$$\int_{\bar{\delta}=0}^{\delta} \bar{\delta}^{1/p} d\bar{\delta} = \int_{\tau=0}^t \frac{F_N}{8\eta} (c_p \varkappa_p)^{1/p} d\tau. \quad (4.23)$$

Daraus ergibt sich nach Auswertung der Integrale die Indentierungstiefe als Funktion der Zeit

$$\delta(t) = \left( \frac{1+p}{p} (\varkappa_p c_p)^{1/p} \frac{F_N t}{8\eta} \right)^{\frac{p}{1+p}} \quad (4.24)$$

sowie durch Ableitung die zugehörige Indentierungsgeschwindigkeit

$$\dot{\delta}(t) = \left[ \frac{p \varkappa_p}{1+p} \left( \frac{F_N}{8\eta} \right)^p \frac{c_p}{t} \right]^{\frac{1}{1+p}}, \quad (4.25)$$

ebenfalls in Abhängigkeit von der Zeit.

Aufgrund der vorherigen Überlegungen gehorcht die Spannungsverteilung der Gleichung (4.4) und die zentrale Spannung ist durch Gleichung (4.5) gegeben:

$$\sigma(r, t) = \sigma_0(t) \left( 1 - \frac{r^2}{a(t)^2} \right)^{-1/2}, \quad r \leq a \quad \text{mit} \quad \sigma_0(t) = \frac{F}{2\pi a(t)^2}. \quad (4.26)$$

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

In beiden Gleichungen ist wiederum der aktuelle Radius des Kontaktgebiets  $a(t)$  einzusetzen. Diesen erhält man durch Substitution der Gleichung (4.24) in (4.21):

$$a(t) = \left( \frac{1+p}{8p\kappa_p} \frac{F_N t}{c_p \eta} \right)^{\frac{1}{1+p}}. \quad (4.27)$$

#### Lösungsweg B: Methode der Dimensionsreduktion

In Abschnitt 2.3 wurde gezeigt, wie das eindimensionale Modell zu konstruieren ist. Das zu dem in Gleichung (4.18) definierten Indenter gehörende Ersatzsystem ist laut Gleichung (2.5):

$$\tilde{g}_p(x) = \kappa_p c_p |x|^p, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

Dabei ist  $\kappa_p$  die schon oben benutzte Tiefenskalierung. Wie vorher werden positiv-reelle Exponenten  $p$  zugelassen.

Angenommen, zum Zeitpunkt  $t$  ist der Indenter bis zur Tiefe  $\delta(t) > 0$  in den Halbraum eingedrückt. Die Geometrie (4.28) des Indenters legt den zugehörigen Kontaktradius  $a(t)$  fest:

$$a(t) = \left( \frac{\delta(t)}{c_p \kappa_p} \right)^{1/p}. \quad (4.29)$$

Dieser stimmt gemäß Konstruktion mit dem Radius des Kontaktgebiets im dreidimensionalen System überein.

Analog zum Originalsystem bewegen sich während der Indentierung alle Punkte des eindimensionalen Indenters mit derselben Geschwindigkeit, nämlich der Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$ . Aufgrund der Kontaktbedingung werden alle Elemente des viskosen Halbraums, die sich im Kontaktgebiet befinden, mit derselben Geschwindigkeit deformiert. Dann wirkt gemäß der Dämpfercharakteristik (3.64) auch auf jeden Dämpfer dieselbe Kraft. Das bedeutet, dass sich die Wechselwirkungskraft zwischen Indenter und Elastomer gleichmäßig auf alle Dämpfer im Kontaktgebiet verteilt. Andererseits muss die gesamte Wechselwirkungskraft aber gerade die äußere Kraft  $F_N$  kompensieren. Somit wirkt auf jeden Dämpfer im Kontaktgebiet die Kraft

$$f_N(t) = \frac{F_N b}{2a} = \frac{1}{2} F_N b \left( \frac{c_p \kappa_p}{\delta(t)} \right)^{1/p} \quad (4.30)$$

und bewirkt die Deformationsgeschwindigkeit

$$\dot{u}(x, t) = \begin{cases} \frac{F_N}{8\eta} \left( \frac{c_p \kappa_p}{\delta(t)} \right)^{1/p} & , \quad x(t) \leq a(t) \\ 0 & , \quad x(t) > a(t). \end{cases} \quad (4.31)$$

Die zweite Zeile der Lösung resultiert aus der Tatsache, dass die Dämpfer außerhalb des Kontaktgebiets nicht deformiert werden. Der in Gleichung (4.30) auftauchende Parameter  $b$  ist die Breite der einzelnen Dämpferelemente. Diese darf natürlich keinen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse haben und taucht daher in den folgenden Gleichungen auch nicht wieder auf.

### 4.3. Indentierung rotationssymmetrischer Körper

Weiter oben wurde bereits verwendet, dass wegen der Kontaktbedingung mit Gleichung (4.31) auch die Indentierungsgeschwindigkeit bestimmt ist:

$$\dot{\delta}(t) = \frac{F_n}{8\eta} \left( \frac{c_p \varkappa_p}{\delta(t)} \right)^{1/p}. \quad (4.32)$$

Diese Gleichung stimmt aber mit ihrer Entsprechung (4.22) des dreidimensionalen Originalsystems überein. Der weitere Lösungsweg verläuft daher völlig analog zum dreidimensionalen Fall und reproduziert die Ergebnisse (4.24) und (4.25).

#### Zwischenfazit

Bis hierher wurde gezeigt, dass auch in diesem Fall die Ergebnisse der Reduktionsmethode mit denen des dreidimensionalen Originalsystems übereinstimmen. Die Ergebnisse beider Wege werden im Folgenden zusammengefasst als analytische Lösung bezeichnet. Numerische Simulationen des eindimensionalen Modells nach der Methode der Dimensionsreduktion stimmen, bis auf Diskretisierungsfehler, mit der analytischen Lösung überein. Auf eine gesonderte Betrachtung dieser Simulationen wird daher verzichtet. Der Vollständigkeit halber werden ihre Ergebnisse aber später mit aufgeführt.

Die numerische Behandlung des Kontaktproblems mit Randelementen ist in der bisher gehandhabten Allgemeinheit nicht möglich. Das ist vor allem dem Umstand geschuldet, dass für die Simulationen konkrete Geometriedaten notwendig sind. Im Folgenden erfolgt daher die Beschränkung auf zwei spezielle Beispiele, auf die schon früher Bezug genommen wurde. Es werden sowohl Kegel als auch Rotationsparaboloide betrachtet. Ein Teil der Ergebnisse zum letzteren Fall wurden von Kürschner und Filippov [63] publiziert.

Der Kegellindenter entspricht dem Exponenten  $p = 1$  in Gleichung (4.18), das heißt, das erzeugende Monom  $g_1$  ist eine (Halb-)Gerade durch den Nullpunkt,

$$g_1(r) = c_1 r, \quad r \geq 0, \quad (4.33)$$

der Parameter  $c_1$  ist ihre Steigung und somit einheitenlos.

Die Tiefenskalierung hat laut Gleichung (2.4) den Wert  $\varkappa_1 = \frac{\pi}{2}$ . Die Gleichungen für die Indentierungstiefe (4.24) und die Indentierungsgeschwindigkeit (4.25) vereinfachen sich zu

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{c_1 F_N t}{\eta}} \quad (\text{Kegel}) \quad (4.34)$$

respektive

$$\dot{\delta}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{32} \frac{c_1 F_N}{\eta t}}. \quad (\text{Kegel}) \quad (4.35)$$

Verläufe dieser beiden Größen sind in Abbildungen 4.8 und 4.9 als durchgezogene Linien dargestellt.

Im Fall des Rotationsparabolooids ist der Exponent  $p = 2$  und das erzeugende Monom  $g_2$  der positive Teil einer Parabel

$$g_2(r) = c_2 r^2, \quad r \geq 0. \quad (4.36)$$

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

Der Parameter  $c_2$  hat die Einheit  $\text{m}^{-1}$ . Er beschreibt die Krümmung des Paraboloids und kann als Kehrwert des doppelten Krümmungsradius interpretiert werden, vergleiche dazu Gleichung (2.7) und die anschließenden Erklärungen.

Die Tiefenskalierung hat den Wert  $\varkappa_2 = 2$  und die Gleichungen für Indentierungstiefe (4.24) und -geschwindigkeit (4.25) vereinfachen sich zu

$$\delta(t) = \left( \frac{3}{8\sqrt{2}} \frac{\sqrt{c_2} F_N t}{\eta} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Rotationsparaboloid}) \quad (4.37)$$

und

$$\dot{\delta}(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{48} \left( \frac{F_N}{\eta} \right)^2 \frac{c_2}{t}}. \quad (\text{Rotationsparaboloid}) \quad (4.38)$$

In den Abbildungen 4.10 und 4.11 sind beispielhafte Verläufe beider Größen als durchgezogene Linie dargestellt.

### Simulationen mit Randelementen

Für die Simulation mit Randelementen werden überwiegend die Parameter des Abschnitts 4.2 beibehalten. Von der Oberfläche des Elastomers wird ein Quadrat mit der Kantenlänge  $L = 4 \text{ m}$  in  $129^2$  Elemente diskretisiert. Die äußere Kraft beträgt  $F_N = 1 \text{ N}$  und die Viskosität des Elastomers  $\eta = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Beide Indertypen sind so diskretisiert, dass sie eine kreisrunde Grundfläche mit einem Radius von einem Meter besitzen. Über den Ecken der diskretisierten Elastomer-Oberfläche befinden sich somit keine Indenter-elemente, hier ist kein Kontakt möglich.

Bei allen Indentern ist früher oder später die gesamte Oberfläche in Kontakt mit dem Elastomer. Die analytischen Lösungen gelten nur bis zu diesem Zeitpunkt. Danach verhalten sich sowohl der Kegel als auch das Rotationsparaboloid (und alle Indenterformen mit kreisrunder Grundfläche) wie ein zylindrischer Stempel. Diese Eigenschaft wurde bereits im Anschluss an Gleichung (4.6) beschrieben.

Wie lange es bis zum vollständigen Kontakt dauert, hängt bei festen Parametern (Radius, Kraft und Viskosität) vor allem von der Höhe des Indenters ab. Diese ist aber direkt mit der Steigung (beim Kegel) respektive der Krümmung (beim Rotationsparaboloid) verknüpft. Dieser Parameter soll im Folgenden über einen großen Bereich variiert werden. In Folge dessen wird auch die Zeitspanne bis zum vollständigen Kontakt stark variieren. Aus diesem Grund bricht in den folgenden Abbildungen die Gültigkeit der Kegel- bzw. Paraboloid-Lösung bei einigen Simulationen sehr frühzeitig zusammen. Es handelt sich dabei nicht um einen Fehler im Aufbau der einen oder der anderen Methode, stattdessen wird hier der Gültigkeitsbereich der Modelle verlassen.

### Diskussion der Ergebnisse

Es werden Kegel mit fünf verschiedenen Steigungen  $c_1 = 0.01, 0.03, 0.1, 0.3, 1$  betrachtet. Mindestens für den letzten Wert ist die Annahme kleiner Steigungen<sup>34</sup> nicht mehr

<sup>34</sup>Diese Annahme ist Teil der Halbraumnäherung, vergleiche Seite 8.

### 4.3. Indentierung rotationssymmetrischer Körper

erfüllt. Die Ergebnisse für den Kegel mit dieser Steigung sind daher im Folgenden mit Skepsis zu betrachten. Aufgrund der linearen Zusammenhänge sollten sich im Verhalten der Modelle keine qualitativen Abweichungen einstellen. Allerdings kann nicht davon ausgegangen werden, dass das auch für das reale System zutreffen würde.

In Abbildung 4.8 sind die Verläufe der Indentierungstiefe für diese fünf Kegel gezeichnet. Zu sehen sind jeweils die analytische Lösung (durchgezogene Linien) gemäß Gleichung (4.34) und die numerische Lösung aus Randelemente-Simulationen (gestrichelte Linien). Der Vollständigkeit halber ist die numerische Lösung nach der Methode der Dimensionsreduktion zu einzelnen Zeitpunkten mit Kreisen markiert. Verläufe gleicher Farben gehören jeweils zum selben Indenter. Die farbliche Zuordnung kann der Legende entnommen werden.<sup>35</sup>

Es ist zu erkennen, dass die Ergebnisse aller drei Lösungswege sehr gut übereinstimmen. Die analytische Lösung und die der Simulationen mit der Methode der Dimensionsreduktion sind gar nicht unterscheidbar. Allerdings bricht Letztere mit dem vollständigen Kontakt ab. Das numerische Modell besteht aus 10000 Elementen, was zahlenmäßig etwa mit dem Modell der Randelemente-Methode vergleichbar ist. Durch eine sehr viel geringere Anzahl an Elementen wäre es jedoch möglich, Diskretisierungsfehler sichtbar zu machen. Es wurde darauf verzichtet, da jene auch bei diesem Indentertyp keine Rolle spielen.

Im Gegensatz dazu sind in den Verläufen der Randelemente-Ergebnisse an zwei Stellen Abweichungen sichtbar. Zum einen sind diese bei dem Indenter mit der größten Steigung ( $c_1 = 1$ , magenta) bei einer Indentierungstiefe von  $\delta = 0.025$  m zu erkennen. In diesem Bereich umfasst das Kontaktgebiet nur sehr wenige Elemente. Außerdem hat der Indenter eine sehr hohe Geschwindigkeit. Neben der reinen Diskretisierungs-Problematik kommt auch der Umstand zum Tragen, der im Abschnitt 4.1 herausgestellt wurde: Bei Betrachtung einer Indentierung mit konstanter Kraft, entstehen bei sehr kleinen Kontaktgebieten unphysikalisch hohe Geschwindigkeiten.

Die anderen Abweichungen sind die oben vorhergesagten Effekte, wenn der Indenter in vollständigem Kontakt mit dem Elastomer ist. Im dargestellten Zeitraum sind diese nur bei den beiden Indentern mit der kleinsten Steigung (blaue und grüne Kurven) zu beobachten.

Für bekannte Parametersätze kann der Zeitpunkt, ab dem vollständiger Kontakt vorliegt, analytisch bestimmt werden. Die Bedingung ist, dass das Kontaktgebiet den Radius  $a_0$  der Indenter-Grundfläche erreicht. Mit Hilfe der geometrischen Zusammenhänge (4.33) des Kegels lässt sich aus Gleichung (4.34) die Grenze

$$\delta_1^l = \frac{F_N t}{4a_0 \eta} \quad (4.39)$$

bestimmen, an der das Verhalten von der Kegellösung zu der des zylindrischen Stempels übergeht. Die Steigung  $c_1$  ist nur noch implizit im Verhältnis von Indentierungstiefe und Radius der Grundfläche enthalten. In Abbildung 4.8 ist diese Gerade als schwarze Strichpunkt-Linie eingezeichnet. Links oberhalb dieser Grenze entspricht das Verhalten der

<sup>35</sup>Diese Kennzeichnung der verschiedenen Kurven ist in den Abbildungen 4.8 bis 4.11 einheitlich.

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

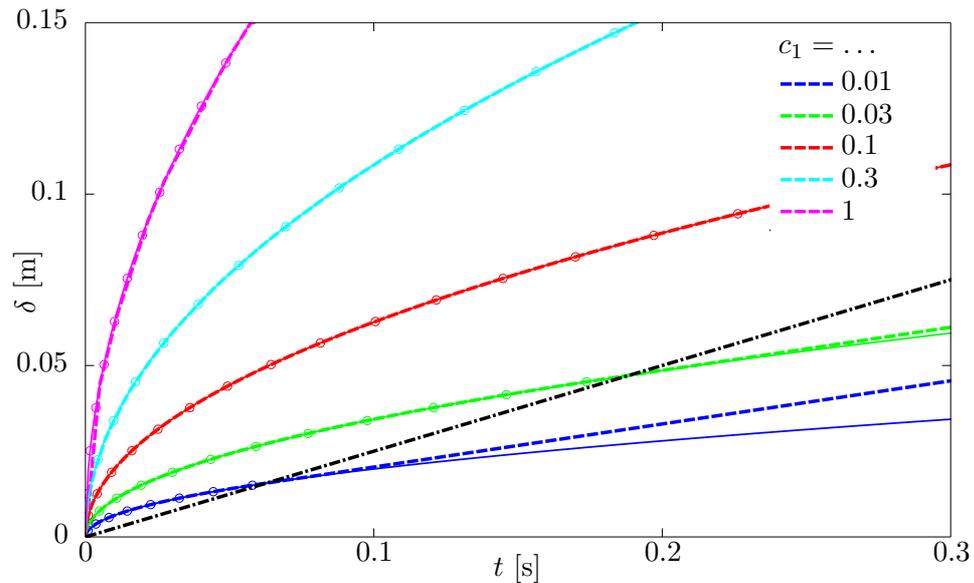


Abbildung 4.8.: Zeitlicher Verlauf der Indentierungstiefe für verschiedene Kegel: analytische (durchgezogene Linien) und numerische (Kreise) Lösung der Reduktionsmethode und Lösung der Randelemente-Methode (gestrichelte Linie). Verläufe gleicher Farbe gehören jeweils zum selben Indenter. Die schwarze Strich-Punkt-Linie kennzeichnet den Übergang von der Kegellösung zu der des zylindrischen Stempels (Gleichung (4.39)).

Randelemente-Simulationen der Kegellösung (4.34), rechts unterhalb der des Stempels aus Abschnitt 4.2.

Die Indentierungsgeschwindigkeiten dieser Kegel sind in Abbildung 4.9 zu sehen. Analog zur vorherigen Abbildung sind die analytische Lösung (durchgezogene Linie) gemäß Gleichung (4.35), die Randelemente-Lösung (gestrichelte Linie) und die Simulationsergebnisse mit der Methode der Dimensionsreduktion (Kreise) gezeichnet. Zwischen den analytischen Ergebnisse und denen der Dimensionsreduktion sind wiederum keine Unterschiede erkennbar. Allerdings sind hier die Abweichungen der Randelemente-Methode zum Teil deutlich zu sehen. Außerdem lässt sich erahnen, dass diese bei allen fünf Verläufen qualitativ vergleichbar sind. Zum Beispiel ist bei vier von fünf Kurven ein deutlicher Unterschied bei der Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta} \approx 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  zu erkennen. In diesem Bereich umfasst die Kontaktfläche nur wenige Elemente und die Diskretisierungseffekte bei der Vergrößerung der Kontaktfläche haben einen sichtbaren Einfluss.

Auch der Fall des vollständigen Kontakts ist gut erkennbar. Innerhalb des betrachteten Zeitbereichs erreichen die Randelemente-Simulationen für die beiden Indenter mit der geringsten Steigung (blaue und grüne Kurve) eine konstante Indentierungsgeschwindigkeit. Ab etwa  $t = 0.2 \text{ s}$  stimmen beide Kurven überein. Die Indentierungsgeschwindigkeit im

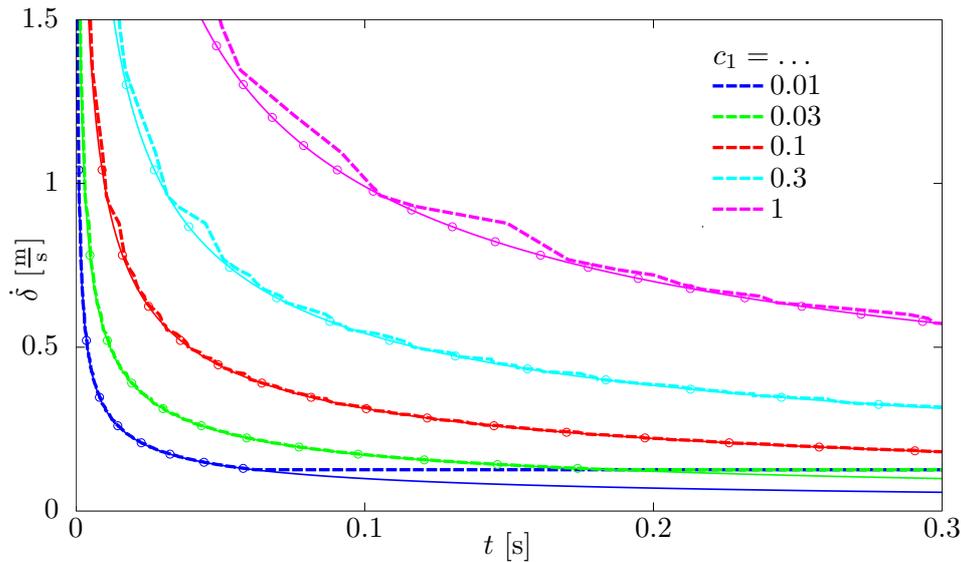


Abbildung 4.9.: Zeitlicher Verlauf der Indentierungsgeschwindigkeit für verschiedene Krümmungen, Kennzeichnung wie in Abbildung 4.8.

vollen Kontakt beträgt  $\dot{\delta} = 0.125 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , was in Übereinstimmung mit Gleichung (4.6) ist.

Zum Vergleich werden Indentierungen mit Rotationsparaboloiden mit fünf verschiedenen Krümmungen  $c_2 = 0.01, 0.03, 0.1, 0.3, 1 \text{ m}^{-1}$  betrachtet. Die übrigen Parameter sind mit denen des vorher behandelten Falles identisch. Insbesondere besitzen sie auch eine kreisrunde Grundfläche mit einem Radius von einem Meter.

Es ist anzumerken, dass für alle Paraboloiden die Annahme kleiner Steigungen grundsätzlich erfüllt ist, solange die Indentierungstiefe klein genug ist. Andererseits wird die Halbraumnäherung auch bei allen Indentern verletzt, wenn die Indentierungstiefe groß genug ist.

Abbildung 4.10 zeigt die Verläufe der Indentierungstiefen für die fünf Rotationsparaboloiden. Die analytische Lösung (durchgezogene Linie) gemäß Gleichung (4.37), die der Randelemente-Simulation (gestrichelte Linie) und die numerischen Ergebnisse nach der Methode der Dimensionsreduktion stimmen jeweils überein.

Der einzige sichtbare Unterschied ist an der Kurve der Randelemente-Simulation für den Paraboloiden mit der kleinsten Krümmung (blaue gestrichelte Linie) zu erkennen. Bei  $t \approx 0.1 \text{ s}$  geht die Paraboloid-Lösung in die des starren Stempels über. Die Grenze zwischen beiden Bereichen lässt sich analog zu Gleichung (4.39) analytisch bestimmen. Es ist die Gerade:

$$\delta_2^l = \frac{3F_N t}{16a_0 \eta}. \quad (4.40)$$

Auch hier wurde wieder eine Formulierung gewählt, in der die Krümmung nur noch implizit enthalten ist. In Abbildung 4.10 ist die Grenze als schwarze Strich-Punkt-Linie

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

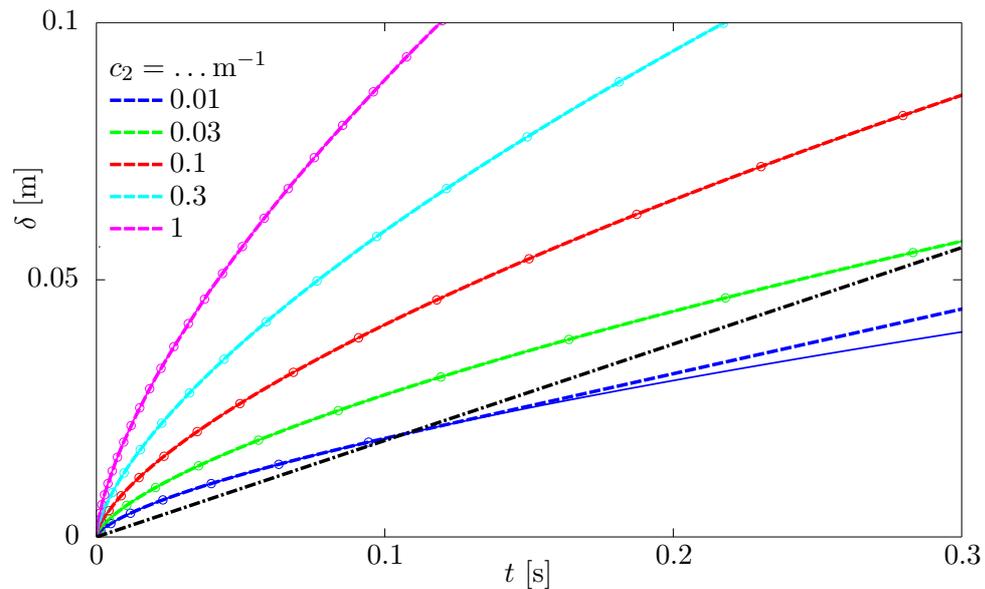


Abbildung 4.10.: Zeitlicher Verlauf der Indentierungstiefe für Rotationsparaboloide, Kennzeichnung wie in Abbildung 4.8.

ingezeichnet. Links oberhalb dieser Geraden verhalten sich die Indenter wie Rotationsparaboloide, rechts unterhalb der Geraden wie zylindrische Stempel.

Der zugehörige Verlauf der Indentierungsgeschwindigkeit ist in Abbildung 4.11 gezeigt. Die Kennzeichnung der einzelnen Kurven folgt dem gleichen Schema wie zuvor. Auch hier stimmen die jeweils drei Ergebnisse pro Paraboloid überein. Die Randelemente-Lösung zeigt wiederum geringfügige Abweichungen. Auch diese haben ihren Ursprung in der Diskretisierung. Sie fallen jedoch deutlich geringer aus als im Fall des Kegels. Das ist nachvollziehbar, da die Steigungen im Bereich der Spitze kleiner sind als bei den zuvor betrachteten Kegeln.

Bei dem Paraboloid mit der geringsten Krümmung (blaue gestrichelte Linie) ist wieder der Übergang vom Paraboloid-Verhalten zum Stempel zu erkennen. Für  $t > 0.1$  s liegt die Indentierungsgeschwindigkeit konstant bei  $\dot{\delta} = 0.125 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Zusätzlich kann man erahnen, dass auch die Indentierungsgeschwindigkeit des Paraboloids mit der Krümmung  $c_2 = 0.03 \text{ m}^{-1}$  (grüne gestrichelte Linie) sich diesem Wert annähert.

Während bisher die makroskopischen Größen Indentierungstiefe und -geschwindigkeit im Vordergrund standen, sollen jetzt die Deformation und die Spannungsverteilung an der Oberfläche des Elastomers untersucht werden. Dazu werden die analytischen Lösungen mit den entsprechenden Werten der Randelemente-Simulationen verglichen.

In der Abbildung 4.12 sind die Deformationen der Elastomer-Oberfläche zu sehen. Die Ergebnisse für beide Indentertypen sind in einem Diagramm gegenübergestellt. Auf der linken Seite (negative  $x$ -Werte) ist die Deformation der Elastomer-Oberfläche bei

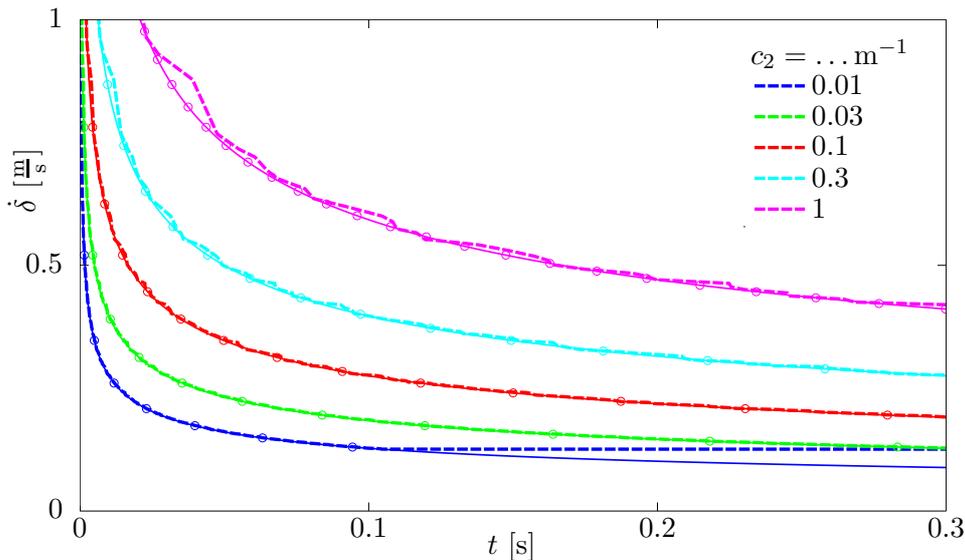


Abbildung 4.11.: Verlauf der Indentierungsgeschwindigkeit für Rotationsparaboloide, Kennzeichnung wie in Abbildung 4.8.

Indentierung mit einem Rotationsparaboloid zu sehen. Auf der rechten Seite ist das gleiche für einen Kegel gezeichnet. Es sei betont, dass sich das nur auf die Darstellung bezieht. Die Indentierungen erfolgen getrennt mit einem ganzen Kegel und mit einem ganzen Paraboloid.

Die zu Grunde liegenden Simulationen sind die des vierten Kegels (Steigung  $c_1 = 0.3$ ) und des vierten Paraboloids (Krümmung  $c_2 = 0.3 \text{ m}^{-1}$ ), die schon für die Abbildungen 4.8 bis 4.11 verwendet wurden. In beiden Fällen wurde der Zustand am Ende der Simulationen, das heißt zum Zeitpunkt  $t = 1 \text{ s}$ , festgehalten. Die Deformation der Halbraum-Oberfläche ist als blaue Linien gezeichnet, die ursprüngliche Oberfläche ist grün gestrichelt. Die rote Strich-Punkt-Linie markiert die Greensche Funktion (3.41), die von der Indenterform unabhängig und daher auf beiden Seiten identisch ist.<sup>36</sup> Die Positionen der Indenter sind mit schwarzen Linien festgehalten.

Es ist zu erkennen, dass der Kegel innerhalb dieses Zeitraums tiefer in das Elastomer einsinkt. Das entspricht den Erwartungen, da seine Querschnittsfläche mit zunehmender Indentierungstiefe weniger schnell ansteigt als die des Paraboloids. Der Kegel hat daher eine höhere Indentierungsgeschwindigkeit. Des Weiteren ist zu sehen, dass sich die Deformation außerhalb des Kontaktgebiets sehr schnell an die Greensche Funktion annähert.

Die Untersuchung der Spannungsverteilung wird stellvertretend am Fall des Kegels vorgenommen. Die entsprechenden Betrachtungen am Paraboloid erfolgen völlig analog und führen zudem zu sehr ähnlichen Ergebnissen. Eine gesonderte Betrachtung dieses

<sup>36</sup>Vergleiche dazu auch die Aussagen zum globalen Verhalten am Anfang des Kapitels.

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

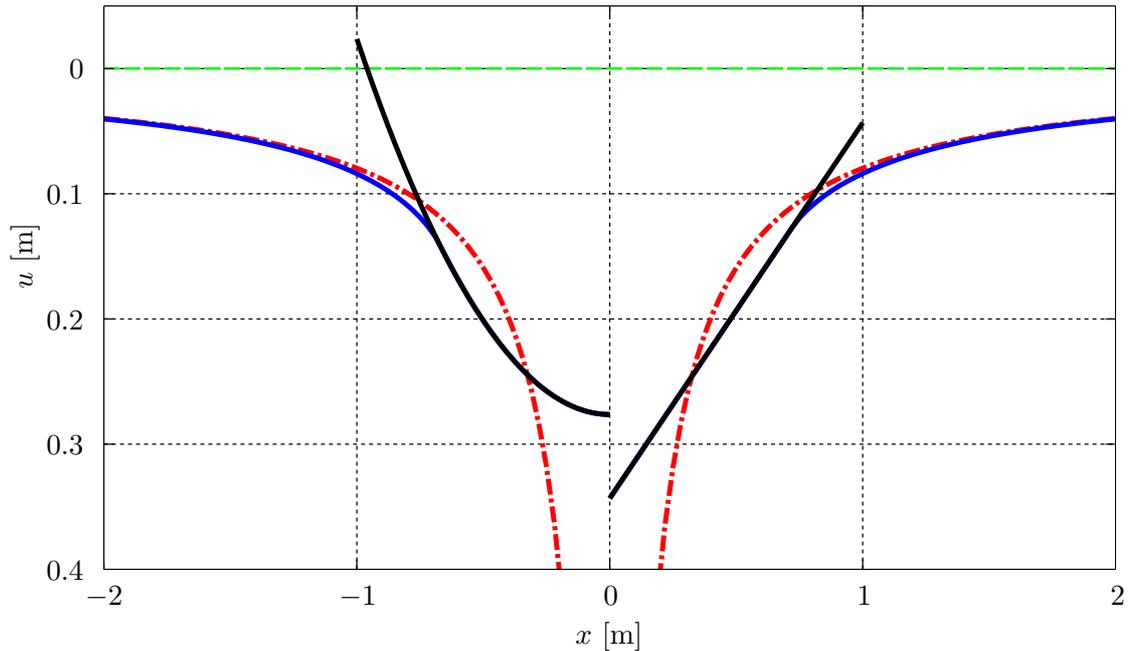


Abbildung 4.12.: Vergleich der Deformationen bei Kegel (rechte Hälfte) und Paraboloid (linke Hälfte)

Indentertyps erscheint daher nicht notwendig. Um Ergebnisse zu erhalten, die eine sinnvolle Darstellung und Interpretation erlauben, wurde die Indentierung des Kegels mit der Steigung  $c_1 = 0.01$  mit einer feineren Diskretisierung wiederholt. Bei dieser Simulation wurden  $513^2$  Elemente benutzt. Zugleich wurde der betrachtete Bereich der Elastomer-Oberfläche auf ein Quadrat mit der Kantenlänge  $L = 2.2$  m verkleinert. Die restlichen Parameter sind unverändert.

In Abbildung 4.13 ist die Spannungsverteilung  $\sigma(r, t)$  zu verschiedenen Zeitpunkten der Indentierung dargestellt. Die Spannung selbst ist jeweils auf die zentrale Spannung  $\sigma_0^s$  normiert, die sich laut Gleichung (4.5) bei Indentierung eines zylindrischen Stempels mit dem Radius  $a_0 = 1$  m und ansonsten unveränderten Parametern ergibt. Der Radius  $r$  ist auf den Radius  $a_0$  der Grundfläche normiert. Die Ordinate ist logarithmisch eingeteilt.

Die gestrichelten Linien zeigen die numerisch ermittelte Spannungsverteilung, so wie sie zum jeweiligen Zeitpunkt in der Simulation ermittelt wurde. Die durchgezogenen Linien sind nachträglich bestimmte analytische Lösungen gemäß Gleichung (4.26) für diese Zeitpunkte. Die numerischen und analytischen Lösungen unterscheiden sich nur geringfügig. Die einzige Ausnahme stellt die Lösung für den letzten Zeitpunkt  $t = 1$  s (schwarze Kurve) dar. Zu dieser Zeit ist der Indenter bereits im vollen Kontakt mit dem Elastomer. Das Ergebnis der Randelemente-Simulation spiegelt daher bereits das Verhalten eines zylindrischen Stempels dar. In der analytischen Betrachtung ist das jedoch nicht enthalten. Daher weicht die analytische Lösung für diesen letzten Zeitpunkt erheblich von der Simulation ab. Sie verläuft außerhalb des hier dargestellten Wertebereichs und ist daher

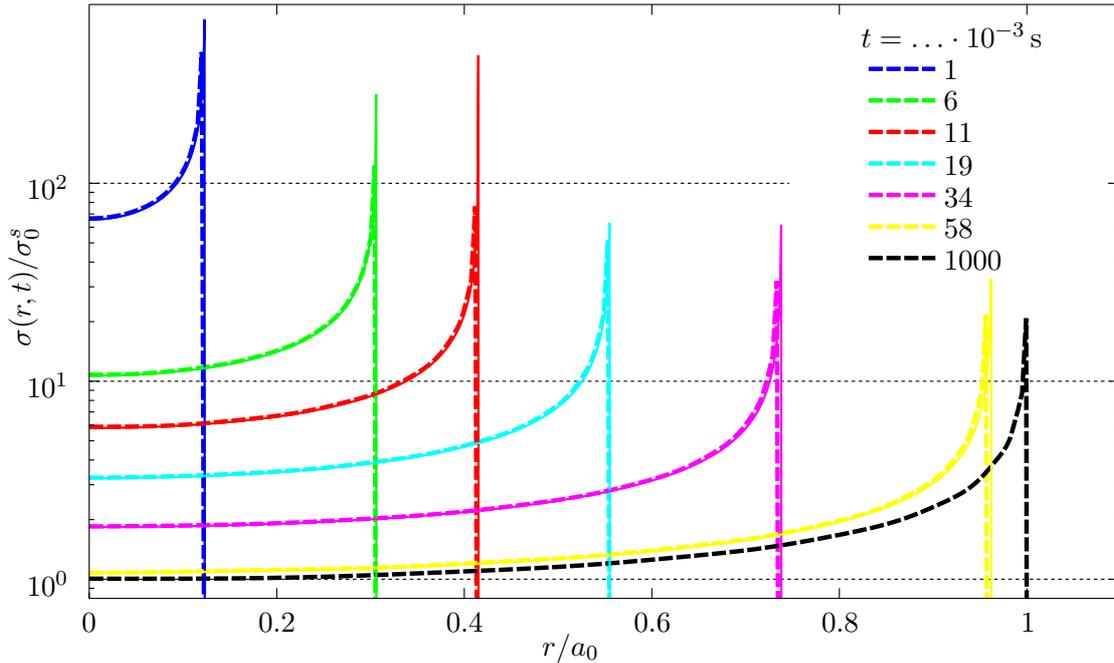


Abbildung 4.13.: Spannungsverteilung bei Indentierung eines Kegel zu unterschiedlichen Zeitpunkten

in der Abbildung nicht zu sehen.

Es ist zu erahnen, dass die Spannungsverteilung innerhalb des Kontaktgebiets zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  der eines zylindrischen Stempels entspricht. Der Radius des Kontaktgebiets vergrößert sich im Verlauf der Indentierung. Es ist jeweils an dem abrupten Abfall der Spannung erkennbar. Die Spannungsverteilung für den letzten Zeitpunkt  $t = 1$  s, dargestellt durch die schwarze Linie, ist identisch mit der des zylindrischen Kegels.

Dass die Spannungsmaxima der numerischen Ergebnisse in der Nähe der Randsingularität mit fortschreitender Zeit kleinere Werte annehmen, hat keine physikalische Bedeutung. Es ist vielmehr ein Artefakt der Diskretisierung des Indenters und ihrer Implementierung.

Der Verlauf der zentralen Spannung als Funktion der Zeit ist in Abbildung 4.14 gezeigt. Die gestrichelten Linien beziehen sich auf die Daten der Randelemente-Simulationen, mit denen bereits die Abbildungen 4.8 und 4.9 erzeugt wurden. Die durchgezogenen Linien zeigen die analytischen Lösungen. Diese ergeben sich, wenn  $p = 1$  in der Gleichung (4.27) berücksichtigt und diese in (4.26) eingesetzt wird:

$$\sigma_0(t) = \frac{c_1 \eta}{t}. \quad (4.41)$$

Das Bemerkenswerte an diesem Ergebnis ist, dass der zeitliche Verlauf der zentralen Spannung von der äußeren Kraft unabhängig ist.

Beide Achsen in Abbildung 4.14 sind logarithmisch eingeteilt. In dieser Darstellung sind

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

die analytisch bestimmten Lösungen Geraden<sup>37</sup> mit der Steigung  $-1$ . Unterschiedliche (Kegel-)Steigungen  $c_1$  bewirken in der doppelt logarithmischen Darstellung offensichtlich eine Verschiebung entlang der Zeitachse. Zu Beginn der einzelnen Indentierungen sind jeweils größere Abweichungen zwischen der analytischen Lösung und der Randelemente-Simulation zu erkennen. Hierbei handelt es sich wieder um Diskretisierungseffekte. Jetzt sind das jedoch nicht nur Abweichungen in der Kontaktfläche. Zusätzlich kommt noch hinzu, dass das Kontaktgebiet anfangs nicht einmal annähernd kreisförmig ist. Stattdessen hat es aufgrund der Diskretisierung zeitweilig auch die Form eines Quadrates bzw. eines Kreuzes.

Mit Erreichen des vollständigen Kontakts, nimmt die Randelemente-Lösung wieder das Verhalten des zylindrischen Stempels an. Die zentrale Spannung  $\sigma_0(t)$  hat ab diesem Zeitpunkt einen konstanten Wert. Dieser ist identisch mit der zentralen Spannung  $\sigma_0^s$  des Stempels gemäß Gleichung (4.5).

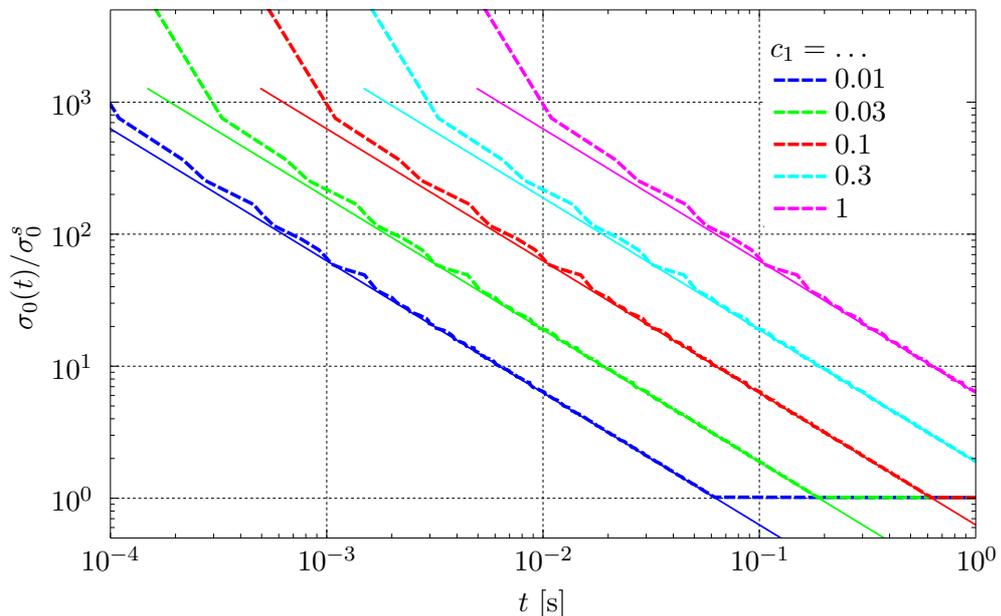


Abbildung 4.14.: Die zentrale Spannung in Abhängigkeit von der Zeit bei Indentierung verschiedener Kegel

Damit ist die Behandlung des Normalkontakts mit axialsymmetrischen Indentern abgeschlossen. Als Fazit lässt sich festhalten, dass sich auch dieser Fall mit den vorgestellten Lösungswegen erfolgreich behandeln lässt. Die analytischen Lösungen des Originalsystems und des eindimensionalen Modells stimmen exakt überein. Die numerischen Ergebnisse der Randelemente-Simulationen und der Methode der Dimensionsreduktion weichen von diesen nur um Diskretisierungsfehler ab.

<sup>37</sup>Im Gegensatz dazu verhält sich die zentrale Spannung bei Indentierungen mit einem Rotationsparaboloid proportional zu  $t^{-\frac{2}{3}}$ .

## 4.4. Indentierung rauher Körper

In diesem Abschnitt werden Indenter mit zufällig rauhen, selbst-affinen Oberflächen betrachtet. Im Unterschied zu den vorher betrachteten Fällen, in denen sich exakte Ergebnisse ableiten lassen, werden jetzt vermehrt Aussagen statistischer Natur gemacht. Wesentliche Teile der Inhalte dieses Abschnitts wurden von Kürschner und Popov [72] publiziert.

Die in diesem Abschnitt untersuchten Indenter lassen sich als starre zylindrische Stempel betrachten. Die Stirnflächen haben den Durchmesser  $L$ . Im Unterschied zum Abschnitt 4.2 sind sie jedoch nicht eben, sondern mit Rauheiten versehen. Es werden ausschließlich Oberflächen betrachtet, die fraktal und selbst-affin sind. Die Gewichtung der Rauheiten auf verschiedenen Längenskalen wird durch die Spektraldichte **A**

$$C_{2D}(q) = C_0 q^{-2(H+1)} \quad (4.42)$$

beschrieben. Dabei sind  $C_0$  eine Konstante,  $q$  die (normierte) Wellenzahl und  $H \in [0, 1]$  der Hurst-Exponent. Gleichung (4.42) ist auf allen Längenskalen gültig, von der Diskretisierungslänge  $b$  bis zur makroskopischen Abmessung  $L$ , vergleiche Abschnitt 2.4.

Im weiteren Verlauf werden zunächst mit der Hilfe grundlegender physikalischer Überlegungen, Skalierungseigenschaften und Dimensionsbetrachtungen die generellen Beziehungen abgeleitet. Mit Hilfe von Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen werden Erkenntnisse über den vergleichbaren elastischen Normalkontakt auf das viskose Problem übertragen. Auf diese Weise können die verbleibenden Parameter bestimmt werden. Im Anschluss daran werden diese Resultate mit Ergebnissen numerischer Simulationen verglichen. Dafür werden sowohl die Randelemente-Methode als auch die Methode der Dimensionsreduktion verwendet.

### Grundlegende Überlegungen

Das erste Ziel besteht darin, die generellen Zusammenhänge zwischen der äußeren Normalkraft  $F_N$ , der Indentierungstiefe  $\delta$  und der Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$  zu finden.

Zuerst lässt sich festhalten, dass Größe und Gestalt des Kontaktgebiets allein von der Eindringtiefe bestimmt werden. Insbesondere hat die Indentierungsgeschichte keinerlei Einfluss. Das gilt wenigstens dann, wenn die äußere Kraft  $F_N$  zu jedem Zeitpunkt nicht-negativ ist. Durch die Annahme einer konstanten äußeren Kraft am Anfang des Kapitels ist das sichergestellt.

Angenommen, die Oberfläche des Indenters wird in vertikale Richtung um einen positiven Faktor gestreckt bzw. gestaucht. In diesem Fall bedeutet das nichts anderes, als dass die Amplitude  $h$  der Rauigkeiten mit diesem Wert skaliert wird. Wird nun die Indentierungstiefe  $\delta$  mit demselben Faktor multipliziert, dann ändert sich das Kontaktgebiet durch diese Skalierung nicht. Daher kann die Konfiguration des Kontaktgebiets nur von dem Verhältnis  $\delta/h$  abhängen.

Wird nun eine beliebige Kontaktkonfiguration betrachtet, dann muss die äußere Kraft proportional sein sowohl zur Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$  als auch zur Viskosität  $\eta$  des Halbraums. Das lässt sich an den Erkenntnissen der vorherigen Abschnitte ablesen,

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

insbesondere der Greenschen Funktion (3.41) des viskosen Kontakts. Abgesehen davon lässt sich diese Proportionalität auch aus einem Dimensionsvergleich schließen.

Aus diesen drei Eigenschaften lässt sich folgern, dass das Verhältnis  $F_N/(\dot{\delta}\eta)$  eine Funktion der dimensionslosen Variable  $\delta/h$  ist. Um das erstgenannte Verhältnis ebenfalls dimensionslos zu machen, muss es durch eine Größe von der Dimension einer Länge dividiert werden. Die bisherigen Erkenntnisse geben Anlass zu der Vermutung, dass hierfür die Systemgröße  $L$  in Frage kommt. Somit hat die gesuchte Beziehung die Gestalt

$$\frac{F_N}{\eta L \dot{\delta}} = f_H \left( \frac{\delta}{h} \right), \quad (4.43)$$

wobei die unbekannte Funktion  $f_H$  noch in irgendeiner Weise von dem dimensionslosen Hurst-Exponenten  $H$  abhängen wird.

Durch den Vergleich mit dem glatten Stempel aus Abschnitt 4.2 lässt sich eine hilfreiche Interpretation ableiten. Der Ausdruck im Nenner der linken Seite von Gleichung (4.43) ist, bis auf einen konstanten Faktor, gerade die Kraft, die zum Eindruck des glatten Stempels notwendig wäre. Das wird insbesondere durch Vergleich mit der Beziehung (4.6) deutlich. Offenbar hat diese Größe die Bedeutung einer Sättigung, wenn nämlich (nahezu) die gesamte Stirnseite des (rauen) Indenters in Kontakt mit dem Elastomer ist. Nach den Ausführungen der vorherigen Abschnitte ist klar, dass in diesem Fall die Rauheit selbst keinen Einfluss mehr hat. Stattdessen verhält sich der Indenter dann wie der zylindrische Stempel aus Abschnitt 4.2.

#### Alternative Formulierung unter der Annahme eines Potenzgesetzes

Die Beziehung (4.43) ist ein vorläufiges Resultat, welches die grundlegenden Zusammenhänge wiedergibt. Im Folgenden wird es darum gehen, die Funktion  $f_H$  genauer zu bestimmen.

Aus dem Abschnitt 3.6 ist bekannt, dass die Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$  eine vergleichbare Bedeutung hat, wie die Indentierungstiefe  $\tilde{\delta}$  bei vergleichbaren elastischen Kontaktproblemen. Aus diesem Grund wird Gleichung (4.43) in eine alternative Form überführt, die nur noch von der Indentierungsgeschwindigkeit nicht aber von der Indentierungstiefe abhängig ist.

Da die letztgenannte Größe im Argument der noch unbekanntenen Funktion  $f_H$  vorkommt, muss an dieser Stelle eine Annahme über die Natur dieser Funktion getroffen werden. Im weiteren Verlauf wird daher vorausgesetzt, dass die Beziehung (4.43) (mindestens näherungsweise) durch ein Potenzgesetz,

$$\frac{F_N}{\eta L \dot{\delta}} = c_H \left( \frac{\delta}{h} \right)^{\beta_H}, \quad (4.44)$$

beschrieben werden kann.<sup>38</sup> Der Koeffizient  $c_H$  und der Exponent  $\beta_H$  können noch vom Hurst-Exponent  $H$  abhängen. Von der Zeit können jedoch nur  $\delta$  und  $\dot{\delta}$  abhängen. Alle

<sup>38</sup>Die Annahme eines Potenzgesetzes wird durch die Ergebnisse der Simulationen gerechtfertigt, auf die im weiteren Verlauf eingegangen wird.

anderen Größen in Gleichung (4.44) sind bezüglich der Zeit konstant. Auf die Angabe der Zeit als Argument wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Aus dieser Gleichung wird nun die Indentierungstiefe eliminiert. Dazu wird als Erstes die Indentierungsgeschwindigkeit als zeitliche Ableitung der Indentierungstiefe identifiziert und geringfügig umgeformt:

$$\begin{aligned} \frac{F_N h^{\beta_H}}{c_H \eta L} &= \delta^{\beta_H} \dot{\delta} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1 + \beta_H} \delta^{1 + \beta_H} \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

wobei im zweiten Schritt bereits die rechte Seite als zeitliche Ableitung umformuliert wurde. Durch Integration über die Zeit mit der Anfangsbedingung  $\delta(t = 0) = 0$  und geringfügiger Umstellung ergibt sich

$$\left( \frac{1 + \beta_H}{c_H} \frac{F_N h^{\beta_H}}{\eta L} t \right)^{1/(1 + \beta_H)} = \delta. \quad (4.46)$$

Für die Integration wurde dabei  $\beta_H > -1$  vorausgesetzt. Eine neuerliche Ableitung nach der Zeit und einige Umformungen führen schließlich auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\delta} t}{h} &= \bar{c}(H) \left( \frac{F_N t}{\eta h L} \right)^{\beta(H)} \quad \text{bzw.} \\ \bar{\delta} &= \bar{c}(H) \bar{t}^{\beta(H)}, \quad \bar{\delta} := \frac{\dot{\delta} t}{h}, \quad \bar{t} := \frac{F_N t}{\eta h L}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Der Exponent  $\beta(H) := 1/(1 + \beta_H)$  und der Koeffizient  $\bar{c}(H) := (c_H(1 + \beta_H)^{\beta_H})^{-1/(1 + \beta_H)}$  können weiterhin beide vom Hurst-Exponenten abhängen.

## Numerische Verifikation

Um einen ersten Eindruck von der Indentierungsdynamik zu gewinnen, werden die Ergebnisse von Simulationen in den Größen der Gleichung (4.47) ausgewertet. Dabei werden einerseits Simulationen mit einem Randelemente-Verfahren verwendet und zum anderen solche mit der Methode der Dimensionsreduktion. Im Folgenden wird zunächst auf das erstgenannte Verfahren eingegangen.

Die verwendeten Werte für die Parameter Hurst-Exponent, Normalkraft, Rauigkeit, Durchmesser und Viskosität sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Es wurden jedoch nicht alle möglichen Parameter-Paarungen ausgewertet. Stattdessen wurden jeweils der Hurst-Exponent und ein weiterer Parameter variiert und für alle anderen ein Standardwert benutzt. Dieser ist in der Tabelle fett hervorgehoben. Dadurch ergeben sich für jeden Hurst-Exponent neun verschiedene Parameter-Paarungen.

Zu jeder dieser insgesamt 36 Kombinationen wurden mindestens 80 Indentierungen mit zufällig generierten Oberflächen durchgeführt und die Mittelwerte gebildet. Zu den

<sup>39</sup>Die Abbildung 4.15 ist aus [72] übernommen, die Darstellung wurde geringfügig abgeändert.

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

Symbol	Parameter	Einheit	verwendete Werte
$H$	Hurst-Exponent	1	0.1, 0.4, 0.6, 0.9
$F_N$	Normalkraft	N	1, 10, 100
$h$	mittlere Rauigkeit	m	$\sqrt{0.1}$ , 1, $\sqrt{10}$
$L$	Durchmesser	m	0.5, 1, 2
$\eta$	Viskosität	Pa·s	0.1, 1, 10

Tabelle 4.1.: Parameter zur Untersuchung des Normalkontakts rauer Indenter

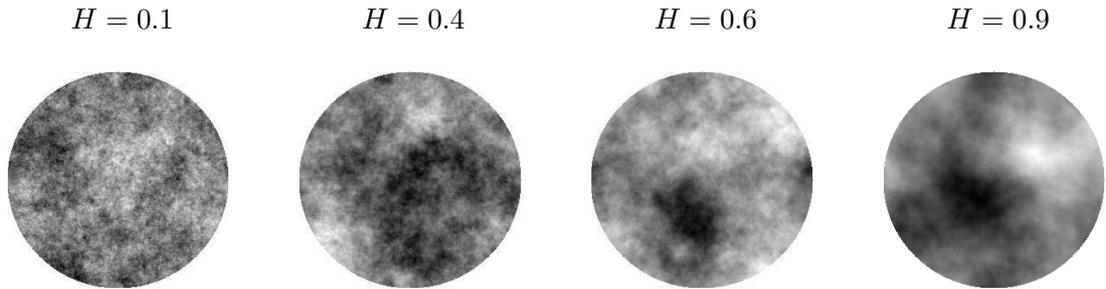


Abbildung 4.15.: Beispiele rauer Indenter<sup>39</sup>

vier Paarungen, in denen nur Standardwerte enthalten sind, wurden jeweils mindestens 240 verschiedene Indentierungen durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Simulationen sind die Grundlage der Abbildungen 4.17, 4.18 und 4.19.

In Abbildung 4.15 sind Beispiele der verwendeten Indenter-Oberflächen dargestellt. Dunklere Farbtöne kennzeichnen höher liegende Bereiche. Die farbliche Zuordnung ist in den einzelnen Bildern unterschiedlich skaliert, um jeweils einen möglichst hohen Kontrast zu erreichen.

In den Simulationen mit der Reduktionsmethode kommen Linien mit vergleichbaren Eigenschaften zur Anwendung. Abbildung 4.16 zeigt solche Linien.<sup>40</sup> Anhand der Linien ist gut zu erkennen, dass mit steigendem Hurst-Exponent der Einfluss der Rauigkeiten auf den kleineren Längenskalen abnimmt. So sind die Linien für kleine Hurst-Exponenten eher zackig, die für große eher glatt.

Für die Simulationen mit der Methode der Dimensionsreduktion wurden statistisch äquivalente Linien mit denselben Hurst-Exponenten wie im Falle der Randelemente-Simulationen verwendet. Allerdings wurden die Indentierungen mit jeweils nur einem Parameter-Satz durchgeführt. Im Gegenzug wurde eine feinere Diskretisierung verwendet, nämlich 100000 Elemente auf eine Länge von 2 Metern. Die Mittelung der Ergebnisse erfolgte über jeweils 100 zufällige Realisationen.

In Abbildung 4.17 sind die gemittelten Ergebnisse der Randelemente-Simulationen als durchgezogene Linien eingezeichnet. Auf den Achsen sind das Argument  $\bar{t}$  und der Funktionswert  $\bar{\delta}$  der Beziehung (4.47) gegeneinander aufgetragen. Die Einteilung ist in

<sup>40</sup>Zur Konstruktion dieser Linien vergleiche Abschnitt 2.4, speziell Gleichung (2.20) und zugehörige Erklärungen.

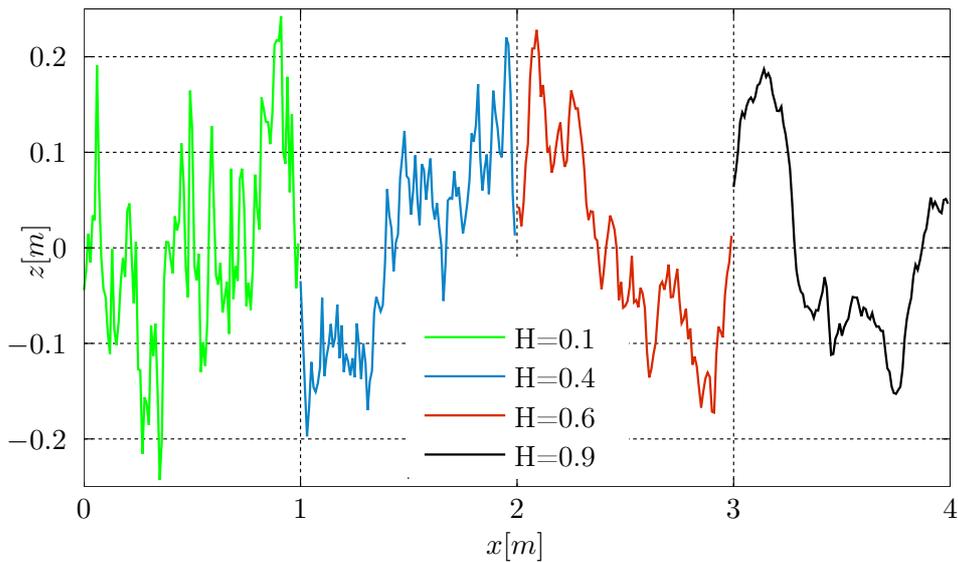


Abbildung 4.16.: Beispiele rauer Linien

beiden Fällen logarithmisch. Diese Darstellung ist mit der Abbildung 2.6 des elastischen Problems vergleichbar, beinhaltet aber zusätzlich noch den Vergleich mit Simulationen nach der Methode der Dimensionsreduktion (dargestellt durch gestrichelte Linien), auf die später eingegangen wird.

Für jeden Hurst-Exponent sind neun einzelne Linien dargestellt, die jeweils zu einer Parameterkombination gehören. Die farbliche Kennzeichnung bezieht sich auf den jeweiligen Hurst-Exponenten und kann der Legende entnommen werden. Da die einzelnen Linien meist sehr eng beieinander liegen, sind sie in der linken oberen Ecke für den Hurst-Exponent  $H = 0.6$  vergrößert gezeigt. Wie oben beschrieben, verkörpert jede dieser einzelnen Linien den Mittelwert über mindestens 80 Indentierungen.

In Abbildung 4.17 sind für alle Kurven gleichermaßen drei Bereiche unterscheidbar. Zunächst (links unten) fallen alle (durchgezogenen) Kurven perfekt zusammen und zeigen einen linearen Verlauf mit der Steigung  $\beta = 1$ . Das bedeutet, dass in diesem Teil sowohl die (logarithmische) Darstellung in der Abbildung als auch der Zusammenhang (4.47) selbst linear sind. Dieser Teil des Verlaufs ist jedoch ein Artefakt der Diskretisierung und daher von geringerer Bedeutung. Er stellt den Zeitraum dar, in dem genau ein Element des Indenters mit dem Elastomer in Kontakt ist. Während dieser Zeitspanne ist die Indentierungsgeschwindigkeit konstant und die Indentierungstiefe wächst linear an.

In einem Übergangsbereich brechen nacheinander alle Kurven aus diesem linearen Verlauf aus. Daran schließt sich der zweite Bereich an. Das ist derjenige, der für den hier untersuchten Sachverhalt wesentlich ist. Die einzelnen Kurven zeigen wieder lineare Verläufe (in der logarithmischen Darstellung). Die Steigungen sind nun jedoch vom Hurst-Exponenten abhängig. Die verschiedenen Parameter-Kombinationen mit demselben Hurst-Exponent fallen jeweils zusammen. Daraus lassen sich zwei Folgerungen ab-

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

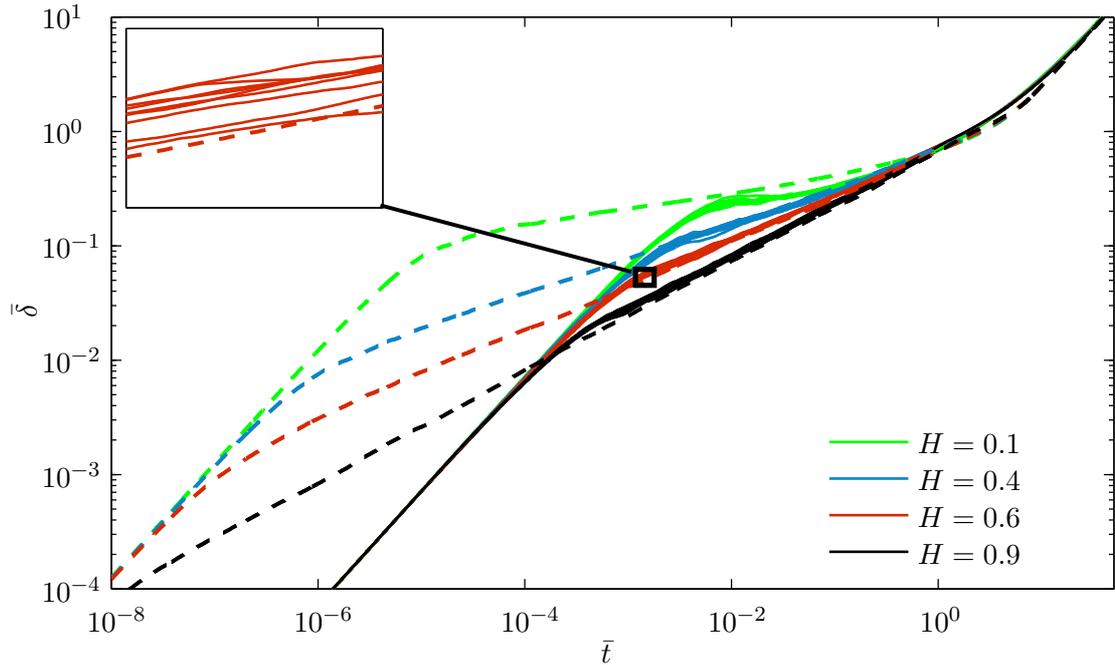


Abbildung 4.17.: Die Indentierungsdynamik zufällig rauher, selbst-affiner Indenter. Dargestellt sind gemittelte Ergebnisse von Simulationen mit Randelementen (durchgezogene Linien) und mit der Reduktionsmethode (gestrichelte Linien). Auf den Achsen sind Argument und Funktionswert der Gleichung (4.47) aufgetragen.

leiten. Die Ergebnisse bestätigen die allgemeine Betrachtung zur Herleitung der Indentierungsdynamik und insbesondere die Bedeutung der dimensionslosen Variablen

$$\bar{\delta} := \frac{\dot{\delta}t}{h} \quad \text{und} \quad \bar{t} := \frac{F_N t}{\eta h L}, \quad (4.48)$$

die als dimensionslose Eindringtiefe  $\bar{\delta}$  und als dimensionslose Zeit  $\bar{t}$  interpretiert werden können.

Darüber hinaus rechtfertigen die Ergebnisse auch die Vermutung, dass dieser Bereich tatsächlich (mindestens näherungsweise) durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann und der Exponent (nur) vom Hurst-Exponent abhängt.<sup>41</sup> Im Gegenzug zeigen sie aber auch die Grenzen dieser Betrachtung auf. An den Kurven für den Hurst-Exponenten  $H = 0.1$  (grün dargestellt) ist sichtbar, dass diese Annahme nur noch eingeschränkt

<sup>41</sup>Es soll betont werden, dass hier nicht etwa als Ergebnis ein Potenzgesetz herauskommt, weil bereits vorher ein Potenzgesetz vorausgesetzt wurde. Die Annahme eines Potenzgesetzes ist von Bedeutung für die Umformung der Gleichung (4.43) hin zu (4.47). Die Simulationen -sowohl mit Randelementen als auch mit der Methode der Dimensionsreduktion- und ihre Ergebnisse sind jedoch völlig unabhängig davon.

gültig ist. Tatsächlich gehört schon etwas guter Wille dazu, auch in diesem Fall ein Potenzgesetz anzuerkennen.<sup>42</sup>

Im Anschluss daran geht das Verhalten in einen dritten Bereich über. Dieser ist rechts oben im Diagramm zu erkennen. Hier haben sich wieder alle Kurven vereinigt und zeigen lineares Verhalten. Wie im ersten Bereich bezieht sich das sowohl auf die logarithmische Darstellung als auch auf die Gleichung (4.47). Dieser Teil beschreibt das Verhalten, wenn der Indenter in vollständigem Kontakt mit dem Elastomer ist und sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Die gestrichelten Linien in Abbildung 4.17 beziehen sich auf die Simulationen mit der Methode der Dimensionsreduktion. Die farbliche Zuordnung ist dieselbe wie im Fall der Randelemente-Simulationen und kann der Legende entnommen werden. Die Ergebnisse zeigen grundsätzlich in allen Bereichen das gleiche Verhalten wie die Randelemente-Simulationen. Es sind allerdings zwei Abweichungen feststellbar.

Zum einen ist der erste Bereich um mehr als zwei Größenordnungen entlang der  $\bar{t}$ -Achse verschoben. Das ist eine Folge der feineren Diskretisierung. Der zweite Bereich hat sich um eben diesen Anteil vergrößert. Der Charakter eines Potenzgesetzes in diesem Teil ist dadurch noch besser auszumachen. Das ist auch der Grund, warum für diese Simulationen eine feinere Diskretisierung gewählt wurde.

Die zweite Abweichung zeigt sich im Übergang zwischen den Bereichen zwei und drei. Es ist erkennbar, dass hier sowohl die Randelemente-Ergebnisse als auch die der Reduktionsmethode, jeweils für sich betrachtet, über alle Parameter-Kombinationen sehr gut übereinstimmen. Allerdings weichen (in diesem Übergangsbereich) die Ergebnisse der einen Methode von der anderen ab. Es ist jedoch bekannt, dass die Methode der Dimensionsreduktion den Übergang zu Sättigung nicht exakt abbildet. Diese Abweichung zeigt sich auch in anderen Anwendungen. Sie ist beispielsweise auch beim elastischen Normalkontakt zu beobachten, vergleiche [23].

## Bestimmung des Potenzgesetzes

Als nächster Schritt sollen nun der Exponent  $\beta$  und der Koeffizient  $\bar{c}$  des Potenzgesetzes (4.47) bestimmt werden. Die einfachste, aber am wenigsten befriedigendste Vorgehensweise wäre die numerische Approximation beider Parameter auf der Basis der gemittelten Verläufe in Abbildung 4.17. Zumindest im Falle des Exponenten gibt es jedoch eine elegantere, wenn auch etwas aufwendigere Möglichkeit.

Einmal mehr lässt sich hierfür Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen nutzen. Als vergleichbares elastisches Problem wird der in Abschnitt 2.4 vorgestellte Normalkontakt mit einem rauhen Indenter verwendet. Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen ist die

---

<sup>42</sup>Die eingeschränkte Gültigkeit für kleine Hurst-Exponenten ist auch bei anderen vergleichbaren Aufgabenstellungen zu beobachten. Das betrifft unter anderem den elastischen Normalkontakt, vergleiche Abschnitt 2.4 und die dort zitierten Publikationen. Als Hauptgrund ist zu vermuten, dass bei diesen Oberflächen in der Regel eine Vielzahl von isolierten Kontaktbereichen über die gesamte Oberfläche verstreut ist und dadurch wesentliche Skalierungseigenschaften nicht ohne Weiteres erfüllt sind, vergleiche [73].

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

aus [23] übernommene Gleichung (2.23)

$$\frac{k}{\bar{E}\sqrt{A_0}} = k_0 \left( \frac{F_N}{\bar{E}h\sqrt{A_0}} \right)^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{1+H}$$

zur Bestimmung der differentiellen Kontaktsteifigkeit.  $k_0$  ist ein numerisch bestimmter Parameter und  $H$  der Hurst-Exponent.

Analog zum hier betrachteten viskosen Fall werden ein starrer Indenter und ein inkompressibler Halbraum vorausgesetzt. Der Elastizitätsmodul wird im Folgenden durch den Schubmodul ausgedrückt. Die Kontaktsteifigkeit  $k$  wird wieder als Ableitung der Normalkraft nach der Indentierungstiefe geschrieben.

Abweichend von den hier vorgenommenen Betrachtungen wird von Pohrt, Popov und Filippov in [23] ein Indenter mit quadratischer Grundfläche verwendet. Der Ausdruck  $\sqrt{A_0}$  ist daher als Kantenlänge der Grundfläche und mithin als lineare Abmessung des Systems zu verstehen. Er wird hier durch den Durchmesser  $L$  der (als kreisförmig vorausgesetzten) Grundfläche ersetzt. Dabei muss in Kauf genommen werden, dass auf diese Weise eine Abweichung (in der Form eines Faktors der Größenordnung eins) entsteht. Mit diesen Überlegungen wird aus Gleichung (2.23) die Formulierung<sup>43</sup>:

$$\frac{1}{4\tilde{G}L} \frac{dF_N}{d\tilde{\delta}} = k_0 \left( \frac{F_N}{4\tilde{G}hL} \right)^\alpha. \quad (4.49)$$

Durch Trennung der Variablen und anschließender Integration in den Grenzen 0 und  $F_N$  respektive 0 und  $\tilde{\delta}(F_N)$  ergibt sich

$$\frac{1}{(1-\alpha)4\tilde{G}L} F_N^{1-\alpha} = k_0 \left( \frac{1}{4\tilde{G}hL} \right)^\alpha \tilde{\delta}. \quad (4.50)$$

Die Integration ist unter der Voraussetzung  $\alpha < 1$  gültig. Durch Umsortierung und der formalen Berücksichtigung der Belastungshistorie<sup>44</sup> folgt unmittelbar:

$$\tilde{\delta} = c_1 \tilde{G}^{\alpha-1} F(t) \quad \text{mit} \quad (4.51)$$

$$F(t) := F_N^{1-\alpha} H(t), \quad c_1 := \frac{h}{k_0(1-\alpha)} \left( \frac{1}{4hL} \right)^{1-\alpha},$$

sowie der Heaviside-Funktion  $H(t)$ . Diese Gleichung wird mittels Laplace-Transformation in den Frequenzbereich überführt:

$$\tilde{\delta}^*(s) := \mathcal{L}\{\tilde{\delta}\} = c_1 \tilde{G}^{\alpha-1} \frac{F_N^{1-\alpha}}{s}. \quad (4.52)$$

Nach der in Kapitel 3 erarbeiteten Vorgehensweise wird der Schubmodul durch seine Reihenentwicklung (3.15) ausgedrückt. Diese wird durch die Reihenentwicklung (3.21)

<sup>43</sup>Die Größen, die sich auf das vergleichbare elastische Probleme beziehen, werden wie bisher mit einer Tilde gekennzeichnet.

<sup>44</sup>Siehe Gleichung (3.31) und zugehörige Erklärungen.

des linear viskosen Materials ersetzt und dann die Viskosität substituiert. Auf diese Weise ergibt sich die zu (4.52) vergleichbare Beziehung für das viskose Kontaktproblem:

$$s\delta^*(s) = c_1 F_N^{1-\alpha} \eta^{\alpha-1} s^{\alpha-1}. \quad (4.53)$$

Die Rücktransformation<sup>45</sup> in den Zeitbereich führt auf

$$\dot{\delta}(t) := \mathcal{L}^{-1} \{ \delta^*(s) \} = c_1 F_N^{1-\alpha} \eta^{\alpha-1} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (4.54)$$

wobei formal  $\alpha < 1$  vorausgesetzt wird.

Durch Einsetzen des Koeffizienten  $c_1$ , Multiplizieren beider Seiten mit  $t$  und geringfügiges Umstellen erhält man die Formulierung:

$$\frac{\dot{\delta}(t)t}{h} = c_2 \left( \frac{F_N t}{\eta h L} \right)^{1-\alpha} \quad \text{mit} \quad c_2 := \frac{4^{\alpha-1}}{k_0 \Gamma(2-\alpha)}. \quad (4.55)$$

Das ist offenbar genau die Beziehung, die bereits -ausgehend von den physikalischen Überlegungen- in Gleichung (4.47) erarbeitet wurde. Zusätzlich ist nun auch der Exponent bestimmt. Durch Vergleich der Beziehungen (4.47) und (4.55) folgt  $\beta = 1 - \alpha = H/(1 + H)$ . Der Koeffizient ließe sich grundsätzlich auf dieselbe Weise bestimmen. Im Gegensatz zum Exponenten wurde dieser jedoch in [23] nur numerisch berechnet. Außerdem zeigte sich bei den eigenen Betrachtungen des viskosen Kontaktproblems, dass dieser besser durch den Ausdruck  $k_0 = 2 - H$  angenähert werden kann.

Mit den in (4.48) eingeführten Bezeichnungen lautet dann das Potenzgesetz für den viskosen Normalkontakt mit einem selbst-affinen Indenter schlussendlich:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \bar{c} t^\beta \quad \text{mit} & (4.56) \\ \bar{c} &:= \frac{4^{-H/(1+H)}}{(2-H)\Gamma\left(\frac{1+2H}{1+H}\right)} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{H}{1+H}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle soll betont werden, dass dieser letzte Schritt - die Herleitung aus einem vergleichbaren elastischen Problem - in den wesentlichen Punkten unabhängig von den zuvor vorgenommenen Betrachtungen und den numerischen Simulationen ist. Diese Methode besitzt mehrere Vorteile.

Vielleicht am bedeutendsten ist, dass sie eine weitere Rechtfertigung für die früher getätigte Annahme eines Potenzgesetzes liefert. Aus der hier vorgenommenen Betrachtung geht hervor, dass das viskose Kontaktproblem (4.56) die Form eines Potenzgesetzes hat, weil das vergleichbare elastische Problem ebenfalls diese Form hat. Das allein ist noch nicht sehr beeindruckend. Bemerkenswert ist jedoch, dass das Potenzgesetz für den elastischen Fall mittels sehr einfacher Überlegungen auf ein andere Eigenschaft zurückgeführt werden kann: nämlich auf die Selbst-Affinität der Oberfläche, vergleiche [23].

<sup>45</sup>Die Rücktransformation wurde mittels Korrespondenztabelle durchgeführt, vergleiche [61].

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

Damit lautet die verkürzte Begründung: **Der viskose Normalkontakt mit einem selbst-affinen Indenter hat die Form eines Potenzgesetzes, weil die Selbst-Affinität das erzwingt.** Aus der Argumentation in [23] werden auch die Grenzen deutlich. Diese Eigenschaft geht verloren bei sehr kleinen Hurst-Exponenten  $H < 1/3$  und wenn die Kontaktlänge die Größenordnung des Indenter-Durchmessers  $L$  erreicht, das heißt im Übergang zur Sättigung. Abgesehen davon, ist natürlich die Selbst-Affinität der Oberfläche (auf allen Längenskalen) ausschlaggebend. Werden stattdessen Oberflächen mit Roll-Off oder Cut-Off <sup>46</sup> verwendet, dann weicht das Verhalten mindestens in den Bereichen ab, in denen die betreffenden Längenskalen das Verhalten dominieren.

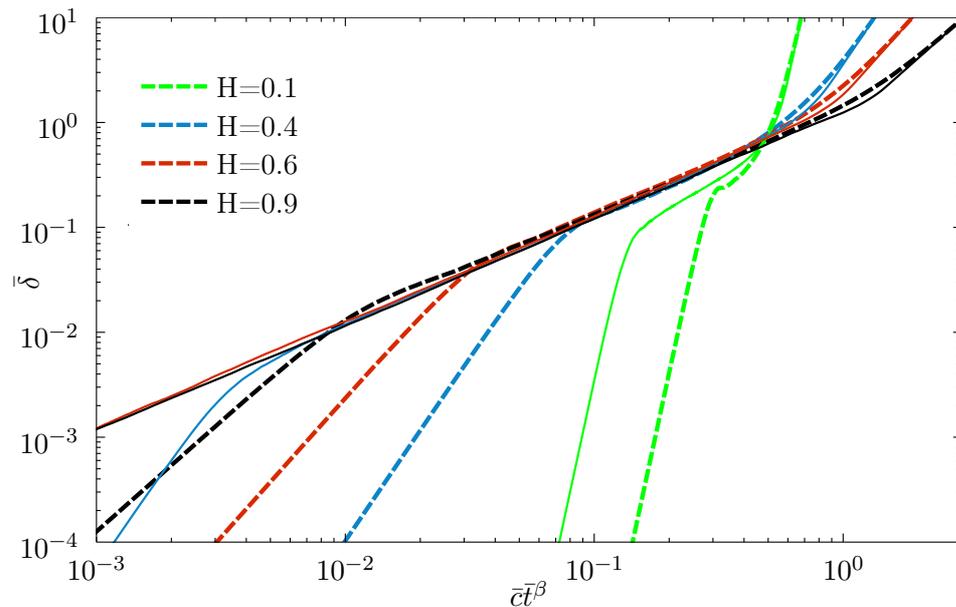


Abbildung 4.18.: Die Indentierungsdynamik bestätigt das Potenzgesetz (4.56) für den Normalkontakts eines selbst-affinen Indenters mit einem linear viskosen Halbraum.

#### Bestätigung mittels Simulationen

Da die Daten der numerischen Simulationen nicht für die Bestimmung des Exponenten benutzt wurden, bieten sich diese für eine numerische Bestätigung der Gleichung (4.56) an.<sup>47</sup> Abschließend wird diese Bestätigung in zwei verschiedenen Arten der Darstellung gezeigt.

Die erste Möglichkeit besteht darin, die linke Seite der Gleichung (4.56) über der rechten Seite aufzutragen. Wenn diese Beziehung die Indentierungsdynamik zutreffend

<sup>46</sup>Vergleiche zum Beispiel Persson et al. [19].

<sup>47</sup>In die Bestimmung des Koeffizienten wurden sie dagegen eingezogen. Vergleiche dazu die Ausführungen im Anschluss an Gleichung (4.55).

beschreibt, müssen die Verläufe für alle Hurst-Exponenten zu einer Masterkurve zusammenfallen. Außerdem muss diese Kurve in logarithmischer Darstellung eine Gerade sein. Dass dies tatsächlich der Fall ist, ist in Abbildung 4.18 zu sehen.

Dargestellt ist die linke Seite der Gleichung (4.56) über der rechten. Beide Achsen sind logarithmisch eingeteilt. Die gestrichelten Linien zeigen die gemittelten Ergebnisse der Randelemente-Methode. Die zu Grunde liegenden Daten gehören zu den Indentierungen mit den Standardparametern<sup>48</sup>. Diese jeweils mindestens 240 Indentierungen sind eine Teilmenge derer, die für Abbildung 4.17 verwendet wurden. Die durchgezogenen Linien repräsentieren die gemittelten Ergebnisse nach der Methode der Dimensionsreduktion. Die Daten entstammen jeweils 250 Indentierungen. Die Parameter entsprechen den Standardparametern der Randelemente-Simulationen. Allerdings wurde eine feinere Diskretisierung gewählt, nämlich eine Million Elemente auf einer Länge von einem Meter. Die farbliche Zuordnung ist bei beiden Simulationsverfahren identisch und kann der Legende entnommen werden.

Im mittleren Bereich fallen alle Kurven fast perfekt zusammen und haben hier die Gestalt einer Geraden. Abweichungen sind in den vorhergesagten Bereichen erkennbar. Die beiden Kurven für den Hurst-Exponenten  $H = 0.1$  weichen sichtbar von den anderen Verläufen ab. Außerdem ist der Bereich, in dem das Potenzgesetz gelten sollte, bei diesem Hurst-Exponenten sehr klein. Alle Kurven brechen sowohl für sehr kleine als auch sehr große Werte (jeweils auf beiden Achsen) aus dem vorhergesagten Verhalten aus. Im ersten Fall ist die Selbst-Affinität durch die Diskretisierung verletzt, im zweiten Fall ist der Übergang zur Sättigung ausschlaggebend. Die Abweichungen zwischen den Randelemente-Simulationen und denen nach der Reduktionsmethode sind gegenüber der Abbildung 4.17 unverändert. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die numerischen Simulationen die vorherigen Überlegungen in allen Punkten bestätigen.

Die zweite Möglichkeit zur Bestätigung der Indentierungsdynamik (4.56) mit numerischen Simulationen ist etwas abstrakter. Im Gegenzug vermittelt sie einen besseren Eindruck darüber, wie gut (oder schlecht) die Übereinstimmung zwischen den theoretischen und den numerischen Betrachtungen tatsächlich ist.

Der Ausgangspunkt ist wiederum die Mittelung der Indentierungsverläufe für jeweils einen Hurst-Exponenten. Auf der Grundlage der gemittelten Simulationsdaten werden die Größen der linken und rechten Seite der Gleichung (4.56) bestimmt. Die Bereiche, in denen das Potenzgesetz nicht mehr gültig ist, werden abgeschnitten. Anschließend werden die Logarithmen beider Wertereihen ermittelt und eine Kurvenanpassung<sup>49</sup> an eine Gerade vorgenommen. Als Ergebnis der Approximation ist die Steigung der Gerade bestimmt. Diese ist mit dem Exponenten  $\beta$  identisch, der damit numerisch aus den Indentierungsverläufen ermittelt ist.

Das Ergebnis ist in Abbildung 4.19 zu sehen. Dargestellt ist der Exponent  $\beta$  als Funktion des Hurst-Exponenten. Die Achseneinteilung ist linear. Eingezeichnet sind die analytische Lösung  $\beta = H/(1 + H)$  als rote, gestrichelte Linie, die Approximation aus den Randelemente-Simulationen als blaue Kreuze und die aus den Simulationen mit der

<sup>48</sup>Vergleiche Tabelle 4.1 und zugehörige Erläuterungen.

<sup>49</sup>Hierfür wurde die Matlab-Routine `fit` mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet.

#### 4. Normalkontakt mit einem viskosen Elastomer

Reduktionsmethode als schwarze Linie. Diese Darstellung ist das Analogon zur Abbildung 2.7 für das elastische Problem.

Die Grundlage der Randelemente-Simulationen sind wieder die jeweils etwa 240 Indentierungen mit den Standardparametern, die bereits für die Abbildungen 4.17 und 4.18 verwendet wurden. Für die Ergebnisse der Reduktionsmethode wurden Simulationen zu 101 Hurst-Exponenten im Intervall  $H \in [0, 1]$  ausgewertet. Zu jedem Hurst-Exponenten wurden 250 Indentierungen mit zufällig erstellten Linien durchgeführt. Dafür wurden ebenfalls die Standardparameter der Tabelle 4.1 verwendet und es wurde nochmals eine feinere Diskretisierung gewählt: vier Millionen Elemente auf eine Länge von einem Meter.

Es ist erkennbar, dass die analytische Lösung und die nach der Methode der Dimensionsreduktion für  $H > 1/3$  fast perfekt zusammenfallen. Auch die Ergebnisse mittels Randelemente-Methode zeigen für die Hurst-Exponenten  $H = 0.4, 0.6$  und  $0.9$  gute Übereinstimmung mit den anderen beiden Lösungen. Für kleinere Hurst-Exponenten zeigen dagegen beide numerische Verfahren sichtbare Abweichungen von der analytischen Lösung. Auch diese Betrachtung bestätigt somit die Gleichung (4.56).

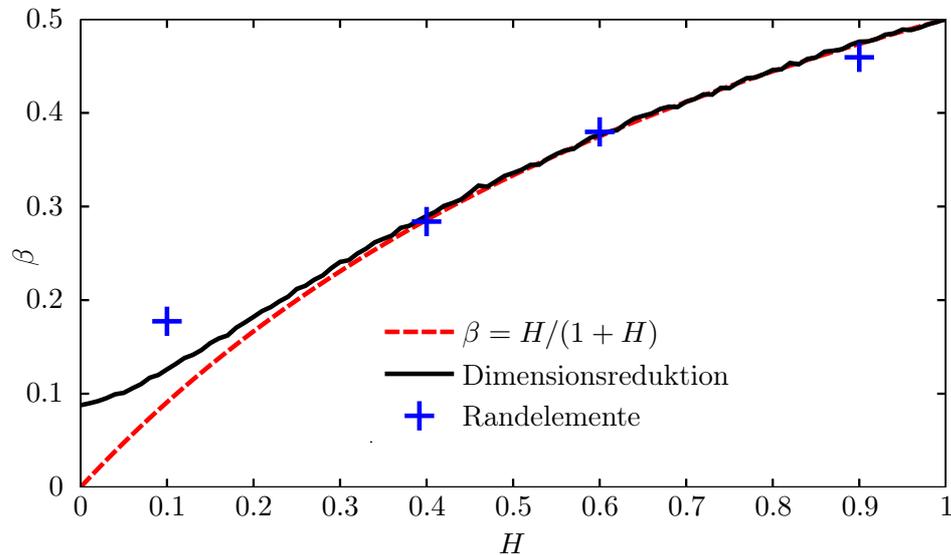


Abbildung 4.19.: Exponent  $\beta$  in Abhängigkeit des Hurst-Exponenten  $H$ <sup>50</sup>

#### 4.5. Fazit

In diesem Kapitel wird der Normalkontakt zwischen einem starren Indenter und dem linear viskosen Modell-Elastomer untersucht. Die grundlegenden Zusammenhänge werden am Beispiel des zylindrischen Stempels erarbeitet. Im weiteren Verlauf werden dann

<sup>50</sup>Die Abbildung 4.19 ist aus [72] übernommen, die Darstellung wurde geringfügig abgeändert.

kegelförmige Indenter und Rotationsparaboloide sowie zufällig raue, selbst affine Indenter betrachtet.

Diese Beispiele werden jeweils mit der Methode der Dimensionsreduktion, mit einem Randelemente-Verfahren und (sofern möglich) mittels Abschätzungen am dreidimensionalen Originalsystem untersucht. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren stets sehr gut übereinstimmen. Trotz ihres einfachen Aufbaus ist die Methode der Dimensionsreduktion daher zur Lösung solcher Kontaktprobleme geeignet.



## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

Nachdem im vorherigen Kapitel der Normalkontakt eines starren Indenters mit dem linear viskosen Elastomer studiert wurde, wird nun das zugehörige Reibungsproblem betrachtet. Dabei wird an vielen Stellen auf die Ergebnisse der vorherigen Kapitel zurückgegriffen.

Der erste Abschnitt ist wieder einigen allgemeinen Gesichtspunkten geschuldet. Die wesentlichen zusätzlichen Annahmen werden vorgestellt und ein einfaches Modell für die Reibung zwischen einem starren Indenter und einem linear viskosen Halbraum konstruiert. Das globale Verhalten wird im zweiten Abschnitt charakterisiert. Im Mittelpunkt des dritten Abschnitts steht das Verhalten in der unmittelbaren Umgebung des Kontaktgebiets. Hier werden die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels abgeleitet, insbesondere wird der stationäre Reibungskoeffizient bestimmt. Im letzten Abschnitt werden diese Ergebnisse auf ausgewählte Indentertypen angewandt und mit numerischen Simulationen verglichen.

### 5.1. Vorbetrachtung

In diesem Kapitel wird ein sehr einfaches Reibungsmodell behandelt, welches hauptsächlich die linear viskose Rheologie des Elastomers widerspiegelt. Es ist jedoch unbenommen, dass in Reibungsproblemen neben den hier betrachteten Aspekten auch anderen Einflüsse auftreten und unter Umständen sogar dominieren können. Diese sind jedoch nicht Inhalt dieses Kapitels.

#### Motivation und Eingrenzung

An dieser Stelle wird zunächst aufgezeigt, welche Aspekte der Reibung in diesem Kapitel behandelt werden. Gleichzeitig wird die Motivation zur Betrachtung dieses Problems dargelegt und die Einordnung in den größeren Zusammenhang vorgenommen.

In Kapitel 3 wurde bereits auf die speziellen Probleme im Zusammenhang mit viskoelastischen Materialien eingegangen. Diese werden unter anderem bei der Betrachtung der Relaxationsfunktionen (3.24) und (3.24) deutlich. An dieser Stelle wird nun erneut angesetzt.

Reibungsprobleme gehen typischerweise mit einer tangentialen Verschiebung der Oberflächen einher. Dabei geraten immer wieder andere Teile der Oberflächen in Kontakt beziehungsweise verlieren diesen wieder. Selbst bei Annahme einer konstanten äußeren Normalkraft und einer konstanten Gleitgeschwindigkeit stellt sich dadurch lokal eine wechselnde Beanspruchung ein. Sind Oberflächen betroffen, die innerhalb gewisser Grenzen selbst-affin sind, so kann diese lokale Beanspruchung näherungsweise als periodisch angenommen werden. Die auftretenden charakteristischen Frequenzen sind dabei durch

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

das Verhältnis aus Gleitgeschwindigkeit und den betroffenen Rauheits-Skalen festgelegt. Es macht daher Sinn, das Materialverhalten in Abhängigkeit von der Frequenz der (lokalen) Beanspruchung zu betrachten.

Die folgenden Überlegungen sind an Popov [18] angelehnt. Wird (wenigstens lokal) eine harmonische Anregung angenommen, so lässt sich das Materialverhalten durch eine komplexe Funktion

$$\hat{G}(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) \quad (5.1)$$

im Frequenzbereich beschreiben, die als komplexer Schubmodul bezeichnet wird. Sein Realteil  $G'(\omega)$  ist ein Maß für die gespeicherte elastische Energie und wird daher Speichermodul genannt. Der Imaginärteil  $G''(\omega)$  ist dagegen mit den dissipativen Effekten verknüpft und wird als Verlustmodul bezeichnet. Der Quotient aus Verlust- und Speichermodul  $\tan \phi(\omega) := G''(\omega)/G'(\omega)$  wird Verlusttangens, der Winkel  $\phi$  Verlustwinkel genannt.<sup>51</sup>

Das frequenzabhängige Verhalten vieler typische Elastomere lässt sich wie folgt kennzeichnen:<sup>52</sup> Für sehr kleine Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$  verhält sich das Material wie ein elastischer Körper mit einem sehr kleinen Schubmodul. Für sehr hohe Frequenzen  $\omega \rightarrow \infty$  verhält sich das Elastomer ebenfalls elastisch. Allerdings ist der Schubmodul in diesem Bereich oftmals etwa drei Größenordnungen größer als zuvor. In beiden Fällen ist der Verlusttangens nahe Null, und es tritt kaum Dissipation auf. Diese spielt jedoch im mittleren Frequenzbereich eine wesentliche Rolle. Hier kann der Verlusttangens die Größenordnung von eins erreichen oder sogar überschreiten. Viele typische Elastomere verhalten sich in diesem mittleren Frequenzbereich wie viskose Flüssigkeiten. In diesem Bereich lässt sich das Verhalten echter Elastomere durch das linear viskose Materialmodell aus Abschnitt 3.3 annähern.

Im Folgenden werden diese Überlegungen anhand eines Beispiels konkretisiert, welches ebenfalls aus [18] übernommen wurde. Das einfachste diskrete Modell<sup>53</sup>, das alle drei genannten Bereiche abbilden kann, besteht aus einer Feder (Steifigkeit  $G_1$ ) in Parallelschaltung mit einem Maxwell-Element (Steifigkeit  $G_2$ , Viskosität  $\eta$ ), vergleiche Abbildung 5.1. Es ist das einfachste verallgemeinerte Maxwell-Modell und wird in der Literatur auch als Standardmodell bezeichnet.

Der Vorteil dieses Modells ist, dass die Moduln und der Verlusttangens einfach berechnet werden können:

$$G'(\Omega) = G_2 \left( \Theta + \frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2} \right), \quad G''(\Omega) = G_2 \frac{\Omega}{1 + \Omega^2}, \quad \tan \phi(\Omega) = \frac{\Omega}{\Omega^2 + \Theta(1 + \Omega^2)}. \quad (5.2)$$

$\Omega := \omega G_2 / \eta$  ist dabei die dimensionslose Frequenz und  $\Theta := G_1 / G_2$  das Verhältnis der Steifigkeiten, vergleiche [18]. Bemerkenswert ist, dass alle drei Größen nicht direkt von der Viskosität abhängen. Diese tritt nur in  $\Omega$  auf. Offensichtlich bewirkt eine Änderung

<sup>51</sup>Anmerkungen zur Notation: Die Formelzeichen von Speicher- und Verlustmodul werden üblicherweise mit Strichen gekennzeichnet. Im Zusammenhang mit den frequenzabhängigen Moduli haben diese nicht die Bedeutung einer Ableitung. In der Literatur wird für den Verlustwinkel meist das Symbol  $\delta$  benutzt. Da dieses jedoch hier anderweitig verwendet wird, wird von dieser Schreibweise abgewichen.

<sup>52</sup>Vergleiche Abbildung 5.1

<sup>53</sup>Vergleiche Abschnitt 3.6

der Viskosität lediglich eine Verschiebung entlang der  $\Omega$ -Achse. Darüber hinaus hängt der Verlusttangens  $\phi$  überhaupt nur von dem Verhältnis der Steifigkeiten  $\Theta$  und der dimensionslosen Frequenz  $\Omega$  ab.

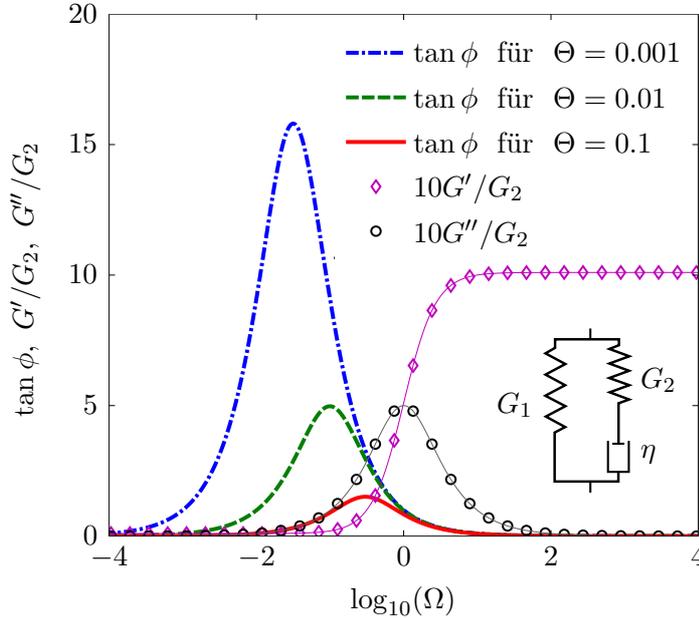


Abbildung 5.1.: Verlauf der frequenzabhängigen Moduli für das Standardmodell mit verschiedenen Parametern.<sup>54</sup>

In Abbildung 5.1 ist der Verlusttangens für drei verschiedene Werte  $\Theta = 1/1000$  (blaue Strich-Punkt-Linie),  $\Theta = 1/100$  (grüne gestrichelte Linie) und  $\Theta = 1/10$  (rote Linie) dargestellt. Zusätzlich sind für den zweiten Wert auch der Speichermodul  $G'$  (magenta Linie mit Raute) und der Verlustmodul  $G''$  (schwarze Linie mit Kreisen) gezeichnet. Diese beiden sind mit dem Faktor  $10/G_2$  skaliert. In der rechten unteren Ecke der Abbildung ist das Modell mit den verwendeten Parametern skizziert.

Die Kurvenverläufe untermauern die obigen Überlegungen. Für sehr kleine und sehr große Frequenzen verhält sich das Modell wie ein elastischer Körper ohne nennenswerte Dissipation. Im mittleren Frequenzbereich haben jedoch viskose Effekte einen maßgeblichen Einfluss.

Darüber hinaus hängen die rheologischen Eigenschaften von Elastomeren auch stark von der Temperatur ab. Diese Abhängigkeit ist jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Stattdessen wird hier stets eine (annähernd) konstante Temperatur vorausgesetzt. In experimentellen Arbeiten werden meistens temperaturabhängige Verläufe (bei konstanter Frequenz) betrachtet, da diese besser zu vermessen sind.<sup>55</sup> Beide Betrachtungsweisen sind jedoch eng miteinander verknüpft, vergleiche hierzu die Arbeiten

<sup>54</sup>Die Abbildung 5.1 ist mit geringfügigen Änderungen aus [74] übernommen.

<sup>55</sup>Vergleiche zum Beispiel Peddini et al. [75], insbesondere dort die Abbildung 19.

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

von Williams, Landel und Ferry [76] und das von Grosch [77] publizierte Masterkurven-Verfahren.

Im vorliegenden Kapitel wird die Reibung in diesem mittleren Frequenzbereich untersucht, in dem die viskosen Eigenschaften das Verhalten maßgeblich beeinflussen. Die (im Frequenzbereich) daran anschließenden Übergangsbereiche und die elastischen Grenzfälle für sehr kleine und sehr große Frequenzen werden dagegen nicht betrachtet. Insofern stellt dieses Kapitel die Ergänzung zu vielen anderen Arbeiten dar, die sich auf die elastisch dominierten Bereiche konzentrieren, zum Beispiel Golden [78].

### Annahmen und Voraussetzungen

Die Betrachtung des Reibungsproblems erfolgt unter denselben Voraussetzungen wie in den vorherigen Kapiteln. In diesem Zusammenhang ergeben sich jedoch zusätzliche Implikationen, die im Folgenden dargestellt werden.

A

Im Fokus dieses Kapitels steht die Reibung, die durch die viskosen Eigenschaften von Elastomeren verursacht wird. Dass es daneben noch andere Quellen dissipativer Effekte gibt, ist davon unbenommen. Diese sind jedoch nicht Inhalt der vorliegenden Schrift.

Die Randbedingungen sind gegenüber dem vorherigen Kapitel unverändert: Im Kontakt stimmt die Oberfläche des Halbraums mit der des Indenters überein, außerhalb des Kontakts ist die Oberfläche spannungsfrei. Die gesamte Oberfläche ist frei von Tangentialspannungen.

Es wird stets das linear viskose, inkompressible Materialverhalten aus Abschnitt 3.3 zu Grunde gelegt. Alle Ergebnisse sind nur innerhalb des oben motivierten mittleren Frequenzbereichs gültig. Insbesondere gibt es untere und obere Schranken im betrachteten Frequenz- bzw. Geschwindigkeitsbereich, an denen dieses Verhalten zusammenbricht und in einen Übergangsbereich übergeht. Diese Schranken lassen sich nicht innerhalb des linear viskosen Materialmodells bestimmen. Dafür wäre die zusätzliche Betrachtung, z.B. mit dem oben vorgestellten generalisierten Maxwell-Modell nötig. Auf diese wird jedoch verzichtet, da sie nicht in die Zielrichtung der vorliegenden Arbeit fällt.

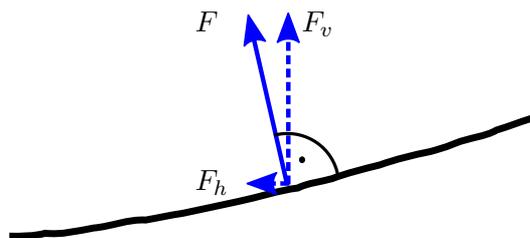


Abbildung 5.2.: Halbraumnäherung: kleine horizontale Wechselwirkungskräfte

Das Elastomer wird wie bisher als Halbraum mit ursprünglich ebener Oberfläche behandelt. Die Halbraum-Annahme ist in mehrerer Hinsicht wesentlich. Zum einen stellt sie sicher, dass genügend Raum vorhanden ist, um das Elastomer zu verdrängen. Insbesondere sind die folgenden Betrachtungen nicht auf dünne Elastomer-Schichten anwendbar.

Diese benötigen eine andere Behandlung, wie sie zum Beispiel von Argatov [79] vorgenommen wird.

Die zweite Auswirkung der Halbraumnäherung folgt aus der Annahme kleiner Steigungen. Da verschwindende Tangentialspannungen vorausgesetzt werden, ist die Wechselwirkungskraft  $F$  zwischen Indenter und Elastomer normal zur Kontaktfläche. Die Beschränkung auf kleine Oberflächen-Steigungen stellt dabei sicher, dass ihre horizontale Komponente  $F_h$  sehr viel kleiner ist als die vertikale  $F_v$ . Gleichzeitig lässt sich die vertikale Komponente durch die Wechselwirkungskraft  $F$  selbst annähern. In Abbildung 5.2 ist das skizziert.

Diese letzte Eigenschaft rechtfertigt es, das Reibungsproblem zunächst als Normalkontakt zu behandeln und die horizontale Komponente der Wechselwirkungskraft erst im Nachgang zu ermitteln. Auf diese Weise erhält man ein sehr einfaches Kontakt- und Reibungsmodell, welches im nächsten Abschnitt ausführlicher erläutert wird.

### Kontakt- und Reibungsmodell

Wie bisher wird ein starrer Indenter auf die Oberfläche des viskosen Halbraums aufgesetzt und dann unter der Wirkung einer konstanten Normalkraft  $F_N > 0$  in diesen hinein gedrückt. Zusätzlich wird nun jedoch der Indenter mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v$  horizontal verschoben. Das ist als Prinzipskizze in Abbildung 5.3 dargestellt. Der Indenter taucht in das Elastomer ein und verdrängt es dabei nach unten. Gleichzeitig wird er horizontal verschoben. Die Umsetzung dieser Vorstellung im Modell wird im Folgenden beschrieben. A

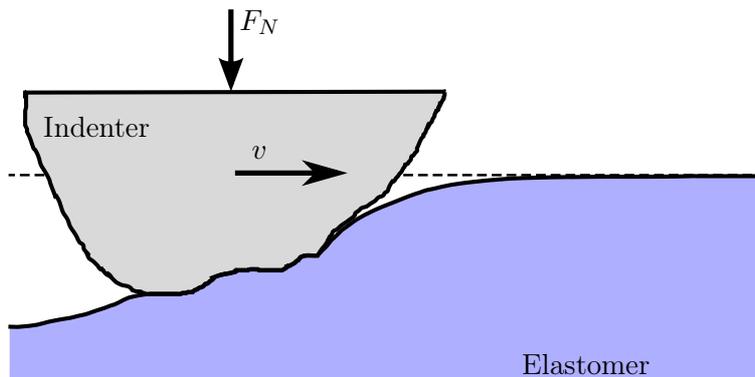


Abbildung 5.3.: Schematische Darstellung des Kontakts zwischen einem viskosen Halbraum und einem starren Indenter der horizontal verschoben wird.<sup>56</sup>

Ausgangspunkt ist eine gegebene Kontaktkonfiguration, die keine der oben genannten Voraussetzungen verletzt. In Bild a) der Abbildung 5.4 ist ein Schnitt durch eine solche Konfiguration festgehalten. Die Oberflächen von Indenter und Elastomer sind gestrichelt dargestellt und so auch in den Bildern b) und c) als Referenz eingezeichnet.

<sup>56</sup>Die Abbildung 5.3 ist mit geringfügigen Änderungen aus [74] übernommen.

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

Aus Gründen der Implementierung ist es vorteilhaft, nicht den Indenter zu verschieben, sondern stattdessen den Halbraum in die entgegengesetzte Richtung zu ziehen. Im Folgenden wird daher stets dieser Fall betrachtet. Der Halbraum wird entsprechend der vorgegebenen Geschwindigkeit horizontal verschoben. Dabei entstehen Bereiche, in denen sich Indenter und Elastomer überlappen würden. Spannungen an der Oberfläche des Elastomers sorgen dafür, dass dieses entsprechend den Randbedingungen verdrängt wird. Im Bild b) der Abbildung 5.4 ist der (nach links) verschobene Halbraum eingezeichnet. Seine Oberfläche zu diesem Zeitpunkt ist mit einer durchgezogenen blauen Linie gekennzeichnet. In dem dunkel schattierten Bereich würden sich Indenter und Elastomer überlappen.

An dieser Stelle wird die Annahme kleiner Steigungen ausgenutzt und das Kontaktproblem zunächst als Normalkontakt behandelt. Das bedeutet, dass das Elastomer senkrecht nach unten verdrängt wird. Die Berechnung der dafür erforderlichen Kraft erfolgt nach den Ausführungen des Kapitels 4.

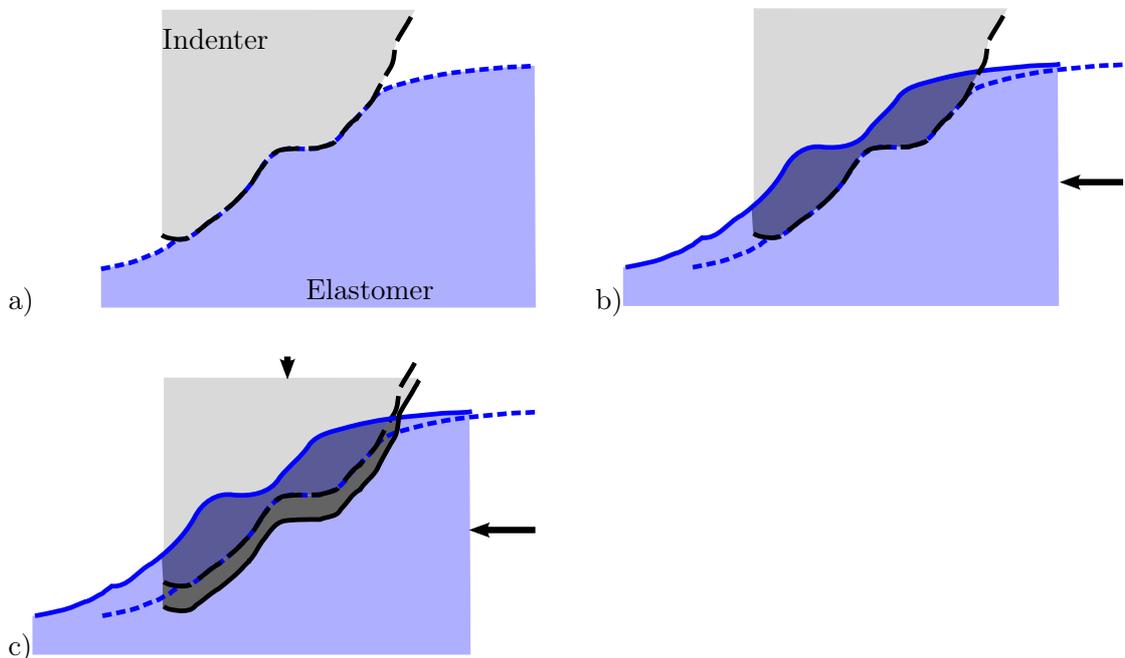


Abbildung 5.4.: Schematische Darstellung der Vorgehensweise im Kontaktmodell.<sup>57</sup>

Ist diese kleiner als die äußere Normalkraft, so wird der Indenter tiefer in den Halbraum eingedrückt, bis sich beide das Gleichgewicht halten. Andernfalls wird der Indenter aus dem Elastomer herausgehoben. Auch hierbei erfolgt die Behandlung als reiner Normalkontakt. Das ist im Bild c) der Abbildung 5.4 zu sehen. Dort wird der Indenter tiefer in den Halbraum eingedrückt. Die Oberfläche des Indenters zu diesem Zeitpunkt ist als durchgezogene Linie gezeichnet. Der dunkelgraue Bereich ist zusätzlich zu verdrängen.

<sup>57</sup>Die Abbildung 5.4 ist mit geringfügigen Änderungen aus [74] übernommen.

Auf diese Weise wird das Kontaktproblem zunächst als reiner Normalkontakt gelöst. Die Voraussetzungen, unter denen diese Betrachtung zulässig ist, wurden weiter oben aufgeführt. Im Nachhinein wird die horizontale Komponente der Wechselwirkungskraft berechnet und als die Reibungskraft identifiziert.

Dazu wird das Produkt aus der Normalspannung und der Projektion der Oberflächensteigung auf die Bewegungsrichtung über die gesamte Kontaktfläche integriert,

$$F_R = \int_{A_c} \sigma(x, y) \frac{\partial}{\partial x} h(x, y) \, dA. \quad (5.3)$$

Hierbei wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Bewegung in Richtung der  $x$ -Koordinate erfolgt.

Das Verhältnis aus Reibungskraft und äußerer Normalkraft kann als Reibungskoeffizient  $\mu$  angesehen werden:

$$\mu := \frac{F_R}{F_N}. \quad (5.4)$$

Die neue Kontaktkonfiguration ist somit bestimmt und die Berechnung beginnt von vorn. Im Verlauf der Zeit dringt der Indenter tiefer in das Elastomer ein. Die Indentierungsgeschwindigkeit verringert sich und das System strebt gegen einen stationären Zustand. In diesem reicht die äußere Kraft gerade aus, das Elastomer an der Vorderkante des Indenters zu verdrängen (Bild b) der Abbildung 5.4). Der Reibungskoeffizient in diesem stationären Zustand wird im weiteren Verlauf als stationärer Reibungskoeffizient bezeichnet. Dieser ist nicht mit dem statischen Reibungskoeffizienten zu verwechseln.

## 5.2. Das globale Verhalten

Bevor später die Reibung mit dem linear viskosen Elastomer selbst untersucht wird, erfolgt in diesem Abschnitt die Betrachtung des globalen Verhaltens. Diese wird einige Ergebnisse hervorbringen, die für das allgemeine Verständnis der späteren Abschnitte wesentlich sind.

Die folgenden Überlegungen bauen auf den Ergebnissen des Normalkontakt-Problems auf. Es ist dabei zu betonen, dass dies keine Folge des vereinfachten Kontaktmodells ist, welches im vorherigen Abschnitt vorgestellt wurde. Vielmehr liegt das daran, dass ein Reibungsproblem in der Regel auch ein Normalkontakt-Problem beinhaltet.

Die Ergebnisse des Kapitels 4 bezüglich des globalen Verhaltens sind grundsätzlich anwendbar. Dies betrifft insbesondere die Eigenschaft, dass infolge der Normalkraft die Oberfläche des Halbraums beständig absinkt. In ausreichend großer Entfernung lässt sich das Absinken durch die Greensche Funktion (3.43) des viskosen Normalkontakts beschreiben. Diese ist richtungsunabhängig, insbesondere auch unabhängig von der horizontalen Bewegung des Indenters. Der Teil der Halbraum-Oberfläche, der (bezogen auf die Bewegungsrichtung des Indenters) hinter dem Indenter liegt, hat keinen Einfluss auf Kontakt und Reibung. Er wird daher im weiteren Verlauf nicht betrachtet.

## Deformation der Oberfläche

Im Folgenden wird die Deformation der Elastomer-Oberfläche außerhalb des Kontaktgebiets bestimmt. Dabei erfolgt die Beschränkung der Betrachtung auf eine Gerade, die parallel zur Bewegungsrichtung liegt und durch den Angriffspunkt der äußeren Normalkraft geht. Diese Einschränkung ist jedoch nicht zwingend notwendig. Die Herleitung kann leicht auf einen beliebigen Teil der Oberfläche, der zu jedem Zeitpunkt ausreichend weit vom Kontaktgebiet entfernt ist, erweitert werden.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Indenter auf die (noch ebene) Oberfläche des Halbraums aufgesetzt, mit der Normalkraft  $F_N$  belastet und mit der Geschwindigkeit  $v$  horizontal in Richtung der Koordinate  $x$  in Bewegung gesetzt. Betrachtet wird die Deformation über die Zeitspanne  $[0, T]$  in einem Punkt, der am Ende dieser Zeitspanne im Abstand  $r$  vor dem Angriffspunkt der Normalkraft liegt.

Die Konfiguration zum Zeitpunkt  $t = T$  ist in Abbildung 5.5 skizziert. Die blaue durchgezogene Linie kennzeichnet den Indenter. Die (deformierte) Halbraum-Oberfläche ist blau gestrichelt eingezeichnet, die ursprüngliche (nicht deformierte) als schwarze Strich-Punkt-Linie zu sehen.

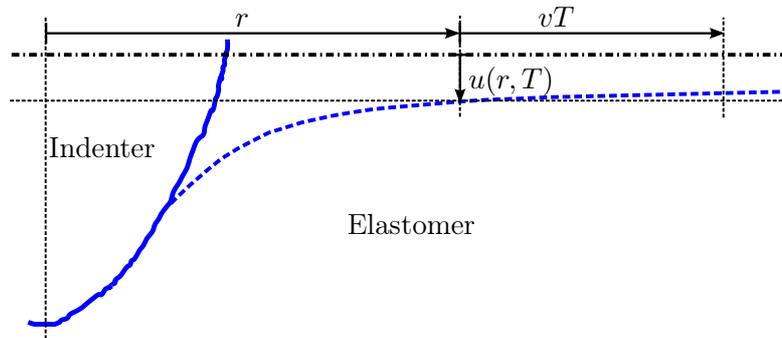


Abbildung 5.5.: Deformation der Oberfläche beim Reibungsproblem

Weiterhin wird vorausgesetzt, dass  $r$  ausreichend groß ist, so dass die Greensche Funktion des viskosen Normalkontakts anwendbar ist. Jeder Punkt im Abstand  $x \geq r$  erfährt somit nach Gleichung (3.43) die Deformationsgeschwindigkeit

$$\dot{u}(x) = \frac{F_N}{4\pi\eta x}. \quad (5.5)$$

Der Indenter bewegt sich in diesem Zeitraum um die Strecke  $vT$ . Der Abstand des betrachteten Punktes zum Kraftangriffspunkt in Abhängigkeit von der Zeit ist demnach:

$$x(t) = r + v(T - t). \quad (5.6)$$

Durch Integration ergibt sich dann die Verschiebung, die dieser Punkt während der an-

genommenen Zeitspanne  $T$  erfährt:

$$\begin{aligned} u(r, T) &= \int_{t=0}^T \frac{F_N}{4\pi\eta(r + v(T-t))} dt \\ &= \frac{F_N}{4\pi\eta v} \ln \left( \frac{r + vT}{r} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Gleichung (5.7) lässt sich auch ausdrücken als

$$u(r, T) = \frac{u_0}{\tau} \ln(1 + \tau) \quad \text{mit} \quad \tau := \frac{vT}{r}. \quad (5.8)$$

Dabei ist  $u_0$  das entsprechende Ergebnis (3.41) für den Normalkontakt.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Lösung (5.7) vom Startzeitpunkt unabhängig ist. Die Betrachtung des Zeitintervalls  $[t_1, t_1 + T]$  mit einem  $t_1 > 0$  führt ebenfalls auf die Gleichungen (5.7) und (5.8). Darüber hinaus reduziert sich Gleichung (5.8) für  $\tau \rightarrow 0$  wieder auf die Beziehung (3.41) für den Normalkontakt.

Analog zum Normalkontakt-Problem sinkt die gesamte Oberfläche des Halbraums unter der Wirkung der äußeren Kraft beständig ab.

## Anwendung bei Simulationen

Für die vorgestellten Überlegungen gibt es eine ganz praktische Anwendung in den numerischen Simulationen. Wird das Reibungsproblem simuliert, zum Beispiel mit der Randelemente-Methode, dann muss der betrachtete Halbraum so groß sein, dass der Indenter ihn während seiner Bewegung nicht verlässt. Das führt unter Umständen zu einem immensen Rechenaufwand, da in jedem Zeitschritt für alle Elemente der Oberfläche<sup>58</sup> die Deformationsgeschwindigkeit und -tiefe berechnet werden muss. Daraus resultieren starke Einschränkungen hinsichtlich der Auflösung, der simulierbaren Zeitspanne und der Systemgröße.

Die oben geschilderten Überlegungen erlauben jedoch eine alternative Behandlung. Dabei wird nur ein Teil des Halbraums diskretisiert, dessen Länge in Bewegungsrichtung etwa der dreifachen Abmessung des Indenters entspricht. Das ist schematisch in Abbildung 5.6 gezeigt. Die einzelnen Quadrate stehen für die Flächenelemente. Die grau eingefärbten Bereiche symbolisieren das Kontaktgebiet. Der Angriffspunkt der resultierenden Wechselwirkungskraft ist mit  $F$  gekennzeichnet.

Der Indenter wird ganz an den auslaufenden Rand (im Bild die rot eingefärbten Elemente ganz links) des diskretisierten Gebiets platziert. Der Abstand zwischen dem Kraftangriffspunkt  $F$  und dem einlaufenden Rand (im Bild die grün eingefärbten Elemente ganz rechts) beträgt dann mindestens das Doppelte der Abmessungen des Kontaktgebiets. Dieser Abstand ist groß genug, dass die Deformation am einlaufenden Rand näherungsweise mittels der Greenschen Funktion berechnet werden kann.<sup>59</sup> Wenn diese

<sup>58</sup>Streng genommen muss die Berechnung nur für alle Elemente vorgenommen werden, die (irgendwann) in Kontakt mit dem Indenter kommen können.

<sup>59</sup>Vergleiche zum Beispiel die Abbildungen 4.6 und 4.12.

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

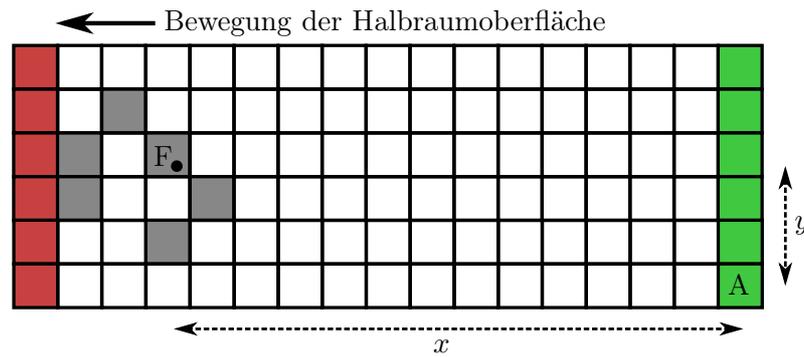


Abbildung 5.6.: Dynamische Fortsetzung der Halbraum-Oberfläche

Genauigkeit nicht ausreicht, kann die Länge der diskretisierten Oberfläche vergrößert werden.

Immer dann, wenn die Halbraum-Oberfläche um ein Element verschoben wird, wird eine Reihe Elemente am auslaufenden Rand entfernt. Gleichzeitig wird am einlaufenden Rand eine Reihe Elemente erzeugt. Das oben vorgestellte Verfahren wird benutzt, um die Deformation zu bestimmen, die diese Elemente bis zum momentanen Zeitpunkt erfahren haben.

Im Folgenden wird das am Beispiel des Flächenelements A in der Abbildung 5.6 demonstriert. Angenommen, zum Zeitpunkt  $t_1$  wird die grün eingefärbte Reihe Elemente erzeugt und mit ihr das Element A. Seine Deformation  $u_A(t_1)$  bis zu diesem Zeitpunkt wird näherungsweise mit der Gleichung (5.7) berechnet, wobei nun jedoch  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  der tatsächliche Abstand zwischen dem Kraftangriffspunkt F und dem Element A ist:

$$\begin{aligned} u_A(t_1) &= \frac{F_N}{4\pi\eta v} \ln \left( \frac{\sqrt{(x + vt_1)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \frac{F_N}{8\pi\eta v} \ln \left( \frac{(x + vt_1)^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Hierbei wurde angenommen, dass sich der Kraftangriffspunkt im Verlauf der Simulation nicht verschiebt. Im Allgemeinen ist das jedoch nicht so. Insbesondere in der ersten Phase, in der das Kontaktgebiet starken Änderungen unterworfen ist, verschiebt sich der Kraftangriffspunkt deutlich. Das ändert sich jedoch, wenn sich das System in der Nähe des stationären Zustandes befindet. Die Bewegung des Kraftangriffspunktes kann natürlich berücksichtigt werden. Allerdings haben die daraus resultierenden Unterschiede keinen wesentlichen Einfluss.

### Indentierungsgeschwindigkeit

Die vorherigen Betrachtungen können auch dazu benutzt werden, die Indentierungsgeschwindigkeit abzuschätzen. Ausgangspunkt ist die Gleichung (5.7). Diese beschreibt die

Deformation eines Punktes der Halbraum-Oberfläche im Abstand  $r$  vor dem Angriffspunkt der resultierenden Wechselwirkungskraft zum Zeitpunkt  $T$ . Zur besseren Unterscheidung wird dieser Punkt mit A bezeichnet. In Abbildung 5.7 ist die Konfiguration zum Zeitpunkt  $T$  mit blauer Farbe skizziert. Die durchgezogene Linie symbolisiert die Position des Indenters, die gestrichelte die Oberfläche des Elastomers.

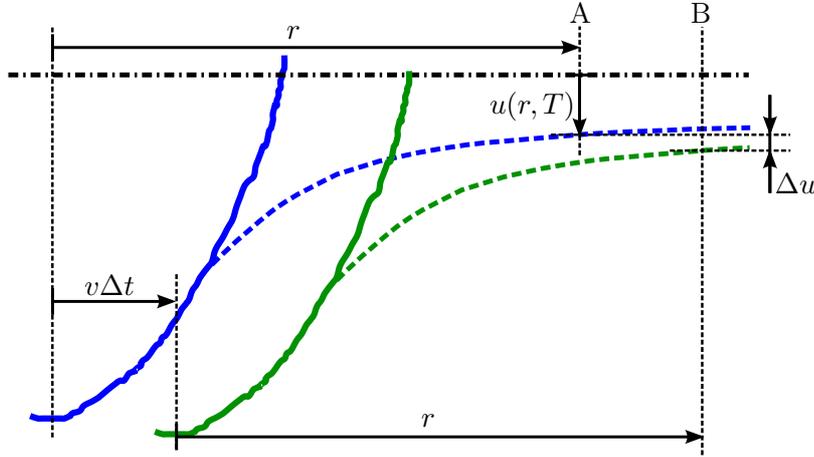


Abbildung 5.7.: Abschätzung der Indentierungsgeschwindigkeit

Es soll zunächst die Frage beantwortet werden, mit welcher Geschwindigkeit der Halbraum im Abstand  $r$  weiter deformiert wird. Dazu wird der Zeitpunkt  $T + \Delta t$  betrachtet. Der Kraftangriffspunkt hat sich in der Zeitspanne  $\Delta t$  um die Strecke  $v\Delta t$  weiterbewegt. Im Abstand  $r$  vor dem jetzigen Kraftangriffspunkt befindet sich der Punkt B. Die Konfiguration zum Zeitpunkt  $T + \Delta t$  ist in Abbildung 5.7 grün eingezeichnet. In einem Koordinatensystem, das in horizontaler Richtung mit dem Kraftangriffspunkt mitgeführt wird, hat sich der Punkt im Abstand  $r$  innerhalb der Zeitspanne  $\Delta t$  um die Höhe  $\Delta u$  abgesenkt.

Weiter oben wurde bereits bemerkt, dass der Startzeitpunkt, ab dem die Deformation gemessen wird, unerheblich ist. Daher wird der Punkt B im Zeitintervall  $[\Delta t, T + \Delta t]$  gerade so stark deformiert wie der Punkt A im Intervall  $[0, \Delta t]$ . Zusätzlich wurde B jedoch im Intervall  $[0, \Delta t]$  deformiert. Die Deformationsgeschwindigkeit gehorcht dabei der Gleichung (5.5) mit dem Abstand  $x(t) = r + v(T + \Delta t - t)$  und  $0 \leq t < \Delta t$ .

Wird nun der Übergang  $\Delta t \rightarrow 0$  betrachtet, dann kann diese Deformationsgeschwindigkeit durch den Ausdruck

$$\dot{u}_{AB} = \frac{F_N}{4\pi\eta(r + vT)} \quad (5.10)$$

beschrieben werden. Offenbar ist das auch die Geschwindigkeit, mit der sich das Elastomer (im mitbewegten Koordinatensystem) im Abstand  $r$  vor dem Indenter absenkt.<sup>60</sup>

Erfolgt nun die Beschränkung auf ausreichend große Zeitspannen  $T \gg r/v$ , dann kann **A**

<sup>60</sup>Abgesehen von dieser eher anschaulichen Herleitung, lässt sich das auch streng formal zeigen. Dazu wird die Deformation im Punkt A zum Zeitpunkt  $T$  und die im Punkt B zum Zeitpunkt  $T + \Delta t$

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

der Abstand  $r$  gegenüber  $vT$  vernachlässigt werden. Durch den Übergang  $r \rightarrow 0$  lässt sich dann die Deformation des Halbraums in unmittelbarer Umgebung des Kraftangriffspunkts abschätzen.<sup>61</sup> Diese muss aber gemäß der Kontaktbedingung mit der Indentierungsgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$  übereinstimmen. Damit ist gezeigt, dass für ausreichend große  $t$  die Indentierungsgeschwindigkeit durch den Ausdruck

$$\dot{\delta}(t) \approx \frac{F_N}{4\pi\eta vt} \quad (5.11)$$

abgeschätzt werden kann.

Insbesondere zeigt die Abschätzung (5.11), dass (im Gegensatz zum Normalkontakt) die Indentierungsgeschwindigkeit gegen Null strebt und sich daher die Indentierungstiefe  $\delta$  einem endlichen Wert annähert.

### 5.3. Der stationäre Reibungskoeffizient

In diesem Abschnitt werden die Vorgänge im Kontaktgebiet und seiner unmittelbaren Umgebung untersucht. Das ist der Bereich, in dem (innerhalb der Grenzen dieses Modells) die Reibung ihren Ursprung hat. Das Ziel dieses Abschnitts ist letztendlich die Bestimmung des stationären Reibungskoeffizienten. Zuvor sind allerdings noch einige Vorbereitungen notwendig.

A

Alle Betrachtungen in diesem Abschnitt werden anhand des eindimensionalen Modells nach der Methode der Dimensionsreduktion vorgenommen. Daher wird zunächst nur der Anspruch erhoben, dass die so erarbeiteten Ergebnisse für dieses Modell gültig sind - und zwar exakt.

Im nächsten Abschnitt wird jedoch durch den Vergleich mit numerischen Ergebnissen gezeigt, dass diese Ergebnisse auch brauchbare Abschätzungen für das originale, dreidimensionale System abgeben.

Wesentliche Teile dieses Abschnitts sind momentan zur Veröffentlichung eingereicht [74].

#### Die Kontaktlinie

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass sich die Indentierungstiefe einem endlichen Wert annähert. Damit verbunden ist das Erreichen eines stationären Zustandes. Dieser wird im Folgenden betrachtet.

---

explizit bestimmt. Anschließend wird der Differenzenquotient  $\Delta u/\Delta t$  gebildet und der Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow dt$  vorgenommen. Dabei entsteht eine logarithmische Abhängigkeit, die für kleine  $\Delta t$  einer Reihenentwicklung unterzogen werden kann. Wird diese Reihe nach dem linearen Glied abgebrochen, erhält man nach kurzer Umformung gerade die Gleichung (5.10).

<sup>61</sup>Die zu Grunde liegenden Greenschen Funktionen sind nur für ausreichend große Abstände  $r$  zur Bestimmung der Deformationsgeschwindigkeit zulässig. Durch den Übergang  $r \rightarrow 0$  wird diese Voraussetzung verletzt. Die vorherigen Ausführungen rechtfertigen jedoch die Annahme, dass sich die dabei entstehenden Fehler zu den Zeitpunkten  $T$  und  $T + \Delta t$  gegenseitig aufheben. Die folgenden Ergebnisse werden dennoch nicht als exakt, sondern nur als Abschätzungen angesehen.

Es werden die im Kapitel 2.3 eingeführten Koordinatensysteme verwendet, vergleiche hierzu insbesondere den rechten Teil der Abbildung 2.3. Die meisten Betrachtungen beziehen sich auf das  $(x, z)$ -System, welches mit dem Indenter mitbewegt wird. Zusätzlich wird angenommen, dass die horizontale Bewegung des Indenters mit der Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der  $x$ -Achse, also nach rechts, erfolgt.

Die Oberfläche des eindimensionalen Indenters wird durch die Funktion  $\tilde{g}$  beschrieben und im weiteren Verlauf als Linie bezeichnet. Es wird unterstellt, dass diese Linie gemäß den Vorschriften der Reduktionsmethode konstruiert wurde. Für die folgenden Überlegungen ist das jedoch zunächst unerheblich. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass  $\tilde{g} : X \mapsto \mathbb{R}$  eine stetige, nicht konstante Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall  $X$  der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist. A

Das Elastomer wird, der Methode der Dimensionsreduktion entsprechend, als eine Kette unabhängiger Dämpfer betrachtet. Die Breite der einzelnen Dämpfer (die Diskretisierungslänge  $b$ ) soll stets ausreichend klein sein. Ihr Verhalten wird gemäß Abschnitt 3.6 durch die Gleichung (3.68) charakterisiert.

Im ersten Schritt werden die Teile der Linie bestimmt, die in Kontakt mit dem Elastomer sind. Die Randbedingungen fordern, dass auf einem Teil der Elastomer-Oberfläche negative Spannungen (also Druck) auftreten, nämlich im Kontaktgebiet, und der andere Teil der Oberfläche spannungsfrei ist. Das Auftreten von positiven Spannungen (Zugspannungen) auf der Oberfläche ist dagegen ausgeschlossen. Das bedeutet aber, dass die einzelnen Dämpfer nur in die negative  $z$ -Richtung, das heißt nach unten, deformiert werden.

Es wird zusätzlich vorausgesetzt, dass ein stationärer Zustand existiert und das System ihn bereits erreicht hat.<sup>62</sup> Dann sinkt insbesondere die Linie nicht tiefer in das Elastomer ein.

Diese beiden Voraussetzungen sichern eine wichtige Eigenschaft: Es können nur die Bereiche der Linie in Kontakt mit dem Elastomer sein, die in der Teilmenge

$$A := \{x \in X \mid \tilde{g}(x) < \tilde{g}(\xi), \forall \xi > x\} \quad (5.12)$$

von  $X$  enthalten sind. Das sind die Bereiche, in denen die Linie (bezogen auf das  $(x, z)$ -System) streng monoton wachsend ist und sie kleinere Funktionswerte annimmt als für alle größeren Argumente. Aus anschaulichen Gründen wird die Menge  $A$  als Vorderkante (von  $\tilde{g}$ ) bezeichnet.

In Abbildung 5.8 ist beispielhaft eine Linie  $\tilde{g}$  skizziert. Die Vorderkante von  $\tilde{g}$  ist die Menge  $A = [x_0, x_1[ \cup [x_2, x_3]$ . In der Abbildung ist dieser Bereich grau hervorgehoben. In den übrigen Bereichen, zum Beispiel im Intervall  $[x_1, x_2[$ , ist kein Kontakt möglich (sobald das System einen stationären Zustand erreicht hat). Sie tragen daher weder zum Normalkontakt-Problem noch zum Reibungsproblem bei und können für die weiteren Betrachtungen außer Acht gelassen werden.

Aus diesem Grund ist es ausreichend, die Restriktion  $\tilde{g}_A$ ,

$$\tilde{g}_A := \tilde{g}|_A : A \mapsto \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

<sup>62</sup>Auf abweichende Fälle wird am Ende dieses Abschnitts gesondert eingegangen.

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

der Funktion  $\tilde{g}$  auf die Menge  $A$  zu untersuchen. Diese Funktion ist auf ganz  $A$  stetig und streng monoton wachsend. Ihre Konstruktion stellt die Existenz eines globalen Minimums und eines globalen Maximums auf  $A$  sicher. Die Restriktion  $\tilde{g}_A$  der in Abbildung 5.8 dargestellten Linie findet sich in Abbildung 5.9 wieder.

Sei nun  $\xi$  ein Punkt aus  $A$ , in dem die Linie in Kontakt mit dem Elastomer ist. Dann ist sie zwangsläufig auch auf der gesamten Teilmenge  $\{x \in A | x \leq \xi\}$  von  $A$  mit diesem in Kontakt. Darüber hinaus sichert die Konstruktion von  $\tilde{g}_A$  die Existenz eines maximalen Elements  $x_d$  in  $A$ , in dem die Linie in Kontakt mit dem Elastomer ist. Damit existiert eine wohldefinierte Menge  $A_d$ ,

$$A_d := \{x \in A | x \leq x_d\}, \quad (5.14)$$

mit der folgenden Eigenschaft: Die Linie  $\tilde{g}$  ist an einem Punkt  $x \in X$  genau dann in Kontakt mit dem Elastomer, wenn  $x$  in  $A_d$  liegt. Die Menge  $A_d$  wird im weiteren Verlauf als Kontaktlinie bezeichnet. Ist  $A_d \neq \emptyset$ , dann besteht sie aus  $n \in \mathbb{N}$  Intervallen

$$A_d = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ mit } A_1 = [\alpha_1, \beta_1] \text{ und } A_i = [\alpha_i, \beta_i], 1 < i \leq n. \quad (5.15)$$

Die  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  sind reelle Zahlen aus  $X$  mit den Eigenschaften  $\alpha_i < \beta_i$  und  $\alpha_i > \beta_{i+1}$ . In der Abbildung 5.8 ist  $n = 2$ . Die Intervalle  $A_1$  und  $A_2$  und ihre Grenzen sind mit den hier benutzten Bezeichnungen kenntlich gemacht.

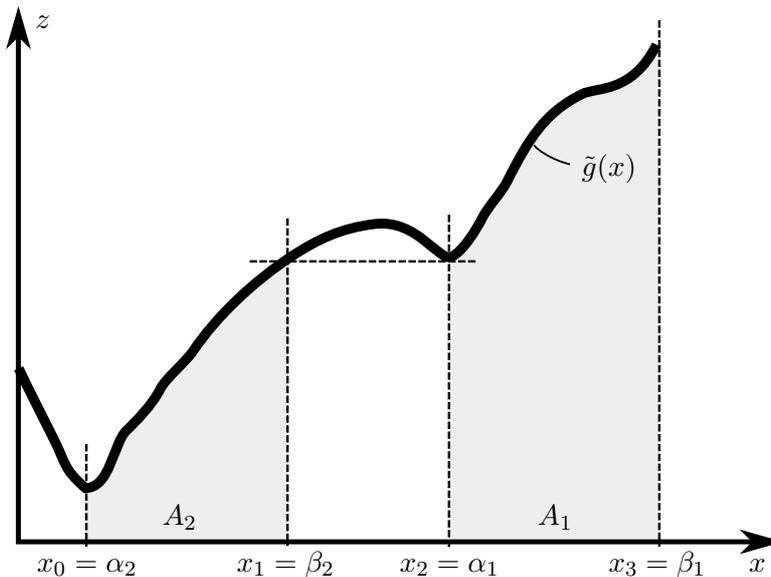


Abbildung 5.8.: Die Vorderkante von  $\tilde{g}$  ist die Vereinigung der Intervalle  $A_1 = [\alpha_1, \beta_1]$  und  $A_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ .<sup>63</sup>

<sup>63</sup>Die Abbildung 5.8 ist mit geringfügigen Änderungen aus [74] übernommen.

An späterer Stelle wird darauf aufbauend die Notation

$$\int_{A_d} (\cdot) dx := \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (\cdot) dx \quad (5.16)$$

verwendet, siehe dazu Gleichung (5.24).

Damit ist bestimmt, in welchen Bereichen die Linie  $\tilde{g}$  in Kontakt mit dem Elastomer ist. Im nächsten Schritt kann nun die stationäre Indentierungstiefe berechnet werden.

### Die stationäre Indentierungstiefe

Weiter oben wurde bereits gezeigt, dass  $\tilde{g}_A$  auf der Vorderkante  $A$  ein globales Minimum und ein globales Maximum besitzt. Daneben existieren offensichtlich auch ein globales Minimum und ein globales Maximum von  $\tilde{g}_A$  auf der Kontaktlinie  $A_d$ .

Seien, unter Verwendung der in (5.15) eingeführten Bezeichnungen,  $g_0 := \tilde{g}_A(\alpha_n)$  jenes Minimum und  $g_0 + d = \tilde{g}_A(\beta_1)$  das Maximum auf  $A_d$ . Dann ist  $d$  genau die noch unbekannte Indentierungstiefe.

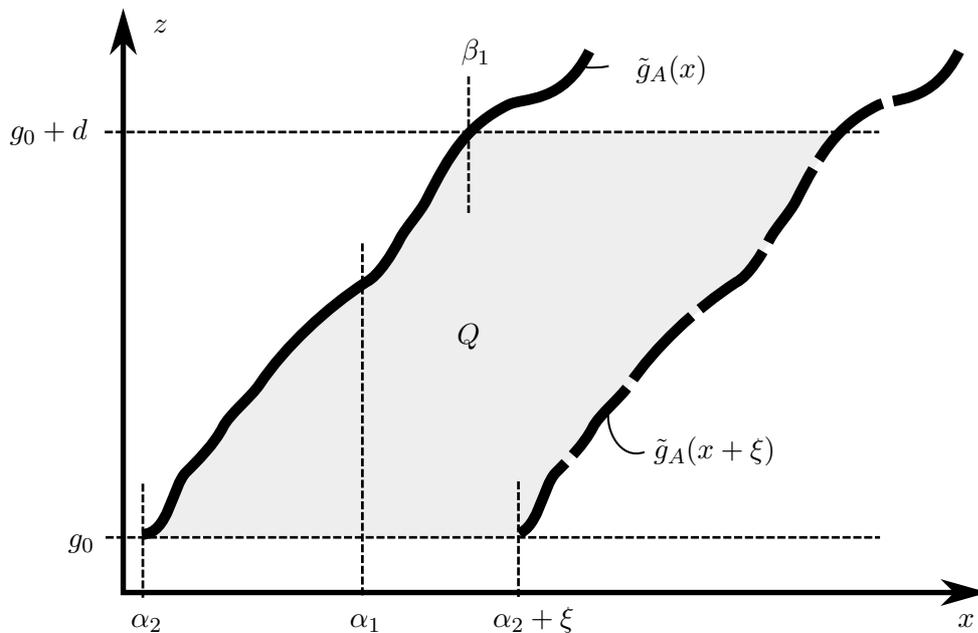


Abbildung 5.9.: Die stationäre Indentierungstiefe  $d$  ergibt sich aus dem Elastomervolumen  $Q$ , das pro Zeiteinheit an der Vorderkante des Indenters verdrängt wird.<sup>64</sup>

Angenommen, die Linie wird um die Strecke  $\xi$  verschoben. Entsprechend der horizontalen Geschwindigkeit verstreicht dabei die Zeitspanne  $t = \xi/v$ . Zwischen der noch nicht

<sup>64</sup>Die Abbildung 5.9 ist mit geringfügigen Änderungen aus [74] übernommen.

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

verschoben Vorderkante  $\tilde{g}_A(x)$ , der verschobenen Vorderkante  $\tilde{g}_A(x + \xi)$  und den Parallelen zur  $x$ -Achse durch die Punkte  $z = g_0$  respektive  $z = g_0 + d$  ist Elastomer mit dem Volumen  $Q = \xi d$  eingeschlossen. Das ist in Abbildung 5.9 skizziert. Zu sehen sind die Vorderkante zu den beiden Zeitpunkten und die beiden Parallelen. Das eingeschlossene Volumen ist grau schattiert.

Es wird während der Zeitspanne  $t$  durch den Indenter verdrängt, was eine Verdrängungsrate  $\dot{Q} = \xi d/t$  erfordert. Durch Normierung auf die Breite  $b$  der Dämpferelemente erhält man die spezifische Verdrängungsrate:

$$\dot{q} = \frac{vd}{b}. \quad (5.17)$$

Diese Größe kann anschaulich interpretiert werden. Es ist gerade die Deformationsgeschwindigkeit, die sich einstellen würde, wenn das eingeschlossene Volumen über die Breite genau eines Dämpfer verdrängt würde. Gleichung (3.68) liefert die dafür notwendige Wechselwirkungskraft:

$$F = 4\eta vd. \quad (5.18)$$

Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Dämpfer und der Linearität des Modells, ist die tatsächliche Breite bzw. Anzahl der Dämpfer unerheblich. Gleichung (5.18) ist daher auch gültig, wenn die Wechselwirkungskraft  $F$  über mehrere Dämpfer verteilt ist. Nach den Voraussetzungen muss sie zudem mit der äußeren Normalkraft  $F_N$  identisch sein, das heißt  $F = F_N$ .

Damit enthält Gleichung (5.18) als einzige unbekannt GröÙe die gesuchte stationäre Indentierungstiefe  $d$ . Durch Umstellen ergibt sich diese unmittelbar:

$$d = \frac{F_N}{4\eta v}. \quad (5.19)$$

Damit sind die Vorarbeiten abgeschlossen und im nächsten Schritt kann nun die Reibung im stationären Zustand untersucht werden. Im Anschluss daran wird das Thema Indentierungstiefe erneut aufgegriffen und auf einige weitere Aspekte eingegangen, die in den jetzigen Betrachtungen außen vor gelassen wurden.

### Bestimmung des stationären Reibungskoeffizienten

A

Sei nun  $\tilde{g}$  zusätzlich zu den oben genannten Voraussetzungen auch stetig differenzierbar. Und sei, wie in Abbildung 5.10 skizziert,  $\xi$  mit  $\tilde{g}(\xi) =: g_\xi$  ein beliebiger Punkt, der im Inneren der Kontaktlinie  $A_d$  liegt.

Angenommen, die Linie wird um eine kleine Strecke  $\Delta x$  in positive  $x$ -Richtung verschoben und es gilt  $[\xi, \xi + \Delta x] \subset A_d$  sowie  $\tilde{g}(\xi + \Delta x) =: g_\xi + \Delta g$ . Auf dem Weg von  $\xi + \Delta x$  nach  $\xi$  wird das Elastomer um die Strecke  $\Delta g$  in negative  $z$ -Richtung verdrängt. Das geschieht innerhalb der Zeitspanne  $\Delta t = \Delta x/v$ . Somit ist die Deformationsrate  $\dot{u}(\xi) = -v\Delta g/\Delta x$ .  $\Delta x$  ist als kleine Verschiebung vorausgesetzt, daher ist der Grenzübergang

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{d\tilde{g}}{dx} := \tilde{g}'(\xi) \quad (5.20)$$

zulässig und die Deformationsrate an der Stelle  $\xi$  ist:

$$\dot{u}(\xi) = -v\tilde{g}'(\xi). \quad (5.21)$$

Das negative Vorzeichen resultiert aus der Betrachtung im  $(x, z)$ -System. Bei Bezug auf das  $(x, \zeta)$ -System entfällt das Vorzeichen. Für die weiteren Betrachtungen ist das jedoch ohne Belang.

Zur Erzeugung dieser Deformationsgeschwindigkeit ist laut Gleichung (3.68) eine vertikal gerichtete, differentielle Kraft vom Betrag

$$|f_v(\xi)| = 4\eta v\tilde{g}'(\xi) dx \quad (5.22)$$

notwendig. Diese Wechselwirkungskraft wirkt sowohl (entgegen der  $z$ -Richtung) auf das Elastomer als auch (in  $z$ -Richtung) auf die Linie. Letztere ist in Abbildung 5.10 eingezeichnet.

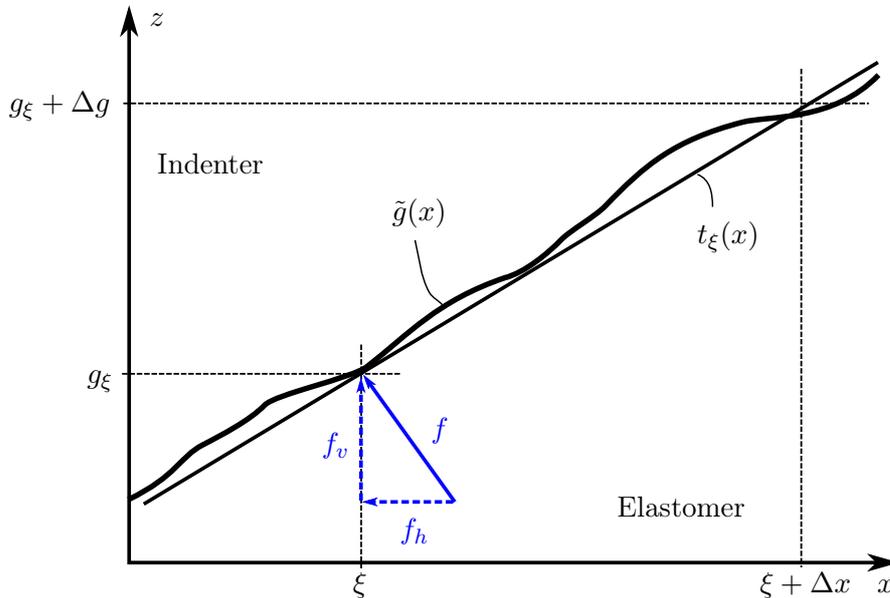


Abbildung 5.10.: Die differentielle Reibungskraft  $f$  wird aus dem Betrag ihrer vertikalen Komponente  $f_v$  und der Steigung der Tangente  $t_\xi$  bestimmt.<sup>65</sup>

Nun werden, gemäß der Modellbeschreibung in Abschnitt 5.1, die Behandlung als reiner Normalkontakt fallen gelassen und die Effekte aus der horizontalen Verschiebung berücksichtigt. In diesem Sinn wird die eben berechnete Kraft mit der vertikalen Komponente  $f_v$  der differentielle Wechselwirkungskraft  $f$  zwischen Linie und Elastomer identifiziert. Gemäß den Randbedingungen ist die Oberfläche frei von Schubspannungen. Dann muss die Kraft  $f$  senkrecht zur Tangente  $t_\xi(x) := g_\xi + \tilde{g}'(\xi)(x - \xi)$  an  $\tilde{g}$  in  $\xi$  stehen, vergleiche Abbildung 5.10.

<sup>65</sup>Die Abbildung 5.10 ist mit geringfügigen Änderungen aus [74] übernommen.

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

Die Steigung  $\tilde{g}'(\xi)$  der Tangente bestimmt die Richtung der Wechselwirkungskraft  $f$  und damit auch den Betrag ihrer horizontalen Komponente

$$f_h(\xi) = 4\eta v (\tilde{g}'(\xi))^2 dx, \quad (5.23)$$

welche unmittelbar als die differentielle Reibungskraft identifiziert werden kann.

Durch Integration über die gesamte Kontaktlinie ergibt sich daraus die makroskopische Reibungskraft:

$$F_R = 4\eta v \int_{A_d} (\tilde{g}'(x))^2 dx, \quad (5.24)$$

wobei die Bezeichnungen der Gleichungen (5.15) und (5.16) verwendet werden.

Da nun die Normalkraft  $F_N$  und die Reibungskraft  $F_R$  bestimmt sind, lässt sich formal der stationäre Reibungskoeffizient

$$\mu := \frac{4\eta v}{F_N} \int_{A_d} (\tilde{g}'(x))^2 dx \quad (5.25)$$

definieren.

### Nachlese

Innerhalb des Abschnitts 5.3 wird sehr zeitig die Existenz und das Erreichen eines stationären Zustandes vorausgesetzt. Dadurch vereinfachen sich die vorgenommenen Betrachtungen erheblich. Allerdings sind nicht alle Ergebnisse an diese Voraussetzungen gebunden, einige lassen sich noch verallgemeinern. Im Folgenden werden einige damit zusammenhängende Fragen untersucht.

Am Anfang des Abschnitts wird vorausgesetzt, dass das System einen stationären Zustand besitzt. Im Abschnitt 5.2 wurde anhand des globalen Verhaltens gezeigt, dass sich die Indentierungstiefe einem stationären Wert annähert. Dass ist aber nicht hinreichend für die Existenz eines stationären Zustandes (in der unmittelbaren Umgebung des Kontaktgebiets). Tatsächlich lässt sich sehr einfach zeigen, dass dem nicht so ist.

Besonders deutlich wird das an der Gleichung (5.19). Die dort berechnete stationäre Indentierungstiefe ist nur dann ein sinnvolles Ergebnis, wenn die Höhe des Indenters mindestens eben so groß ist. Wenn die Vorderkante des Indenters vollständig in das Elastomer einsinkt, bricht das Modell zusammen. Anders herum lässt sich für jeden endlichen Indenter leicht eine Parameterkombination finden, für die dieser Fall eintritt. Die Annahme des stationären Zustandes in diesem Abschnitt setzt somit auch immer einen ausreichend hohen Indenter voraus.

Hat das System den stationären Zustand noch nicht erreicht, dann sinkt der Indenter tiefer in das Elastomer ein. Dadurch können Teile der Linie im Kontakt mit dem Elastomer sein, die nicht zur Vorderkante gehören. Das betrifft hauptsächlich Bereiche mit kleiner negativer Steigung, die sich (in negativer  $x$ -Richtung) an einen Teil der Kontaktlinie anschließen.

Sind diese Bereiche viel kleiner als die Kontaktlinie, so lassen sich die bisherigen Betrachtungen dazu benutzen, um bei Kenntnis der Indentierungstiefe die momentane Indentierungsgeschwindigkeit abzuschätzen. Dazu werden die Überlegungen, die zur Bestimmung der stationären Indentierungstiefe führen, analog mit der momentanen (nicht-stationären) Indentierungstiefe  $\delta$  angestellt. Wird wie zuvor der Indenter zunächst horizontal verschoben, so liefert eine zu Gleichung (5.19) vergleichbare Beziehung die Wechselwirkungskraft

$$F = 4\eta v \delta, \quad (5.26)$$

die notwendig ist, um diese Indentierungstiefe aufrecht zu erhalten.

Die Differenz  $\Delta F = F_N - F$  zwischen der äußeren Normalkraft und der Wechselwirkungskraft bewirkt eine zusätzliche vertikale Verschiebung.<sup>66</sup> Da der Indenter ein Starrkörper ist, werden alle Dämpfer im Kontakt gleich verformt. Da zudem die einzelnen Dämpfer unabhängig sind, wird jeder von ihnen mit der gleichen Kraft  $f_n \approx \Delta F b/a$  belastet. Dabei sind  $b$  die Breite eines Dämpfers und  $a$  die Länge der Kontaktlinie. Die Dämpfer-Charakteristik (3.68) liefert dann eine Näherung der Deformationsgeschwindigkeit, welche aufgrund der Kontaktbedingung mit der Indentierungsgeschwindigkeit übereinstimmt:

$$\dot{\delta} = \frac{F_N}{4\eta a} - \frac{v\delta}{a}. \quad (5.27)$$

Die Abschätzung lässt sich noch verbessern, wenn statt der Länge  $a$  der Kontaktlinie die gesamte Länge des Kontakts einschließlich der Bereiche, die nicht Teil der Vorderkante sind, verwendet wird. Die Bestimmung dieser Größe ist jedoch aufwendiger.

Bei der Betrachtung des eindimensionalen Modells ist diese Gleichung sicher von geringem Interesse. Eine praktische Bedeutung ergibt sich jedoch für Simulationen mit dem dreidimensionalen Originalsystem. Dort ist die Bestimmung der stationären Kontakttiefe<sup>67</sup> nicht so einfach möglich. Allerdings lassen sich alle in Gleichung (5.27) vorkommenden Größen während der Simulation mindestens näherungsweise berechnen. Mit einigen weiteren Überlegungen lässt sich daher aus (5.27) eine Näherung für die stationäre Kontakttiefe gewinnen. Mit Kenntnis dieser Größe kann die sehr aufwendige iterative Bestimmung des Kontaktgebiets spürbar beschleunigt werden.

Der letzte Punkt, dem hier Beachtung geschenkt werden soll, betrifft den Reibungskoeffizienten. Die Betrachtungen dieses Abschnitts haben die Bestimmung des stationären Reibungskoeffizienten zum Ziel. Mit geringfügigen Abwandlungen ist die Vorgehensweise aber auch geeignet, den momentanen Reibungskoeffizienten (vor Erreichen des stationären Zustandes) zu bestimmen.

---

<sup>66</sup>Vergleiche Abbildung 5.4c

<sup>67</sup>In Abschnitt 2.3 wird bemerkt, dass in der Reduktionsmethode die Indentierungstiefe mit der Kontakttiefe identisch ist. Zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten wird die Verwendung der zweitgenannten Größe in Verbindung mit dem eindimensionalen Modell vermieden. Es ist aber klar, dass in dem hier behandelten Fall die Indentierungstiefe des eindimensionalen Modells der Kontakttiefe des dreidimensionalen Originalsystems entspricht.

## 5.4. Die Reibung mit ausgewählten Indentertypen

Im vorherigen Abschnitt wurde mit der Methode der Dimensionsreduktion der stationäre Reibungskoeffizient für einen Indenter mit einer stetig differenzierbaren Oberfläche bestimmt. Jetzt werden die Resultate auf konkrete Indenterformen angewandt und mit den Ergebnissen von Randelemente-Simulationen verglichen. Es wird gezeigt, dass die eindimensionalen Betrachtungen auch für das dreidimensionale Reibungsproblem zumindest brauchbare Abschätzungen liefern.

Für diese Betrachtungen eignen sich grundsätzlich alle Indenter, für die die Konstruktion eines eindimensionalen Modells nach der Methode der Dimensionsreduktion bekannt ist. Wie weiter oben ausgeführt, sind das zum gegenwärtigen Zeitpunkt rotationssymmetrische Indenter (die sich exakt abbilden lassen) und zufällig raue, selbst-affine Indenter (die sich statistisch äquivalent abbilden lassen), vergleiche dazu [33]. Dieser Abschnitt stützt sich auf den erstgenannten Typ, speziell auf die schon früher betrachteten Kegel und Rotationsparaboloide. Teile der Ergebnisse dieses Abschnitts wurden in [74] und [80] publiziert.

### Reibung mit Kegelindentern

Besonders einfache Ergebnisse liefert die Untersuchung der Reibung mit einem Kegelinde-  
denter. Analog zu den Abschnitten 2.3 und 4.3 wird die Oberfläche des Kegels mit der Funktion

$$g_1(r) = c_1 r, \quad r \geq 0, \quad (5.28)$$

parametrisiert. Der Parameter  $c_1 = \tan \theta$  beschreibt die Steigung des Kegels, vergleiche Abbildung 5.11. Die horizontale Verschiebung fällt mit der Richtung  $\varphi = 0$  zusammen.

Für den sehr einfachen Fall des Kegels lässt sich der stationäre Reibungskoeffizient sogar am dreidimensionalen System grob abschätzen. Dazu wird näherungsweise angenommen, dass die vordere Hälfte des Kegels, das heißt der Bereich  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , in Kontakt mit dem Elastomer ist. Diese Annahme ist in Ermangelung detaillierterer Kenntnisse sehr grob, kann aber durchaus auch verbessert werden. Weiterhin wird im Zuge der Abschätzung angenommen, dass die Spannungsverteilung im Kontaktgebiet nicht vom Winkel  $\varphi$  abhängt.

Das Kontakt- und Reibungsmodell gemäß Abschnitt 5.1 fordert, dass die Spannungen normal zur Indenter-Oberfläche wirken. Der stationäre Reibungskoeffizient im Originalsystem lässt sich daher durch die Mittelung (über den Winkel  $\varphi$ ) der Projektion der Oberflächen-Steigung auf die Bewegungsrichtung abschätzen:

$$\mu \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c_1 \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} c_1. \quad (5.29)$$

Das folgt in Analogie zur Herleitung des stationären Reibungskoeffizienten im eindimensionalen Modell (Abschnitt 5.3).

<sup>68</sup>Die Abbildung 5.11 ist mit geringfügigen Änderungen aus [80] übernommen.

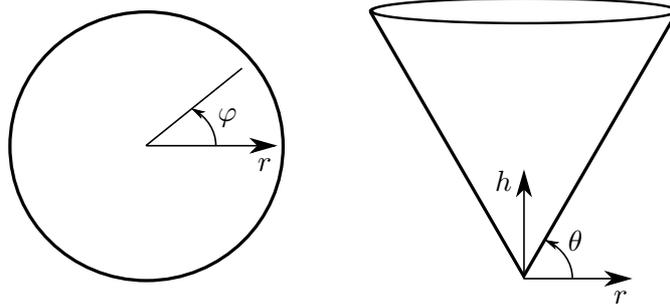


Abbildung 5.11.: Kegel: Geometrie und Koordinatensystem in der Draufsicht (links) und der Seitenansicht (rechts).<sup>68</sup>

Bemerkenswert ist an diesem Ergebnis, dass es offenbar nur von der Steigung des Kegels abhängt, nicht aber von anderen Parametern wie der äußeren Kraft, der Viskosität oder der horizontalen Geschwindigkeit. Das lässt sich dadurch erklären, dass die Oberflächensteigung und damit auch die Richtung der Spannungen im Kontaktgebiet konstant sind. Insbesondere ist letztere unabhängig von der Kontakttiefe.

Diese sehr grobe Abschätzung wird nun durch Simulationen mit der Randelemente-Methode präzisiert. Der Algorithmus beruht auf dem des Normalkontakts aus Kapitel 4, berücksichtigt aber darüber hinaus die Besonderheiten des vorgestellten Kontakt- und Reibungsmodells.<sup>69</sup>

Die Oberfläche des Kegels wurde mit 257 Elementen im Durchmesser diskretisiert. Die des Elastomers wird im Laufe der Simulation dynamisch fortgesetzt, vergleiche dazu Abbildung 5.6 und zugehörige Erläuterungen.

Bei allen Simulationen wird der Indenter erst auf den Halbraum aufgesetzt und dann in diesen eingedrückt und gleichzeitig horizontal verschoben. Die Simulationen enden, wenn die Indentierungsgeschwindigkeit eine vorgegebene Schranke unterschreitet. Dem liegt die Annahme zu Grunde, dass sich dann auch die Kontaktkonfiguration nur noch unwesentlich vom stationären Zustand unterscheidet. Der Wert des Reibungskoeffizienten zu diesem Zeitpunkt wird als stationärer Reibungskoeffizient angenommen.

Es wurden mehrere Reihen von Simulationen durchgeführt, in denen die einzelnen Parameter, unter anderem Normalkraft  $F_N$ , Geschwindigkeit  $v$ , Viskosität  $\eta$ , Steigung  $c_1$ , Diskretisierung  $b$  und Größe des Indenter) variiert wurden.

Im Folgenden wird beispielhaft eine Simulationsreihe mit Variation der horizontalen Geschwindigkeit  $v$  betrachtet. Sie besteht aus 46 einzelnen Simulationen mit Geschwindigkeiten zwischen  $0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Allen liegen die Kegelsteigung  $c_1 = 0.1$ , die Normalkraft  $F_N = 0.01 \text{ N}$  und die Viskosität  $\eta = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  zu Grunde. Vor jeder Simulation wurde die Kontakttiefe gemäß den Ausführungen im Abschnitt 5.3 abgeschätzt<sup>70</sup> und ein ausreichend großer Indenter erzeugt.

<sup>69</sup>Die Randelemente-Verfahren werden im Anhang vorgestellt.

<sup>70</sup>Das bedeutet, es wird die stationäre Indentierungstiefe für das zugehörige Modell nach der Methode der Dimensionsreduktion berechnet. Diese wird, mit einem Aufschlag versehen, als Kontakttiefe für das dreidimensionale Originalsystem angenommen und dazu passend die Höhe des Indenters festgelegt.

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

Die Simulationen bestätigen die Abschätzung zumindest qualitativ. Der Reibungskoeffizient hängt nur von der Steigung  $c_1$  ab.<sup>71</sup> Die Reibungskoeffizienten weichen jedoch sichtbar voneinander ab, was auf Grund der sehr groben Abschätzung nicht überrascht. Die Simulationen liefern für den stationären Reibungskoeffizienten den Wert

$$\mu = 0.086, \quad (5.30)$$

die Abschätzung (5.29) ergibt für diese Parameter  $\mu \approx 0.064$ .

Der zeitliche Verlauf der Indentierung kann wie folgt charakterisiert werden. Am Anfang ist die Indentierungsgeschwindigkeit größer als die horizontale Geschwindigkeit. Das Kontaktgebiet ist annähernd kreisförmig. Insbesondere sind auch Bereiche an der Rückseite des Indenters in Kontakt. Mit steigender Kontakttiefe wächst die Größe des Kontaktgebiets und in Folge dessen nimmt die Indentierungsgeschwindigkeit ab. In diesem Zeitraum löst sich die Rückseite des Kegels nach und nach von der Oberfläche des Elastomers ab. Wenn die Indentierungsgeschwindigkeit gegen Null geht, nimmt das Kontaktgebiet die in Abbildung 5.12 gezeigte Form an.

Auf der linken Seite der Abbildung ist eine Draufsicht der Konfiguration zu sehen. Die Schattierung gibt qualitativ Auskunft über die Spannungsverteilung. Weiß dargestellte Bereiche sind spannungsfrei und damit nicht im Kontakt. Grau- und Schwarztöne kennzeichnen das Kontaktgebiet. Dunklere Töne symbolisieren höhere Spannungen. Zur besseren Orientierung ist der Querschnitt des Indenters (in einer zufällig gewählten Höhe) als Kreis angedeutet. Die beiden Linien zeigen die Grenzen zwischen vorderer und hinterer bzw. linker und rechter Hälfte des Kegels. Die Beschriftung der Achsen verweist auf die jeweilige Zeile respektive Spalte des dargestellten Diskretisierungselements.

Es ist zu erkennen, dass die größten Spannungen am vorderen Rand des Kontaktgebiets und unmittelbar vor der Spitze des Kegels auftreten. Dort hat auch der größte Teil der Reibung seinen Ursprung. Das Kontaktgebiet umfasst nicht die gesamte Vorderhälfte des Kegels, sondern ist etwas kleiner.<sup>73</sup> Darüber hinaus hängt die Spannungsverteilung innerhalb des Kontaktgebiets erkennbar vom Winkel  $\varphi$  ab. Das hat jedoch keine wesentlichen Auswirkungen.

Im rechten Teil der Abbildung sind in einer Seitenansicht die Oberflächen-Elemente des Kegels dargestellt, die in Kontakt mit dem Elastomer sind. Eine Zuordnung der auftretenden Spannungen ist aus dieser Darstellung nicht möglich. Gut erkennbar sind die Vorderkante des Kegels sowie der obere und der hintere Rand des Kontaktgebiets. In beiden Ansichten ist die Spitze des Kegels mit dem Buchstaben M markiert, vergleiche [80].

Die Behandlung mit der Methode der Dimensionsreduktion ist, auf Grund der geleisteten Vorarbeiten, vergleichsweise kurz. Gemäß der Konstruktion in Abschnitt 2.3 wird das zum Kegel (5.28) gehörende eindimensionale Modell durch die Gleichung

$$\tilde{g}_1(x) = \frac{\pi}{2} c_1 |x| \quad (5.31)$$

<sup>71</sup>Dasselbe zeigen auch die anderen Simulationsreihen, auf die jedoch nicht weiter eingegangen wird.

<sup>72</sup>Die Abbildung 5.12 ist mit geringfügigen Änderungen aus [80] übernommen.

<sup>73</sup>Wenn diese Erkenntnis in der oben getätigten Abschätzung berücksichtigt wird, liefert sie einen Reibungskoeffizienten von  $\mu \approx 0.8$ , was recht gut mit den Ergebnissen der Simulation übereinstimmt.

#### 5.4. Die Reibung mit ausgewählten Indentertypen

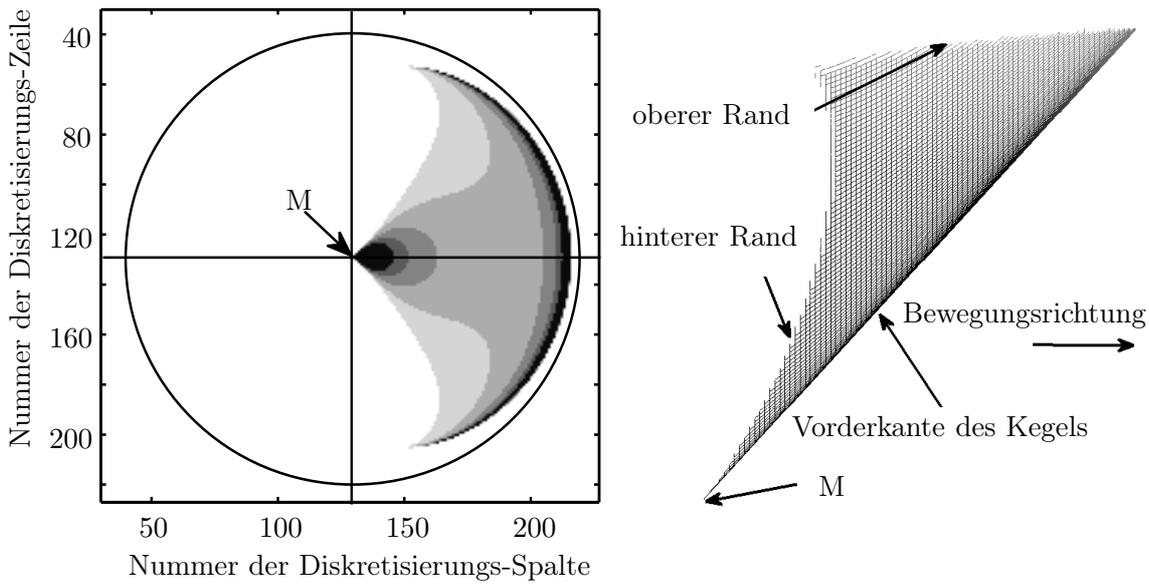


Abbildung 5.12.: Kontaktgebiet und qualitative Darstellung der Spannungsverteilung bei der Reibung mit einem Kegel<sup>72</sup>

beschrieben. Diese Funktion ist in  $x = 0$  nicht stetig differenzierbar. Um formal den Voraussetzungen des Abschnitts 5.3 zu genügen, werden  $\tilde{g}_1(x)$  und ihre Ableitung auf den Bereich  $x \geq 0$  (die Vorderkante) beschränkt und Letztere durch  $\tilde{g}'_1(0) = \frac{\pi}{2}c_1$  in  $x = 0$  stetig fortgesetzt.

Die stationäre Indentierungstiefe ist, unabhängig von der konkreten Gestalt des Indenters, durch Gleichung (5.19) gegeben:

$$d = \frac{F_N}{4\eta\nu}.$$

Durch Einsetzen in die Indentergeometrie (5.31) und Auflösen ergibt sich die Kontaktlinie

$$A_d = \left[ 0, \frac{F_N}{2\pi c_1 \eta \nu} \right] \quad (5.32)$$

und aus Gleichung (5.25) der stationäre Reibungskoeffizient

$$\mu = \frac{\pi}{2}c_1. \quad (5.33)$$

Das eindimensionale Modell zeigt dasselbe Verhalten wie das dreidimensionale Originalsystem, der Reibungskoeffizient hängt linear von der Steigung des Kegels ab und ist von den übrigen Parametern unabhängig.

Allerdings unterscheidet sich das Ergebnis der Randelemente-Methode von dem der Reduktionsmethode um einen konstanten Faktor. Dass sich beide Werte unterscheiden

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

müssen, lässt sich leicht motivieren. Wie die obige Abschätzung zeigt, ist (im Originalsystem) die Projektion der Steigung auf die Bewegungsrichtung des Indenters ausschlaggebend. Diese Information ist jedoch im eindimensionalen Modell nicht enthalten.

Zu ihrer Berücksichtigung ist der Reibungskoeffizient mit einem Faktor  $\vartheta$  zu skalieren, der von der Geometrie des Indenters abhängt.<sup>74</sup> Im Folgenden wird dieser Faktor als Polarskalierung bezeichnet.

Für einen Indenter, dessen Oberfläche durch die Rotation eines Monoms entsteht, wird die Polarskalierung vom Grad  $p$  des erzeugenden Monoms abhängen. Das legt in Analogie zur Gleichung (2.4) die Schreibweise

$$\vartheta_p := \vartheta(p) \tag{5.34}$$

nahe. Die Funktion  $\vartheta(p)$  ist jedoch noch nicht bekannt ist. Daher wird die Polarskalierung aus den berechneten Werten abgeschätzt.

Im Vergleich zu (5.30) liefert die Methode der Dimensionsreduktion bei denselben Parametern den stationären Reibungskoeffizienten  $\mu = 0.157$ . Der Unterschied zwischen beiden Resultaten ergibt für den Kegel die Polarskalierung

$$\vartheta_1 \approx 0.55. \tag{5.35}$$

In Abbildung 5.13 sind die stationären Reibungskoeffizienten im Vergleich dargestellt. Die blaue gestrichelte Linie ist das Ergebnis der Randelemente-Simulationen, nämlich der oben erwähnten Reihe mit 46 Simulationen. Es ist erkennbar, dass die Werte für die verschiedenen Geschwindigkeiten nicht ganz übereinstimmen, sondern zum Teil geringfügig voneinander abweichen. Diese Abweichungen haben ihren Ursprung in der Diskretisierung.

Die rote durchgezogene Linie zeigt das analytische Ergebnis der Reduktionsmethode in Gestalt der Gleichung (5.33). Numerische Simulationen mit dem eindimensionalen Modell stimmen mit den analytischen Ergebnissen perfekt überein. Diese sind durch Rauten gekennzeichnet. Abschließend sind die Ergebnisse der Methode der Dimensionsreduktion skaliert mit  $\vartheta_1$  gemäß der Näherung (5.35) als Kreise dargestellt, vergleiche [74].

### Reibung mit einem Rotationsparaboloiden

Als zweites Beispiel wird die Reibung mit einem Rotationsparaboloid betrachtet. Es wird wieder mit der Betrachtung des dreidimensionalen Originalsystems begonnen. Die Oberfläche des Paraboloids wird wie in den Abschnitten 2.3 und 4.3 durch

$$g_2(r) = c_2 r^2, \quad r \geq 0 \tag{5.36}$$

beschrieben.

---

<sup>74</sup>Dieser Skalierungsfaktor  $\vartheta$  für das Reibungsproblem hat seine Entsprechung in der Tiefenskalierung  $\varkappa$  des Normalkontakt-Problems.

<sup>75</sup>Die Abbildung 5.13 ist mit geringfügigen Änderungen aus [74] übernommen.

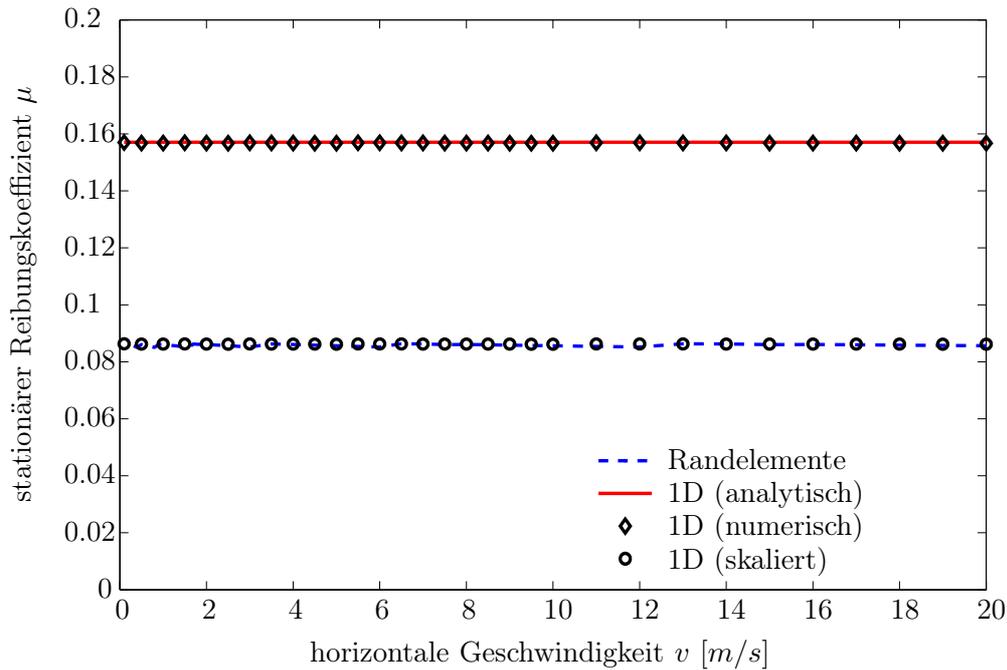


Abbildung 5.13.: Vergleich des stationären Reibungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Horizontalgeschwindigkeit für den Kegel.<sup>75</sup>

Aufbauend auf die Vorgehensweise im Fall des Kegels und unter Verwendung früherer Erkenntnisse lässt sich auch hier eine ganz grobe Abschätzung des stationären Reibungskoeffizienten vornehmen. Beim Kegel stammt der größte Teil der Reibung aus dem vorderen Rand des Kontaktgebiets und aus dem Bereich unmittelbar vor der Spitze des Kegels. Beim Rotationsparaboloid ist die Steigung in der Nähe der Spitze nahe Null. Die horizontale Komponente der Wechselwirkungs-Spannungen aus diesem Bereich muss daher vergleichsweise klein sein. Daher lässt sich vermuten, dass die Reibung in diesem Fall zum überwiegenden Teil am vorderen Rand des Kontaktgebiets entsteht.

Der große Unterschied zum Kegel ist, dass die Steigung der Oberfläche nicht konstant ist, sondern vom Abstand zum Mittelpunkt und damit von der Kontakttiefe  $\delta_c$  abhängt. Diese wird, in Ermangelung genauere Erkenntnisse, durch die stationäre Indentierungstiefe  $d$  (Gleichung (5.19)) des eindimensionalen Modells abgeschätzt. Mit diesem Ergebnis und der Indentergeometrie lassen sich weiter abschätzen, wo sich der vordere Rand des Kontaktgebiets befindet,  $a \approx \sqrt{d/(2c_2)}$ , und wie groß dort die Steigung der Oberfläche ist, nämlich  $g'_2(a) \approx \sqrt{8c_2d}$ .

Es wird wiederum angenommen, dass die vordere Hälfte des Paraboloids in Kontakt mit dem Elastomer ist und die Spannungsverteilung innerhalb des Kontaktgebiets vom Winkel  $\varphi$  nicht abhängt. Dann ist (analog zum Fall des Kegels) der stationäre Reibungskoeffizient ungefähr gleich der Mittelung der Projektion der Oberflächen-Steigung auf die

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

Bewegungsrichtung. Auf diese Weise ergibt sich

$$\mu \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{8c_2 d} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2c_2 F_N}{\eta v}}, \quad (5.37)$$

wobei im letzten Ergebnis die stationäre Indentierungstiefe gemäß Gleichung (5.19) eingesetzt ist. Es sei an dieser Stelle betont, dass in dieser Abschätzung eine ganze Reihe von Annahmen enthalten ist, von denen klar ist, dass sie höchstens näherungsweise erfüllt sind. Sie ist daher von noch geringerer Qualität als die Abschätzung für den Kegel.

Auch die Reibung mit Rotationsparaboloiden wurde mit Randelementen simuliert. Wie zuvor wird hier lediglich auf eine Reihe von Simulationen mit verschiedenen Horizontalgeschwindigkeiten eingegangen. Die Reihe besteht aus 56 einzelnen Simulationen mit Geschwindigkeiten von  $0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  bis  $50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Die Krümmung des Paraboloids ist  $c_2 = 0.1 \text{ m}^{-1}$ , die übrigen Parameter stimmen mit den Simulationen zum Kegel überein. Die Ergebnisse der Simulationen bestätigen die obige Abschätzung qualitativ. Sie sind in den Abbildungen 5.14 und 5.15 grafisch dargestellt.

Der Indentierungsprozess läuft ähnlich ab wie beim Kegel. Anfangs ist das Kontakt annähernd kreisförmig. Mit abnehmender Indentierungsgeschwindigkeit löst sich das Elastomer von der Rückseite des Indenters ab. Im Gegensatz zum Kegel geschieht das auch im Bereich der Spitze des Paraboloids. Im stationären Zustand liegt diese nicht im Kontaktgebiet.

Die Ergebnisse nach der Methode der Dimensionsreduktion erhält man analog zu denen des Kegels. Die Oberfläche des eindimensionalen Modells wird durch

$$\tilde{g}_2(x) = 2c_2 x^2 \quad (5.38)$$

beschrieben. Mit der stationären Indentierungstiefe gemäß Gleichung (5.19) und der Indentergeometrie wird die Kontaktlinie bestimmt:

$$A_d = \left[ 0, \sqrt{\frac{F_N}{8c_2 \eta v}} \right] \quad (5.39)$$

und dann aus Gleichung (5.25) der stationäre Reibungskoeffizient:

$$\mu = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2c_2 F_N}{\eta v}}. \quad (5.40)$$

Bemerkenswerterweise stimmt dieses exakte Ergebnis nach der Methode der Dimensionsreduktion sehr gut mit der Abschätzung (5.37) für das dreidimensionale Originalsystem überein.

In Abbildung 5.15 sind die stationären Reibungskoeffizienten für den Rotationsparaboloid zu sehen. Die blaue gestrichelte Linie ist das Ergebnis der Randelemente-Methode, die rote durchgezogene Linie die analytische Lösung (5.40) mit der Methode der Dimensionsreduktion. Numerische Simulationen mit dieser Methode stimmen mit der analytischen Lösung überein. Sie sind als Rauten eingetragen.

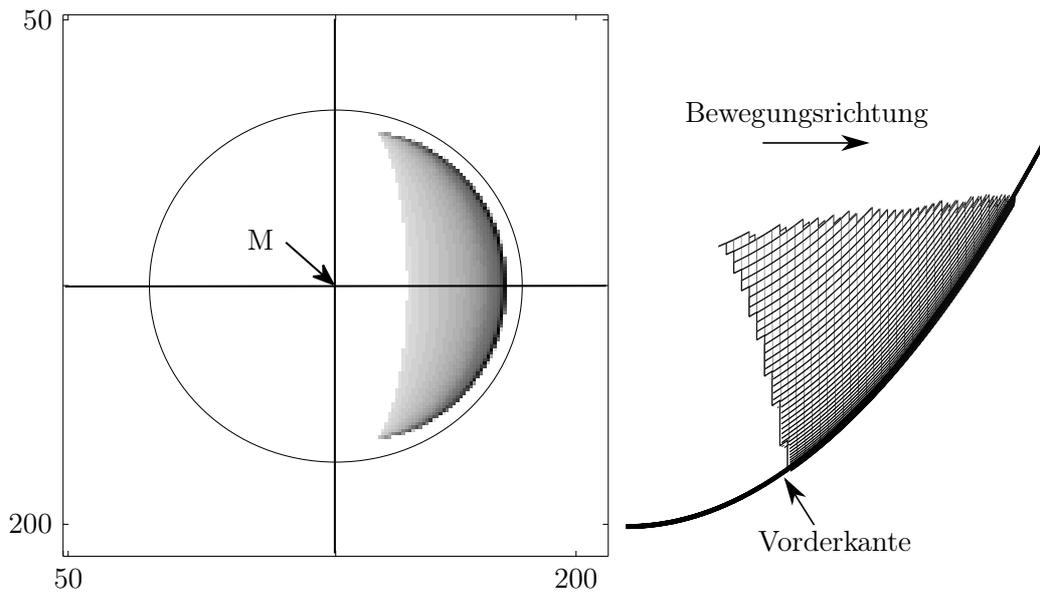


Abbildung 5.14.: Kontaktgebiet und qualitative Darstellung der Spannungsverteilung bei der Reibung mit einem Rotationsparaboloid

Die Ergebnisse der Reduktionsmethode weichen von denen der Randelemente-Simulationen um einen konstanten Faktor ab. Dieser Unterschied ist analog zum Kegel durch die Polarskalierung auszugleichen. Der Vergleich zwischen dem Ergebnis für das Originalsystem und dem des eindimensionalen Modells nach der Methode der Dimensionsreduktion liefert die Näherung

$$\vartheta_2 \approx 0.67. \quad (5.41)$$

Die mit diesem Faktor skalierten Resultate der Methode der Dimensionsreduktion sind in Abbildung 5.15 durch Kreise gekennzeichnet [74].

## 5.5. Fazit und Ausblick

In diesem Kapitel wird ein einfaches Modell für die Reibung zwischen einem linear viskosen Modell-Elastomer und einem starren Indenter konstruiert. Sein Anwendungsbereich umfasst die Reibung mit einem echten Elastomer, wenn dieses Belastungen in einem mittleren Frequenzbereich erfährt, in dem die viskosen Eigenschaften einen wesentlichen Einfluss haben können.

Die Untersuchung des globalen Verhaltens zeigt, dass sich (im Gegensatz zum Normalkontakt) eine stationäre Indentierungstiefe einstellt. Weitere Erkenntnisse dieses Abschnitts lassen sich gewinnbringend in numerischen Simulationen verwenden.

<sup>76</sup>Die Abbildung 5.15 ist mit geringfügigen Änderungen aus [74] übernommen.

## 5. Reibung mit einem viskosen Elastomer

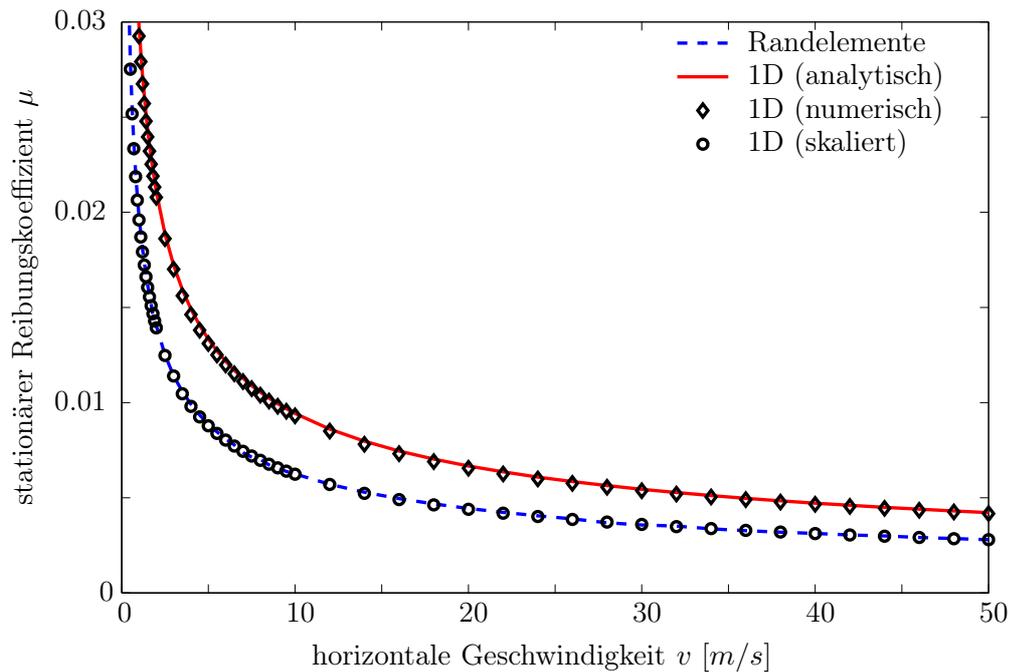


Abbildung 5.15.: Vergleich des stationären Reibungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Horizontalgeschwindigkeit für das Rotationsparaboloid.<sup>76</sup>

Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist die Bestimmung des Reibungskoeffizienten im stationären Zustand. Dieser wird mit der Methode der Dimensionsreduktion hergeleitet. Das Ergebnis ist daher zunächst nur eine exakte Lösung für das eindimensionale Modell. An zwei Beispielen, der Reibung mit einem Kegel und mit einem Rotationsparaboloid, wird jedoch gezeigt, dass es auch eine brauchbare Näherung für das dreidimensionale Originalsystem abgibt. Unter brauchbar wird dabei verstanden, dass es die funktionalen Zusammenhänge qualitativ richtig wiedergibt und nur um einen konstanten Faktor abweicht.

Bei Betrachtung eines Indenters, dessen Oberfläche durch die Rotation eines Monoms konstruiert wird, hängt dieser Faktor vom Exponenten des Monoms ab. Es besteht Anlass zu der Vermutung, dass (in Analogie zur Tiefenskalierung) ein funktionaler Zusammenhang zwischen beiden Größen besteht. Die Studien dazu sind jedoch noch nicht abgeschlossen.

Weiterhin von Interesse ist die Reibung mit zufällig rauen, selbst-affinen Indentern. Auch diese Arbeiten sind jedoch noch nicht beendet. Allerdings konnten die Ergebnisse des Abschnitts 5.3 in [33] bereits erfolgreich auf die Reibung zwischen dem eindimensionalen Modell eines solchen Indenters mit einem Kelvin-Elastomer angewandt werden. Dabei gelang es, den Reibungskoeffizienten im viskos-dominierten Frequenzbereich vorherzusagen.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit behandelt Kontakt und Reibung mit Elastomeren. Sie verfolgt dabei zwei Ziele.

Zum einen wird gezeigt, dass die Methode der Dimensionsreduktion auch auf solche Aufgaben anwendbar ist. Mit Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen wird eine verallgemeinerte Winkler-Bettung konstruiert. Diese besteht aus diskreten, voneinander unabhängigen Elementen. Die Kraft-Verschiebungs-Beziehung dieser Elemente wird aus den Materialeigenschaften des Elastomers konstruiert. Dabei sind verschiedene Wege möglich, wie die Konstruktion genau vorgenommen wird.

Der Fall eines Elastomers, dessen Rheologie durch Relaxationsfunktionen beschrieben wird, ist von besonderem Interesse. Die Konstruktion des zugehörigen Modells und eine allgemeine Formulierung (3.54)-(3.56) der Kraft-Verschiebungs-Beziehung

$$f_N(t) = 4b \int_{\tau=0}^t V(t-\tau) \dot{u}(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad V(t) := \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G^* (K^* + G^*)}{K^* + 4G^*} \right\} \quad (6.1)$$

sind das Hauptergebnis des ersten Teils dieser Arbeit.

Es wird durch einige Vereinfachungen ergänzt, die eine weniger aufwendige Behandlung erlauben. Dabei wird auch ein linear viskoses Modell-Elastomer motiviert, welches im Mittelpunkt des zweiten Teils dieser Arbeit steht. Als konkretes Beispiel wird die Greensche Funktion des viskosen Normalkontakts (3.43)

$$\dot{u}(r) = \frac{F_N}{4\pi\eta r} \quad (6.2)$$

bestimmt.

Im zweiten Teil der Arbeit werden erst der Normalkontakt und dann die Reibung mit dem linear viskosen Modell-Elastomer eingehend untersucht. Dabei wird die Anwendung der Methode der Dimensionsreduktion auf Elastomere detailliert vorgeführt. Viele analytische Berechnungen werden an eindimensionalen, mit der Reduktionsmethode konstruierten Modellen vorgenommen.

Die Ergebnisse werden immer wieder mit analytischen Berechnungen oder Abschätzungen am Originalsystem (sofern möglich) und mit Randelemente-Simulationen verglichen. In allen Fällen lässt sich zeigen, dass die mit den verschiedenen Verfahren ermittelten Ergebnisse exakt oder zumindest qualitativ übereinstimmen. Die vorgestellte Methode ist damit wenigstens für schnelle, ingenieurmäßige Abschätzungen und unter bestimmten Umständen auch darüber hinaus geeignet.

Viele Resultate dieses Teils sind beispielhafter Natur. Einige sind jedoch allgemeiner und heben sich dadurch ab. Zum einen handelt es sich dabei um das Potenzgesetz (4.56)

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

zur Beschreibung der Indentierung eines zufällig rauhen, selbst-affinen Indenters:

$$\bar{\delta} = \bar{c}\bar{t}^\beta \quad \text{mit} \quad \beta := \frac{H}{1+H}. \quad (6.3)$$

Zum anderen ist das die Funktion (5.25) für den stationären Reibungskoeffizienten

$$\mu := \frac{4\eta v}{F_N} \int_{A_d} (\tilde{g}'(\xi))^2 dx. \quad (6.4)$$

Die Ergebnisse dieser Arbeit wurde in mehreren Zeitschriftenartikeln [63], [72], [33], [74], Konferenzbeiträgen [71], [80] sowie in den Kapiteln 7, 11 und 19 des Buches [11] publiziert.

Naturgemäß bietet die vorliegende Schrift viele Anknüpfungspunkte für zukünftige Arbeiten, die im Folgenden kurz angerissen werden.

In dem Kapitel zur Reibung mit dem linear viskosen Modell-Elastomer sind noch einige Fragen offen geblieben. Bei der Reibung mit axialsymmetrischen Indentern ist die Abhängigkeit des Skalierungsfaktors von dem Exponenten des erzeugenden Monoms noch nicht abschließend bestimmt. In dieser Arbeit wurden die Skalierungsfaktoren für Kegel und Rotationsparaboloid durch Vergleich der eindimensionalen Lösung mit der Randelemente-Lösung näherungsweise bestimmt. Für ernsthafte Anwendungen der Methode ist diese Vorgehensweise nicht praktikabel. Die Kenntnis dieses Zusammenhangs würde daher den Wert des Ergebnisses noch deutlich erhöhen.

Die Herleitung des stationären Reibungskoeffizienten ist grundsätzlich auch für zufällig raue, selbst-affine Indenter gültig, vergleiche [33]. Allerdings gibt es guten Grund zu der Annahme, dass hierfür eine einfachere Lösung existiert. In Analogie zur Behandlung des Normalkontakts solcher Indenter lässt sich vermutlich eine ähnliche Lösung wie (4.56) nur auf Grundlage der Modellparameter finden. Die Arbeiten dazu sind bisher noch nicht abgeschlossen.

Das Randelemente-Verfahren besitzt noch viel Potenzial für Weiterentwicklungen. Eine ganze Reihe einzelner Algorithmen zur Beschleunigung der iterativen Berechnung von Kontaktgebiet, Spannungsverteilung und Deformationsgeschwindigkeit lassen sich mit mehr oder weniger Aufwand implementieren. Besonders wertvoll wäre eine Abwandlung des Algorithmus für das Reibungsproblem, die nicht den gesamten Indentierungsprozess simuliert, sondern direkt die stationäre Konfiguration bestimmt.

Interessant ist auch die Frage, ob sich diese theoretischen Ergebnisse durch Experimente bestätigen lassen.

Das größte Potenzial steckt sicherlich in der Anwendung der hier vorgestellten Verfahren auf kompliziertere und realistischere Materialmodelle. Schon die Erweiterung auf das Standardmodell, welches kurz im Abschnitt 5.1 angerissen wurde, führt vermutlich zu weitreichenden theoretischen Erkenntnissen und auch zu praktisch verwertbaren Ergebnissen. Die Grundsteine dafür sind gelegt.

# A. Anhang

In diesem Anhang werden die Randelemente-Algorithmen vorgestellt, mit denen die numerischen Simulationen ausgeführt wurden. Die Ziele sind das Aufzeigen der Funktionsweise sowie der aus den konkreten Implementierungen resultierenden Annahmen und Grenzen. Im Gegensatz dazu ist nicht vorgesehen, die Algorithmen so detailliert darzustellen, dass sie auf Basis dieser Ausführungen programmiert werden können.

Der Kern der Randelemente-Methode besteht in der Idee, eine Differentialgleichung nicht auf dem gesamten betrachteten Gebiet zu lösen, sondern nur auf ihrem Rand. Für detaillierte Darstellungen zu diese Methode wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen, zum Beispiel [81], [82] und [83]. Eines der wesentlichen Elemente dieser Verfahren ist die Greensche Funktion, der auch aus diesem Grund so viel Aufmerksamkeit geschenkt wurde.

Im Folgenden wird zunächst der Algorithmus für den etwas einfacheren Fall des elastischen Normalkontakts vorgestellt. Dieser basiert auf bekannten Verfahren. Im Anschluss daran wird dieser auf den viskosen Normalkontakt übertragen. Dabei kommt einmal mehr das Prinzip der Funktionalgleichungen zur Anwendung. Im letzten Abschnitt erfolgt die Übertragung auf das Reibungsmodell nach Abschnitt 5.1.

## A.1. Randelemente-Verfahren: elastischer Normalkontakt

In diesem Abschnitt wird ein weit verbreiteter Aufbau für einen Randelemente-Algorithmus zur numerischen Lösung des elastischen Normalkontakts vorgestellt. Für die vorliegende Arbeit hat der Algorithmus keine unmittelbare Bedeutung. Der Abschnitt dient vielmehr zur Vorbereitung des folgenden.

Der Autor ist auch nicht Urheber der Inhalte des Abschnitts A.1. Der folgende Text ist angelehnt an die Ausführungen von Johnson [12] sowie an die detaillierten Darstellungen in den Dissertationen von Geike [8] und Pohrt [10].

Betrachtet wird der Normalkontakt eines starren Indenters mit einem inkompressiblen, elastischen Halbraum unter der Wirkung einer vorgegebenen Normalkraft. Die Randelemente-Methode erlaubt es, das Problem nur auf der Oberfläche<sup>77</sup> zu lösen. Dadurch wird die Anzahl der zu berücksichtigenden Raumdimensionen um eins verringert. Das Ziel des Algorithmus ist die Bestimmung des Kontaktgebiets, der Spannungsverteilung und der Deformation der Halbraum-Oberfläche.

---

<sup>77</sup>Bei Bedarf lassen sich jedoch im Anschluss auch die gesuchten Größen im Inneren des Halbraums berechnen. In der vorliegenden Arbeit ist das jedoch nicht vorgesehen.

Das wichtigste Werkzeug zu deren Berechnung ist die Gleichung

$$u(x, y, \zeta = 0) = \int_A \frac{\sigma(\hat{x}, \hat{y})}{4\pi Gr} d\hat{x} d\hat{y}, \quad r := \sqrt{(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2}, \quad (\text{A.1})$$

welche die Deformation in einem Punkt<sup>78</sup>  $(x, y, \zeta = 0)$  der Oberfläche in Abhängigkeit von der Spannungsverteilung auf dem gesamten Halbraum liefert. In dem Integral auf der rechten Seite lässt sich die Greensche Funktion (3.28) des elastischen Normalkontakts erkennen. Allerdings ist im Zähler jetzt nicht die äußere Normalkraft zu finden. Stattdessen wird der Nenner mit der Spannungsverteilung gefaltet.

Zur Anwendung kommen diskrete Formulierungen dieser Gleichung. Dazu werden die Halbraum-Oberfläche und die des Indenters in Elemente mit quadratischer Gestalt zerlegt.<sup>79</sup> Es wird angenommen, dass Deformation und Spannung auf dem Element jeweils konstante Werte annehmen. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen lässt sich das Flächenintegral in Gleichung (A.1) in eine Summe über alle Elemente umwandeln.

Angenommen, die Oberfläche des Halbraums wird in  $n = n_x n_y$  Elemente zerlegt, wobei  $n_x$  die Anzahl der Elemente in  $x$ -Richtung (sprich: in einer Zeile) und  $n_y$  die Anzahl der Elemente in  $y$ -Richtung (in einer Spalte) sind. Seien  $i = 1, \dots, n$  sowie  $\sigma_i$  und  $u_i$  die Normalspannung auf dem die  $i$ -ten Element respektive seine Verschiebung (in  $\zeta$ -Richtung), dann lässt sich die diskretisierte Form der Gleichung (A.1) als lineares Gleichungssystem

$$u_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} \sigma_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

schreiben. Die Einflussmatrix  $L$  repräsentiert die diskretisierte Darstellung des Nenners der Greenschen Funktion. Konkret gibt die Komponente  $L_{ij}$  an, welche Deformation eine Einheitsspannung auf dem Element  $j$  am Element  $i$  induziert. Dabei werden der Schubmodul  $G$  des Halbraums, die Kantenlänge  $b$  der Diskretisierungselemente und der Abstand zwischen den Elementen  $i$  und  $j$  berücksichtigt. Die genaue Form der Matrix ist in den oben genannten Werken [12, 8, 10] zu finden.

Die besondere Herausforderung der Problemstellung besteht darin, dass anfangs weder das Kontaktgebiet, noch die Spannungen und auch nicht die Deformationen bekannt sind. Zur Lösung stehen in der Regel nur die Gleichung (A.2) und die Randbedingungen:

1. Im Kontakt gibt es keinen Spalt zwischen Indenter und Halbraum.
2. Im Kontakt wirkt eine negative Spannung (positiver Druck) auf den Halbraum.
3. Außerhalb des Kontakt ist der Spalt zwischen Indenter und Halbraum positiv.
4. Außerhalb des Kontakt wirkt keine Spannung auf den Halbraum.

<sup>78</sup>Die verwendeten Koordinatensysteme sind im Abschnitt 2.3 beschrieben. Die  $x$ -Achse liegt in der ursprünglichen, nicht-deformierten Oberfläche des Halbraum, beim Reibungsproblem stimmt sie außerdem mit der Richtung überein, in die die horizontale Bewegung des Indenters erfolgt. Die  $\zeta$ -Achse ist normal zu ursprünglichen Oberfläche des Halbraums und zeigt in diesen hinein.

<sup>79</sup>Vergleiche Abbildung 5.6.

zur Verfügung.

Zur Lösung wird daher zunächst ein Kontaktgebiet geraten und dann die Lösung nach dem folgenden Algorithmus iterativ bestimmt.

- A) Auf der Grundlage der Randbedingung 1) wird das Deformationsfeld im Kontaktgebiet bestimmt.
- B) Gleichungssystem (A.2) wird auf die Elemente im Kontaktgebiet reduziert. Das verbleibende Gleichungssystem wird invertiert<sup>80</sup> und daraus die Spannungen im Kontaktgebiet berechnet. Das ist aufgrund der Randbedingung 4) zulässig.
- C) Gemäß Randbedingung 2) werden Elemente, auf die eine positive Spannung wirkt, aus dem Kontaktgebiet entfernt. Die Spannungen werden (falls notwendig) so skaliert, dass sie im Integral über der Kontaktfläche gerade die äußere Normalkraft ergeben.
- D) Mit dem (vollständigen) Gleichungssystem werden die Verschiebungen aller Elemente berechnet.
- E) Elemente mit negativer Spaltbreite werden nach Randbedingung 3) in das Kontaktgebiet aufgenommen. Anschließend wird wieder mit Schritt A) begonnen.

Dieser Algorithmus wird so lange iteriert, bis ein geeignetes Abbruchkriterium erfüllt ist. Dafür wird der quadratische Mittelwert der Abweichung zwischen der Halbraum-Oberfläche (gemäß den Berechnungen des Schrittes D) und dem Indenter im Kontaktgebiet benutzt. Außerdem wird die Iteration auch abgebrochen, wenn nach einer festgelegten Anzahl an Iterationsschritten diese Grenze nicht erreicht ist. Der Algorithmus ist in der linken Hälfte der Abbildung A.1 schematisch dargestellt.

In diesen Algorithmus lassen sich viele Verfahren zur Beschleunigung der Berechnungen einbetten. Zum Beispiel sind das, das bereits erwähnte Verfahren der konjugierten Gradienten von Polonsky und Keer [84], das Mehrgitter-Summationsverfahren von Vener und Lubrecht [85], die Verwendung der schnellen Fourier-Transformation [86, 87] zur Auswertung des Gleichungssystems (A.2) oder die Parallelisierung der Berechnungen auf Grafikkarten. Ein Abriss dieser Verfahren ist in der Dissertation von Pohrt [10] zu finden.

## A.2. Randelemente-Verfahren: viskoser Normalkontakt

Zur numerischen Überprüfung der Ergebnisse für den Normalkontakt mit einem inkompressiblen, linear viskosen Elastomer (Kapitel 4) wurde ein Randelemente-Verfahren für dieses Kontaktproblem implementiert. In diesem Abschnitt erfolgt eine kurze Darstellung, wie der Algorithmus aus dem vorherigen Abschnitt auf dieses Problem übertragen wird.

---

<sup>80</sup>Für kleine Kontaktgebiete ist das möglich und effektiv. Bei größeren Kontaktgebieten sind iterative Verfahren effektiver oder sogar notwendig. Dafür wurde ein von Polonsky und Keer [84] publiziertes Verfahren der konjugierten Gradienten verwendet.

<sup>81</sup>Die Abbildung A.1 wurde in abgeänderter Form aus [71] übernommen.

A. Anhang

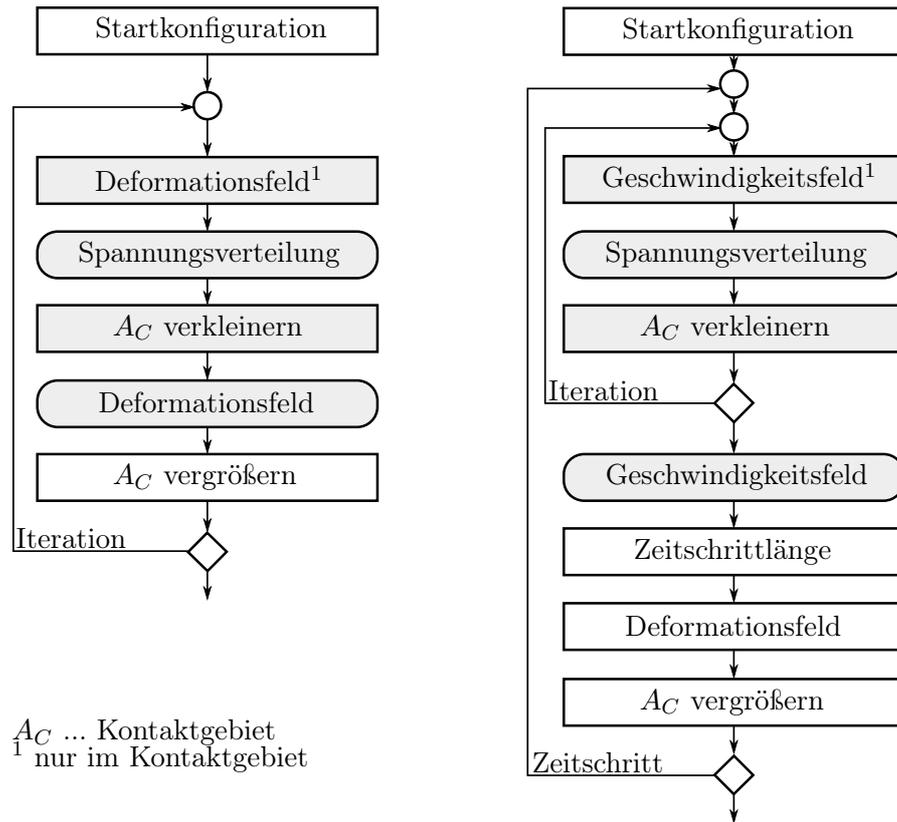


Abbildung A.1.: Schematische Darstellung der Randelemente-Algorithmen für den elastischen (links) und für den viskosen (rechts) Normalkontakt. Grau hinterlegte Schritte lassen sich mit geringem Aufwand auf den viskosen Algorithmus übertragen. Schritte mit abgerundeten Ecken beruhen unmittelbar auf der Greenschen Funktion.<sup>81</sup>

Teile dieses Abschnitts wurden von Kürschner und Filippov [63] und Kürschner, Popov und Filippov [71] publiziert.

Mit Radoks Prinzip der Funktionalgleichungen können viele der aufwendigeren Teile des Algorithmus mit nur geringem Aufwand auf das viskose Kontaktproblem übertragen werden. Das hat seinen Grund darin, dass die Randelemente-Methode an zentraler Stelle auf der Greenschen Funktion beruht. Im Abschnitt 3.4 wurde gezeigt, wie sich die Greensche Funktion des viskosen Normalkontakts aus der des elastischen Normalkontakts konstruieren lässt. Dazu sind lediglich der Schubmodul durch die Viskosität und die Deformation durch die Deformationsgeschwindigkeit zu ersetzen.

Diese Vorgehensweise kann im Wesentlichen auch für die Schritte A) bis C) des Randelemente-Algorithmus übernommen werden. Dadurch erhält man eine Iteration für die Spannungen und die Deformationsgeschwindigkeiten im Kontakt. Daneben sind nur einige kleinere Änderungen vorzunehmen, die sich hauptsächlich auf die etwas anderen

Randbedingungen<sup>82</sup> beziehen. Diese Iteration wird ebenfalls bis zum Erreichen einer geeigneten Abbruchbedingung durchgeführt. Hierfür eignet sich die Abweichung der Geschwindigkeitsverteilung im Kontakt von einer konstanten Geschwindigkeit. Dieses Kriterium ergibt sich aus der Annahme des Indenters als Starrkörper.

Nach Abschluss der Iteration werden die Deformationsgeschwindigkeiten für die gesamte Halbraum-Oberfläche berechnet. Gleichzeitig ist eine geeignete Länge des Zeitschrittes zu bestimmen. Das Kriterium dafür ist die Abschätzung, nach welcher Zeitspanne sich das Kontaktgebiet so stark verändert haben wird, dass dies berücksichtigt werden muss. Innerhalb des Zeitschrittes werden die Deformationsgeschwindigkeiten als konstant angenommen, was eine sehr einfache Zeitintegration ermöglicht. Damit ist das Deformationsfeld bestimmt, das Kontaktgebiet wird auf Grundlage der Randbedingung 3) vergrößert. Danach beginnt der nächste Zeitschritt. Der Algorithmus ist in der rechten Hälfte der Abbildung A.1 schematisch dargestellt.

### A.3. Randelemente-Verfahren: viskoses Reibungsproblem

Der Algorithmus für das viskose Reibungsproblem baut in den wesentlichen Teilen auf den des viskosen Normalkontakts auf.

Die offensichtlichste Änderung betrifft die horizontale Verschiebung des Halbraums in jedem Zeitschritt. Damit verbunden sind die Bestimmung des Angriffspunktes der resultierenden Wechselwirkungskraft und die dynamische Fortsetzung der Halbraum-Oberfläche. Im Gegenzug kann die nicht ganz banale Abschätzung der Zeitschritt-Länge entfallen. Es bietet sich an, für den Zeitschritt den Quotienten aus der Kantenlänge der Elemente und der Horizontalgeschwindigkeit zu wählen.

Als Abbruchbedingung ist die Abweichung der berechneten Geschwindigkeitsverteilung im Kontakt von derjenigen, die sich laut der Modellbeschreibung im Abschnitt 5.1 einstellen sollte, zu wählen.

Weiterhin sind die Routinen zur Berechnung des Reibungskoeffizienten zu programmieren. Die Simulation kann beendet werden, wenn die Indentierungsgeschwindigkeit und die Änderung des Reibungskoeffizienten ausreichend klein sind.

---

<sup>82</sup>Die Randbedingungen sind im Abschnitt 4.1 erläutert.



# Abbildungsverzeichnis

2.1. Eindruck eines zylindrischen Stempels in einen elastischen Körper . . . . .	6
2.2. Ein starres Rechteck wird in eine elastische Bettung eingedrückt. . . . .	7
2.3. Koordinatensysteme in 3D und 1D . . . . .	9
2.4. Tiefenskalierung $\varkappa_n$ in Abhängigkeit vom Exponenten . . . . .	10
2.5. Indentierung mit einem Rotationsparaboloid . . . . .	12
2.6. Kontaktsteifigkeit in Abhängigkeit der Normalkraft . . . . .	16
2.7. Der Exponent $\alpha$ in Abhängigkeit der fraktalen Dimension . . . . .	17
3.1. Schematische Darstellung des Prinzips der Funktionalgleichungen . . . . .	22
3.2. Übertragung der Methode der Dimensionsreduktion . . . . .	34
3.3. Modellierung viskoelastischen Materialverhaltens . . . . .	36
3.4. Diskreten Materialmodelle . . . . .	38
3.5. Relaxations- und Kriechfunktion . . . . .	39
4.1. Wege zur Bestimmung der Indentierungsgeschwindigkeit . . . . .	47
4.2. Deformationsgeschwindigkeit beim Stempel . . . . .	52
4.3. Spannungsverteilung am Stempel . . . . .	53
4.4. Relativer Fehler beim Stempel . . . . .	54
4.5. Relativer Fehler und Rechenaufwand beim Stempel . . . . .	55
4.6. Vergleich der Deformationsgeschwindigkeit . . . . .	56
4.7. Vergleich der Spannungsverteilung . . . . .	58
4.8. Zeitlicher Verlauf der Indentierungstiefe für verschiedene Kegel . . . . .	64
4.9. Zeitlicher Verlauf der Indentierungsgeschwindigkeit für verschiedene Kegel	65
4.10. Zeitlicher Verlauf der Indentierungstiefe für Rotationsparaboloide . . . . .	66
4.11. Verlauf der Indentierungsgeschwindigkeit für Rotationsparaboloide . . . . .	67
4.12. Vergleich der Deformationen bei Kegel und Paraboloid . . . . .	68
4.13. Zeitliche Änderung der Spannungsverteilung . . . . .	69
4.14. Zeitliche Änderung der zentralen Spannung . . . . .	70
4.15. Beispiele rauer Indenter . . . . .	74
4.16. Beispiele rauer Linien . . . . .	75
4.17. Indentierungsdynamik zufällig rauer, selbst-affiner Indenter . . . . .	76
4.18. Bestätigung des Potenzgesetzes . . . . .	80
4.19. Exponent $\beta$ in Abhängigkeit des Hurst-Exponenten $H$ . . . . .	82
5.1. Frequenzabhängige Moduli . . . . .	87
5.2. Halbraumnäherung: kleine horizontale Wechselwirkungskräfte . . . . .	88
5.3. Kontaktmodell . . . . .	89

## Abbildungsverzeichnis

5.4. Vorgehensweise im Kontaktmodell . . . . .	90
5.5. Deformation der Oberfläche . . . . .	92
5.6. Dynamische Fortsetzung der Halbraum-Oberfläche . . . . .	94
5.7. Abschätzung der Indentierungsgeschwindigkeit . . . . .	95
5.8. Vorderkante von $\tilde{g}$ . . . . .	98
5.9. Stationäre Indentierungstiefe . . . . .	99
5.10. Differentielle Reibungskraft . . . . .	101
5.11. Kegel: Geometrie und Koordinatensystem . . . . .	105
5.12. Kontaktgebiet mit Spannungsverteilung am Kegel . . . . .	107
5.13. Stationärer Reibungskoeffizient für den Kegel . . . . .	109
5.14. Kontaktgebiet mit Spannungsverteilung am Paraboloid . . . . .	111
5.15. Stationärer Reibungskoeffizient für das Rotationsparaboloid . . . . .	112
A.1. Randelemente-Algorithmen . . . . .	118

# Index

- Bildbereich, 31
- Darstellungssatz von Riesz, 28
- differentielle Reibungskraft, 102
- Diskretisierungslänge, 6
- dynamische Viskosität, 27
  
- effektiver Elastizitätsmodul, 18
- effektiver Schubmodul, 19
- Eindrucktiefe, 5
- Einflussmatrix, 116
- elastisch ähnlich, 19
- Elastizitätsmoduls, 25
- Elastomer, 21
  
- Faltungintegral, 29
- Federsteifigkeit, 6
- Formfaktor, 10
- fraktale Dimension, 17
  
- Gammafunktion, 10
- Gedächtnis-Hypothese, 29
- Glattheits-Hypothese, 29
- Gleitung, 29
- Greensche Funktion, 30
- Grundfläche, 15, 46
  
- Halbraumnäherung, 8
- Heaviside-Funktion, 30
- homogene Dilatation, 25
- Hurst-Exponent, 71
- hydrostatische Kompression, 25
- hydrostatischer Spannungszustand, 24
  
- Indentierungstiefe, 5
- Index-Schreibweise, 24
  
- Kelvin-Element, 39
- komplexer Schubmodul, 86
- Kompressionsmodul, 25
- Kontaktbedingung, 44
- Kontaktfläche, 6, 44
- Kontaktgebiet, 44
- Kontaktlinie, 98
- Kontaktradius, 6, 12
- Kontaktsteifigkeit, 15
- Kontakttiefe, 12, 59
- Krümmungsradius, 11, 62
- Kriechantwort, 29
- Kronecker-Delta, 24
- Kugeltensor, 24
  
- Laplace-Transformation, 31
- Leistungsspektrum, 14
- lineares Materialgesetz, 23
- Linie, 97
  
- Maxwell-Element, 39
- mittlere Rauigkeit, 14
- mittlere Steigung, 14
- Monom, 9
  
- Poissonzahl, 25
- Polarskalierung, 108
  
- quasistatisch, 7
- Querkontraktionszahl, 25
  
- Reibungskoeffizient, 91
- Reibungskraft, 91, 102
- Relaxationsfunktion, 28
- Relaxationszeit, 39
- Rollkontakt, 19

## *Index*

root mean square roughness, 14

Scherviskosität, 27  
Schubmodul, 25  
Spannungsdeviator, 24  
Spannungstensor, 24  
Speichermodul, 86  
Spektraldichte, 71  
stationäre Indentierungstiefe, 100  
stationärer Reibungskoeffizient, 91, 102  
Summenkonvention, 24

Tangentialkontakt, 19  
Tangentialsteifigkeit, 19  
Tiefenskalierung, 10, 59

Verdrängungsrate, 100  
Verlustmodul, 86  
Verlusttangens, 86  
Verlustwinkel, 86  
Verzerrungsdeviator, 25  
Verzerrungstensor, 25  
Viskoelastizität, 22  
Volumenviskosität, 27  
Vorderkante, 97

Wellenzahl, 71  
Winkler-Bettung, 6

zeitabhängige Moduln, 28  
Zeitkonstante, 39  
zentrale Spannung, 48

# Symbolverzeichnis

## 1. Lateinische Großbuchstaben

Symbol	Bedeutung	Seite
$A$	(Kontakt-)Fläche	6
$A$	Vorderkante	97
$A_d$	Kontaktlinie	98
$A_0$	Grundfläche	15
$C_0$	Koeffizient (Leistungsspektrum)	14
$C_{1D}$	Leistungsspektrum einer Linie	14
$C_{2D}$	Leistungsspektrum einer Oberfläche	14
$D_f$	fraktale Dimension	17
$E$	Elastizitätsmodul	25
$\bar{E}$	effektiver Elastizitätsmodul	18
$F_N$	Normalkraft	5
$F_R$	Reibungskraft	102
$\bar{F}$	normalisierte Normalkraft	16
$G$	Schubmodul	25
$\bar{G}$	effektiver Schubmodul	19
$G(t)$	Relaxationsfunktion bezüglich der Scherung	28
$\hat{G}(\omega)$	komplexer Schubmodul	86
$G'(\omega)$	Speichermodul	86
$G''(\omega)$	Verlustmodul	86
$H$	Hurst-Exponent	14
$H(t)$	Heaviside-Funktion	30
$I(t)$	Kriechantwort bezüglich der Kompression	29
$J(t)$	Kriechantwort bezüglich der Scherung	29
$K$	Kompressionsmodul	25
$K(t)$	Relaxationsfunktion bezüglich der Kompression	28
$L$	Einflussmatrix	116
$\mathcal{L}$	Laplace-Transformation	30
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	
$\mathbb{N}_0$	Menge der nichtnegativen, ganzen Zahlen	26
$P$	Reihenentwicklung der Dilatation	26
$Q$	Reihenentwicklung der Scherung	26
$R$	(Krümmungs-)Radius	11
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven, reellen Zahlen	

## 2. Lateinische Kleinbuchstaben

Symbol	Bedeutung	Seite
$a$	Kontaktradius	12
$a_0$	Radius der Grundfläche	63
$b$	Diskretisierungslänge	6
$c, c_n, \tilde{c}, \dots$	diverse Koeffizienten	9
$d$	stationäre Indentierungstiefe	100
$e_{ij}$	Verzerrungsdeviator	25
$f_h$	differentielle Reibungskraft	100
$f_N$	Normalkraft an einem (Feder-)Element	13
$g$	Oberfläche eines 3D-Körpers	9
$\tilde{g}$	Oberfläche eines 1D-Modells	10
$h$	mittlere Rauigkeit	14
$h'$	mittlere Steigung	14
$k$	differentielle Kontaktsteifigkeit in Normalrichtung	15
$\bar{k}$	normalisierte Kontaktsteifigkeit	16
$k_N$	Federsteifigkeit in Normalenrichtung	6
$k_T$	Federsteifigkeit in Tangentialrichtung	18
$p_i$	$i$ -ter Koeffizient der Reihe $P$	26
$q$	normalisierte Wellenzahl	14
$q_i$	$i$ -ter Koeffizient der Reihe $Q$	26
$q_{\min}, q_{\max}$	kleinste und größte normalisierte Wellenzahl	14
$\dot{q}$	spezifische Verdrängungsrate	99
$s$	die Veränderliche im Laplacebereich	31
$s_{ij}$	Spannungsdeviator	24
$t$	Zeit	
$\bar{t}$	dimensionslose Zeitgröße	76
$u$	Deformationsfeld	44
$u_i$	Deformation des Elements $i$	116
$v$	horizontale Geschwindigkeit des Indenters	89

## 3. Griechische Großbuchstaben

Symbol	Bedeutung	Seite
$\Gamma$	Gammafunktion	10
$\Omega$	dimensionslose Frequenz	86
$\Theta$	dimensionsloser Materialparameter	86

## 4. Griechische Kleinbuchstaben

Symbol	Bedeutung	Seite
$\alpha$	Exponent (Kontaktsteifigkeit)	16
$\beta$	Exponent (viskoser Kontakt)	73
$\gamma$	Gleitung	29
$\delta$	Eindrucktiefe	6
$\bar{\delta}$	dimensionslose Eindrucktiefe	76
$\delta_c$	Kontakttiefe	12
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta	24
$\varepsilon_{ij}$	Verzerrungstensor	25
$\zeta$	Volumenviskosität	27
$\eta$	dynamische (Scher-)Viskosität	27
$\vartheta_p$	Polarskalierung	108
$\kappa_n$	Tiefenskalierung	10
$\mu$	stationärer Reibungskoeffizient	102
$\nu$	Poissonzahl	25
$\pi$	Kreiszahl	
$\sigma$	Spannung	59
$\sigma_i$	Spannung auf dem Element $i$	116
$\sigma_{ij}$	Spannungstensor	24
$\tau$	Zeitkonstante, Relaxationszeit	39
$\phi$	Verlustwinkel	86

## 5. Symbole

Symbol	Bedeutung	Seite
$\dot{x}$	Zeitableitung von $x$	27
$\tilde{x}$	$x$ , bezogen auf das vergleichbare elastische Problem	30
$x^*$	Laplace-Transformierte von $x$	31
$x * y$	Faltung von $x$ mit $y$	29
$[x, y]$	abgeschlossenes Intervall	98
$]x, y[$	offenes Intervall, Mischformen mit dem vorhergehenden Eintrag möglich	

## 6. Koordinatensysteme

Symbol	Bedeutung	Seite
$(r, \varphi, z)$	am Indenter befestigte Zylinderkoordinaten im Originalsystem (3D)	9
$(x, y, z)$	am Indenter befestigte, kartesische Koordinaten im Originalsystem (3D)	9
$(r, \psi, \zeta)$	am Halbraum befestigte Zylinderkoordinaten im Originalsystem (3D)	9
$(x, y, \zeta)$	am Halbraum befestigte kartesische Koordinaten im Originalsystem (3D)	9
$(x, z)$	am Indenter befestigte, kartesische Koordinaten im Modellsystem (1D)	9
$(x, \zeta)$	am Halbraum befestigte, kartesische Koordinaten im Modellsystem (1D)	9



# Literaturverzeichnis

- [1] D. Dowson, *History of Tribology*. Longman, London, 1979.
- [2] H. Hertz, *Ueber die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **92**, 156–171 (1882).
- [3] F. P. Bowden and D. Tabor, *The friction and lubrication of solids*. Oxford University Press, Oxford; New York, 2001.
- [4] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson, *Contact of nominally flat surfaces*, Proceeding of the Royal Society A **295**, 300–319 (1966).
- [5] B. N. J. Persson, *Theory of rubber friction and contact mechanics*, J. Chem. Phys. **115**, 3840–3861 (2001).
- [6] B. N. J. Persson, *Relation between interfacial separation and load: A general theory of contact mechanics*, Phys. Rev. Lett. **99**, 125502 (2007).
- [7] V. L. Popov and S. G. Psakhie, *Numerical simulation methods in tribology*, Tribol. Int. **40**, 916–923 (2007).
- [8] T. Geike, *Theoretische Grundlagen eines schnellen Berechnungsverfahrens für den Kontakt rauher Oberflächen*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, Berlin, 2008.
- [9] M. Heß, *Über die exakte Abbildung ausgewählter dreidimensionaler Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, Berlin, 2011.
- [10] R. Pohrt, *Normal stiffness of multiscale rough surfaces in elastic contact*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, Berlin, 2013.
- [11] V. L. Popov and M. Heß, *Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung*. Springer, 2013.
- [12] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [13] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Teubner, Stuttgart; Leipzig; Wiesbaden, 15 ed., 2003.
- [14] T. Geike and V. L. Popov, *Mapping of three-dimensional contact problems into one dimension*, Phys. Rev. E **76**, 036710 (2007).

- [15] T. Geike and V. L. Popov, *Reduction of three-dimensional contact problems to one-dimensional ones*, Tribol. Int. **40**, 924–929 (2007).
- [16] C. M. Segedin, *The relation between load and penetration for a spherical punch*, Mathematika **4**, 156–161 (1957).
- [17] I. N. Sneddon, *The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile*, International Journal of Engineering Science **3**, 47–57 (1965).
- [18] V. L. Popov, *Kontaktmechanik und Reibung*. Springer, Berlin, 2 ed., 2010.
- [19] B. N. J. Persson, O. Albohr, U. Tartaglino, A. I. Volokitin and E. Tosatti, *On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion*, J. Phys.-Condes. Mat. **17**, R1–R62 (2005).
- [20] R. Pohrt and V. L. Popov, *Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior*, Advances in Tribology **2013**, 974178 (2013).
- [21] S. Akarapu, T. Sharp and M. O. Robbins, *Stiffness of contacts between rough surfaces*, Phys. Rev. Lett. **106**, 204301 (2011).
- [22] R. Pohrt and V. L. Popov, *Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces*, Phys. Rev. Lett. **108**, 104301 (2012).
- [23] R. Pohrt, V. L. Popov and A. E. Filippov, *Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces for one- and three-dimensional systems*, Phys. Rev. E **86**, 026710 (2012).
- [24] E. Teidelt, E. Willert, A. E. Filippov and V. L. Popov, *Modeling of the dynamic contact in stick-slip microdrives using the method of reduction of dimensionality*, Physical Mesomechanics **15**, 287–292 (2012).
- [25] B. Grzemba, *Modeling of a creep process between rough surfaces under tangential loading*, Physical Mesomechanics (accepted for publication).
- [26] R. Wetter, *Shakedown and induced microslip of an oscillating frictional contact*, Physical Mesomechanics **15**, 293–299 (2012).
- [27] R. Wetter and V. L. Popov, *Shakedown limits for an oscillating, elastic rolling contact with coulomb friction*, International Journal of Solids and Structures **51**, 930–935 (2014).
- [28] V. L. Popov and A. E. Filippov, *Adhesive properties of contacts between elastic bodies with randomly rough self-affine surfaces: A simulation with the method of reduction of dimensionality*, Physical Mesomechanics **15**, 324–329 (2012).
- [29] M. Heß, *On the reduction method of dimensionality: The exact mapping of axisymmetric contact problems with and without adhesion*, Phys. Mesomech. **15**, 264–269 (2012).

- [30] J. Starcevic and A. E. Filippov, *Simulation of the influence of ultrasonic in-plane oscillations on dry friction accounting for stick and creep*, Physical Mesomechanics **15**, 330–332 (2012).
- [31] A. V. Dimaki and V. L. Popov, *The method of reduction of dimensionality and its application to simulation of elastomer friction under complex dynamic loads*, Physical Mesomechanics **15**, 319–323 (2012).
- [32] R. Heise, *Multiscale simulation of friction with normal oscillations in the method of reduction of dimensionality*, Physical Mesomechanics **15**, 316–318 (2012).
- [33] Q. Li, M. Popov, A. Dimaki, A. E. Filippov, S. Kürschner and V. L. Popov, *Friction between a viscoelastic body and a rigid surface with random self-affine roughness*, Physical Review Letters **111**, 034301 (2013).
- [34] E. H. Lee, *Stress analysis in visco-elastic bodies*, Quart. Appl. Math. **13**, 183–190 (1955).
- [35] J. R. M. Radok, *Visco-elastic stress analysis*, Quart. Appl. Math. **15**, 198–202 (1957).
- [36] E. H. Lee, *Stress analysis in viscoelastic materials*, J. Appl. Phys. **27**, 665–672 (1956).
- [37] D. R. Bland and E. H. Lee, *On the determination of a viscoelastic model for stress analysis of plastics*, J. Appl. Mech **23**, 416–420 (1956).
- [38] E. H. Lee, J. R. M. Radok and W. B. Woodward, *Stress analysis for linear viscoelastic materials*, Transactions of the Society of Rheology **3**, 41–59 (1959).
- [39] L. W. Morland and E. H. Lee, *Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation*, Transactions of the Society of Rheology **4**, 233–263 (1960).
- [40] E. H. Lee and T. G. Rogers, *Solution of viscoelastic stress analysis problems using measured creep or relaxation functions*, Journal of Applied Mechanics **30**, 127 (1963).
- [41] W. H. Yang, *The contact problem for viscoelastic bodies*, Journal of Applied Mechanics **33**, 395–401 (1966).
- [42] S. C. Hunter, *The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **8**, 219–234 (1960).
- [43] G. A. C. Graham, *The contact problem in the linear theory of viscoelasticity*, International Journal of Engineering Science **3**, 27–46 (1965).
- [44] G. A. C. Graham, *The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the time dependent contact area has any number of maxima and minima*, Int. J. Eng. Sci. **5**, 495–514 (1967).

- [45] T. C. T. Ting, *The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space*, J. Appl. Mech. **33**, 845–854 (1966).
- [46] T. C. T. Ting, *Contact problems in the linear theory of viscoelasticity*, J. Appl. Mech **35**, 248–254 (1968).
- [47] J. A. Greenwood, *Contact between an axisymmetric indenter and a viscoelastic half-space*, Int. J. Mech. Sci. **52**, 829–835 (2010).
- [48] G. A. C. Graham, *Correspondence principle of linear viscoelasticity theory for mixed boundary value problems involving time-dependent boundary regions*, Q. Appl. Math. **26**, 167–174 (1968).
- [49] G. A. C. Graham and J. M. Golden, *The generalized partial correspondence principle in linear viscoelasticity*, Q. Appl. Math. **46**, 527–538 (1988).
- [50] R. M. Christensen, *Theory of viscoelasticity: an introduction*. Academic Press, New York, London, 1971.
- [51] A. C. Pipkin, *Lectures on Viscoelasticity Theory*, vol. 7 of *Applied mathematical sciences*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1972.
- [52] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VII Elastizitätstheorie*. Akademie, Berlin, 1 ed., 1965.
- [53] I. Szabó, *Einführung in die technische Mechanik*. Springer, Berlin; Heidelberg, 8 ed., 1984.
- [54] I. Szabó, *Höhere technische Mechanik*. Springer, Berlin; Heidelberg, 6 ed., 2001.
- [55] R. d. Boer, *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1982.
- [56] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI Hydrodynamik*. Akademie Verlag, 5 ed., 1991.
- [57] E. H. Lee and J. R. M. Radok, *The contact problem for viscoelastic bodies*, J. Appl. Mech. **27**, 438–444 (1960).
- [58] D. G. Duffy, *Green's functions with applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [59] H. Weber and H. Ulrich, *Laplace-Transformation*. Teubner, Wiesbaden, 8 ed., 2007.
- [60] O. Föllinger and M. Kluwe, *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. Hüthig, Heidelberg, 9 ed., 2007.
- [61] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol and H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, 5 ed., 2000.

- [62] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Operational methods in applied mathematics*. Dover Publications, New York, 2 ed., 1963.
- [63] S. Kürschner and A. E. Filippov, *Normal contact between a rigid surface and a viscous body: Verification of the method of reduction of dimensionality for viscous media*, Phys. Mesomech. **15**, 270–274 (2012).
- [64] B. Gross, *Mathematical structure of the theories of viscoelasticity*, vol. 1190. Hermann, Paris, 1953.
- [65] C.-K. Liu, S. Lee, L.-P. Sung and T. Nguyen, *Load-displacement relations for nanoindentation of viscoelastic materials*, J. Appl. Phys. **100**, 033503 (2006).
- [66] M. Vandamme and F. J. Ulm, *Viscoelastic solutions for conical indentation*, Int. J. Solids Struct. **43**, 3142–3165 (2006).
- [67] G. Dubois, J. Cesbron, H. P. Yin and F. Anfosso-Ledee, *Macro-scale approach for rough frictionless multi-indentation on a viscoelastic half-space*, Wear **272**, 69–78 (2011).
- [68] H. N. Wang and G. H. Nie, *Analytical expressions for stress and displacement fields in viscoelastic axisymmetric plane problem involving time-dependent boundary regions*, Acta Mech. **210**, 315–330 (2010).
- [69] M. Kröger, P. Moldenhauer and G. Gäbel, *Modular modelling of dynamic systems with elastomer contacts*, in *IUTAM Symposium on Computational Methods in Contact Mechanics*, P. Wriggers and U. Nackenhorst, eds., vol. 3 of *IUTAM Bookseries*, pp. 277–290. Springer Netherlands, 2007.
- [70] M. Kröger, P. Moldenhauer and G. Gäbel, *Influence of the non-linear contact stiffness on the vibration behaviour of a tyre tread block*, PAMM **7**, 4050015–4050016 (2007).
- [71] S. Kürschner, V. L. Popov and A. E. Filippov, *Reduzierte Beschreibung von Kontakten zwischen festen Körpern und viskosen Flüssigkeiten*, in *53. Tribologie-Fachtagung*, vol. I, pp. 3/1–3/11. Gesellschaft für Tribologie e.V., Göttingen, 2012.
- [72] S. Kürschner and V. L. Popov, *Penetration of self-affine fractal rough rigid bodies into a model elastomer having a linear viscous rheology*, Phys. Rev. E **87**, 042802 (2013).
- [73] R. Pohrt and V. L. Popov, *Investigation of the dry normal contact between fractal rough surfaces using the reduction method, comparison to 3D simulations*, Phys Mesomech **15**, 275–279 (2012).
- [74] S. Kürschner, *Friction between a rigid body and a model elastomer having a linear viscous rheology*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (in review).

- [75] S. K. Peddini, C. P. Bosnyak, N. M. Henderson, C. J. Ellison and D. R. Paul, *Nanocomposites from styrene-butadiene rubber (SBR) and multiwall carbon nanotubes (MWCNT) part 1: Morphology and rheology*, Polymer **55**, 258–270 (2014).
- [76] M. L. Williams, R. Landel and J. Ferry, *The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids*, Journal of the American Chemical Society **77**, 3701–3707 (1955).
- [77] K. A. Grosch, *Relation between friction and visco-elastic properties of rubber*, Nature **197**, 858–859 (1963).
- [78] J. M. Golden, *Approximate analytic treatment of the problem of a moving ellipsoidal punch on a viscoelastic half-space*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **35**, 155–171 (1982).
- [79] I. Argatov, *An analytical solution of the rebound indentation problem for an isotropic linear viscoelastic layer loaded with a spherical punch*, Acta Mechanica **223**, 1441–1453 (2012).
- [80] S. Kürschner and V. L. Popov, *Simulation der Reibung zwischen einem starren Indenter und einem Modell-Elastomer*, in *54. Tribologie-Fachtagung*, vol. I, pp. 9/1–9/10. Gesellschaft für Tribologie e.V., Göttingen, 2013.
- [81] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer, 1984.
- [82] L. Gaul and C. Fiedler, *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1997.
- [83] F. Hartmann, *Methode der Randelemente: Boundary Elements in der Mechanik auf dem PC*. Springer, Berlin ; Heidelberg, 1987.
- [84] I. A. Polonsky and L. M. Keer, *A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques*, Wear **231**, 206–219 (1999).
- [85] C. H. Venner and A. A. Lubrecht, *Multilevel methods in lubrication*. No. 37 in Tribology Series. Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [86] H. M. Stanley and T. Kato, *An FFT-Based method for rough surface contact*, Journal of Tribology **119**, 481–485 (1997).
- [87] Y.-J. Cho, Y.-P. Koo and T.-W. Kim, *A new FFT technique for the analysis of contact pressure and subsurface stress in a semi-infinite solid*, KSME International Journal **14**, 331–337 (2000).