# Einfluss der Geometrie auf die Wirkung von Schallschutzwänden

Dipl.-Ing. Judith Kokavecz

Universitätsverlag der TU Berlin

ISBN 978-3-7983-2344-5 (Druckausgabe)
ISBN 978-3-7983-2345-2 (Online-Version)

Berlin 2011 D 83

Vertrieb / Publisher: Universitätsverlag der TU Berlin
Universitätsbibliothek
Fasanenstr. 88 (im VOLKSWAGEN-Haus)
D-10623 Berlin, Germany
Tel.: +49 (0)30 314-76131
Fax: +49 (0)30 314-76133
E-Mail: publikationen@ub.tu-berlin.de
http://www.univerlag.tu-berlin.de

Druck / Printing: docupoint GmbH
Otto-von-Guericke-Allee 14
D-39179 Barleben

∞ Gedruckt auf säurefreiem alterungsbeständigem Papier

# Einfluss der Geometrie auf die Wirkung von Schallschutzwänden

Dipl.-Ing. Judith Kokavecz

Von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktorin der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)**

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

| | |
|---|---|
| Vorsitzender: | Prof. Dr.-Ing. Paul Uwe Thamsen |
| Gutachter: | Prof. Dr.-Ing. Michael Möser |
| | Prof. Dr. rer. nat. Michael Vorländer |

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 12. Mai 2011

Berlin 2011

**D 83**

# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik der Technischen Universität Berlin. Da mich auf dem Weg zur Fertigstellung viele Menschen begleitet und unterstützt haben, möchte ich mich an dieser Stelle bei ihnen bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Möser, der mein Interesse an seinem Fachgebiet weckte und den Anstoß für dieses spannende und facettenreiche Thema gegeben hat. Er hat nicht nur die wissenschaftliche Betreuung übernommen und mich mit seinen konstruktiven Denkanstößen immer wieder motiviert, sondern auch meine fachliche und berufliche Weiterentwicklung gefördert.

Desweiteren möchte ich mich auch bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Technischen Akustik bedanken. Sie haben meinen Arbeitsalltag bereichert und waren bei Fragen und Problemen stets eine Hilfe. Vor allem beim Aufbau und Abbau des soliden Schallschutzwandmodells im Labor, das die beiden Mitarbeiter der Werkstatt dankenswerter Weise gebaut haben, waren viele helfende Hände notwendig. Außerdem möchte ich mich bei Daniel Mena bedanken, der mich bei den Messungen unterstützt und den Überblick über die gespeicherten Daten behalten hat.

Zu guter Letzt möchte ich noch meiner Familie danken, die mich auf meinem Weg begleitet und unterstützt hat. Auch Götz hat durch seine Aufmunterungen und sein Zuhören wesentlich zu meiner Motivation beigetragen und dafür gesorgt, dass auch weniger produktive Tage gut waren. Ich danke euch für eure Geduld.

Berlin im Januar 2011

# Zusammenfassung

Schallschutzwände spielen eine wichtige Rolle beim Schutz der Bevölkerung vor schädlichem Lärm. Zur Planung einfacher, senkrecht stehender Schallschutzwände gibt es seit Jahren Verfahren, die standardisiert und rechtlich festgeschrieben sind. Die Konsequenz ist, dass lediglich die Höhe der Schallschutzwand variiert wird, um die geforderte Abschirmwirkung zu erzielen.

Da die Abschirmwirkung maßgeblich durch die Beugung an der Oberkante der Wand beeinflusst wird, entstand die Idee, die Geometrie der Oberkante durch Aufsätze zu verändern, um eine höhere akustische Abschirmwirkung bei gleicher Höhe zu erzielen. In Forschungsarbeiten finden sich Untersuchungen zu Aufsätzen mit unterschiedlichen Formen und aus unterschiedlichen Materialien (absorbierend, reflektierend). Je nach Form spielen unterschiedliche Parameter eine Rolle bei der Gestaltung dieser Aufsätze. Daher ist es auch schwierig ein standardisiertes Verfahren zur Planung dieser zu entwickeln.

In den letzten Jahren sind beim Bau neuer Verkehrswege auch neue Schallschutzwände entstanden. Dabei trifft man immer häufiger auf Konstruktionen, die geneigt oder auch gebogen sind oder im oberen Wandbereich eine Neigung aufweisen. Diese geneigten Abschnitte auf einer Schallschutzwand kann man auch als klappenförmige Aufsätze auffassen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Wirkung von klappenförmigen Aufsätze auf die Beugung an Schallschutzwänden untersucht. Obwohl in der Fachliteratur bereits Untersuchungen zu Schallschutzwänden mit T-, Y- und Pfeil-Profilen zu finden sind, ist nicht ersichtlich, welchen Einfluss die Öffnungswinkel und Längen der einzelnen Klappen bei diesen Aufsätzen haben. Vor allem bei dem Versuch, die gewonnenen Erkenntnisse in die Praxis zu übertragen, sind diese Parameter von entscheidender

Bedeutung, daher ist es wichtig, ihren Einfluss auf die Abschirmwirkung zu bestimmen.

In den theoretischen Betrachtungen hierzu wurde ein mathematisches Modell entwickelt, das die Grundlage für die numerische Betrachtung bildet. Die analytische Lösung für den Druck beschreibt das Schallfeld sowohl vor als auch hinter der Schallschutzwand. In numerischen und experimentellen Studien wurde die Abschirmwirkung, die durch den klappenförmigen Aufsatz entsteht, in Abhängigkeit der Aufsatzparameter „Klappenöffnungswinkel“ und „Klappenlänge“ untersucht. Dabei stellte sich heraus, dass die Wirkung der Aufsätze stark von der Quellposition abhängt. Erst wenn der Klappenöffnungswinkel größer als der Quellwinkel ist, sind Verbesserungen durch den Aufsatz zu erwarten. Die Klappenlänge ist ein wichtiger Parameter im Hinblick auf die Frequenzabstimmung des Aufsatzes.

Die Parameteruntersuchungen haben gezeigt, dass eine einfache Planungsgrundlage für klappenförmige Aufsätze nicht offensichtlich ist. Daher muss beim Einsatz in der Praxis eine numerische Untersuchung erfolgen. Allerdings konnte auch gezeigt werden, dass es möglich ist, mit dem hier verwendeten numerischen Modell Voraussagen über die Wirkung der Aufsätze zu treffen.

# Abstract

Noise barriers play an important role in protecting citizens from harmful noise. Standardized and legalized procedures for the planning of simple, upright noise barriers has existed for many years now. The result is that, by simply varying the height of the noise barrier, the desired sound protection is achieved.

Sound protection is substantially influenced by the diffraction at the upper edge of the wall. Thus the idea arose that the geometry of the upper edge could be altered through attachments in order to achieve higher acoustical blocking with walls of the same height. Studies show investigations of attachments with different forms and of different materials (absorbing, reflective). Depending on the form, various parameters played a role in the design of such attachments.

In the past few years, new noise barriers have been erected during the construction of new traffic routes. More and more, these constructions have upper wall areas that are inclined or even bent. These inclined portions of a noise barrier can be viewed as flap-like attachments.

This study investigates the effect of these flap-like attachments on the diffraction by a noise barrier. Despite the presence of studies of noise barriers with T-, Y-, and arrow profiles in the technical literature, the influence of the angle of opening and the lengths of individual flaps of the attachments is not evident. Above all, the results gained during the experiment demonstrate that these parameters are significant; therefore it is important to determine their influence on the shielding effectiveness.

To date, theoretical examinations developed a mathematical model that serves as a basis for numerical examinations. The analytical solution for the pressure describes the sound field in front of and behind the noise barrier. Numerical and experimental studies examine the shielding effectiveness achieved through these flap-like attachments, dependent on

the attachment parameters “angle of flap opening” and “flap length”. It was discovered that the effect of the attachments was strongly dependent on the source position. Improvements from the attachments were seen only when the angle of the flap opening was greater than that of the source angle. The length of the flap is thus an important parameter with regard to the frequency adjustment of the attachment.

The investigation of parameters has shown that a simple basis for the planning of flap-like attachments is not evident. Numerical analyses must be undertaken for practical applications. However, it is also demonstrated that it is possible to use the numerical models applied in this study to be able to predict the effects of attachments.

# Inhaltsverzeichnis


**1. Einleitung** **1**
- 1.1. Gliederung der Arbeit . . . 2
- 1.2. Beugung: Entstehung einer Theorie . . . 3
- 1.3. Stand der Technik . . . 4
- 1.4. Stand der Forschung . . . 6
- 1.5. Zielsetzung . . . 12

**2. Theoretische Betrachtungen** **15**
- 2.1. Grundlegende Betrachtungen . . . 15
- 2.2. Beugung an einer schallharten Schneide . . . 17
- 2.3. Abknickende Wand (Aufsatz mit einer Klappe) . . . 22
  - 2.3.1. Anpassen der Wellengleichung an die Randbedingungen . . . 24
  - 2.3.2. Bestimmung der Koeffizienten . . . 27
  - 2.3.3. Quellgröße $\Delta v$ . . . 35
  - 2.3.4. Ebene fortschreitende Welle . . . 37
- 2.4. Y-Profil (Aufsatz mit zwei Klappen gleicher Länge) . . . 39
  - 2.4.1. Bestimmung der Koeffizienten . . . 42
  - 2.4.2. Ebene fortschreitende Welle . . . 43
- 2.5. Betrachtungen im Fernfeld . . . 45
- 2.6. Beschreibung der Verbesserung durch Aufsätze . . . 45
- 2.7. Das Umweggesetz . . . 46

**3. Simulation** **49**
- 3.1. Finite-Differenzen-Methode . . . 50
- 3.2. Abknickende Wand (Aufsatz mit einer Klappe) . . . 51
  - 3.2.1. Übergangsbedingungen bei $r = r_K$ . . . 52
  - 3.2.2. Diskretisierung des Problems . . . 53
  - 3.2.3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems . . . 55

3.2.4. Vektor auf der rechten Seite . . . . . 57
Einfall einer ebenen Welle . . . . . 57
Linienquelle . . . . . 58
3.2.5. Bestimmung der Koeffizienten . . . . . 59
3.2.6. Berechnung des Druckfeldes . . . . . 60
3.3. Y-Profil (Aufsatz mit zwei Klappen gleicher Länge) . . . . 61
3.4. Beliebig viele Klappen unterschiedlicher Länge . . . . . 64
3.4.1. Diskretisierung . . . . . 65
3.4.2. Übergangsbedingungen . . . . . 66
3.4.3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems . . . . . 67
3.5. Fernfeldnäherung . . . . . 69
3.6. Fehleranalyse . . . . . 69
3.6.1. Fehlerarten . . . . . 70
3.6.2. Genauigkeit der Lösung . . . . . 72
Kondition des Problems . . . . . 73
Konsistenzbewertung . . . . . 76
Stabilitätsbewertung . . . . . 78
3.6.3. Überprüfung der Übergänge . . . . . 80
3.7. Hardware . . . . . 81

**4. Experimentelle Untersuchung 83**
4.1. Aufbau des Experiments . . . . . 83
4.2. Aufsatz mit einer Klappe . . . . . 88
4.2.1. Einfluss des Klappenöffnungswinkels und des Quellwinkels . . . . . 89
4.2.2. Frequenzabhängigkeit . . . . . 91
4.2.3. Räumliche Verteilung . . . . . 94
4.3. Aufsatz mit zwei gleich langen Klappen . . . . . 98
4.3.1. Frequenzabhängigkeit . . . . . 99
4.3.2. Räumliche Verteilung . . . . . 103
4.4. Messungen bei 180° . . . . . 105
4.5. Mögliche Fehlerursachen bei den Messungen . . . . . 108

**5. Vergleich der Simulation mit der Messung 111**
5.1. Aufsatz mit einer Klappe . . . . . 111
5.1.1. Vergleich für verschiedene Klappenöffnungswinkel . 112
5.1.2. Frequenzabhängiger Vergleich . . . . . 114
5.1.3. Vergleich an ausgewählten Messpositionen . . . . . 121
5.2. Aufsatz mit zwei Klappen . . . . . 125
5.3. Unterschiede zwischen Modell und Experiment . . . . . 127

**6. Untersuchung der Wirksamkeit der Aufsätze 129**
6.1. Veränderung des Schallfeldes durch die Schallschutzwand 130
6.2. Einfluss des Klappenöffnungs- und des Quellwinkels . . . 132
6.3. Einfluss des Quellabstandes . . . . . 135
6.4. Einfluss der Klappenlänge . . . . . 141
6.5. Einfluss der Empfängerposition (Fernfeldnäherung) . . . . 145
6.6. Vergleich mit dem Umweggesetz . . . . . 149
6.7. Vergleich mit einer gleich hohen Wand . . . . . 150
6.8. Einsatz in der Praxis . . . . . 154
6.8.1. Die Quelle . . . . . 154
6.8.2. Wahl der Aufsatzparameter . . . . . 154
6.8.3. Fallbeispiel . . . . . 155
6.8.4. Limitation . . . . . 159

**7. Ergebnisse 161**

**8. Ausblick 165**

**A. Symbolverzeichnis 167**

**B. Mathematische Grundlagen 173**
B.1. Eigenschaften der Bessel-, Neumann- und Hankelfunktionen 173
B.2. Herleitung für die Darstellung mit Fresnel-Integralen . . . 174
B.3. Fresnel-Integrale . . . . . 176

**Literaturverzeichnis 177**

**Gesetze und Normen 183**

# 1 Einleitung

*Aus den Augen, aus dem Sinn...*

... trifft im Leben leider nicht immer zu. Vor allem bei störenden Geräuschen kann man nicht einfach um die nächste Ecke gehen und wird dann verschont. Obwohl sich der Pegel meist deutlich reduziert, nimmt man den Lärm hinter einer Wand oder einem Gebäude weiterhin wahr. Dennoch sind Schallschutzwände ein geeignetes Mittel, um die Menschen vor schädlichem Lärm zu schützen, und gehören zu den Standardmaßnahmen des Lärmschutzes.

Wie bei allen Wellenausbreitungen tritt bei Schall Beugung an Hindernissen auf. Daher kann man den Lärm des Straßenverkehrs auch noch hinter dem nächsten Haus hören. Das gleiche Problem liegt auch bei Schallschutzwänden vor. Trotz Abschirmung ist hinter der Wand der Lärm des vorbeifahrenden Verkehrs noch zu hören. Dennoch ist der Einsatz von Schallschutzwänden sinnvoll, wenn sie den Lärm auf ein unschädliches Maß (abhängig von der rechtlichen Regelung) reduzieren.

Lange Zeit wurden einfache Schallschutzwände, zumeist aus Beton, gebaut. Je nach Lärmbelastung wurde lediglich die Höhe der Wände angepasst. Daraus könnte man eine einfache Regel ableiten: Je höher die Wand desto höher der Lärmschutz. Das einhergehende Problem, dass die Kosten für eine höhere Schallschutzwand nicht linear mit der Höhe zunehmen, sondern überproportional wachsen, begrenzte durch das schlechte Kosten-/Nutzenverhältnis die Bauhöhe. Um dieses Problem zu lösen, beschäftigt sich die Wissenschaft schon seit längerem mit der

Veränderung der Geometrie an der Oberkante von Schallschutzwänden. Dabei sind verschiedene Ideen zur Gestaltung von Aufsätzen, die an der Oberkante angebracht die Geometrie verändern, untersucht worden. Diese Aufsätze sollen die Wirkung der Schallschutzwände verbessern, so dass man an Stelle einer höheren Wand eine Wand mit Aufsatz nutzen kann. So können schon bestehende Schallschutzwände, falls nötig, nachträglich verbessert werden. Die Kosten bleiben überschaubar und auch die Statik muss gar nicht oder nur wenig verändert werden.

Da die Aufsätze in allen denkbaren Formen gebaut werden könnten, solange es die Statik zulässt, stellt sich die Frage, welche Formen hinsichtlich des Lärmschutzes günstig sind. Dieser Frage soll in dieser Arbeit nachgegangen werden. Dabei stehen Schallschutzwände mit klappenförmigen Aufsätzen im Vordergrund, deren Wirkung auf die Beugung von Schall untersucht wird. Neben der Entwicklung eines analytischen Modells werden sowohl Simulationen am Computer als auch Messungen durchgeführt, um die Wirkung der verschiedenen Aufsätze zu verstehen und zu beurteilen.

## 1.1. Gliederung der Arbeit

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels wird ein kurzer historischer Überblick über das Beugungsphänomen gegeben, der Stand der Technik und der Forschung dargestellt und daraus das Ziel der Arbeit abgeleitet.

Kapitel 2 beginnt mit den theoretischen Grundlagen, die für diese Arbeit benötigt werden. Es werden die benutzten analytischen Ansätze besprochen und die Beugung an einer einfachen Wand mit Aufsatz mathematisch beschrieben. Als Aufsätze werden verschiedene Variationen mit schallharten Klappen betrachtet und ein mathematisches Modell zur Berechnung entwickelt.

Die numerische Umsetzung, die sich aus den theoretischen Betrachtungen ergibt, wird in Kapitel 3 besprochen. Dabei werden die numerischen Verfahren, die zum Einsatz kommen, im Detail erläutert und das mathematische Modell wird in ein numerisches überführt. Im Anschluss erfolgt eine Fehleranalyse, um zu zeigen, dass die Berechnungsverfahren geeignet sind, das Problem zu lösen.

Der numerischen Umsetzung schließt sich eine messtechnische Überprüfung der Ergebnisse an (Kapitel 4). Dabei wird in einem Laborexperiment

der Einfluss einer Schallschutzwand mit klappenförmigen Aufsätzen auf das Schallfeld untersucht.

Der Vergleich der numerischen und der experimentellen Untersuchungen erfolgt in Kapitel 5. Das Ziel ist die Überprüfung des numerischen Modells zur Berechnung der Wirkung von klappenförmigen Aufsätzen. Hier werden auch die Abweichungen, die sich aus den Unterschieden zwischen Experiment und Simulation ergeben, diskutiert.

Die Berechnungen aus den Simulationen werden in Kapitel 6 genutzt, um die Einflüsse der einzelnen Parameter des Aufsatzes auf die Verbesserung zu analysieren. Daneben werden Näherungsverfahren auf ihre Einsatzmöglichkeit geprüft und das Vorgehen beim Einsatz in der Praxis erläutert.

In der Zusammenfassung in Kapitel 7 werden die Erkenntnisse dieser Arbeit abschließend dargestellt. Offene Fragen und weiterführende Forschungsthemen sind im Ausblick (Kapitel 8) zu finden.

## 1.2. Beugung: Entstehung einer Theorie

Schallschutzwände, wie man sie heute kennt, sind ein eher junges Mittel, um Menschen vor Lärm zu schützen. Dabei stellt man fest, dass man hinter einer Lärmschutzwand an einer Autobahn die Geräusche der Autos noch immer hört. Bei genügend hohen Schalldämmmaßen wird die Wirkung der Schallschutzwand maßgeblich von der Geometrie der Oberkante beeinflusst. Der Schall wird an der Oberkante der Wand gebeugt und breitet sich damit auch hinter der Wand im „Schatten“ aus.

Das Beugungsphänomen gehört heutzutage zu den Grundlagen der Physik und tritt bei allen Wellenphänomenen auf. Die ersten Untersuchungen zur Beugung beschäftigten sich mit der Beugung von Licht, da dieser Sachverhalt mit dem bloßen Auge beobachtet werden kann. Francesco Maria Grimaldi (1618 – 1663) beobachtete schon Beugungserscheinungen. Seine Beobachtungen wurden nach seinem Tode veröffentlicht (Physicomathesis de lumine, coloribus, et iride, aliisque annexis, Bologna 1665). Im Jahre 1690 veröffentlicht Christian Huygens in seinem Werk *Traité de la lumière* („Abhandlung über das Licht : Worin d. Ursachen d. Vorgänge bei seiner Zurückwerfung u. Brechung u. besonders bei d. eigenthüml. Brechung d. isländ. Spathes dargelegt sind“) das Prinzip von Sekundärwellen. Fresnel erweiterte 1818 diese Überlegungen von Huygens Theorie der Sekundärwellen mit dem Superpositionsprinzip. Kirchhoff griff den

Gedanken der Sekundärwellen von Huygens und Fresnel 1882 auf und verband ihn mit der Wellengleichung der Lichtausbreitung (aus [6]), heute bekannt unter der Kirchhoffschen Beugungstheorie.

Doch bereits 1894 übte Sommerfeld Kritik an der Beugungstheorie, die auf Fresnel und Kirchhoff zurückgeht. Sie war ihm mathematisch nicht genau genug und er veröffentlichte 1896 seine Untersuchung zur Beugung [49]. In dieser beschreibt er die Beugung einer ebenen Welle an einem halbunendlichen Schirm für elektromagnetische Wellen mathematisch. Nicht nur diese Betrachtungen wurden später auf die Akustik übertragen und behalten auch dort ihre Gültigkeit. Sommerfelds Arbeit ist auch die Grundlage der theoretischen Betrachtungen über Beugungserscheinungen an Schallschutzwänden (siehe auch Abschnitt 2.2).

## 1.3. Stand der Technik

Die ersten theoretischen Veröffentlichungen zur Berechnung des Einfügedämmmaßes von Schallschutzwänden erschien zwar schon 1955 (siehe Abschnitt 1.4), der Einsatz von Schallschutzwänden kam aber erst in den 1970ern mit dem Erlass verschiedener Gesetze zum Lärmschutz richtig in Schwung.

Die Welt-Gesundheits-Organisation (World-Health-Organisation WHO) hat 1980 Kriterien zur Beurteilung von Lärmbelastungen (*Environmental Health Criteria – Noise*) herausgegeben [59]. Die Europäische Kommission zog 1990 nach und veröffentlichte das Grünbuch „Künftige Lärmschutzpolitik“ [11], das Empfehlungen über zukünftige Entwicklungen in Bezug auf Lärmschutz in der EU gibt. Teile dieser Empfehlungen sind bereits umgesetzt worden, dies zeigt die verstärkten Bemühungen und die bewusstere Wahrnehmung dieser Problematik. Hinzu kommt, dass mit der geforderten Lärmkartierung (34. BImSchV [64]) auch Lärmminderungspläne erstellt werden müssen. Bei der Umsetzung dieser Lärmminderungspläne spielen Schallschutzwände eine wichtige Rolle.

Neben Empfehlungen existieren rechtliche Grundlagen, die zum Teil aus den Empfehlungen abgeleitet wurden. In Europa sind durch den Zusammenschluss vieler europäischer Länder zur Europäischen Union die rechtlichen Grundlagen vereinheitlicht worden. Der Schutz vor Lärm wird durch die EU-Richtlinie 2002/49/EG *über die Bewertung und Bekämpfung von Umgebungslärm* [73] geregelt, die in Deutschland durch das *Gesetz zur Umsetzung der EG-Richtlinie über die Bewertung und Bekämpfung von Umgebungslärm* [60] in nationales Recht übernommen wurde.

Das Gesetz beinhaltet Änderungen des Bundes-Immissionsschutzgesetzes (BImSchG [61]), das den Lärmschutz (seit 1974) in Deutschland regelt. Die Umsetzung der EU-Richtlinie führt dazu, dass Lärmkarten und Lärmminderungsmaßnahmen für Verkehrswege erstellt werden müssen.

Zum BImSchG gibt es die Bundes-Immissionsschutzverordnungen (BImSchV), die die Details klären. Die *Verkehrslärmschutzverordnung* (16. BImSchV [62]) regelt den Lärmschutz beim Bau oder der wesentlichen Änderung von öffentlichen Straßen sowie von Schienenwegen der Eisenbahnen und Straßenbahnen (Straßen und Schienenwege). Nach der 16. BImSchV Anhang 1 ist die RLS-90 [76] für die Berechnung des Beurteilungspegels an Straßen heranzuziehen, bei Schienenwegen (16. BImSchV Anhang 2) wird die Schall 03 [77] genutzt. Art und Umfang der Maßnahmen sind in der *Verkehrswege-Schallschutzmaßnahmenverordnung* (24. BImSchV [63]) festgelegt. Allerdings finden diese Verordnungen keine Anwendung bei den Lärmminderungsmaßnahmen, da sie nur bei der wesentlichen Änderung oder dem Neubau von Verkehrswegen rechtlich relevant sind.

Zusätzlich zu den Verordnungen zur Durchführung gibt es in Deutschland noch diverse (allgemeine) Verwaltungsvorschriften, die die Details zum Lärmschutz und zur Planung von Lärmschutzmaßnahmen festlegen. Dazu gehören u. a. die Technische Anleitung Lärm (TA Lärm [78]), die den Schutz der Anwohner vor schädlichen Umwelteinwirkungen durch Geräusche von Anlagen (nach BImSchG) regelt. Darin sind Grenzwerte (Tag und Nacht) für die verschiedenen Gebietstypen (wie Wohngebiet, Industriegebiet, etc.) festgelegt.

Das Vorgehen bei messtechnischen Überprüfungen und Untersuchungen ist nicht in den Gesetzen und Verwaltungsvorschriften festgelegt, sondern findet sich in Normen und anderen Regelwerken. Z. B. regelt die DIN EN 1793 in sechs Teilen (drei Normen [67; 68; 69], zwei Vornormen [65; 66] und einem Normentwurf [72]) die Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften von Lärmschutzeinrichtungen an Straßen. Derzeit werden Teil 1 und 2 überarbeitet, die Vornormen [70; 71] sollen dann die Normen [67; 68] ersetzen. In Teil 1 der Richtlinie VDI 2720 [79] werden Berechnungsverfahren zur Bestimmung des *Schallschutzes durch Abschirmung im Freien* festgelegt. In [43] wird diese ausführlich erläutert und auf ihre Anwendbarkeit hin untersucht. Die VDI 2720 bildet auch die Grundlage für die Planung von Schallschutzwänden in der Praxis. Das Berechnungsverfahren beruht maßgeblich auf dem Umweggesetz. Die ISO 10847 [75] legt fest, wie man das Einfügungsdämmmaß im Freien bei bestehenden Schallschutzwänden bestimmen kann.

Trotz zahlreicher (rechtlicher und normativer) Festlegungen findet man eine Vielzahl unterschiedlicher Schallschutzwände. In ihrem Buch *Environmental Noise Barriers: A Guide to their Acoustic and Visual Design* [27] widmen sich Kotzen und English den akustischen und optischen Aspekten von Lärmschutzwänden in Europa. Ihr erklärtes Ziel ist die Schaffung eines Leitfadens für Architekten und Landschaftsplaner, um ihnen einen Einblick in die Möglichkeiten der Gestaltung mit Material und Form zu geben. Nach ihrer Auffassung steht an erster Stelle bei der Planung und dem Bau von Schallschutzwänden die akustische Wirksamkeit, aber an zweiter Stelle sollte das Design stehen, um die Akzeptanz der Anwohner zu erhöhen. Interessant ist auch der Titel, der sich bei den Wänden nicht nur auf den Lärmschutz beschränkt, sondern ihnen einen höheren Stellenwert in der Wechselwirkung mit der Umwelt einräumt. So empfehlen sie am Ende auch die Kombination von Lärmschutzwänden mit anderen Funktionen zu verknüpfen, z. B. der Energiegewinnung durch Solarpanele. Kombiniert man Schallschutzwände mit Solarpanelen, hat man auf der gleiche Fläche einen höheren Nutzen, beim Bau meistens aber auch höhere Kosten.

Auch wenn mittlerweile einige Hersteller solche Kombinationen bei Lärmschutzwänden anbieten, sind sie im Straßenbild bisher selten vertreten. Sicherlich auch aus Kostengründen, da man einmal errichtete Lärmschutzwände nur in den wenigsten Fällen neu baut. Dieser Zustand könnte sich allerdings mit Einführung der Lärmminderungspläne ändern.

Daneben gibt es immer wieder neue Ideen, wie die vom Lehrstuhl für Bauphysik der Universität Stuttgart entwickelte aufblasbare Schallschutzwand [34; 3], die bei Bedarf (temporär) aufgestellt werden kann.

## 1.4. Stand der Forschung

Eine der ersten Veröffentlichungen zur Berechnung der Lärmminderung an Schallschutzwänden erschien 1955 [41]. Darin beschreiben Nyborg und Mintzer wie man mit Hilfe der Fresnelschen Beugungstheorie das Einfügungsdämmmaß einer einfachen Wand berechnen kann. 1957 griff Rettinger in [47] diese Idee erneut auf und entwickelte ein Diagramm, an der man die Verbesserung, die die Lärmschutzwand auf Grund ihrer Abmessungen bewirkt, ablesen kann. Damit wurde ein einfaches Planungswerkzeug geschaffen.

In den folgenden Jahren nahm das Interesse an Schallschutzwänden immer weiter zu und damit auch die Anzahl der Veröffentlichungen. 1968

vergleicht Maekawa in [30] seine Messergebnisse mit den Ergebnissen aus Berechnungen. Dabei kamen verschiedene Methoden zur Berechnung der Schallpegelreduktion an einer Schallschutzwand zum Einsatz. Er berücksichtigt auch den Einfluss der Bodenreflexionen, die in [47] noch nicht einbezogen worden sind. Er zeigt, dass seine Methode zur Abschätzung der Verbesserung ausreichend ist, wobei zwischen einer Punkt- und einer Linienquelle im Modell unterschieden wird. Durch eine Erweiterung des Modells können endlich dicke Wände als sehr dünne Wände modelliert werden.

1971 veröffentlichen Kurze und Anderson [28] einen Artikel über die Beugung an Schallschirmen. Sie entwickeln eine Näherungsformel für die Berechnung der Schallpegelreduktion bei der Betrachtung von Punktquellen und zeigen, dass ihre Ergebnisse mit den Messungen in [30] gut übereinstimmen. Außerdem untersuchen sie die Wirkung von endlichen Schallschutzwänden bei Linienquellen und berechnen die benötigte Länge einer Schallschutzwand. Der Einfluss des Bodens wird hierbei nicht berücksichtigt.

Butler beschreibt 1974 in [8] die Verbesseung von Schallschirmen durch veränderte Randbedingungen (Impedanzen) an der Schirmkante. Er geht davon aus, dass die Impedanz einen entscheidenden Einfluss auf die Beugung hat und dadurch die Wirkung von Lärmschutzwänden verbessert werden kann. Die Berechnung der Beugung erfolgt mit Hilfe von Näherungen (vgl. auch [39]) für eine schallharte ($Z = \infty$), vollständig absorbierende ($Z = \rho c$) und eine schallweiche ($Z = 0$) Oberkante eines halb unendlichen Schirms. Messungen am Modell im reflexionsarmen Raum (RAR) zeigen, dass schallweiche Schirmkanten am besten geeignet sind. Man erreicht in bestimmten Frequenzbereichen eine Verbesserung von 5 dB.

Eine theoretische Untersuchung von schallharten Schirmen mit schallweicher bzw. vollständig absorbierender Kante von Rawlins [46] bestätigt die Ergebnisse von Butler [8]. Rawlins zeigt auch, dass ein absorbierender Bereich von $\lambda/2\pi = 1/k$ entlang der Schirmkante ausreichend ist, um die Wirkung des Schirms zu verbessern. Zur Berechnung des Druckfelds nutzt er Näherungen für das Fernfeld. Der Einfluss des Bodens wird nicht berücksichtigt, da ein halbunendlicher Schirm in der Untersuchung betrachtet wird.

Ende der 70er Jahre fing man an, sich nicht nur mit absorbierenden sondern auch mit geometrisch anders gestalteten Oberkanten von Schallschutzwänden zu beschäftigen. Wirt [58] untersucht 1979 regelmäßig

strukturierte Kanten (Sägezahn und Pfahl) an Schirmen, die teilweise absorbierend belegt waren. In Modellmessungen ergaben sich Verbesserungen von 1 – 4 dB. Allerdings widerlegen May und Osman in [32], dass diese Geometrien Verbesserungen verursachen. Sie können sogar Verschlechterungen der Abschirmwirkung nachweisen. Sie untersuchen auch T-, Y- und Pfeil-Profile an Modellen im Maßstab 1:16 und berücksichtigen verschiedene Bodenarten (Asphalt und Gras) in ihren Modellen. Sie stellen fest, dass mit allen drei untersuchten Profilen bessere Wirkungen erzielt werden können als bei einfachen Wänden. Das T-Profil stellt sich als das wirksamste heraus, dessen Wirksamkeit durch Anbringen von Absorbermaterial auf dem Profil noch erhöht werden kann.

T-Profile werden von May und Osman auch in der Praxis untersucht [33]. Dazu modifizieren sie eine bereits bestehende einfache Schallschutzwand in Toronto (gebaut 1978). Zunächst ist absorbierendes Material an der Wand untersucht worden, dies führt jedoch nicht zu Verbesserungen. Das T-Profil bringt im Mittel 1 – 1,5 dB Verbesserung an der ersten Häuserzeile gegenüber der einfachen Wand.

Fiedler [12] untersucht dünne Schirme, Wälle, und T-Profile messtechnisch. Dabei kommen neben schallharten Konstruktionen auch Absorbermaterial sowohl auf der Oberkante des Wandmodells als auch im oberen Wandbereich zum Einsatz. Die Versuche zeigen, dass man mit T-Profilen an Stelle einer einfachen Wand 4,5 dB höhere Einfügungsdämmmaße erreichen kann. Auch die untersuchten Wälle weisen ähnlich hohe Verbesserungen auf. Die Untersuchung zeigt, dass durch zusätzliches Absorptionsmaterial auf der Oberkante der Wälle bzw. der T-Profile die Verbesserung um weitere 3 bis 4 dB steigt. Absorptionsmaterial im oberen Wandbereich auf der Empfangsseite ist mit 2 dB weniger effizient. Ähnliche Resultate sind auch in [46] und [8] zu finden.

Hutchins et al. [24] untersuchen zunächst einen dünnen, schallharten Schirm und berücksichtigen im Modell verschiedene Böden. Sie stellen fest, dass der Boden auf beiden Seiten des Schirms einen großen Einfluss auf das Einfügungsdämmmaß haben kann. Der Grund sind Interferenzen, die zwischen den direkten und den reflektierten Wellen entstehen. Dabei weisen sie auch auf die Problematik hin, die die Modellierung von realen Böden mit sich bringt. Meistens sind die Impedanzen solcher Böden, wie z. B. Gras, komplexe, endliche Größen und haben somit einen großen Einfluss auf die Reflexion. Bei der Modellierung muss daher viel Aufmerksamkeit in diesen Teil des Modells investiert werden. Neben der Untersuchung zum Einfluss von Böden auf die Wirkung von Schallschutzwänden führen sie Messungen am Modell für verschiedene Geometrien

durch [23]. U. a. zeigen sie, dass das Einfügungsdämmmaß im Vergleich zu einem gleich hohen Schirm bei T-, Y- und Pfeil-Profilen verbessert wird. Vor allem im Minimum des Einfügungsdämmmaßes des Schirms ist eine Verbesserung bei den drei Aufsätzen zu verzeichnen.

Messtechnische Untersuchungen von Imelmann [25], der sich mit der Verbesserung von dünnen Schallschutzschirmen durch absorbierende Wandverkleidungen beschäftigt, zeigen, dass der Nutzen kaum im Verhältnis zu den entstehenden Kosten steht. Bringt man auf der Oberseite einer endlich dicken Wand absorbierendes Material an, so ist der Nutzen höher. Am Ende vergleicht er die Messergebnisse mit der Sommerfeldschen Beugungstheorie, und stellt fest, dass diese für absorbierende Schirme gut übereinstimmen

Fujiwara [13] untersucht am Modell einen zylindrischen Aufsatz, der die Impedanz an der Oberkante der Schallschutzwand verändert. Dabei kamen unterschiedliche Materialien zum Einsatz (Fiberglaszylinder, Fiberglas mit verschiedenen Abdeckungen wie Plastik, perforiertes Aluminiumblech, Stahlgitter). Er konnte in vielen Frequenzbereichen Verbesserungen nachweisen.

In [19] betrachtet Hayek zunächst ein analytisches Modell zur Berechnung der akustischen Beugung an einer einfachen Wand, einem Keil, zweier paralleler Wände und trapezförmigen Wällen. Bodenreflexion und -absorption werden bei dieser Untersuchung berücksichtigt und die Quellen (Fahrzeuge) als inkohärente Linienquelle modelliert. Dieses analytische Modell wird dann mit Hilfe von numerischen Verfahren untersucht. Die Ergebnisse aus der numerischen Modellierung werden mit Labormessungen an einem Modell im Maßstab 1:5 verglichen. Hier konnten Verbesserungen zwischen 7 und 20 dB je nach Empfängerposition (in der Nähe der Schattengrenze bzw. tiefer liegender Positionen) nachgewiesen werden.

Hothersall et al. untersuchen 1991 in [21] verschiedene Formen von Schallschutzwänden numerisch. Dabei werden die Berechnungen mit Hilfe der Boundary-Element-Method (BEM, im Deutschen auch Randelementmethode genannt) an zweidimensionalen Modellen durchgeführt. U. a. stellen Hothersall et al. fest, dass bei schallharten T-Profilen im Mittel eine Verbesserung von 0,5 dB und bei T-Profilen mit absorbierendem Material auf der Oberkante 2,5 dB erzielt werden können. In einer weiteren Veröffentlichung [22] führen sie eine Parameterstudie an dem zuvor entwickelten Modell durch. Dabei wird eine Wand mit endlicher Dicke untersucht und auch der Boden im Modell berücksichtigt. Sie stellen fest,

dass bei breitbandiger Anregung ein T-Profil bessere Ergebnisse liefert als Pfeil-Profile oder Y-Profile mit absorbierend ausgekleidetem Innenteil. Die Unterschiede betragen zwischen 1 dB und 2 dB.

In [17] untersucht Hasebe T-Profile und entwickelt dazu eine Berechnungsmethode, die die Beugung an beiden Kanten des Profils berücksichtigt. Diese erste Studie umfasst auch die messtechnische Überprüfung im Labor. Für eine weiterführende Untersuchung [18] entwickelt Hasebe ein dreidimensionales numerisches Modell, dessen Ergebnisse er mit Labormessungen vergleicht. Seine Ergebnisse aus der Schallfeldberechnung stimmen mit den Messergebnissen gut überein. Allerdings beinhaltet diese Studie keine Aussagen bezüglich der Verbesserungen, die durch das T-Profil im Vergleich zu einer einfachen Wand erzielt werden können.

In [9] stellen Crombie und Hothersall ein zweidimensionales numerisches Modell für Doppelwände vor, da sie feststellten, dass die VDI 2720 [79] die Wirkung dieser Kombination unterschätzt. Ihre Berechnungen basieren auf der BEM und zeigen gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Laborexperimenten. Dabei zeigt sich, dass eine Kombination aus zwei Schallschutzwänden oftmals effektiver ist als eine einzelne Wand.

Watts et al. nutzen die Modelle aus [21] für die Berechnung der Verbesserung von Schallschutzwänden mit Aufsätzen (T-Profil, Mehrkantenaufsätze) und Doppelwänden gegenüber einer einfachen Wand [57]. Es zeigt sich, dass das T-Profil unterhalb von etwa 400 Hz nicht wirksam ist, da die Wellenlänge länger als die Abmessung des T-Profils wird und dieses damit akustisch unsichtbar. Die Verbesserung lag zwischen 1,4 und 3,6 dB(A) im untersuchten Frequenzbereich je nach Ausführung des T-Profils. Daneben untersuchen sie auch noch Mehrkantenaufsätze, deren Verbesserung im Bereich von 0 – 2 dB liegt. Außerdem führten Watts Messungen an Schallschutzwänden im Maßstab 1:1 durch, deren Oberkante mit Resonanzabsorbern (RTB-Profil) versehen waren [56]. Hier zeigt sich, dass eine Reduzierung des Schalldruckpegels von 3 dB möglich ist.

Eine analytische Lösung für die Beugung an einer Wand mit einem zylindrischen Aufsatz veröffentlicht Möser in [38]. Darin wird eine halbunendliche Schneide mit einem Zylinder als Aufsatz in einem zweidimensionalen mathematischen Modell untersucht. Die entsprechende messtechnische Überprüfung wird von Volz und Möser in [52] durchgeführt. Bei Messungen am Modell stellten sie fest, dass Verbesserungen von 7 dB möglich sind.

Auch an einer Schallschutzwand kann man die Wirkungsweise von Resonatoren ausnutzen, um eine Schallreduzierung hinter der Wand zu erzielen. In [53; 55] werden verschieden abgestimmte Resonatoren untersucht und in [54] eine messtechnische Überprüfung an einer Lärmschutzwand durchgeführt. Weiterführende Untersuchungen in [51] zu zylindrischen Aufsätzen mit verschiedenen Impedanzen und $\lambda/4$–Resonatoren können Verbesserungen von 10 dB in einzelnen Terzen und breitbandig bis zu 3 dB nachweisen.

Fujiwara et al. berechnen in [14] an einem zweidimensionalen Modell mit Hilfe der BEM die Verbesserung von endlich dicken Wänden und Wänden mit T-Profilen bzw. Zylinderaufsätzen gegenüber einem schallharten Schirm. Die drei Geometrien wurden schallhart, absorbierend und schallweich ausgeführt. Hier zeigt sich, dass schallweiche Aufsätze die höchste Verbesserung (zwischen 5 und 17 dB in Terzen) gegenüber einer Einfachwand liefern. Um das schallharte T-Profil noch zu verbessern, werden zusätzlich Resonatoren an der Oberkante angebracht, so dass man das Profil gezielt auf einzelne Frequenzen abstimmen kann. In [15] untersuchen Fujiwara und Ishiduka auf gleiche Art und Weise eine Wand mit einem absorbierenden Doppel-Zylinder-Aufsatz, der leichte Verbesserungen gegenüber dem einfachen Zylinder liefert.

Li und Wong entwickeln eine numerische Methode, um das Schallfeld hinter endlich langen abknickenden Wänden zu berechnen [29]. Dabei kommen numerische Untersuchungen mit Hilfe einer Kombination aus Boundary-Integral-Method und Spiegelquellenprinzip zum Einsatz. Der Vergleich der Ergebnisse aus der Simulation mit Messungen zeigt, dass diese Methode zuverlässige Ergebnisse liefert.

Auch Okubo und Yamamoto untersuchen in [42] eine abknickende Wand numerisch und im Labor. Ihr Ziel ist es, die Beugung an der Schallschutzwand zu verringern. Dazu ordnen sie die Empfängerpositionen unter bestimmten Winkeln hinter der Wand an und zeigen so, dass die Wirkung des Aufsatzes in dessen Nähe stark winkelabhängig ist. Sie entwickeln somit ein Messverfahren, um die Wirkung von Aufsätzen winkelabhängig zu bestimmen ohne weitere Faktoren in der Umgebung zu erfassen. Die genauen Grenzen des Verfahrens sind derzeit Gegenstand weiterer Forschungsarbeiten.

In jüngster Zeit beschäftigen sich einige Arbeitsgruppen mit der Optimierung der Geometrie von Aufsätzen. Zum Beispiel wird in [4] der Nelder-Mead Suchalgorithmus eingesetzt, um eine optimale Lösung für einen Aufsatz zu finden. Dabei werden bis zu vier Parameter (u. a. Größe,

Form, Impedanz) optimiert, die Berechnung der Schallfelder erfolgt in einem zweidimensionalen BEM Modell. Probleme bereitet der immer noch hohe Rechenaufwand. Daher verfolgen Baulac et al. in [5] einen zweiten Ansatz zur Optimierung der Form von T-Profilen. Dazu nutzen sie genetische Algorithmen, die eine globale Optimierung zulassen.

## 1.5. Zielsetzung

Die Literatur zeigt, dass bei ausreichend hohen Schalldämmmaßen die Wirkung der Schallschutzwände maßgeblich durch die Beugung an der Oberkante der Wand beeinflusst wird. Die Geometrie der Oberkante beeinflusst die Beugung und kann zu Verbesserungen der Schallschutzwände ohne Erhöhung der Wand führen. In den Untersuchungen hat sich gezeigt, dass T-Profile zur Verbesserung der Schallschutzwände beitragen können. Bei Y-Profilen wurde meistens eine geringere Verbesserung als bei T-Profilen festgestellt. Allerdings ist aus der Literatur nicht ersichtlich, welche Öffnungswinkel untersucht wurden. Bei diesen Profilen wurden meistens spiegelsymmetrische Aufbauten betrachtet, daher stellt sich die Frage, wie sich ein Y-Profil bei unterschiedlich langen Seiten verhält. Auch Schallschutzwände, die eine einseitig abknickende Klappe aufweisen, werden in der Literatur nur selten untersucht, sind aber im Straßenbild zu finden.

Im Laufe der Forschung sind verschiedene theoretische Modelle für die analytische bzw. numerische Berechnung der Beugung an Schallschutzwänden entwickelt worden. Die Überprüfung der Modelle erfolgte mit Hilfe von Messdaten, die meistens aus Maßstabsmessungen an Modellen im Labor gewonnen wurden. Dabei zeigt sich in Untersuchungen im Vorher-Nachher-Vergleich [35], dass der Bau von Schallschutzwänden auch zu Verschlechterungen der Lärmsituation führen kann.

Der *Einfluss der Geometrie auf die Wirkung von Schallschutzwänden* wird in dieser Arbeit am Beispiel von klappenförmigen Aufsätzen untersucht. Klappenförmige Aufsätze (T- oder Y-Profil, Pfeil-Profil, abknickende Wand) spielten in der Forschung, wie die Literaturrecherche zeigte, eine Rolle und scheinen vielversprechend. Allerdings wurden die Winkel, in denen die Klappen angebracht waren, wenig variiert. Hier stellt sich die Frage, ob ein T-Profil die beste Möglichkeit ist, einen klappenförmigen Aufsatz zu gestalten. Auch bei Y- oder Pfeil-Profilen sind Winkel wenig oder gar nicht verändert worden, so dass der Einfluss

der Winkel auf die Beeinflussung der Beugung am Aufsatz bisher nicht bzw. nur unzureichend untersucht wurde.

Für die Erforschung des Einflusses der Geometrie wird analog zu Mösers Betrachtungen ein mathematisches Modell entwickelt. Anschließend erfolgt die Übertragung dieses Modells in ein numerisches Modell, das die Berechnung konkreter Beispiele ermöglicht. Eine messtechnische Überprüfung der Ergebnisse aus der numerischen Simulation erfolgt an einem Maßstabsmodell im reflexionsarmen Raum. Im Anschluss folgt die Untersuchung der Aufsätze hinsichtlich der Parameterwahl, um die winkelabhängige Wirkung der Aufsätze zu untersuchen.

# 2

# Theoretische Betrachtungen

In diesem Kapitel werden zunächst die theoretischen Grundlagen zusammengefasst, die für die Entwicklung und Lösung eines analytischen Modells benötigt werden. Das zugrundeliegende Modell wird im Detail erläutert und mathematisch beschrieben.

## 2.1. Grundlegende Betrachtungen

Allgemein kann man die dreidimensionale Schallausbreitung in Luft mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1}$$

beschreiben, die auch Wellengleichung genannt wird. Dabei gilt bei der Betrachtung in kartesischen Koordinaten für den so genannten Nabla-Operator

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.2}$$

Der Schalldruck $p$ wird in Abhängigkeit von den drei kartesischen Koordinaten $x$, $y$ und $z$ beschrieben.

Schallschutzwände zeichnen sich dadurch aus, dass sie meist sehr lang sind und sich im Aufbau entlang der Wand nicht oder nur wenig ändern. Um ein Modell zu entwickeln, eignet sich statt eines kartesischen Koordinatensystems besser ein System mit Zylinderkoordinaten. Als Koordinaten werden nun der Radius $r$, der Winkel $\varphi$ und die Höhe $z$ verwendet. Die Umrechnung in zylindrische Koordinaten erfolgt mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.3}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \tag{2.4}$$

$$z = z. \tag{2.5}$$

Die Wellengleichung (2.1) geht mit Hilfe des Nabla-Operators für Zylinderkoordinaten

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.6}$$

in

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{2.7}$$

über.

Neben dem Koordinatensystem und der Wellengleichung benötigt man zur mathematischen Beschreibung der in den nächsten Abschnitten folgenden akustischen Beugungsprobleme noch die sogenannten Bessel-, Neumann- und Hankelfunktionen.

Die Besselfunktion $\nu$-ter Ordnung ist eine Lösung der so genannten Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{2.8}$$

und kann als Reihe dargestellt werden

$$J_\nu(x) := y = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \frac{1}{2!(\nu+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} - \dots \tag{2.9}$$

Nun reicht die Besselfunktion allein noch nicht aus, um sich ausbreitende Wellen zu beschreiben (siehe auch [37]). Man benötigt noch die

so genannten Neumannfunktionen (auch Besselfunktion zweiter Art genannt), die wiederum Lösungen der Gl. (2.8) sind. Auch diese sind wie die Besselfunktionen abhängig von ihrer Ordnung und werden durch

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \tag{2.10}$$

definiert.

Die Bessel- und Neumannfunktionen sind linear unabhängig voneinander und bilden als Linearkombination die Lösungen der Gl. (2.8). Daraus ergeben sich als Spezialfälle die so genannten Hankelfunktionen. Die Hankelfunktion $\nu$-ter Ordnung und erster Art ist definiert als

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + j\, N_\nu(x) \tag{2.11}$$

mit der imaginären Einheit $j = \sqrt{-1}$ und beschreibt eine auf den Koordinatenursprung zulaufende Zylinderwelle. Eine vom Ursprung weglaufende Welle wird mit Hilfe der Hankelfunktion $\nu$-ter Ordnung und zweiter Art beschrieben, die durch

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - j\, N_\nu(x) \tag{2.12}$$

definiert ist. Weitere Eigenschaften dieser Funktionen finden sich im Anhang B.1 und in [20].

## 2.2. Beugung an einer schallharten Schneide

Dieser Fall ist die Grundlage für die weiteren Betrachtungen von Beugungsproblemen in der Akustik. Die Betrachtungen zur schallharten Schneide sind in [39] zu finden und werden hier so dargestellt, dass die Erkenntnisse leicht auf die Schallschutzwände mit klappenförmigen Aufsätzen übertragen werden können.

Bei der schallharten Schneide handelt es sich um eine sehr dünne Wand, die unendlich lang entlang der z-Achse ist. Die Quelle liegt an der Stelle $r = r_Q$ und $\varphi = \varphi_Q$ und wird als Linienmonopol angesehen. Dann gilt

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{2.13}$$

und es ergibt sich eine zweidimensionale Betrachtung in Polarkoordinaten. Der Koordinatenursprung liegt am oberen Ende der Schneide.

Da es in der Akustik üblich ist, zeitlich harmonische Größen zu betrachten, kann man für den Druck noch folgenden Ansatz wählen

$$p(r,\varphi,t) = p(r,\varphi)\mathrm{e}^{\,j\omega t} \tag{2.14}$$

und erhält mit der Wellengleichung (2.7) die Wellengleichung für harmonische Größen in Polarkoordinaten

$$r^2\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + r\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + k^2 r^2 p = 0. \tag{2.15}$$

Mit Hilfe des Separationsansatzes $p(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ kann man diese Differentialgleichung lösen. Zunächst erhält man

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}\,. \tag{2.16}$$

Da die linke Seite der Gleichung nur noch von $r$ abhängt und die rechte Seite nur noch von $\varphi$, müssen beide Seiten konstant sein und man erhält zwei separate Differentialgleichungen mit der Konstanten $\mathcal{K}$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \mathcal{K}\Phi(\varphi) = 0 \tag{2.17}$$

$$(kr)^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial (kr)^2} + kr\frac{\partial R(r)}{\partial kr} + ((kr)^2 - \mathcal{K})R(r) = 0\,. \tag{2.18}$$

Für $\Phi(\varphi)$ ergibt sich mit den Nullstellen $\nu = \pm\sqrt{-\mathcal{K}} = \pm j\sqrt{\mathcal{K}}$ des charakteristischen Polynoms $\nu^2 + \mathcal{K} = 0$ der Lösungsansatz

$$\Phi(\varphi) = a_K \mathrm{e}^{\,j\sqrt{\mathcal{K}}\varphi} + b_K \mathrm{e}^{\,-j\sqrt{\mathcal{K}}\varphi}\,. \tag{2.19}$$

Diese Lösungen müssen nun noch an die Randbedingungen angepasst werden. Bei der schallharten Schneide lauten diese

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi} = 0 \tag{2.20}$$

und man erhält mit Gl. (2.19) neben der trivialen Lösung $\mathcal{K} = 0$ die Lösungen

$$a_{\mathcal{K}} = b_{\mathcal{K}} \qquad \sqrt{\mathcal{K}} = \frac{n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.21}$$

und damit die an diesen Fall angepassten Elementarlösungen für $\Phi(\varphi)$

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{2.22}$$

Mit der Lösung $\sqrt{\mathcal{K}} = \frac{n}{2}$ erhält man dann aus Gl. (2.18) die Elementarlösungen für $R(r)$

$$R_n(r) = E_n J_{\frac{n}{2}}(kr) - e_n N_{\frac{n}{2}}(kr) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \; . \tag{2.23}$$

Der gesamte Raum wird in zwei Teilräume unterteilt, wobei für Teilraum 1 $r \leq r_Q$ und für Teilraum 2 $r > r_Q$ gilt. In Teilraum 1 kommen als Lösung nur die Besselfunktionen in Frage, da im Koordinatenursprung ein endlicher Druck vorliegen muss, um eine physikalisch sinnvolle Lösung zu erzielen. Da die Neumannfunktionen für $r \to 0$ gegen $-\infty$ gehen, müssen die Konstanten $e_n = 0$ sein. Teilraum 2 liegt mit $r > r_Q$ außerhalb des Quellradius und die Wellen laufen nur vom Koordinatenursprung weg. Damit ergeben sich für diesen Teilraum als Lösung Hankelfunktionen 2. Art und damit $e_n = jE_n$. Die Drücke in den zwei Teilräumen ergeben sich dann als Superposition der Elementarlösungen zu

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{2.24}$$

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{2.25}$$

mit den noch unbestimmten Koeffizienten $a_n$ und $b_n$.

Die Koeffizienten werden aus den Übergangsbedingungen bei $r = r_Q$ berechnet. Hier gilt $p_1(r_Q,\varphi) = p_2(r_Q,\varphi)$ und da die Quelle auf diesem Kreis liegt $v_1(r_Q,\varphi) - v_2(r_Q,\varphi) = \Delta v \delta(\varphi - \varphi_Q)$ mit der Quellgröße $\Delta v$. Die Linienquelle wird also als Linienmonopol modelliert und mathematisch mit einer Delta-Distribution beschrieben. Aus der ersten Übergangsbedingung erhält man

$$a_n J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) = b_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \tag{2.26}$$

$$\Rightarrow p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) J_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{2.27}$$

$$\wedge \; p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \; . \tag{2.28}$$

Die zweite Übergangsbedingung liefert mit

$$v = \frac{j}{\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{j}{\omega\rho}\frac{\partial kr}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial kr} = \frac{j}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial kr} \tag{2.29}$$

unter Ausnutzung der Orthogonalität (wird für die abknickende Wand ausführlich betrachtet, siehe S. 27 ff.) die noch unbekannten Koeffizienten

$$c_n = -\frac{r_Q \omega \rho}{2\varepsilon_n} \Delta v \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.30}$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \neq 0 \\ 2 & \text{für} \quad n = 0 \end{cases} . \tag{2.31}$$

Der Druck am Koordinatenursprung beträgt

$$p_Q = p_1(r=0,\varphi) = -\frac{r_Q \omega \rho}{4} \Delta v H_0^{(2)}(kr_Q) \tag{2.32}$$

und damit erhält man die vollständige Beschreibung des Druckfeldes durch

$$p_1 = p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_n} J_{\frac{n}{2}}(kr) \frac{H_{\frac{n}{2}}^{(2)}(kr_Q)}{H_0^{(2)}(kr_Q)} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.33}$$

$$p_2 = p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_n} J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \frac{H_{\frac{n}{2}}^{(2)}(kr)}{H_0^{(2)}(kr_Q)} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) . \tag{2.34}$$

Für den Fall $r_Q \to \infty$, die Quelle ist „unendlich weit“ von der Wand entfernt, kann man die asymptotische Näherung der Hankelfunktion für $|z| \to \infty$ nutzen [1]

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \mathrm{e}^{-j(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} . \tag{2.35}$$

Durch die Verlagerung der Quelle ins Unendliche, dehnt sich Teilraum 1 auch unendlich weit aus und man erhält mit

$$\frac{H_{\frac{n}{2}}^{(2)}(kr_Q)}{H_0^{(2)}(kr_Q)} \approx \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \mathrm{e}^{-j(kr_Q - n\pi/4 - \pi/4)}}{\sqrt{\frac{2}{\pi k r_Q}}\, \mathrm{e}^{-j(kr_Q - \pi/4)}} = \mathrm{e}^{jn\pi/4} \tag{2.36}$$

eine Näherung für den Druck für weit entfernte Quellen

$$p_1 = p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\mathrm{e}^{jn\pi/4}}{\varepsilon_n} J_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) . \tag{2.37}$$

Dabei handelt es sich um eine unter dem Winkel $\varphi_Q$ schräg einfallende ebene Welle.

Diese Darstellung lässt sich durch Umformung (siehe Anhang B.2) und unter Ausnutzung der Fresnel-Integrale

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t \qquad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t \tag{2.38}$$

als

$$p_1 = p_{\text{Schirm}} = p_Q \frac{1+j}{2} \left( \mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi-\varphi_Q)} \phi_+ + \mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi+\varphi_Q)} \phi_- \right) \tag{2.39}$$

mit

$$\phi_+ = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right) \tag{2.40}$$

$$\phi_- = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right) \tag{2.41}$$

darstellen. Mit den Näherungen für große Argumente ($x \gg 1$)

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\sin(x^2) \tag{2.42}$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\cos(x^2) \tag{2.43}$$

erhält man aus Gl. (2.39) dann die Fernfeldnäherung

$$p_{\text{Schirm}} \approx p_Q \frac{j(1+j)}{4\sqrt{\pi kr}} \mathrm{e}^{\,-jkr} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right)} \right) \tag{2.44}$$

für die Schalldruckverteilung, die bei der Beugung an einer schallharten Schneide entsteht. Diese Näherung gilt allerdings nur für große Entfernungen $r$ und nicht zu kleine Beugungswinkel $\beta = \varphi - \varphi_Q - \pi$.

## 2.3. Abknickende Wand (Aufsatz mit einer Klappe)

Ausgehend von der Beugung an einer schallharten Schneide kann man nun die obere Kante der Wand verändern indem man einen Aufsatz anbringt. In dieser Arbeit werden klappenförmige Aufsätze behandelt und die einfachste Möglichkeit besteht darin, eine Klappe als Aufsatz an der Schallschutzwand anzubringen (abknickende Wand).

Die abknickende Wand besteht aus einer halb unendlich langen schallharten Schneide (vgl. 2.2) und einem kurzen schallharten Aufsatz, der in einem Winkel von $\alpha_1$ an der Schneide angebracht ist. Beträgt $\alpha_1 = \pi = 180°$, so stellt der Aufsatz eine Verlängerung der Wand ohne Aufsatz dar. Der Koordinatenursprung liegt an der Stelle, an der der Aufsatz an der Schneide befestigt ist, also genau an der Stelle, wo die Schallschutzwand abknickt. Analog zur Betrachtung der schallharten Schneide werden auch bei Aufsätzen verschiedene Teilräume betrachtet.

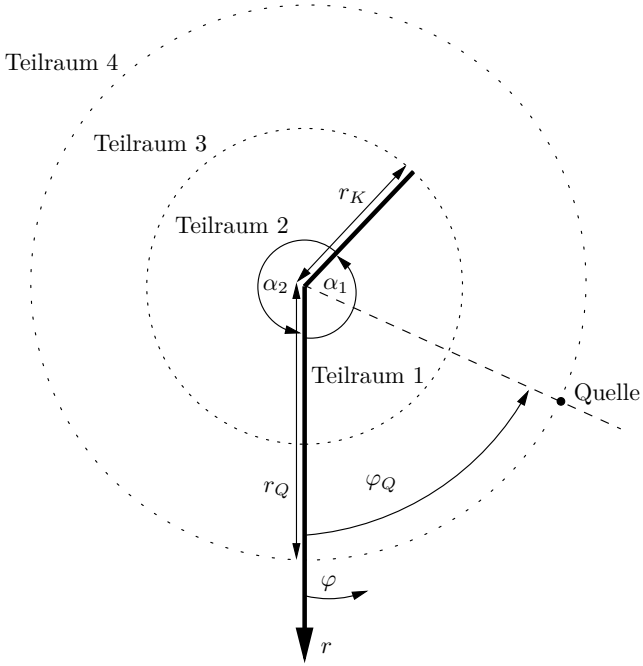


**Abbildung 2.1.:** Modell einer Schallschutzwand mit einer Klappe als Aufsatz

In Abbildung 2.1 ist die Einteilung in verschiedene Teilräume zu

sehen. Bei der Betrachtung einer abknickenden Wand benötigt man vier Teilräume, um das Problem zu lösen. Der Raum ist in folgende Teilräume unterteilt:

**Teilraum 1** ist definiert durch $r < r_K \wedge \varphi \in ]0 \;\; \alpha_1]$
In Teilraum 1 liegt ein Teil der schallharten Schneide und der Aufsatz, also der abknickende Teil der Wand. An der Wand liegen auf Grund der schallharten Begrenzungen Druckbäuche vor und damit erhält man die Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial p_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1} = 0. \tag{2.45}$$

**Teilraum 2** ist definiert durch $r < r_K \wedge \varphi \in ]\alpha_1 \;\; 2\pi]$
Auch in Teilraum 2 ist die Begrenzung durch die schallharte Wand gegeben und damit gilt wieder

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1} = \left.\frac{\partial p_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi} = 0 \tag{2.46}$$

**Teilraum 3** ist definiert durch $r \in [r_K, r_Q]$
In Teilraum 3 liegen an der Wand bei $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = 2\pi$ Druckbäuche vor und damit gilt für die Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial p_3}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial p_3}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi} = 0. \tag{2.47}$$

**Teilraum 4** ist definiert durch $r > r_Q$
In Teilraum 4 ist bei $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = 2\pi$ die schallharte Wand vorhanden. An der Wand ist der Druck maximal, es liegen also Druckbäuche vor, und damit erhält man als Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial p_4}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial p_4}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi} = 0. \tag{2.48}$$

Bei $r = r_Q$ befindet sich eine Quelle, die im Modell eine sehr dünne atmende Linienquelle ist. Eine Änderung entlang der z-Richtung ist nicht vorhanden. Die Verbindungsebene zwischen der Quelle und dem Koordinatenursprung schließt den Winkel $\varphi_Q$ ein.

In allen vier Teilräumen muss die Wellengleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + k^2 r^2 p = 0 \tag{2.49}$$

erfüllt sein. Um den Druck im Raum zu berechnen, wird wieder (siehe Abschnitt 2.2) folgender Separationsansatz gewählt

$$p(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)\,, \tag{2.50}$$

wobei $R(r)$ nur von $r$ und $\Phi(\varphi)$ nur von $\varphi$ abhängen. Setzt man diesen Ansatz in die Wellengleichung ein, erhält man als Lösungsansätze wieder (siehe Abschnitt 2.2)

$$\Phi(\varphi) = a_{\mathcal{K}}\mathrm{e}^{\,j\sqrt{\mathcal{K}}\varphi} + b_{\mathcal{K}}\mathrm{e}^{\,-j\sqrt{\mathcal{K}}\varphi} \tag{2.51}$$

und

$$R(r) = E_{\mathcal{K}}J_{\sqrt{\mathcal{K}}}(kr) + e_{\mathcal{K}}N_{\sqrt{\mathcal{K}}}(kr) = F_{\mathcal{K}}H^{(1)}_{\sqrt{\mathcal{K}}}(kr) + f_{\mathcal{K}}H^{(2)}_{\sqrt{\mathcal{K}}}(kr)\,. \tag{2.52}$$

### 2.3.1. Anpassen der Wellengleichung an die Randbedingungen

Nun wird mit Hilfe der Wellengleichung (2.49) und den Randbedingungen (2.45) bis (2.48) der Druck im gesamten Raum bestimmt. Dazu schaut man sich zunächst jeden Teilraum einzeln an und bestimmt den Druck so, dass die Bedingungen in den einzelnen Teilräumen eingehalten werden. Anschließend werden die übrigen Koeffizienten so bestimmt, dass auch die Bedingungen an den Stellen $r = r_Q$ und $r = r_K$ eingehalten werden. Als Ergebnis erhält man den Druck für eine abknickende Wand im gesamten Raum.

**Teilraum 1**

Setzt man Gl. (2.51) in die Randbedingungen Gl. (2.45) ein, erhält man

$$a_{\mathcal{K}} = b_{\mathcal{K}} \qquad \sqrt{\mathcal{K}} = \frac{n\pi}{\alpha_1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.53}$$

und damit die Elementarlösungen

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) \tag{2.54}$$

Die Elementarlösungen für $R(r)$ werden hier mit

$$R_n(r) = E_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) + e_n N_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \tag{2.55}$$

angesetzt.

Hier gilt $e_n = 0$, da der Druck im Koordinatenursprung, also dort wo Schneide und Aufsatz aufeinandertreffen, endlich sein muss. Ein unendlicher Wert, der sich auf Grund der Polstelle der Neumannfunktion bei null ergeben würde, ist an der Wand physikalisch nicht möglich. Daher lautet die Lösung für den Druck in Teilraum 1 mit $a_n = A_n \cdot E_n$

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \wedge \varphi \in ]0 \;\; \alpha_1] \,, \tag{2.56}$$

die sich als Superposition aus den Elementarlösungen zusammensetzt.

**Teilraum 2**

Analog zum Teilraum 1 ergibt sich aus den Randbedingungen Gl. (2.46) mit dem Lösungsansatz für $\Phi(\varphi)$ (siehe Gl. (2.51))

$$a_{\mathcal{K}} = b_{\mathcal{K}} \mathrm{e}^{-j2\sqrt{\mathcal{K}}\alpha_1} \tag{2.57}$$

$$b_{\mathcal{K}} \mathrm{e}^{-j\sqrt{\mathcal{K}}\alpha_1} (\mathrm{e}^{j\sqrt{\mathcal{K}}2\pi} \mathrm{e}^{-j\sqrt{\mathcal{K}}\alpha_1} - \mathrm{e}^{-j\sqrt{\mathcal{K}}2\pi} \mathrm{e}^{j\sqrt{\mathcal{K}}\alpha_1}) = 0 \tag{2.58}$$

$$\Rightarrow \; \sin(\sqrt{\mathcal{K}}(2\pi - \alpha_1)) = 0 \qquad \text{mit } \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1 \tag{2.59}$$

$$\Rightarrow \; \sqrt{\mathcal{K}} = \frac{n\pi}{\alpha_2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.60}$$

Daraus ergeben sich, in Gl. (2.51) eingesetzt, die Elementarlösungen

$$\Phi_n(\varphi) = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right). \tag{2.61}$$

Die Elementarlösungen für $R(r)$ ergeben sich wieder zu

$$R_n(r) = E_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) + e_n N_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr). \tag{2.62}$$

Auch in Teilraum 2 muss der Druck im Koordinatenursprung endlich sein. Daher kommen für den Druckansatz die Neumannfunktionen nicht in Frage. Mit $e_n = 0$ und $b_n = B_n \cdot E_n$ lautet die Lösung

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \wedge \varphi \in ]\alpha_1 \;\; 2\pi] \tag{2.63}$$

**Teilraum 3**

Setzt man die allgemeine Lösung aus Gl. (2.51) in die Randbedingungen (2.48) ein, erhält man

$$a_{\mathcal{K}} = b_{\mathcal{K}} \qquad \sqrt{\mathcal{K}} = \frac{n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{2.64}$$

Als Elementarlösungen für $\Phi(\varphi)$ ergeben sich damit

$$\Phi_n(\varphi) = C_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right). \tag{2.65}$$

Die Elementarlösungen für $R(r)$ lauten

$$R_n(r) = E_n J_{\frac{n}{2}}(kr) + e_n N_{\frac{n}{2}}(kr). \tag{2.66}$$

Formt man diese Lösung mit $E_n = G_n(1 + g_n)$ und $e_n = -jG_n g_n$ noch etwas um, so erhält man die Gleichung

$$R_n(r) = G_n\left(J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right), \tag{2.67}$$

die sowohl die auf den Schirm auftreffenden Wellen als auch die am Schirm reflektierten Anteile berücksichtigt. Die Lösung für den Druck ergibt sich dann mit $c_n = C_n \cdot G_n$ zu

$$p_3 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right] \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.68}$$

**Teilraum 4**

Analog zum Vorgehen in Teilraum 3 ergibt sich hier aus den Randbedingungen (2.48) und dem Ansatz (2.51)

$$\Phi_n(\varphi) = D_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right). \tag{2.69}$$

Die Elementarlösungen für die $R(r)$ ergeben sich nach Gl. (2.52)

$$R_n(r) = E_n J_{\frac{n}{2}}(kr) + e_n N_{\frac{n}{2}}(kr) = F_n H^{(1)}_{\frac{n}{2}}(kr) + f_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \tag{2.70}$$

mit den Konstanten $E_n$, $e_n$, $F_n$ und $f_n$.

Da sich in Teilraum 4 keine Hindernisse bzw. neben der Quelle zwischen Teilraum 4 und Teilraum 3 auch keine weiteren Quellen befinden,

können in diesem Teilraum auch nur radial nach außen laufende Wellen vorkommen. Diese können mit Hilfe der Hankelfunktion zweiter Art mathematisch beschrieben werden. Also müssen die Konstanten $F_n$ null bzw. $e_n = -jE_n$ in Gl. (2.70) sein und es ergibt sich für den Druck in Teilraum 4 mit $d_n = D_n \cdot f_n$

$$p_4 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.71}$$

Zusammengefasst erhält man also die folgenden Drücke für die Teilräume, die alle die Wellengleichung (2.49) erfüllen und bereits an die Randbedingungen (2.45) bis (2.48) angepasst sind:

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) \tag{2.72}$$

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right) \tag{2.73}$$

$$p_3 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right] \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{2.74}$$

$$p_4 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{2.75}$$

### 2.3.2. Bestimmung der Koeffizienten

Um den Druck im gesamten Raum beschreiben zu können, müssen die noch unbekannten Konstanten $a_n$, $b_n$, $c_n$ und $d_n$ bestimmt werden. Dazu betrachtet man die Übergangsbedingungen zwischen den Teilräumen, also an den Stellen $r = r_K$ und $r = r_Q$.

Bei $r = r_K$ müssen sowohl die Drücke als auch die Schnellen von Teilraum 1 und Teilraum 3 für $\varphi \in ]0\ \alpha_1]$ gleich sein. Das gleiche gilt auf der Rückseite der Schallschutzwand. Für $\varphi \in ]\alpha_1\ \ 2\pi]$ müssen die Drücke und die Schnellen von Teilraum 2 und Teilraum 3 gleich sein. Es ergibt

sich also

$$p_3(r = r_K,\varphi) = \begin{cases} p_1(r = r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]0 \;\; \alpha_1] \\ p_2(r = r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]\alpha_1 \;\; 2\pi] \end{cases} \tag{2.76}$$

für die Drücke und

$$v_3(r = r_K,\varphi) = \begin{cases} v_1(r = r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]0 \;\; \alpha_1] \\ v_2(r = r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]\alpha_1 \;\; 2\pi] \end{cases} \tag{2.77}$$

für die Schnellen.

Am Übergang von Teilraum 3 zu Teilraum 4, also auf dem Kreis mit dem Radius $r = r_Q$, liegt die Quelle und damit eine Polstelle. Da es sich bei der Quelle um eine atmende Linienquelle handelt, strahlt diese in jede Richtung senkrecht zur Quelloberfläche gleich viel Schall ab. Also ist der Druck „links“ von der Quelle genau so groß wie „rechts“ von der Quelle. Damit gilt für den gesamten Kreis

$$p_3(r = r_Q,\varphi) = p_4(r = r_Q,\varphi). \tag{2.78}$$

Die Schnellen sind beim Übergang zwischen Teilraum 3 und Teilraum 4 nicht mehr gleich, da die Quelle auf diesem Kreis mit $r = r_Q$ liegt. Daher betrachtet man die Schnelledifferenz $v_3 - v_4$. Diese ist am Ort der Quelle gerade entgegengesetzt gleich groß und an allen anderen Stellen auf dem Kreis gerade null. Mit Hilfe der Delta-Distribution findet sich eine geeignete Schreibweise für die Schnelledifferenz

$$v_3(r = r_Q,\varphi) - v_4(r = r_Q,\varphi) = \Delta v \delta(\varphi - \varphi_Q). \tag{2.79}$$

Die Größe $\Delta v$ wird etwas später genauer untersucht, hier soll es zunächst eine noch unbekannte Quellgröße sein.

**Übergang bei $\mathbf{r = r_K}$:** Betrachtet man zunächst den Bereich $\varphi \in ]0 \; \alpha_1]$, erhält man folgenden Zusammenhang zwischen den Koeffizienten

$$p_3(r = r_K,\varphi \in ]0 \;\; \alpha_1]) = p_1(r = r_K,\varphi \in ]0 \;\; \alpha_1]) \tag{2.80}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \right] \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) \tag{2.81}$$

$$\Leftrightarrow a_n = c_n \frac{\left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)} \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right)}. \tag{2.82}$$

Für den Zusammenhang von Druck und Schnelle im harmonischen Fall gilt

$$v = \frac{j}{\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{2.83}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial p_3}{\partial r}\right|_{r=r_K} = \left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=r_K} . \tag{2.84}$$

Mit Hilfe der Kettenregel findet man

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial p_3}{\partial r}\right|_{r=r_K} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \frac{\partial kr}{\partial r} \left.\frac{\partial\left[J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right]}{\partial kr}\right|_{r=r_K} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) k\left[J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right] \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=r_K} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) \frac{\partial kr}{\partial r} \left.\frac{\partial J_{\frac{n}{2}}(kr)}{\partial kr}\right|_{r=r_K} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) kJ'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K) \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\Rightarrow a_n = c_n \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right)} \frac{\left[J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)} . \tag{2.87}$$

Mit Gleichung (2.82) ergibt sich für die Koeffizienten $g_n$ dann

$$g_n = \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)} \tag{2.88}$$

und damit ist den Druck in Teilraum 1

$$\begin{aligned} p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr)}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \Bigg[ & J_{\frac{n}{2}}(kr_K) \\ & + \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)} H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \Bigg] . \end{aligned} \tag{2.89}$$

Für den zweiten Bereich bei $r = r_K$ ergibt sich aus

$$p_3(r = r_K, \varphi \in ]\alpha_1 \;\; 2\pi]) = p_2(r = r_K, \varphi \in ]\alpha_1 \;\; 2\pi]) \tag{2.90}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \right] \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right) \tag{2.91}$$

$$\Leftrightarrow b_n = c_n \frac{\left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)} \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right)}. \tag{2.92}$$

Aus den Gl. (2.77) und (2.83) folgt, dass

$$\left.\frac{\partial p_3}{\partial r}\right|_{r=r_K} = \left.\frac{\partial p_2}{\partial r}\right|_{r=r_K} \qquad \forall \varphi \in ]\alpha_1 \;\; 2\pi] \tag{2.93}$$

ist. Daraus ergibt sich mit der Kettenregel

$$\left.\frac{\partial p_3}{\partial r}\right|_{r=r_K} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \frac{\partial kr}{\partial r} \left.\frac{\partial \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \right]}{\partial kr}\right|_{r=r_K}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) k \left[ J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \right] \tag{2.94}$$

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial r}\right|_{r=r_K} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right) \frac{\partial kr}{\partial r} \frac{\partial J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr)}{\partial kr}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right) k J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) \tag{2.95}$$

$$\Rightarrow b_n = c_n \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right)} \frac{\left[ J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \right]}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)} \tag{2.96}$$

für die Koeffizienten. Mit Gleichung (2.92) ergibt sich für $g_n$

$$g_n = \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)}. \tag{2.97}$$

Der Druck im Teilraum 2 ist damit

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr)}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)} H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \right]. \tag{2.98}$$

**Übergang bei $\mathbf{r = r_Q}$:** Aus den Übergangsbedingungen zwischen Teilraum 3 und Teilraum 4 werden die Koeffizienten $c_n$ und $d_n$ bestimmt. Ausgehend von der Übergangsbedingung zwischen Teilraum 3 und Teilraum 4

$$p_4(r = r_Q, \varphi) = p_3(r = r_Q, \varphi) \tag{2.99}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \right] \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\Rightarrow d_n = c_n \frac{J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)}{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)}. \tag{2.101}$$

Wählt man $C_n$ so, dass

$$C_n = \frac{c_n}{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)} \tag{2.102}$$

ist, ergibt sich für die Drücke in Teilraum 3 und Teilraum 4

$$p_3(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \right] \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{2.103}$$

$$p_4(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \right] \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right). \tag{2.104}$$

Der Zusammenhang zwischen Druck und Schnelle für den hier betrachteten harmonischen Fall ist

$$v = \frac{j}{\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{j}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial (kr)}. \tag{2.105}$$

Damit wird die Schnelledifferenz aus Gl. (2.79) zu

$$\frac{j}{\rho c}\left(\left.\frac{\partial p_3}{\partial (kr)}\right|_{r=r_Q} - \left.\frac{\partial p_4}{\partial (kr)}\right|_{r=r_Q}\right) = \Delta v \delta(\varphi - \varphi_Q). \tag{2.106}$$

Setzt man die Druckansätze aus den Gl. (2.103) und (2.104) ein, so erhält man mit

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial p_3}{\partial (kr)}\right|_{r=r_Q} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \\ &\quad \cdot \left[J'_{\frac{n}{2}}(kr_Q) + g_n H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\right]\end{aligned} \tag{2.107}$$

und

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial p_4}{\partial (kr)}\right|_{r=r_Q} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \\ &\quad \cdot \left[J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\right]\end{aligned} \tag{2.108}$$

insgesamt

$$\begin{aligned}&\frac{j}{\rho c}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right)\left(H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)J'_{\frac{n}{2}}(kr_Q) - H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)J_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\right) \\ =&\Delta v \delta(\varphi - \varphi_Q)\,.\end{aligned} \tag{2.109}$$

Nach [39] bzw. mit [1, Seite 360, Gl. 9.1.16] ergibt sich für die Klammer in Gl. (2.109)

$$\left.\begin{aligned} H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) &= J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) - jN_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \\ H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) &= J'_{\frac{n}{2}}(kr_Q) - jN'_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\end{aligned}\right\} \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)J'_{\frac{n}{2}}(kr_Q) - H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \\ &= -j\left(J'_{\frac{n}{2}}(kr_Q)N_{\frac{n}{2}}(kr_Q) - J_{\frac{n}{2}}(kr_Q)N'_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\right)\end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\overset{\text{Gl. (B.7)}}{=} j\left(J_{\frac{n}{2}+1}(kr_Q)N_{\frac{n}{2}}(kr_Q) - J_{\frac{n}{2}}(kr_Q)N_{\frac{n}{2}+1}(kr_Q)\right) \tag{2.112}$$

$$\overset{\text{Gl. (B.2)}}{=} \frac{2j}{\pi kr_Q}\,. \tag{2.113}$$

Die Gleichung (2.109) wird mit Gl. (2.113) zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) = -\frac{\rho c \pi k r_Q}{2} \Delta v \delta(\varphi - \varphi_0)\,. \tag{2.114}$$

Um die unbekannten Koeffizienten $C_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ zu bestimmen, multipliziert man die Gleichung (2.114) mit $\cos\left(\frac{m}{2}\varphi\right)$ und integriert dann über $\varphi \in [0\ 2\pi]$. Aus

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{m}{2}\varphi\right) d\varphi \\ &= -\frac{\rho c \pi k r_Q}{2} \Delta v \int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \varphi_Q) \cos\left(\frac{m}{2}\varphi\right) d\varphi \end{aligned} \tag{2.115}$$

kann man mit

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{m}{2}\varphi\right) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ \pi & \text{für} \quad n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{für} \quad n = m = 0 \end{cases} \tag{2.116}$$

für jedes $m = n \in \mathbb{N}_0$ einen Koeffizienten

$$C_n = -\frac{r_Q \omega \rho}{\varepsilon_n} \frac{\Delta v}{2} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.117}$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \neq 0 \\ 2 & \text{für} \quad n = 0 \end{cases} \tag{2.118}$$

berechnen.

Alle benötigten Koeffizienten und damit auch der Druck im gesamten Raum sind bestimmt. Allerdings muss man nun auch die Teilräume 3 und 4 in Bereiche $\varphi \leq \alpha_1$ und $\varphi > \alpha_1$ einteilen, da die Koeffizienten $g_n$ je nach Bereich unterschiedlich groß sind.

$$p_1(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{r_Q \omega \rho \Delta v}{2\varepsilon_n} H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.119}$$

$$p_2(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{r_Q \omega \rho \Delta v}{2\varepsilon_n} H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.120}$$

$$p_3(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{r_Q \omega \rho}{\varepsilon_n} \frac{\Delta v}{2} H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \left[J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right] \cdot \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.121}$$

$$p_4(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{r_Q \omega \rho}{\varepsilon_n} \frac{\Delta v}{2} H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \left[J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\right] \cdot \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.122}$$

mit

$$g_n = \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K) J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K) J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K) H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)} \quad \forall \varphi \in ]0 \;\; \alpha_1] \tag{2.123}$$

bzw.

$$g_n = \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K) H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)} \quad \forall \varphi \in ]\alpha_1 \;\; 2\pi]. \tag{2.124}$$

### 2.3.3. Quellgröße $\Delta v$

Bisher ist die Quellgröße $\Delta v$ noch nicht näher definiert worden. Dazu schaut man sich am besten an, welche Druckverteilung die Quelle ohne die Wand erzeugt. Die Schallschutzwand ist für den Schall nicht sichtbar, wenn die Quelle so gedreht wird, dass $\varphi_Q = \pi$ ist, und die Länge der Klappe $r_K \to 0$. Als Bezugspunkt dient der Punkt bei $r = 0$ (Koordinatenursprung). In diesem Fall wächst der Teilraum 3 bis zum Koordinatenursprung, Teilraum 1 und 2 verschwinden mit $r_K \to 0$.

Schaut man sich den Druck im Teilraum 3 (Gleichungen (2.121)) an, stellt man fest, dass $g_n = 0$ sein muss, da sich sonst in $r = 0$ eine Polstelle befindet. Schließlich ist

$$H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) = J_{\frac{n}{2}}(kr) - jN_{\frac{n}{2}}(kr) \tag{2.125}$$

und für $r \longrightarrow 0$ gilt bekanntlich $N_{\frac{n}{2}}(kr) \longrightarrow -\infty$.

Mit $\varphi_Q = \pi$ ist der Druck nur für gerade n ungleich null.

$$\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{für n gerade} \\ 0 & \text{für n ungerade} \end{cases} \tag{2.126}$$

Also ergibt sich mit $g_n = 0$ und Gl. (2.126) aus dem Druck in Teilraum 3 (Gl. (2.121)) für den Druck ohne Wand ($p_{\text{frei}}$)

$$\begin{aligned} p_{\text{frei}}(r,\varphi) &= \sum_{\substack{n=0 \\ n=2m}}^{\infty} -\frac{r_Q \omega \rho}{\varepsilon_n} \frac{\Delta v}{2} (-1)^{\frac{n}{2}} H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) J_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{r_Q \omega \rho}{\varepsilon_m} \frac{\Delta v}{2} (-1)^m H^{(2)}_m(kr_Q) J_m(kr) \cos(m\varphi) \ . \end{aligned} \tag{2.127}$$

Im Ursprung bei $r = 0$ würde die Quelle, die bei $r = r_Q$ liegt, wegen

$$J_m(0) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad m = 0 \end{cases} \tag{2.128}$$

und

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m \neq 0 \\ 2 & \text{für} \quad m = 0 \end{cases} \tag{2.129}$$

den Druck

$$p_Q = p_{\text{frei}}(r = 0,\varphi) = -\frac{r_Q \omega \rho \Delta v}{4} H_0^{(2)}(k r_Q) \tag{2.130}$$

erzeugen. Allerdings kann man auch den Volumenfluss der Quelle betrachten, um die Quelle zu skalieren. Der Volumenfluss ist definiert als

$$Q = \int_S v \, dS \,. \tag{2.131}$$

Dabei spielt der Integrationsweg keine Rolle, solange die Fläche um die Quelle geschlossen ist. Der Volumenfluss kann im Modell durch zwei Integrationen entlang des Kreises $r = r_Q$ (einmal auf der Innenseite und einmal auf der Außenseite) berechnet werden, d. h.

$$Q = \int_{S_1} v_1 dS + \int_{S_2} v_2 dS \,. \tag{2.132}$$

Da sich die Quelle im Modell entlang der $z$-Richtung nicht verändert, wird an Stelle des Volumenflusses der Volumenfluss pro Längeneinheit (also pro Meter) benutzt. Dieser ergibt sich zu

$$Q' = \int_0^{2\pi} (v_2 - v_1) r_Q d\varphi = \int_0^{2\pi} \Delta v \delta(\varphi - \varphi_Q) r_Q d\varphi = \Delta v r_Q \tag{2.133}$$

und damit wird $p_Q$ zu

$$p_Q = -\frac{\omega \rho}{4} Q' H_0^{(2)}(k r_Q) = -\frac{k \rho c}{4} Q' H_0^{(2)}(k r_Q) \,. \tag{2.134}$$

Setzt man $p_Q$ in die Druckgleichung für die Teilräume ein, ergeben sich

$$\begin{aligned} p_1(r,\varphi) =& 2 p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H_{\frac{n}{2}}^{(2)}(k r_Q)}{H_0^{(2)}(k r_Q)} \frac{\left[ J_{\frac{n}{2}}(k r_K) + g_n H_{\frac{n}{2}}^{(2)}(k r_K) \right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(k r_K)} \\ & \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \end{aligned} \tag{2.135}$$

$$\begin{aligned} p_2(r,\varphi) =& 2 p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H_{\frac{n}{2}}^{(2)}(k r_Q)}{H_0^{(2)}(k r_Q)} \frac{\left[ J_{\frac{n}{2}}(k r_K) + g_n H_{\frac{n}{2}}^{(2)}(k r_K) \right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(k r_K)} \\ & \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \end{aligned} \tag{2.136}$$

$$p_3(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \right] \cdot \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.137}$$

$$p_4(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} \left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \right] \cdot \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right). \tag{2.138}$$

### 2.3.4. Ebene fortschreitende Welle

Nun kann man als letzten Schritt die Quelle immer weiter von der Wand entfernen, so dass $r_Q \to \infty$ wird. Dadurch erhält man als Schalleinfall eine ebene Welle in Zylinderkoordinaten, die durch

$$p_{\text{ebene Welle}} = p_Q \mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi-\varphi_Q)} \tag{2.139}$$

beschrieben wird. Außerdem kann man für große Argumente $kr_Q \gg n$ folgende Näherung der Hankelfunktion ausnutzen [1]

$$H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr_Q}}\, \mathrm{e}^{\,-j(kr_Q - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4})}. \tag{2.140}$$

Dann gilt aber auch

$$H^{(2)}_0(kr_Q) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr_Q}}\, \mathrm{e}^{\,-j(kr_Q - \frac{\pi}{4})} \tag{2.141}$$

$$\Rightarrow \lim_{r_Q \to \infty} \frac{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} = \mathrm{e}^{\,j\frac{\pi n}{4}} \tag{2.142}$$

und die Schalldrücke werden zu

$$p_1(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,j\frac{\pi n}{4}}}{\varepsilon_n} \frac{\left[ J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) \right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.143}$$

$$p_2(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{j\frac{\pi n}{4}}}{\varepsilon_n} \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.144}$$

$$p_3(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{j\frac{n\pi}{4}}}{\varepsilon_n} \left[J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right] \cdot \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.145}$$

$$= p_{\text{Schirm}}(r,\varphi) + p_{\text{Aufsatz}}(r,\varphi) \tag{2.146}$$

mit

$$p_{\text{Schirm}}(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{jn\frac{\pi}{4}}}{\varepsilon_n} J_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.147}$$

$$p_{\text{Aufsatz}}(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{j\frac{n\pi}{4}}}{\varepsilon_n} g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right). \tag{2.148}$$

Wie bereits in Abschnitt 2.2 erläutert, kann man $p_{\text{Schirm}}$ mit Hilfe der Fresnel-Integrale (siehe Gl. (2.39)) berechnen

$$p_{\text{Schirm}}(r,\varphi) = p_Q \frac{1+j}{2} \left(\mathrm{e}^{jkr\cos(\varphi-\varphi_Q)}\phi_+ + \mathrm{e}^{jkr\cos(\varphi+\varphi_Q)}\phi_-\right) \tag{2.149}$$

mit

$$\phi_+ = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right) \tag{2.150}$$

$$\phi_- = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right). \tag{2.151}$$

Mit diesen Formeln kann man den Einfluss der Klappe auf die Schalldruckverteilung berechnen. Dabei ist der Teilraum 4 nicht mehr relevant,

er wurde lediglich zur Berechnung benötigt. Legt man die Quelle ins Unendliche, so vergrößert sich der Teilraum 3 und Teilraum 4 verschwindet in der Betrachtung. Teilraum 1 und Teilraum 2 beschreiben den Druck im Bereich dicht um die Klappe. Dabei bestimmt die Länge der Klappe die Größe dieser Teilräume.

## 2.4. Y-Profil (Aufsatz mit zwei Klappen gleicher Länge)

Eine Erweiterung der abknickenden Wand stellt der Y-förmige Wandaufsatz dar. Zusätzlich zu der ersten Klappe ist eine zweite Klappe hinzugekommen. Hier wird lediglich das Modell für zwei gleich lange Klappen entwickelt. Die Erweiterung für Aufsätze mit Klappen unterschiedlicher Länge erfolgt im Kapitel 3.

Im Gegensatz zum abknickenden Aufsatz unterteilt sich der Bereich $r \leq r_K$ nicht mehr nur in zwei Teilräume sondern in drei Teilräume. Dabei liegen die Teilräume 1 – 3 rund um den Koordinatenursprung. Der Aufbau ist in Abb. 2.2 zu sehen.

Der Raum ist in folgende Teilräume unterteilt:

**Teilraum 1** ist definiert durch $r < r_K \wedge \varphi \in ]0 \;\; \alpha_1]$ mit den Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial p_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1} = 0\,. \tag{2.152}$$

**Teilraum 2** ist definiert durch $r < r_K \wedge \varphi \in ]\alpha_1 \;\; \alpha_1 + \alpha_2]$ mit den Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1} = \left.\frac{\partial p_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1+\alpha_2} = 0\,. \tag{2.153}$$

**Teilraum 3** ist definiert durch $r < r_K \wedge \varphi \in ]\alpha_1 + \alpha_2 \;\; 2\pi]$ mit den Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial p_3}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1+\alpha_2} = \left.\frac{\partial p_3}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi} = 0\,. \tag{2.154}$$

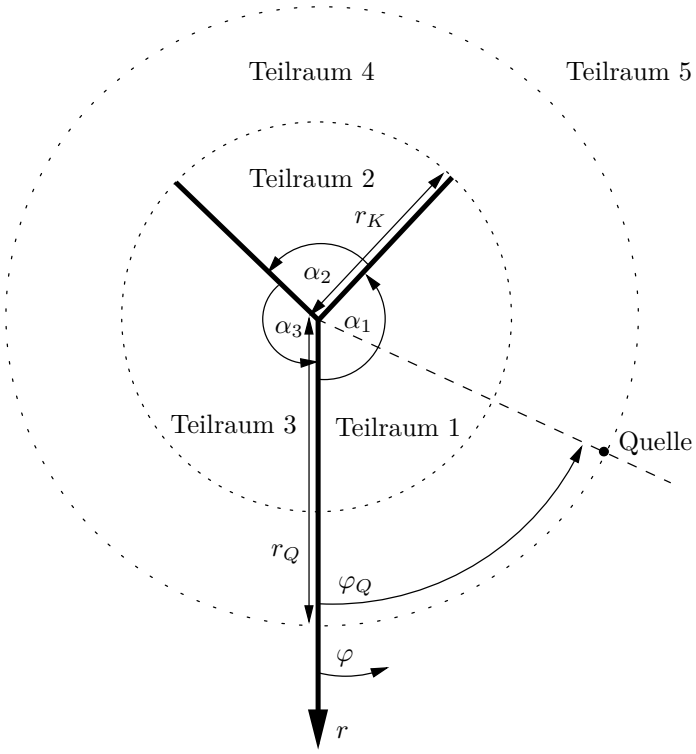


**Abbildung 2.2.:** Modell einer Schallschutzwand mit zwei Klappen als Aufsatz (Y-Profil)

**Teilraum 4** ist definiert durch $r \in [r_K, r_Q]$ mit den Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial p_4}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial p_4}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi} = 0\,. \tag{2.155}$$

**Teilraum 5** ist definiert durch $r > r_Q$ mit den Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial p_5}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial p_5}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi} = 0 \tag{2.156}$$

Die Winkel $\alpha_1$, $\alpha_2$ und $\alpha_3$ stehen in folgendem Zusammenhang

$$2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \tag{2.157}$$

Analog zu Abschnitt 2.3 leitet man mit Hilfe des Separationsansatzes, der Wellengleichung (siehe Gleichungen (2.50) und (2.49) auf Seite 24) und der Randbedingungen (2.152) bis (2.156) die Ansätze für die Teilräume her.

$$p_1(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) \tag{2.158}$$

$$p_2(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi-\alpha_1)\right) \tag{2.159}$$

$$p_3(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_3}(\varphi-\alpha_1-\alpha_2)\right) \tag{2.160}$$

$$p_4(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right] \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{2.161}$$

$$p_5(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{2.162}$$

Im Vergleich zu der Schallschutzwand mit einer einfachen Klappe kommt also lediglich ein Teilbereich hinzu und der Winkel $\alpha_3$ setzt sich anders zusammen.

Die Koeffizienten müssen nun mit Hilfe der Übergangsbedingungen bestimmt werden. Für die Drücke bei $r = r_K$ erhält man

$$p_4(r=r_K,\varphi) = \begin{cases} p_1(r=r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]0 \;\; \alpha_1] \\ p_2(r=r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]\alpha_1 \;\; \alpha_1+\alpha_2] \\ p_3(r=r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]\alpha_1+\alpha_2 \;\; 2\pi] \end{cases} \tag{2.163}$$

und für die Schnellen

$$v_4(r=r_K,\varphi) = \begin{cases} v_1(r=r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]0 \;\; \alpha_1] \\ v_2(r=r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]\alpha_1 \;\; \alpha_1+\alpha_2] \\ v_3(r=r_K,\varphi) & \text{für} \quad \varphi \in ]\alpha_1+\alpha_2 \;\; 2\pi] \end{cases} . \tag{2.164}$$

Auf dem Kreis bei $r = r_Q$ muss man wieder die Quelle berücksichtigen.

Als Übergangsbedingungen erhält man analog zur abknickenden Wand

$$p_4(r = r_Q,\varphi) = p_5(r = r_Q,\varphi) \tag{2.165}$$

$$v_5(r = r_Q,\varphi) - v_4(r = r_Q,\varphi) = \Delta v\delta(\varphi - \varphi_Q). \tag{2.166}$$

### 2.4.1. Bestimmung der Koeffizienten

Die Koeffizienten $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$, $e_n$ und $g_n$ werden analog zum vorherigen Aufsatz mit einer Klappe bestimmt. Setzt man auch hier den Druck $p_Q$, der am Ursprung ohne Wand bei gleicher Quelle vorliegen würde (siehe Gl. (2.130)), ein, erhält man als Drücke für die einzelnen Teilräume

$$p_1(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.167}$$

$$p_2(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.168}$$

$$p_3(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.169}$$

$$p_4(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} \left[J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right] \cdot \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.170}$$

$$p_5(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} \left[J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\right] \cdot \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.171}$$

mit

$$g_n = \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)} \tag{2.172}$$

für $\varphi \in (0 \;\; \alpha_1]$,

$$g_n = \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)} \tag{2.173}$$

für $\varphi \in (\alpha_1 \;\; \alpha_1 + \alpha_2]$ bzw.

$$g_n = \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr_K)J'_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J'_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr_K)J_{\frac{n}{2}}(kr_K)}{J'_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr_K)H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K) - J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr_K)H^{(2)\prime}_{\frac{n}{2}}(kr_K)} \tag{2.174}$$

für $\varphi \in (\alpha_1 + \alpha_2 \;\; 2\pi]$ und

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \neq 0 \\ 2 & \text{für} \quad n = 0 \end{cases} . \tag{2.175}$$

### 2.4.2. Ebene fortschreitende Welle

Wird die Quelle im letzten Schritt so verschoben, dass $a \to \infty$ ist, erhält man eine ebene Welle, die auf die Schallschutzwand trifft. Teilraum 5 wird dann nicht mehr benötigt und die Drücke in den anderen Teilräumen werden mit der Näherung der Hankelfunktion für große Argumente

$$H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr_Q}}\, \mathrm{e}^{\,-j(kr_Q - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4})} \tag{2.176}$$

zu

$$\begin{aligned} p_1(r,\varphi) =& 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,j\frac{\pi n}{4}}}{\varepsilon_n} \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)} \\ & \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \end{aligned} \tag{2.177}$$

$$p_2(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{j\frac{\pi n}{4}}}{\varepsilon_n} \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.178}$$

$$p_3(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{j\frac{\pi n}{4}}}{\varepsilon_n} \frac{\left[J_{\frac{n}{2}}(kr_K) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\right]}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr_K)} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.179}$$

$$p_4(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{j\frac{n\pi}{4}}}{\varepsilon_n} \left[J_{\frac{n}{2}}(kr) + g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\right] \cdot \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.180}$$

$$= p_{\mathrm{Schirm}}(r,\varphi) + p_{\mathrm{Aufsatz}}(r,\varphi) \tag{2.181}$$

mit

$$p_{\mathrm{Schirm}}(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{jn\frac{\pi}{4}}}{\varepsilon_n} J_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) \tag{2.182}$$

$$p_{\mathrm{Aufsatz}}(r,\varphi) = 2p_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{j\frac{n\pi}{4}}}{\varepsilon_n} g_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right). \tag{2.183}$$

Auch hier kann man wieder den Druck $p_{\mathrm{Schirm}}$ mit Hilfe der Fresnel-Integrale berechnen

$$p_{\mathrm{Schirm}}(r,\varphi) = p_Q \frac{1+j}{2} \left(\mathrm{e}^{jkr\cos(\varphi-\varphi_Q)}\phi_+ + \mathrm{e}^{jkr\cos(\varphi+\varphi_Q)}\phi_-\right) \tag{2.184}$$

mit

$$\phi_+ = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right) \tag{2.185}$$

$$\phi_- = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right). \tag{2.186}$$

## 2.5. Betrachtungen im Fernfeld

Für weit entfernte Aufpunkte kann man die Fernfeldnäherung zur Berechnung des Schalldrucks nutzen. Dabei wird immer eine einfallende ebene Welle betrachtet. $p_{\text{Schirm}}$ kann, wie bereits in Abschnitt 2.2 gezeigt, im Fernfeld durch die Näherungen der Fresnel-Integrale approximiert werden (siehe Gl. (2.44))

$$p_{\text{Schirm}}(r,\varphi) \approx p_Q \frac{(j-1)}{4\sqrt{\pi k}} \frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{\sqrt{r}} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right)} \right) . \tag{2.187}$$

Außerdem folgt für $p_{\text{Klappe}}$ mit der Näherung der Hankelfunktion für große Argumente $kr \gg N$

$$H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \mathrm{e}^{-j\left(kr-\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{2.188}$$

aus Gl. (2.148)

$$\begin{aligned} p_{\text{Aufsatz}}(r,\varphi) \approx & 2p_Q \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{\sqrt{r}} \\ & \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{j\frac{n\pi}{2}}}{\varepsilon_n} g_n \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right) . \end{aligned} \tag{2.189}$$

Damit ist die Abhängigkeit beider Drücke bezüglich $r$ durch $\mathrm{e}^{-jkr}/\sqrt{r}$ gegeben.

## 2.6. Beschreibung der Verbesserung durch Aufsätze

Ganz allgemein kann man das Einfügungsdämmmaß $R_E$ einer Wand bestimmen, um die Abschirmwirkung zu beschreiben. Dabei wird die Wirkung der Wand mit dem Fall „keine Wand“ verglichen. Bei einer ebenen fortschreitenden Welle ist die Druckamplitude ortsunabhängig und entspricht gerade dem Druck $p_Q$ am Koordinatenursprung. Das Einfügungsdämmmaß ist in diesem Fall durch

$$R_E = 10 \lg \left| \frac{p_Q}{p(r,\varphi)} \right|^2 \tag{2.190}$$

gegeben, siehe [39].

Bei einer Linienquelle, wie sie neben einer ebenen fortschreitenden Welle im Modell betrachtet wird, ist die Amplitude nicht ortsunabhängig. Daher wird das Einfügungsdämmmaß mit Hilfe von

$$R_E = 10\,\mathrm{lg}\,\frac{|p_{\text{ohne Wand}}(r,\varphi)|^2}{|p_{\text{mit Wand}}(r,\varphi)|^2} \tag{2.191}$$

berechnet.

Allerdings erhält man keine detaillierte Aussage über die Verbesserung durch einen Aufsatz gegenüber einer schon bestehenden einfachen Wand. Daher ist es sinnvoll lediglich die Verbesserung, die ein Aufsatz bewirkt, anzugeben. Dazu benutzt man das Verbesserungsmaß, das durch (siehe auch [51])

$$VM = 10\,\mathrm{lg}\left(\frac{|p_{\text{ohne Aufsatz}}|^2}{|p_{\text{mit Aufsatz}}|^2}\right) \tag{2.192}$$

definiert wird.

Betrachtet man die Verbesserung durch Aufsätze im Fernfeld, wird das Verbesserungsmaß unabhängig vom Mittelpunktsabstand $r$. Da sowohl $|p_{\text{ohne Aufsatz}}|^2$ (Gl. (2.187)) als auch $|p_{\text{mit Aufsatz}}|^2$ (Gl. (2.189)) die Abhängigkeit $\mathrm{e}^{-jkr}/\sqrt{r}$ haben. Damit eignet sich das Verbesserungsmaß im Fernfeld, um die globale Wirkung des Aufsatzes zu beschreiben. Es bleibt allerdings abhängig vom Aufpunktwinkel $\varphi$.

## 2.7. Das Umweggesetz

Das Prinzip des Umweggesetzes basiert auf der Idee, dass der Schall auf Grund des Hindernisses „Schallschutzwand“ einen längeren Weg zum Empfänger zurücklegen muss. Die Betrachtung erfolgt also einzig und allein auf Grundlage geometrischer Aspekte. Der direkte Ausbreitungsweg zwischen Quelle und Empfänger wird durch die Schallschutzwand unterbrochen und der Schall wird umgeleitet. In Abb. 2.3 sind die benötigten Größen zur Berechnung des Umwegs dargestellt.

Im hier gezeigten Fall „schallharte Schneide“ ist der Umweg, den der Schall zurücklegen muss, gerade

$$U = K_1 + K_2 - D\,. \tag{2.193}$$

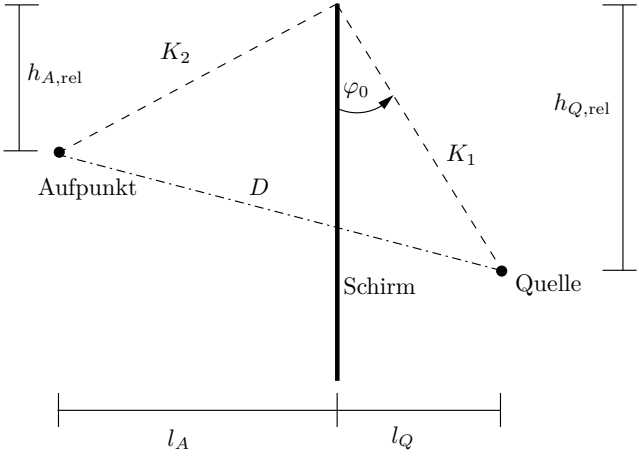


**Abbildung 2.3.:** Ausbreitungswege beim Umweggesetz

$K_1 = \sqrt{l_Q^2 + h_{Q,\mathrm{rel}}^2}$ und $K_2 = \sqrt{l_A^2 + h_{A,\mathrm{rel}}^2}$ stellen den Weg von der Quelle zum Ende der Wand bzw. vom Ende der Wand zum Aufpunkt dar. $D$ ist der direkte Weg zwischen Quelle und Aufpunkt. Das Einfügungsdämmmaß $R_E$ wird dann aus dem geometrischen Umweg $U$ und der Wellenlänge $\lambda$ mit Hilfe von

$$R_E \approx 10 \lg \left( 2\pi^2 \frac{U}{\lambda} \right) \tag{2.194}$$

berechnet und wird als Umweggesetz bezeichnet.

Dieser Ansatz dient bei der Planung von Schallschutzwänden in der Praxis als Grundlage, wird aber noch durch zusätzliche Parameter wie Bodenbewuchs, Bebauung etc. erweitert [79]. Der Vergleich mit Labormessungen und Berechnungen nach Abschnitt 2.2 zeigte, dass sich die VDI 2721 Teil 1 für einfache Schallschutzwände ohne Aufsätze gut für die Planung eignet [43].

Dieses Prinzip wird nun auf eine Schallschutzwand mit Klappe erweitert. Der Umweg, den der Schall nun zurücklegen muss, hängt nun auch von der Klappenlänge und dem Klappenöffnungswinkel ab. In Abb. 2.4 sind die entsprechenden geometrischen Größen für zwei verschiedene Aufpunkte eingezeichnet. Der Umweg wird in diesem Fall aus

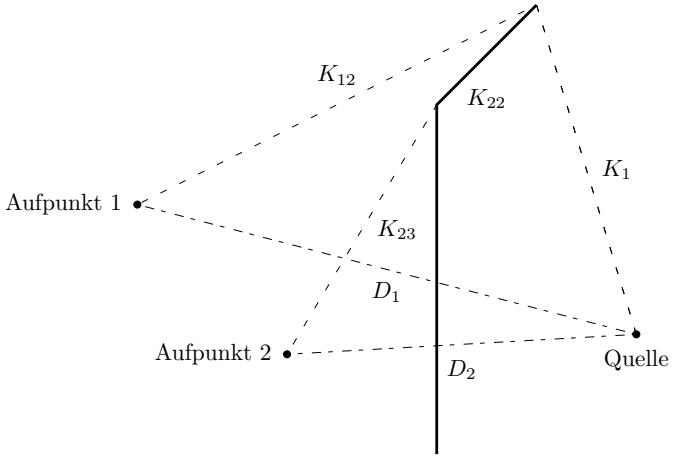


**Abbildung 2.4.:** Ausbreitungswege beim Umweggesetz für Schallschutzwände mit klappenförmigen Aufsätzen

$$U_{\text{mit Klappe}} = \left( \sum_{n=1}^{N} K_n \right) - D \tag{2.195}$$

berechnet, das Einfügungsdämmmaß wieder nach Gl. (2.194). Dabei wirkt sich die Klappe nur auf den Umweg aus, wenn der Klappenöffnungswinkel $\varphi_K$ größer als der Quellwinkel $\varphi_Q$ bzw. der Klappenöffnungswinkel kleiner als der Winkel zum Aufpunkt ist.

Betrachtet man nur die Wirkung der Klappe, so erhält man als Verbesserungsmaß aus dem Umweggesetz gerade die Differenz aus dem Einfügungsdämmmaß mit Klappe und ohne Klappe. Es ergibt sich insgesamt eine Verbesserung von

$$VM = R_{E\,\text{mit Klappe}} - R_{E\,\text{ohne Klappe}} = 10\,\text{lg}\left( \frac{U_{\text{mit Klappe}}}{U_{\text{ohne Klappe}}} \right) \tag{2.196}$$

durch den klappenförmigen Aufsatz. Das aus dem Umweg berechnete Verbesserungsmaß ist im Gegensatz zum Einfügungsdämmmaß frequenzunabhängig.

Diese Erweiterung für klappenförmige Aufsätze spielt in der Normung allerdings keine Rolle. Bisher gibt es für die Planung dieser Aufsätze noch kein genormtes Verfahren, an einem Verfahren die Wirkung In-Situ zu bestimmen, wird gearbeitet [65].

# 3

# Simulation

Die theoretische Beschreibung eines Modells für Schallschutzwände mit schallharten Klappen in Kapitel 2 verdeutlicht, dass eine direkte Anwendung in der Praxis schwierig ist. Die mathematische Beschreibung dieses Problems ist komplex und dient dem tieferen Verständnis der Ausbreitungsvorgänge an Schallschutzwänden mit Aufsätzen.

Um nun auch Ergebnisse für konkrete Fälle zu erhalten, ist eine numerische Betrachtung unumgänglich. Dabei geht es vor allem um die Umsetzung des theoretischen Modells und die Genauigkeit der so erhaltenen Ergebnisse. Ziel der numerischen Beschreibung ist es, die Verbesserung der Schallschutzwände durch Aufsätze für reale Aufbauten abzuschätzen. Die numerische Berechnung ist komplett mit der Software MATLAB® umgesetzt worden.

Die Problematik, die sich bei der numerischen Umsetzung der analytischen Lösung ergibt, steckt in den Gln. (2.123) und (2.124). In diesen mathematischen Formulierungen sind die Ableitungen der Bessel- und Hankelfunktionen enthalten, für die eine geeignete numerische Darstellung gefunden werden muss. Dabei kommt die Finite-Differenzen-Methode zum Einsatz, die hier zunächst beschrieben wird.

## 3.1. Finite-Differenzen-Methode

Die Finite-Differenzen-Methode ist eine numerische Methode, um gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen zu lösen. Dabei werden die Ableitungen an den diskreten Punkten im betrachteten Gebiet durch Differenzen approximiert. Die Approximation erfolgt unter Verwendung des Differenzenquotienten, entweder des Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_K} \approx \frac{p(r_K + \Delta r) - p(r_K)}{\Delta r} \tag{3.1}$$

oder des Rückwärtsdifferenzenquotienten

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_K} \approx \frac{p(r_K) - p(r_K - \Delta r)}{\Delta r}\,. \tag{3.2}$$

Dabei ist jedoch die Näherung im Vergleich zur Auslöschung[1] relativ schlecht. Bei geeigneter Wahl von $\Delta r$ liefern die einseitigen Differenzenquotienten aber meistens gute Ergebnisse.

Eine bessere Näherung erhält man durch Verwendung des zentralen Differenzenquotienten [45]

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_K} \approx \frac{p(r_K + \Delta r) - p(r_K - \Delta r)}{2\Delta r}\,. \tag{3.3}$$

Der Fehler, den man bei der Approximation macht, kann durch die Bildung von Taylorreihen abgeschätzt werden. Dazu berechnet man die Taylorreihen der Differenzenquotienten

$$p(r + \Delta r) = p(r) + \frac{\Delta r}{1!}p'(r) + \frac{\Delta r^2}{2!}p''(r) + \frac{\Delta r^3}{3!}p'''(r) + \ldots \tag{3.4}$$

$$p(r - \Delta r) = p(r) - \frac{\Delta r}{1!}p'(r) + \frac{\Delta r^2}{2!}p''(r) - \frac{\Delta r^3}{3!}p'''(r) + \ldots \tag{3.5}$$

und erhält dann durch Umformung von Gl. (3.4) den Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$p'(r) = \frac{p(r + \Delta r) - p(r)}{\Delta r} + \underbrace{\left(-\frac{\Delta r}{2}p''(r) - \ldots\right)}_{\text{Restglieder}}\,. \tag{3.6}$$

[1] Auslöschung (engl. cancellation): Genauigkeitsverlust in der Numerik bei der Subtraktion fast gleichgroßer Gleitkommazahlen.

bzw. durch Subtraktion der Gln. (3.4) und (3.5)den zentralen Differenzenquotienten

$$p'(r) = \frac{p(r+\Delta r) - p(r-\Delta r)}{2\Delta r} + \underbrace{\left(-\frac{\Delta r^2}{12} p'''(r) - \dots\right)}_{\text{Restglieder}} . \tag{3.7}$$

Da der erste Summand der Restglieder die Größenordnung des Restes bestimmt, liegt bei der Verwendung der einseitigen Differenzenquotienten eine lokale Fehlerordnung von eins[1]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{p(r+\Delta r) - p(r)}{\Delta r} + \mathcal{O}(\Delta r) \tag{3.8}$$

und beim zentralen Differenzenquotienten eine lokale Fehlerordnung von zwei vor

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{p(r+\Delta r) - p(r-\Delta r)}{2\Delta r} + \mathcal{O}\left(\Delta r^2\right) . \tag{3.9}$$

Der Fehler, den man beim Einsatz des zentralen Differenzenquotienten macht, ist also kleiner als bei der Verwendung eines einseitigen Differenzenquotienten. Da es sich bei $\Delta r$ um eine sehr kleine Größe handelt ($\Delta r \ll 1$), ist der Fehler durch das Differenzenverfahren in beiden Fällen klein. Die Fehlerbetrachtung, die sich bei der numerischen Betrachtung des hier beschriebenen Modells ergibt, erfolgt in Abschnitt 3.6.

## 3.2. Abknickende Wand (Aufsatz mit einer Klappe)

Bei der abknickenden Wand besteht der Aufsatz aus nur einer Klappe. Der Ursprung ist der Punkt, an dem die einfache Schallschutzwand und die Klappe aufeinandertreffen. Auch bei der numerischen Simulation wird der betrachtete Raum in vier Teilräume unterteilt. Teilraum 1 ist der Bereich, der durch $r < r_K$ und $0 < \varphi \leq \alpha_1$ bestimmt wird, Teilraum 2 ist der Bereich, für den $r < r_K$ und $\alpha_1 < \varphi \leq 2\pi$ gilt. Der Teilraum 3 ist dann das Gebiet, das $r \geq r_K$ und $r < r_Q$ definiert. Der Außenbereich, also Teilraum 4, liegt mit $r \geq r_Q$ jenseits des Quellradius.

Die an die Randbedingungen (schallharte Wand) angepassten Ansätze der Drücke für die einzelnen Teilräume der analytischen Betrachtungen

[1] Darstellung der Fehlerordnung mittels Landau-Symbol $\mathcal{O}$

(siehe Abschnitt 2.3) sind

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) \tag{3.10}$$

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi - \alpha_1)\right) \tag{3.11}$$

$$p_3 = p_{\text{Schirm}} + p_{\text{Aufsatz}} = p_{\text{Schirm}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) . \tag{3.12}$$

$$p_4 = p_{\text{Schirm}} + p_{\text{Aufsatz}} = p_{\text{Schirm}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) . \tag{3.13}$$

Die Zerlegung von $p_3$ und $p_4$ in zwei Summen erfolgt, da die einzelnen Summen schneller konvergieren als der Gesamtausdruck (zur Konvergenz der Summen siehe Abschnitt 3.2.2).

### 3.2.1. Übergangsbedingungen bei $\mathbf{r = r_K}$

Aus den Übergangsbedingungen bei $r = r_K$ können die Koeffizienten $a_n$, $b_n$ und $d_n$ berechnet werden. Die Übergangsbedingungen werden benutzt, um das zu lösende lineare Gleichungssystem aufzustellen.

Auf dem Kreis mit dem Radius $r = r_K$ treffen Teilraum 1 und Teilraum 3 bzw. Teilraum 2 und Teilraum 3 aufeinander. An diesen Stellen sind die Drücke bzw. die Schnellen gleich groß. Die Randbedingungen, aus denen die Koeffizienten berechnet werden, sind

$$p_1(r = r_K, 0 < \varphi \leq \alpha_1) = p_3(r = r_K, 0 < \varphi \leq \alpha_1) \tag{3.14}$$

$$p_2(r = r_K, \alpha_1 < \varphi \leq 2\pi) = p_3(r = r_K, \alpha_1 < \varphi \leq 2\pi) \tag{3.15}$$

und

$$\left.\frac{\partial p_1(r, 0 < \varphi \leq \alpha_1)}{\partial r}\right|_{r=r_K} = \left.\frac{\partial p_3(r, 0 < \varphi \leq \alpha_1)}{\partial r}\right|_{r=r_K} \tag{3.16}$$

$$\left.\frac{\partial p_2(r, \alpha_1 < \varphi \leq 2\pi)}{\partial r}\right|_{r=r_K} = \left.\frac{\partial p_3(r, \alpha_1 < \varphi \leq 2\pi)}{\partial r}\right|_{r=r_K} . \tag{3.17}$$

Bei der Ableitung des Drucks müssen die Bessel- bzw. Hankelfunktionen abgeleitet werden. Da in MATLAB® diese Ableitungen nicht

implementiert sind, wird bei der numerischen Simulation die *Finite-Differenzen-Methode* eingesetzt.

In den folgenden numerischen Betrachtungen wird der Vorwärtsdifferenzenquotient benutzt. Für $r < r_K$ im Bereich $0 < \varphi \leq \alpha_1$ gilt dann

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} \approx \frac{p_1(r_K + \Delta r) - p_1(r_K)}{\Delta r}, \tag{3.18}$$

und für $\alpha_1 < \varphi \leq 2\pi$

$$\frac{\partial p_2}{\partial r} \approx \frac{p_2(r_K + \Delta r) - p_2(r_K)}{\Delta r}. \tag{3.19}$$

Im Bereich $r \geq r_K$ kann man die Schnelle durch

$$\frac{\partial p_3}{\partial r} \approx \frac{p_3(r_K + \Delta r) - p_3(r_K)}{\Delta r} \tag{3.20}$$

abschätzen. $\Delta r$ ist ein kleiner Abstand, dessen Wahl in Abschnitt 3.6.2 näher betrachtet wird.

Man erhält dann als Übergangsbedingungen

$$\left.\begin{array}{ll} p_1(r_K,\varphi) & 0 < \varphi \leq \alpha_1 \\ p_2(r_K,\varphi) & \alpha_1 < \varphi \leq 2\pi \end{array}\right\} = p_3(r_K,\varphi) \tag{3.21}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[p_1(r_K + \Delta r,\varphi) - p_1(r_K,\varphi)\right]/\Delta r \\ \text{für } 0 < \varphi \leq \alpha_1 \\ \left[p_2(r_K + \Delta r,\varphi) - p_2(r_K,\varphi)\right]/\Delta r \\ \text{für } \alpha_1 < \varphi \leq 2\pi \end{array}\right\} = \frac{p_3(r_K + \Delta r,\varphi) - p_3(r_K,\varphi)}{\Delta r} \tag{3.22}$$

### 3.2.2. Diskretisierung des Problems

Die bisherigen Betrachtungen wurden allgemein für ein nicht diskretisiertes System durchgeführt. Da in der Numerik aber nur endlich viele Werte berechnet werden können, muss das System noch diskretisiert werden.

Hier werden $M$ Punkte entlang des Kreises mit dem Radius $r_K$ verteilt. Wie viel Punkte man auf den Kreis legt, hängt vor allem von der Frequenz ab. Um Aliasing-Effekte[1] zu vermeiden, werden vier Stützstellen pro

[1] Fehler, die durch eine zu geringe Abtastfrequenz und damit die nicht Beachtung des Abtasttheorems entstehen

Wellenlänge auf dem Umfang benötigt. Damit ergibt sich

$$M = \frac{4}{\lambda} U_K = \frac{4}{\lambda} 2\pi r_K = 4 \frac{\omega}{c} r_K \tag{3.23}$$

$$\Rightarrow M = 4\, k r_K \,, \tag{3.24}$$

wobei $U_K$ der Umfang des Kreises mit dem Radius $r_K$ ist. Da die Anzahl der Punkte bei tiefen Frequenzen sehr klein wird, werden immer mindestens 40 Punkte auf dem Kreis verteilt. So gewährleistet man auch, dass bei kleinen oder sehr großen Klappenöffnungswinkeln noch Punkte auf diesen dann sehr kleinen Kreissegmenten liegen.

Für die Teilräume 1 und 2 stehen dann jeweils $M_1$ bzw. $M_2$ Punkte zur Verfügung. Die Aufteilung ergibt sich je nach Öffnungswinkel $\alpha$ der Klappe zu

$$M_1 + M_2 = M \tag{3.25}$$

$$\frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M}{2\pi} = \text{konstant} \,. \tag{3.26}$$

Beim Übergang zu einem diskretisierten System wird $\varphi$ zu $\varphi_m$ aus dem Intervall $[0, 2\pi]$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $\varphi_1 \leq \varphi_m \leq \varphi_M$. Erste Testläufe haben gezeigt, dass die Punkte aber einen gewissen Abstand zur Wand und zur Klappe haben müssen, da sonst sehr kleine Werte (in der Nähe der Maschinengenauigkeit `eps`[1]) in der Koeffizientenmatrix für die Schnelle stehen, die zu großen numerischen Fehlern beim Lösen des linearen Gleichungssystems führen. MATLAB® quittiert dieses Problem mit der Warnung, dass die Koeffizientenmatrix schlecht konditioniert oder fast singulär ist. Eine ausführliche Betrachtung dieser Problematik folgt in Abschnitt 3.6. Der Abstand zur Klappe und zur Wand beträgt jeweils

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{2\pi}{M} \,. \tag{3.27}$$

Die Punkte werden auf den einzelnen Kreissegmenten zwischen $\varphi_1 = \frac{\Delta\varphi}{2}$ und $\varphi_{M_1} = \alpha_1 - \frac{\Delta\varphi}{2}$ bzw. $\varphi_{M_1+1} = \alpha_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$ und $\varphi_{M_2} = 2\pi - \frac{\Delta\varphi}{2}$ äquidistant verteilt.

In den Ansätzen der inneren drei Teilräume (Gln. (3.10) bis (3.12)) werden unendlich viele Summenterme – und damit unendlich viele Ordnungen

[1] eps gibt den Abstand von 1 zur nächstgrößeren (Gleitkomma-) Zahl an, die darstellbar ist.

der Bessel- bzw. Hankelfunktionen – bei der analytischen Berechnung des Drucks berücksichtigt. Hierbei stellt sich die Frage, wann diese Summen in der numerischen Berechnung abgebrochen werden können ohne einen allzu großen Fehler zu machen.

Die Koeffizienten $a_n$, $b_n$ und $d_n$ werden aus den Übergangsbedingungen bei $r = r_K$ berechnet. Das Argument der Bessel- bzw. Hankelfunktion in den Druckansätzen für die Teilräume 1 bis 3 wird also zu $kr_K$ und ist frequenzabhängig. Sowohl die Bessel- als auch die Hankelfunktion werden hinreichend klein, wenn das Argument viel kleiner als die Ordnung ist. Die Summen in den Gln. (3.10) – (3.12) konvergieren daher für

$$N_1 \gg kr_K \frac{\alpha_1}{\pi} \qquad \Rightarrow N_1 = 2kr_K \frac{\alpha_1}{\pi} \qquad \text{Teilraum 1} \tag{3.28}$$

$$N_2 \gg kr_K \frac{\alpha_2}{\pi} \qquad \Rightarrow N_2 = 2kr_K \frac{\alpha_2}{\pi} \qquad \text{Teilraum 2} \tag{3.29}$$

$$N \gg 2kr_K \qquad \Rightarrow N = 4kr_K \qquad \text{Teilraum 3,} \tag{3.30}$$

wobei auch hier

$$N_1 + N_2 = 2kr_K \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\pi} = 4kr_K = N \tag{3.31}$$

$$\frac{N_1}{\alpha_1} = \frac{N_2}{\alpha_2} = \frac{N}{2\pi} = \text{konstant} \tag{3.32}$$

gilt.

Um kein unterbestimmtes Gleichungssystem zu erhalten, muss die Anzahl der Punkte $M$ auf dem Kreis mindestens so groß sein, wie die Anzahl der berücksichtigten Ordnungen. So erhält man mit $N = M$ entweder ein gleichbestimmtes oder mit $N > M$ ein überbestimmtes Gleichungssystem zur Bestimmung des Drucks. Ein gleichbestimmtes System wird hier favorisiert, da die Anzahl der benötigten Ordnungen gewährleistet, dass mindestens vier Stützstellen pro Wellenlänge vorhanden sind.

### 3.2.3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems

Aus den Übergangsbedingungen (Gln. (3.21) und (3.22)) und den Ansätzen aus den Gln. (3.10) bis (3.12), die diskretisiert wurden, ergibt sich

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_{\mathrm{Schirm}}(r_K,\vec{\varphi}) \\ \frac{\vec{p}_{\mathrm{Schirm}}(r_K+\Delta r,\vec{\varphi})-\vec{p}_{\mathrm{Schirm}}(r_K,\vec{\varphi})}{\Delta r} \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

mit

$$A_{1\,mn} = \begin{cases} J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi_m\right) \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_1} \\ 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_1+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.34}$$

$$B_{1\,mn} = \begin{cases} 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_1} \\ J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi_m-\alpha_1)\right) \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_1+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.35}$$

$$C_{1\,mn} = -\,H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_m\right) \tag{3.36}$$

und

$$A_{2\,mn} = \begin{cases} \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(k(r_K+\Delta r))\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi_m\right) - A_{1\,mn}\right]/\Delta r \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_1} \\ 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_1+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.37}$$

$$B_{2\,mn} = \begin{cases} 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_1} \\ \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(k(r_K+\Delta r))\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi_m-\alpha_1)\right) - B_{1\,mn}\right]/\Delta r \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_1+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.38}$$

$$C_{2\,mn} = -\left[H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(k(r_K+\Delta r))\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_m\right) - C_{1\,mn}\right]/\Delta r\,. \tag{3.39}$$

In Abb. 3.1 ist ein Beispiel für die Besetzung der Matrix aus Gl. (3.33) dargestellt.

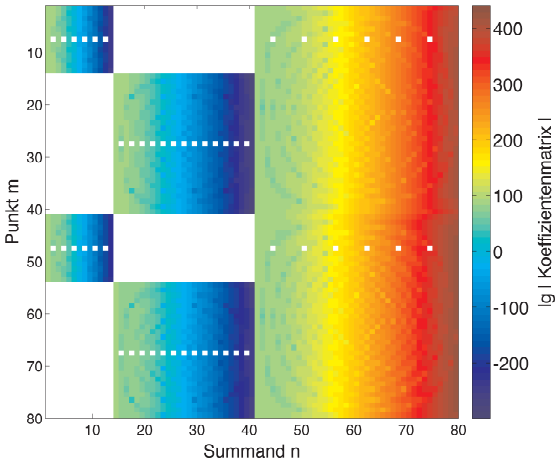


**Abbildung 3.1.:** Besetzung der Koeffizientenmatrix für einen Klappenöffnungswinkel von 120°, logarithmische Darstellung des Betrags, weiß symbolisiert Nullen in der Matrix

### 3.2.4. Vektor auf der rechten Seite

Bei der Berechnung des Vektors auf der rechten Seite muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Zum einen ist es möglich, das Druckfeld für eine einfallende ebene Welle zu bestimmen, zum anderen kann aber auch eine Linienquelle mit einem Abstand von $r_Q$ zum Koordinatenursprung die Ursache für das Druckfeld sein.

#### Einfall einer ebenen Welle

Bei einer Quelle, die sehr weit vom Koordinatenursprung entfernt ist (vgl. Theorie $r_Q \to \infty$ in Abschnitt 2.3 ab S. 37), fällt im Bereich vor der Wand (also auf der Seite der Quelle) eine ebene Welle unter einem bestimmten Winkel $\varphi_Q$ ein.

In diesem Fall erfolgt die Berechnung von

$$p_{\text{Schirm}}(r_K,\varphi_m) = p_Q \frac{1+j}{2} \Big( \mathrm{e}^{jkr_K \cos(\varphi_m-\varphi_Q)}\phi_+ + \mathrm{e}^{jkr_K \cos(\varphi_m+\varphi_Q)}\phi_- \Big) \tag{3.40}$$

mit Hilfe der Fresnel-Integrale

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t \tag{3.41}$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t \tag{3.42}$$

in

$$\begin{aligned} \phi_+ = \frac{1-j}{2} &+ C\left(\sqrt{2kr_K}\cos\frac{\varphi_m - \varphi_Q}{2}\right) \\ &- j\,S\left(\sqrt{2kr_K}\cos\frac{\varphi_m - \varphi_Q}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} \phi_- = \frac{1-j}{2} &+ C\left(\sqrt{2kr_K}\cos\frac{\varphi_m + \varphi_Q}{2}\right) \\ &- j\,S\left(\sqrt{2kr_K}\cos\frac{\varphi_m + \varphi_Q}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.44}$$

$p_Q$ ist der Druck, der bei gleicher Quelle im Koordinatenursprung vorliegt, wenn keine Schallschutzwand vorhanden ist.

Dabei werden die Fresnel-Integrale $C(x)$ und $S(x)$ in den Gln. (3.43) und (3.44) numerisch berechnet. In MATLAB® wurde dazu die Funktion `fcs.m` aus dem *fcs (Computes Fresnel Integrals)* Paket von Peter L. Volegov [50] benutzt. Der Vorteil gegenüber der in [39] abgedruckten Funktion ist die Zeitersparnis während der Berechnung bei einem sehr kleinen numerischen Fehler $< 10^{-9}$. In diesem Zusammenhang sei hier auf die unterschiedliche Darstellung der Fresnel-Integrale hingewiesen, siehe Abschnitt B.3.

### Linienquelle

Bei einer Linienquelle im Abstand $r = r_Q$ unterscheiden sich die Druckansätze für die Teilräum 3 und 4 von denen aus der Betrachtung mit

einer ebenen Welle. Hier besteht der Druckansatz für $p_{\text{Schirm}}$ aus

$$p_{\text{Schirm}}(r_i,\varphi_i) = \sum_{n=0}^{N_{\text{Schirm}}-1} c_n J_{\frac{n}{2}}(kr_i) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) \quad r \leq r_Q \tag{3.45}$$

$$p_{\text{Schirm}}(r_i,\varphi_i) = \sum_{n=0}^{N_{\text{Schirm}}-1} c_n J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_i) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) \quad r > r_Q \,, \tag{3.46}$$

wobei aus dem Abschnitt 2.3 schon alle $c_n$ bekannt sind (siehe Gln. (2.117) und (2.130))

$$c_n = \frac{2p_Q}{\varepsilon_n} \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right)}{H^{(2)}_0(kr_Q)} \qquad \text{mit} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad n = 0 \\ 1 & \text{für} \quad n \neq 0 \end{cases} . \tag{3.47}$$

Die rechte Seite in dem zu lösenden Gleichungssystem berechnet sich also nach

$$p_{\text{Schirm}}(r_K,\varphi_m) = \sum_{n=0}^{N_{\text{Schirm}}-1} c_n J_{\frac{n}{2}}(kr_K) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_m\right) . \tag{3.48}$$

Im Gegensatz zu $p_{\text{Aufsatz}}$ konvergieren die Summen in $p_{\text{Schirm}}$ für

$$N_{\text{Schirm}} \gg 2kr_Q \qquad \Rightarrow N_{\text{Schirm}} = 4kr_Q \,, \tag{3.49}$$

da der Term $H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)$ erst dann hinreichend klein wird, ansonsten wird der numerische Fehler, den man durch das Vernachlässigen höherer Ordnungen macht, groß und die Ergebnisse sind nicht mehr vertrauenswürdig.

### 3.2.5. Bestimmung der Koeffizienten

Das Gleichungssystem hat die Form $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{y}$, wobei die Matrix $\boldsymbol{A}$ eine Größe von $M \times N$ hat, der Vektor $\vec{x}$ besteht aus $N$ Elementen und der Vektor $\vec{y}$ aus $M$ Elementen. In MATLAB® wird die Lösung mit `x = A\y`

berechnet, wobei je nach Form der Matrix $\boldsymbol{A}$ unterschiedliche Lösungsalgorithmen verwendet werden. Hier wird (im Falle eines gleichbestimmten Systems $N = M$) der Gaußalgorithmus[1] mit Teilpivotisierung[2] benutzt.

### 3.2.6. Berechnung des Druckfeldes

Sind alle Koeffizienten bestimmt, kann man den Druck an einem beliebigen Aufpunkt $(r_i,\varphi_i)$ berechnen

$$p_1(r_i,\varphi_i) = \sum_{n=0}^{N_1-1} a_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_i) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi_i\right) \tag{3.50}$$

$$p_2(r_i,\varphi_i) = \sum_{n=0}^{N_2-1} b_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_i) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi_i - \alpha_1)\right) \tag{3.51}$$

$$p_3(r_i,\varphi_i) = p_{\text{Schirm}} + \sum_{n=0}^{N-1} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_i) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) . \tag{3.52}$$

$$p_4(r_i,\varphi_i) = p_{\text{Schirm}} + \sum_{n=0}^{N-1} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_i) \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) . \tag{3.53}$$

Die Berechnung von $p_{\text{Schirm}}$ hängt dabei wieder von der gewählten Lage der Quelle ab. Bei einer weit entfernten Quelle und damit einer einfallenden ebenen Welle wird der Teilraum 4 bei der Berechnung nicht mehr benötigt und $p_{\text{Schirm}}$ ergibt sich aus

$$p_{\text{Schirm}}(r_i,\varphi_i) = p_Q \frac{1+j}{2} \left(\mathrm{e}^{jkr_i\cos(\varphi_i-\varphi_Q)}\phi_+ + \mathrm{e}^{jkr_i\cos(\varphi_i+\varphi_Q)}\phi_-\right) \tag{3.54}$$

mit

$$\begin{aligned}\phi_+ = \frac{1-j}{2} &+ C\left(\sqrt{2kr_K}\cos\frac{\varphi_m-\varphi_Q}{2}\right) \\ &- j\,S\left(\sqrt{2kr_K}\cos\frac{\varphi_m-\varphi_Q}{2}\right)\end{aligned} \tag{3.55}$$

[1] Das lineare Gleichungssystem wird in Stufenform gebracht und kann dann durch Rückwärtseinsetzen schrittweise gelöst werden. Die Stufenform entsteht durch Zeilenvertauschung.

[2] Die Teilpivotisierung bestimmt die zu vertauschenden Zeilen anhand des betragsmäßig größten Elements.

$$\phi_- = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr_K}\cos\frac{\varphi_m+\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr_K}\cos\frac{\varphi_m+\varphi_Q}{2}\right). \tag{3.56}$$

Bei einer Linienquelle, die näher an der Wand liegt, erhält man für $p_{\text{Schirm}}$ gerade

$$p_{\text{Schirm}}(r_i,\varphi_i) = \sum_{n=0}^{N_{\text{Schirm}}-1} c_n J_{\frac{n}{2}}(kr_Q) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_i)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) \qquad r \le r_Q \tag{3.57}$$

$$p_{\text{Schirm}}(r_i,\varphi_i) = \sum_{n=0}^{N_{\text{Schirm}}-1} c_n J_{\frac{n}{2}}(kr_i) H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_Q)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) \qquad r > r_Q \tag{3.58}$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{2p_Q}{\varepsilon_n}\frac{\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_Q\right)}{H_0^{(2)}(kr_Q)} \quad \text{und} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad n=0 \\ 1 & \text{für} \quad n\neq 0 \end{cases} \tag{3.59}$$

## 3.3. Y-Profil (Aufsatz mit zwei Klappen gleicher Länge)

Erweitert man das Modell um eine Klappe, hat man sehr viel mehr Variationsmöglichkeiten. Die einfachste Erweiterung des Aufsatzes stellt eine zweite, gleich lange Klappe dar. Der Teilbereich $r < r_K$ wird in diesem Fall in drei Teilräume unterteilt (siehe auch Abb. 2.1).

Die Druckansätze

$$p_1(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{N_1-1} a_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi\right) \tag{3.60}$$

$$p_2(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{N_2-1} b_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi-\alpha_1)\right) \tag{3.61}$$

$$p_3(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{N_3-1} c_n J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_3}(\varphi-\alpha_1-\alpha_2)\right) \tag{3.62}$$

$$p_4(r,\varphi) = p_{\text{Schirm}} + \sum_{n=0}^{N-1} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{3.63}$$

$$p_5(r,\varphi) = p_{\text{Schirm}} + \sum_{n=0}^{N-1} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi\right) \tag{3.64}$$

sind schon im Abschnitt 2.4 behandelt worden. Die Anzahl der Summanden richtet sich wieder nach der Konvergenz der Summen. Für $N = 4kr_K$ ist der Fehler, den man durch den Summenabbruch macht, klein. Die Grenzen $N_1$, $N_2$ und $N_3$ ergeben sich aus

$$N_1 + N_2 + N_3 = 2kr_K\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\pi} = 4kr_K = N \tag{3.65}$$

$$\frac{N_1}{\alpha_1} = \frac{N_2}{\alpha_2} = \frac{N_3}{\alpha_3} = \frac{N}{2\pi} = \text{konstant}\,. \tag{3.66}$$

Auch die Übergangsbedingungen sind analog zur Schallschutzwand mit einer Klappe zu behandeln. Man erhält

$$\left.\begin{array}{ll} p_1(r_K,\varphi) & \text{für} \quad 0 < \varphi \le \alpha_1 \\ p_2(r_K,\varphi) & \text{für} \quad \alpha_1 < \varphi \le \alpha_2 \\ p_3(r_K,\varphi) & \text{für} \quad \alpha_2 < \varphi \le 2\pi \end{array}\right\} = p_4(r_K,\varphi) \tag{3.67}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[p_1(r_K+\Delta r,\varphi) - p_1(r_K,\varphi)\right]/\Delta r \\ \text{für} \quad 0 < \varphi \le \alpha_1 \\ \left[p_2(r_K+\Delta r,\varphi) - p_2(r_K,\varphi)\right]/\Delta r \\ \text{für} \quad \alpha_1 < \varphi \le \alpha_2 \\ \left[p_3(r_K+\Delta r,\varphi) - p_3(r_K,\varphi)\right]/\Delta r \\ \text{für} \quad \alpha_2 < \varphi \le 2\pi \end{array}\right\} = \frac{p_4(r_K+\Delta r,\varphi) - p_4(r_K,\varphi)}{\Delta r}\,. \tag{3.68}$$

Bei der Diskretisierung werden $M$ Punkte auf dem Kreis mit $r = r_K$ verteilt. Auf die einzelnen Kreissegmente entfallen dann $M_1$, $M_2$ bzw. $M_3$ Punkte, die jeweils äquidistant auf dem entsprechenden Kreissegment verteilt sind. Das zu lösende lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \\ \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_{\text{Schirm}}(r_K,\vec{\varphi}) \\ \frac{\vec{p}_{\text{Schirm}}(r_K+\Delta r,\vec{\varphi}) - \vec{p}_{\text{Schirm}}(r_K,\vec{\varphi})}{\Delta r} \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

mit

$$A_{1\,mn} = \begin{cases} J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(kr_K)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi_m\right) \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_1} \\ 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_1+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.70}$$

$$B_{1\,mn} = \begin{cases} 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_1} \\ J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(kr_K)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi_m - \alpha_1)\right) \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_1+1} \le \varphi_m \le \varphi_{M_2} \\ 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_2+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.71}$$

$$C_{1\,mn} = \begin{cases} 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_2} \\ J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(kr_K)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_3}(\varphi_m - \alpha_1 - \alpha_2)\right) \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_2+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.72}$$

$$D_{1\,mn} = -\,H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_K)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_m\right) \tag{3.73}$$

und

$$A_{2\,mn} = \begin{cases} \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha_1}}(k(r_K+\Delta r))\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_1}\varphi_m\right) - A_{1\,mn}\right]/\Delta r \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_1} \\ 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_1+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.74}$$

$$B_{2\,mn} = \begin{cases} 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_1} \\ \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha_2}}(k(r_K+\Delta r))\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_2}(\varphi_m - \alpha_1)\right) - B_{1\,mn}\right]/\Delta r \\ \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_1+1} \le \varphi_m \le \varphi_{M_2} \\ 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_2+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.75}$$

$$C_{2\,mn} = \begin{cases} 0 \qquad \text{für} \quad \varphi_1 \le \varphi_m \le \varphi_{M_2} \\ \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha_3}}(k(r_K+\Delta r))\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_3}(\varphi_m - \alpha_1 - \alpha_2)\right)\right. \\ \left. -C_{1\,mn}\right]/\Delta r \qquad \text{für} \quad \varphi_{M_2+1} \le \varphi_m \le \varphi_M \end{cases} \tag{3.76}$$

$$D_{2\,mn} = -\left[H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(k(r_K+\Delta r))\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_m\right) - D_{1\,mn}\right]/\Delta r\,. \tag{3.77}$$

Der Vektor auf der rechten Seite wird genau wie in Abschnitt 3.2.4 beschrieben berechnet.

Das lineare Gleichungssystem wird mit MATLAB® gelöst, um so die Koeffizienten $a_n$, $b_n$, $c_n$ und $d_n$, die man zur Berechnung des Druckfeldes im gesamten Raum benötigt, zu erhalten.

## 3.4. Beliebig viele Klappen unterschiedlicher Länge

Verallgemeinert man das Modell noch weiter, so kann man auch beliebig viele Klappen unterschiedlicher Länge benutzen (vorausgesetzt $r_{K_{\max}} < r_Q$). Allerdings erhält man dann mehr als einen Kreis um den Koordinatenursprung. Diese Kreise werden im Folgenden mit $K$ bezeichnet. In Abb. 3.2 sind die einzelnen Teilräume farbig markiert und die Bezeichnungen der einzelnen Größen zu finden. Der erste Kreis mit $K = 1$ ist der innerste, der dem Koordinatenursprung am nächsten liegt. Der äußerste Kreis (bei $r = \max(\text{Klappenlängen})$) wird mit $K = K_{\max}$ bezeichnet. Die Klappen des Aufsatzes unterteilen die Kreis- bzw. Ringfläche, die durch die Kreise entstehen, in Segmente $S$. Die Anzahl der Segmente kann, je nach Klappenverteilung, für jede Kreis- bzw. Ringfläche unterschiedlich sein. Das erste Segment wird mit $S = 1$ bezeichnet und auf der einen Seite durch die einfache Wand bei $\varphi = 0°$ abgegrenzt. Die andere Begrenzung bildet die nächste Klappe.

Die Druckansätze für den Innenraum werden analog zu den vorangegangenen Abschnitten für jedes Segment $S$ aufgestellt und entsprechend mit $p_{1,S}(r,\varphi)$ bezeichnet. Für alle Segmente in Kreis $K = 1$ gilt

$$p_{1,S}(r_i,\varphi_i) = \sum_{n=0}^{N_{1,S}-1} a_{1,Sn}\, J_{n\pi/\alpha_{1,S}}(kr_i) \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_{1,S}}\left(\varphi_i - \sum_{s=1}^{S-1}\alpha_{1,s}\right)\right). \tag{3.78}$$

Die physikalisch richtige Annahme, dass die Neumannfunktionen im Ursprung eine Polstelle haben und daher in diesen Ansätzen nicht vorkommen können, trifft nicht mehr für die Teilbereiche mit $K > 1$ zu. Hier gilt

$$p_{K,S}(r_i,\varphi_i) = \sum_{n=0}^{N_{K,S}-1} \left[b_{K,Sn}\, J_{n\pi/\alpha_{K,S}}(kr_i) + c_{K,Sn}\, N_{n\pi/\alpha_{K,S}}(kr_i)\right] \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha_{K,S}}\left(\varphi_i - \sum_{s=1}^{S-1}\alpha_{K,s}\right)\right). \tag{3.79}$$

Für den Druck im Bereich außerhalb des Aufsatzes ($r > r_{K_{\max}}$) gilt

hingegen wieder

$$p_{\text{Außenraum}}(r_i,\varphi_i) = p_{\text{Schirm}}(r_i,\varphi_i) + \sum_{n=0}^{N-1} d_n H^{(2)}_{\frac{n}{2}}(kr_i)\cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) , \tag{3.80}$$

wobei $p_{\text{Schirm}}$ in Abhängigkeit von der Quellposition ($r_Q \to \infty$ für ebene Wellen oder für endliche $r_Q$ für eine Linienquelle) bestimmt wird.

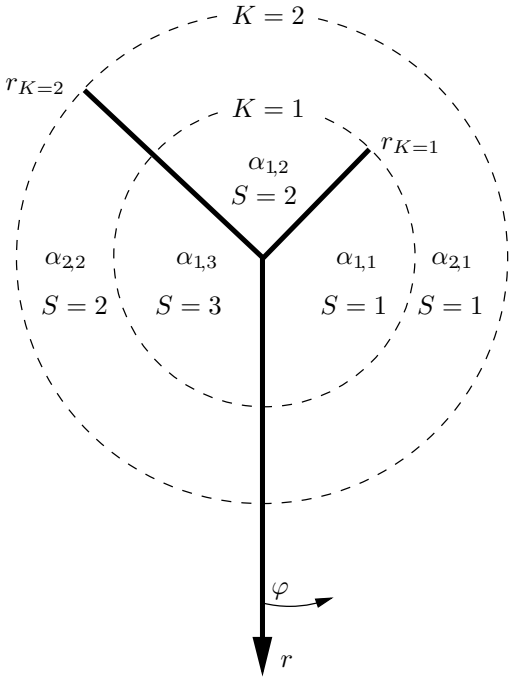


**Abbildung 3.2.:** Teilräume und Nummerierung der Segmente für einen Aufsatz mit unterschiedlich langen Klappen

### 3.4.1. Diskretisierung

Bei der Diskretisierung in diesem Fall besteht die Schwierigkeit in der Wahl der Punktanzahl. Um Aliasing-Effekte zu vermeiden, sind vier Stützstellen pro Wellenlänge entlang des Umfangs sinnvoll. Unterteilt man

den Raum um die Klappen jedoch durch mehrere Kreise, so sollte man auf dem äußersten Kreis $K_{\max}$ vier Punkte pro Wellenlänge wählen. Auf allen anderen Kreisen wird dann diese Anzahl von Punkten übernommen. Alternativ kann man auch unterschiedlich viele Punkte auf jedem Kreis wählen, die Programmierung wird dadurch jedoch unübersichtlicher. Daher fiel die Entscheidung zugunsten folgender Punktanzahl

$$M = 4kr_{K_{\max}}\,, \tag{3.81}$$

mindestens aber $M = 40$. Dabei ergibt sich auf jedem Kreis $K$ eine Unterteilung der Gesamtanzahl in

$$\sum_{S=1}^{S_{\max}} M_{K,S} = M \tag{3.82}$$

mit der Gewichtung

$$\frac{M_{K,S}}{\alpha_{K,S}} = \frac{4kr_{K_{\max}}}{2\pi} = \text{konstant}, \tag{3.83}$$

die für jeden Kreis unterschiedlich sein kann. Dabei ist darauf zu achten, dass gleiche Winkel auf unterschiedlichen Kreisen auch zu einer gleichen Anzahl von Punkten auf diesen Kreissegmenten führt. Punkte können nicht zerlegt werden und daher führt eine falsche Verteilung zu fehlerhaften numerischen Berechnungen. Die Punkte werden in den einzelnen Segmenten wieder äquidistant verteilt.

Für die Summen, aus denen die Drücke berechnet werden, gilt hier

$$\frac{N_{K,S}}{\alpha_{K,S}} = \frac{N}{2\pi} = \text{konstant} \tag{3.84}$$

und

$$\sum_{s=1}^{S_K} N_{K,s} = N\,, \tag{3.85}$$

wobei für die Gesamtzahl wieder $N = M$ gewählt wird.

### 3.4.2. Übergangsbedingungen

Mit der Diskretisierung erhält man dann auf jedem Kreis $K$ die Punkte $(r_K,\, \varphi_m)$, an diesen Stellen gelten die Übergangsbedingungen analog zu Abschnitt 3.2. Die Schnellebedingungen werden wieder mit Hilfe des Differenzenverfahrens aus den Drücken gebildet.

### 3.4.3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems

Das Gleichungssystem wächst mit der Anzahl an Klappen. Die Größe der Koeffizienten $\boldsymbol{A}$ beträgt $2KM \times 2KN$ mit

$$K \in [1,K_{\max}] \quad \text{und} \quad S \in [1,S_{\max}]\,. \tag{3.86}$$

Anhand des Aufbaus der Matrix $\boldsymbol{A}$ für $K = 3$ wird im Folgenden der Aufbau des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{y}$ erläutert.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1\,1,S} & \boldsymbol{C}_{1\,1,S} & \boldsymbol{D}_{1\,1,S} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{1\,K,S} & \boldsymbol{B}_{1\,K,S} & \boldsymbol{C}_{1\,K,S} & \boldsymbol{D}_{1\,K,S} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{A}_{1\,K_{\max},S} & \boldsymbol{B}_{1\,K_{\max},S} & \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{A}_{2\,1,S} & \boldsymbol{C}_{2\,1,S} & \boldsymbol{D}_{2\,1,S} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{2\,K,S} & \boldsymbol{B}_{2\,K,S} & \boldsymbol{C}_{2\,K,S} & \boldsymbol{D}_{2\,K,S} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{A}_{2\,K_{\max},S} & \boldsymbol{B}_{2\,K_{\max},S} & \boldsymbol{E}_2 \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{p}_{\text{Schirm}}(r_{K_{\max}},\varphi_m) \\ 0 \\ 0 \\ \left[\vec{p}_{\text{Schirm}}(r_{K_{\max}}+\Delta r,\varphi_m) - \vec{p}_{\text{Schirm}}(r_{K_{\max}},\varphi_m)\right]/\Delta r \end{pmatrix}. \tag{3.88}$$

Die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ sind wiederum aus Matrizen nach folgendem Schema aufgebaut

$$\boldsymbol{ABCD}_{1/2\,K,S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{ABCD}_{1/2}(K,S=1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{ABCD}_{1/2}(K,S_{\max}) \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

und werden mit folgenden Elementen bestückt:

$$A_{1\,mn}(K,S) = J_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K,S}}}(kr_K) \cdot \mathbf{COS}_K \tag{3.90}$$

$$A_{2\,mn}(K,S) = \left( J_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K,S}}}(k(r_K+\Delta r)) - J_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K,S}}}(kr_K) \right) \cdot \mathbf{COS}_K/\Delta r \tag{3.91}$$

$$B_{1\,mn}(K,S) = N_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K,S}}}(kr_K) \cdot \mathbf{COS}_K \tag{3.92}$$

$$B_{2\,mn}(K,S) = \left( N_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K,S}}}(k(r_K + \Delta r)) - N_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K,S}}}(kr_K) \right) \cdot \mathbf{COS}_K / \Delta r \tag{3.93}$$

$$\text{mit } \mathbf{COS}_K = \cos\left( \frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K,S}} \left( \varphi_m - \sum_{s=1}^{S-1} \alpha_{K,s} \right) \right) \tag{3.94}$$

$$\text{für } \alpha_{K,S-1} \leq \varphi_m < \alpha_{K,S}$$

$$C_{1\,mn}(K,S) = J_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K+1,S}}}(kr_K) \cdot \mathbf{COS}_{K+1} \tag{3.95}$$

$$C_{2\,mn}(K,S) = \left( J_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K+1,S}}}(k(r_K + \Delta r)) - J_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K+1,S}}}(kr_K) \right) \cdot \mathbf{COS}_{K+1} / \Delta r \tag{3.96}$$

$$D_{1\,mn}(K,S) = N_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K+1,S}}}(kr_K) \cdot \mathbf{COS}_{K+1} \tag{3.97}$$

$$D_{2\,mn}(K,S) = \left( N_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K+1,S}}}(k(r_K + \Delta r)) - N_{\frac{(n-1)\pi}{\alpha_{K+1,S}}}(kr_K) \right) \cdot \mathbf{COS}_{K+1} / \Delta r \tag{3.98}$$

$$\text{mit } \mathbf{COS}_{K+1} = \cos\left( \frac{n\pi}{\alpha_{K+1,S}} \left( \varphi_m - \sum_{s=1}^{S-1} \alpha_{K+1,s} \right) \right) \tag{3.99}$$

$$\text{für } \alpha_{K+1,S-1} \leq \varphi_m < \alpha_{K+1,S}\,.$$

Die beiden Matrizen $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$ sind vollständig besetzt und werden nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$E_{1\,mn} = -\,H^{(2)}_{\frac{n-1}{2}}(kr_{K_{\max}}) \cos\left( \frac{n-1}{2} \varphi_m \right) \tag{3.100}$$

$$E_{2\,mn} = -\left[ H^{(2)}_{\frac{n-1}{2}}(k(r_{K_{\max}} + \Delta r)) \cos\left( \frac{n-1}{2} \varphi_m \right) - E_{1\,mn} \right] / \Delta r\,. \tag{3.101}$$

Der Vektor $\vec{y}$ auf der rechten Seite ergibt sich wieder nach Abschnitt 3.2.4.

Für die Berechnung des Drucks im Aufpunkt $(r_i,\varphi_i)$ werden die Gleichungen (3.78) bis (3.80) genutzt und die aus dem linearen Gleichungssystem bestimmten Koeffizienten für die entsprechenden Teilräume.

## 3.5. Fernfeldnäherung

Natürlich kann man die in Abschnitt 2.5 gemachten Näherungen für das Fernfeld auch numerisch ausnutzen, um die Wirkung der Aufsätze abzuschätzen. Bei der Betrachtung des Druckfeldes außerhalb des Aufsatzes bei einer einfallenden ebenen Welle gilt

$$p(r_i,\varphi_i) = p_{\text{Schirm}} + p_{\text{Aufsatz}} \tag{3.102}$$

mit den Fernfeldnäherungen (siehe Abschnitt 2.5)

$$p_{\text{Schirm}}(r_i,\varphi_i) \approx p_Q \frac{(j-1)}{4\sqrt{\pi k}} \frac{\mathrm{e}^{-jkr_i}}{\sqrt{r_i}} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi_i-\varphi_Q}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi_i+\varphi_Q}{2}\right)} \right) \tag{3.103}$$

und

$$p_{\text{Aufsatz}}(r_i,\varphi_i) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{\mathrm{e}^{-jkr_i}}{\sqrt{r_i}} \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{N-1} d_n \mathrm{e}^{j\frac{n\pi}{4}} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) . \tag{3.104}$$

Der Druck im Fernfeld ist also

$$\begin{aligned} p_{\text{fern}} =& p_Q \frac{(j-1)}{4\sqrt{\pi k}} \frac{\mathrm{e}^{-jkr_i}}{\sqrt{r_i}} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi_i-\varphi_Q}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi_i+\varphi_Q}{2}\right)} \right) \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{\mathrm{e}^{-jkr_i}}{\sqrt{r_i}} \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{N-1} d_n \mathrm{e}^{j\frac{n\pi}{4}} \cos\left(\frac{n}{2}\varphi_i\right) . \end{aligned} \tag{3.105}$$

Die Abhängigkeit beider Teildrücke bezüglich $r$ ist in der Näherung durch $\mathrm{e}^{-jkr}/\sqrt{r}$ gegeben und das Verbesserungsmaß

$$VM = 10\lg\left(\frac{|p_{\text{ohne Aufsatz}}|^2}{|p_{\text{mit Aufsatz}}|^2}\right) \tag{3.106}$$

ist somit im Fernfeld unabhängig vom Abstand $r$.

## 3.6. Fehleranalyse

In jeder numerischen Berechnung verbergen sich Fehlerquellen, die das Ergebnis beeinflussen. Werden die Fehler zu groß, sind die Ergebnisse

nicht mehr vertrauenswürdig und eine Interpretation unmöglich. Eine Fehlerbetrachtung ist also wichtig und unumgänglich. Dabei kann es an mehreren Stellen zu Fehlern kommen, wobei zwischen verschiedenen Fehlerarten, wie der folgende Abschnitt zeigt, unterschieden wird.

### 3.6.1. Fehlerarten

Um die Fehler bewerten zu können, werden die *Kondition*, die *Stabilität* und die *Konsistenz* der verwendeten Algorithmen untersucht. Die Kondition eines Problems beschreibt die Auswirkung von Datenfehlern (Eingabedaten) auf die Berechnungsergebnisse. Die (numerische) Stabilität beschreibt die Auswirkung des verwendeten Lösungsalgorithmus auf das Ergebnis [2] und die Konsistenz gibt an, ob der Algorithmus in der Lage ist, das Problem zu lösen [44].

Ist ein Algorithmus konsistent und stabil, so konvergiert er in der Regel auch, d. h. der Fehler kann durch wachsenden Berechnungsaufwand beliebig klein gemacht werden [45].

Folgende Fehlerarten treten bei der numerischen Umsetzung des mathematischen Modells auf:

**Modellfehler** Aus den realen Vorgaben wird ein physikalisches Modell entwickelt, welches wiederum mathematisch beschrieben wird. Vereinfachungen und Annahmen führen zu einem fehlerbehafteten physikalischen Modell. Wird dieses nun mathematisch beschrieben, so muss auf die geeignete Wahl des Modells geachtet werden.

**Daten- oder Messfehler (Konditionsbewertung)** Fehler, die durch fehlerhafte Eingabedaten entstehen. Wenn die Eingabedaten Messdaten sind, werden diese Fehler auch Messfehler genannt.

**Diskretisierungsfehler (Konsistenzbewertung)** Fehler, die durch die Diskretisierung des kontinuierlichen mathematischen Modells entstehen.

**Berechnungsfehler (Stabilitätsbewertung)** Fehler, die durch den Abbruch iterativer Löser oder durch Rundungsfehler (Maschinengenauigkeit) bei den verwendeten Algorithmen entstehen, werden bei der Stabilitätsbewertung berücksichtigt.

Vor allem die letzte Fehlerart kann an verschiedenen Stellen der numerischen Berechnung auftreten und sich fortpflanzen. Je nach Implemen-

tierung können diese Berechnungsfehler eine große Rolle spielen und die Ergebnisse verfälschen, so dass diese nicht mehr vertrauenswürdig sind.

Auch die Berechnung der betrachteten Schallfelder sind fehlerbehaftet. Das mathematische Modell enthält einige Vereinfachungen, wie die Annahme, dass kein Boden existiert und entlang der Schallschutzwand keine Veränderungen (bezüglich der Wand und der Quelle) vorkommen. So wurde ein zweidimensionales Modell entwickelt, das sich mathematisch gut beschreiben lässt (siehe Kapitel 2).

Folgende Fehlerquellen sind numerisch relevant:

- Die Nutzung des Differenzenquotienten an Stelle der Ableitung führt zu einem Diskretisierungsfehler. Hier erfolgt eine Konsistenzbewertung, die eine Einschätzung der Größenordnung des Fehlers ermöglicht.
- Der Abbruch der (theoretisch unendlichen) Summen bei der Berechnung der Drücke in den Teilräumen führt zu Fehlern.
- Der verwendete Lösungsalgorithmus, der zur Invertierung der Koeffizientenmatrix eingesetzt wird, liefert ein fehlerbehaftetes Ergebnis. In der Stabilitätsuntersuchung wird dieser Fehler untersucht und werden Kriterien zur Abschätzung festgelegt.
- Die Maschinengenauigkeit von Computern und die benutzte Speicherung von Zahlen führt zu Rundungsfehlern. Zahlen werden in MATLAB® solange man nichts anderes angibt, als Fließkommazahlen des Typs *double* dargestellt. Damit stehen jeder Zahl mit doppelter Genauigkeit (double-precision oder double entsprechend dem IEEE® Standard 754 [74]) 64 Bits Speicherplatz zur Verfügung, die folgendermaßen formatiert sind:

  | Bits | Nutzung |
  |---|---|
  | 63 | Vorzeichen (0 = positiv, 1 = negativ) |
  | 62 bis 52 | Exponent ($-1022 \leq$ Exponent $\leq 1023$) |
  | 51 bis 0 | Mantisse |

  Dabei legt die Anzahl der Bits im Exponenten den Wertebereich und die Bits der Mantisse die Genauigkeit der Zahl fest. Die größte Fließkommazahl, die MATLAB® auf dem genutzten Computersystem darstellen kann ohne einen Überlauf zu verursachen, wird mit `realmax` ausgegeben und beträgt 1,7977e+308, die kleinste darstellbare Fließkommazahl beträgt 2,2251e-308 und wird mit `realmin` ausgegeben.

Drei der vier beschriebenen Punkte finden sich als Fehler in der Koeffizientenmatrix und dem Vektor $\vec{y}$ auf der rechten Seite der zu lösenden Gleichung $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{y}$ wieder. Die Fehler, die beim Aufbau dieser Matrix gemacht werden, beeinflussen maßgeblich die Berechnung des Lösungsvektors. Das Ziel ist es, die Fehler so gering wie möglich zu halten, um geeignete Ergebnisse zu erhalten. Das gilt sowohl für die Koeffizientenmatrix als auch für den Lösungsalgorithmus, der bei der Invertierung der Matrix eingesetzt wird.

### 3.6.2. Genauigkeit der Lösung

Die berechneten Ergebnisse sollen möglichst geringe Fehler aufweisen und vertrauenswürdig sein. Die Angabe eines Fehlerintervalls ist dazu eine sinnvolle Ergänzung, um die Ergebnisse interpretieren zu können. Dazu müssen aber zunächst die Kondition, die Konsistenz und die Stabilität überprüft werden.

Neben den Rundungsfehlern, die man auf Grund des Lösungsalgorithmus erhält, spielen in diesem Fall auch Abbruchfehler eine große Rolle. Die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ enthält eine bestimmte Anzahl $N$ von Summanden (siehe z. B. Gl. (3.34) – Gl. (3.39)), wobei in der Theorie $N \to \infty$ gilt. Da das aber in der Numerik nicht umgesetzt werden kann, müssen genügend Summanden berücksichtigt werden, um nur einen kleinen (und akzeptablen) Fehler zu verursachen. Diese Betrachtung wurde bereits an den entsprechenden Stellen in diesem Kapitel mit dem Ergebnis durchgeführt, dass $N = 4kr_K$ ist.

Auch der Vektor auf der rechten Seite des linearen Gleichungssystems ist fehlerbehaftet. Im Fall einer ebenen Welle wird dieser Vektor mit Hilfe der Funktion `fcs.m` [50] berechnet. Der Fehler, der so bei dieser Berechnung der Fresnel-Integrale $C(x)$ und $S(x)$ gemacht wird, ist $< 10^{-9}$. Im zweiten Fall, die Quelle ist eine Linienquelle, kommt es wieder zu Abbruchfehlern, da auf der rechten Seite eine theoretisch unendliche Summe steht, die bei der numerischen Berechnung nach $N = 4kr_Q$ Summanden abgebrochen wird. Diese Fehler in der Koeffizientenmatrix und im Vektor auf der rechten Seite wirken sich auf den Lösungsvektor $\vec{x}$ aus und damit auch auf den Residuenvektor $\vec{r}$.

### Kondition des Problems

Die Kondition $\kappa$ gibt in der Numerik an, wie abhängig die Lösungen von der Störung der Eingangssignale sind. Bei der Konditionsbewertung geht man davon aus, dass die Eingangsdaten (aber nicht der Lösungsalgorithmus) fehlerbehaftet sind, d. h. das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{y}$ ist gestört [2]

$$\boldsymbol{A}(\vec{x} + \vec{\varepsilon}_x) = \vec{y} + \vec{\varepsilon}_y \,. \tag{3.107}$$

Aus der Störung der rechten Seite $\vec{\varepsilon}_y$ ergibt sich der Berechnungsfehler $\vec{\varepsilon}_x = \boldsymbol{A}^{-1}\,\vec{\varepsilon}_y$, der mittels Matrixnorm abgeschätzt werden kann. Der absolute Fehler

$$||\vec{\varepsilon}_x||_2 \leq \left|\left|\boldsymbol{A^{-1}}\right|\right|_2 ||\vec{\varepsilon}_y||_2 \tag{3.108}$$

bzw. der relative Fehler

$$\delta_x = \frac{||\vec{\varepsilon}_x||_2}{||\vec{x}||_2} \leq \left|\left|\boldsymbol{A^{-1}}\right|\right|_2 ||\boldsymbol{A}||_2 \, \frac{||\vec{\varepsilon}_y||_2}{||\vec{y}||_2} = \kappa(\boldsymbol{A})\delta_y \tag{3.109}$$

können mit Hilfe der Konditionszahl

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = \left|\left|\boldsymbol{A^{-1}}\right|\right|_2 ||\boldsymbol{A}||_2 \tag{3.110}$$

berechnet werden. Die Konditionszahl gibt also an, wie stark das berechnete Ergebnis (in diesem Fall $\vec{x}$) auf Fehler $\vec{\varepsilon}_y$ in den Eingangsdaten auf der rechten Seite ($\vec{y}$) reagiert. In MATLAB® ist der Befehl `cond(A)` implementiert, der die Kondition der Matrix $\boldsymbol{A}$ ausgibt.

Ist die Konditionszahl $\kappa(\boldsymbol{A})$ deutlich größer als 1, spricht man von einem schlecht konditionierten Problem, sonst von einem gut konditionierten Problem und ist die Konditionszahl unendlich, so handelt es sich um ein schlecht gestelltes Problem.

Bei den in den vorangegangenen Abschnitten aufgestellten Matrizen handelt es sich nicht um singuläre Matrizen, aber in der ersten Programmversion um schlecht konditionierte. Das hat zur Folge, dass MATLAB® die Berechnung mit „*Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate.*“ quittiert[1]. Trotz schlecht konditionierter Matrix berechnet MATLAB® die Koeffizienten des linearen Gleichungssystem.

[1] Erst wenn die Kondition so groß ist, dass die Rechnergenauigkeit nicht mehr genügt, um sinnvolle Ergebnisse zu liefern, warnt Matlab.

Allerdings sind die Ergebnisse nicht vertrauenswürdig. Daher ist die Suche nach dem Grund der schlechten Konditionierung unumgänglich.

Schaut man sich die Werte in der Koeffizientenmatrix an (Abb. 3.3), stellt man fest, dass zwischen den Minima und den Maxima mehrere Zehnerpotenzen liegen (logarithmische Darstellung). Invertiert man diese Matrix numerisch, erhält man dadurch eine sehr große Konditionszahl $\kappa$. Das ist der Grund, warum MATLAB® die o. g. Warnung ausgibt. In der Abb. 3.3 sieht man aber auch, dass es sich bei den sehr kleinen Werten um Einzelwerte handelt und nicht die gesamte Matrix diese stark schwankenden Werte aufweist. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass diese sehr kleinen Werte durch die Kosinusterme in den Gleichungen (3.34) bis (3.39) verursacht werden. An dieser Stelle wirkt sich die Darstellung von $\pi$ als Fließkommazahl auf die Genauigkeit der berechneten Werte aus. Tatsächlich wird in MATLAB® die Näherung $\pi \approx$ `pi + 2 eps` benutzt, wobei $\pi -$ `pi` $\approx 1{,}2246 \cdot 10^{-16}$ ist [36]. Dadurch ist `cos(pi/2)` $\neq 0$ und die Werte an diesen Stellen werden sehr klein.

Die Lösung für diese Problem ist recht einfach, die Winkel wurden nicht mehr ins Bogenmaß umgerechnet sondern in Grad gespeichert und an Stelle der Kosinusfunktion `cos` wurde `cosd` für Werte in Grad in MATLAB® benutzt. Außerdem wurden die Werte noch auf die vierte Nachkommastelle gerundet, so konnten zusätzliche Fehler vermieden werden.

Eine zweite Fehlerquelle ist die in MATLAB® implementierte Hankelfunktion `besselh`. Auch wenn MATLAB® bei komplexen Werten den Real- und Imaginärteil separat ausgibt, werden komplexe Zahlen als Zahl des Typs `double` behandelt, so dass für jede Zahl 64 Bits zur Speicherung genutzt werden. Da sich die Hankelfunktion aber aus Bessel- und Neumannfunktion

$$H_n^{(2)}(kr) = J_n(kr) - jN_n(kr) \tag{3.111}$$

zusammensetzt, kann man den Real- und Imaginärteil der Hankelfunktion mit jeweils 64 Bits separat (mit den Funktionen `besselj` und `bessely`) berechnen und erhält dadurch einen kleineren Fehler [31].

Nach der Umsetzung dieser beiden Punkte im Programm, ist die Matrix etwas besser konditioniert (siehe Abb. 3.4). Allerdings gibt MATLAB® nach wie vor bei einigen Frequenzen eine Warnmeldung aus. Das ist nicht weiter verwunderlich, da der generelle Aufbau der Matrix (zu sehen in der Besetzungsmatrix in Abb. 3.1) zu einer schwer zu invertierenden Matrix und damit zu einer großen Konditionszahl $\kappa$ führt.

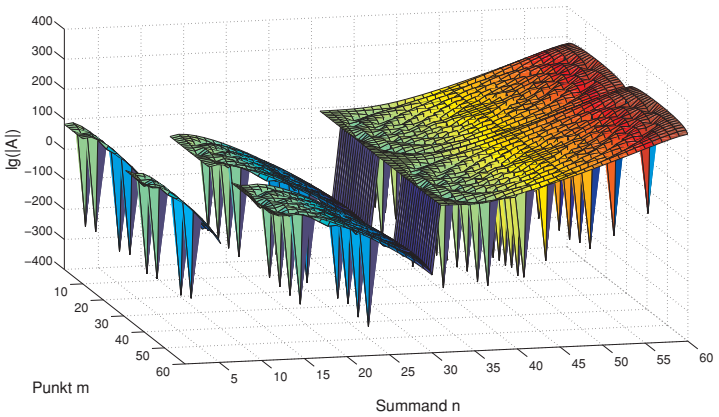


**Abbildung 3.3.:** Wertebereich der Matrix vor Anpassung der Werte, die Darstellung ist logarithmisch aufgetragen.

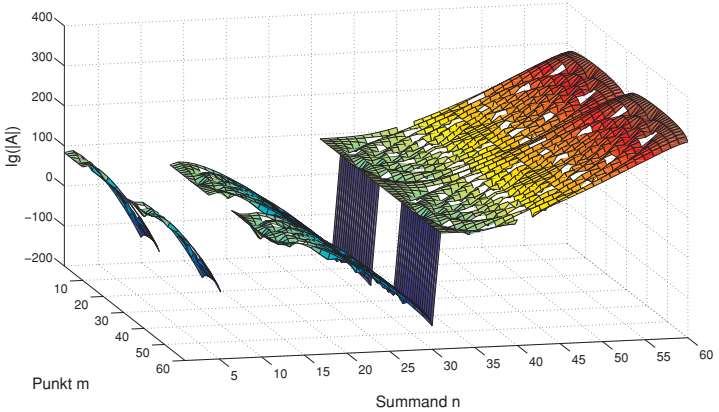


**Abbildung 3.4.:** Wertebereich der Matrix nach Anpassung der Werte, die Darstellung ist logarithmisch aufgetragen.

Da die Anzahl der Punkte $M$ bei der Berechnung der Koeffizienten mindestens 40 beträgt, sinkt die Konditionszahl in Abb. 3.5 mit steigender Frequenz auf ein Minimum bei $f = \frac{Mc}{8\pi r_K} = 1804\,\text{Hz}$ ($M = 40$, $c = 340\,\text{m/s}$, $r_K = 0{,}3\,\text{m}$) und steigt dann mit steigender Anzahl von

Punkten $M$ mit der Frequenz wieder an. Dieses Verhalten zeigt sich für alle Klappenöffnungswinkel und alle drei Quellpositionen, in Abb. 3.5 sind Beispiele für einen Klappenöffnungswinkel von 210° und den Quellöffnungswinkeln 30° und 90° zu sehen. Die Auswirkung der hohen Konditionszahl bei der Simulation auf den Fehler wird in der Stabilitätsbewertung ab Seite 78 untersucht.

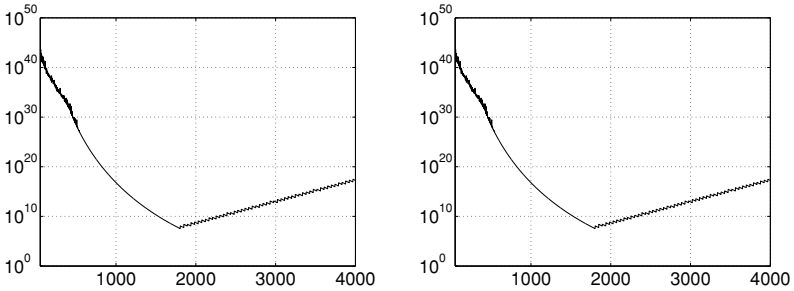


**Abbildung 3.5.:** Konditionszahl $\kappa$ für einen Klappenöffnungswinkel von 210° und einem Quellwinkel von 30° (links) und 90° (rechts)

### Konsistenzbewertung

Bei der Konsistenzbewertung des verwendeten numerischen Verfahrens wird überprüft, ob der Algorithmus grundsätzlich dazu geeignet ist, das gegebene Problem zu lösen. Dabei spielen die Fehler, die durch das numerische Verfahren im Vergleich zum exakten mathematischen Verfahren gemacht werden, die entscheidende Rolle.

Bei der Lösung des vorliegenden Problems wird das Finite-Differenzen-Verfahren benutzt, um die benötigten Ableitungen bei $r = r_K$ zu berechnen. Die exakten Lösungen $p(r_K)$ und $p(r_K + \Delta r)$ lassen sich aus den numerisch berechneten Werten $p_K$ und $p_{\Delta r}$ und den bei der Berechnung gemachten Rundungsfehlern $\varepsilon_K$ und $\varepsilon_{\Delta r}$ berechnen [44]

$$p(r_K) = p_K + \varepsilon_K \tag{3.112}$$

$$p(r_K + \Delta r) = p_{\Delta r} + \varepsilon_{\Delta r} \, . \tag{3.113}$$

Als Gesamtfehler des Differenzenverfahrens, der abhängig von der Schrittweite $\Delta r$ ist, erhält man bei Nutzung des Vorwärtsdifferenzenquotienten

(siehe Abschnitt 3.1)

$$\varepsilon(\Delta r) = \frac{p_{\Delta r} - p_K}{\Delta r} - \left.\frac{\partial p(r)}{\partial r}\right|_{r=r_K} \tag{3.114}$$

$$= \underbrace{\frac{p(r_K + \Delta r) - p(r_K)}{\Delta r} - \left.\frac{\partial p(r)}{\partial r}\right|_{r=r_K}}_{\text{Abschneidefehler}} + \underbrace{\frac{\varepsilon_K - \varepsilon_{\Delta r}}{\Delta r}}_{\text{Rundungsfehler}} . \tag{3.115}$$

Der Abschneidefehler[1] wird auch als Verfahrensfehler bezeichnet und ist definiert als die Differenz zwischen Näherungsformel (Differenzenquotienten) und Ableitung. Bei den einseitigen Differenzenquotienten handelt es sich, wie bereits in Abschnitt 3.1 gezeigt, um einen Fehler der Ordnung 1 ($\mathcal{O}(\Delta r)$, siehe Gl. (3.8))

Neben dem Abschneidefehler liegen auch noch Rundungsfehler[2] auf Grund der Speicherung als Fließkommazahlen mit 64 Bits vor. Die Rundungsfehler führen zur erwähnten Auslöschung, da der Unterschied zwischen zwei Zahlen nur noch sehr gering ist und die Maschinengenauigkeit nicht mehr ausreicht, um diesen Unterschied zu berücksichtigen. Können die Rundungsfehler durch ein $\epsilon$ begrenzt werden, so dass $|\varepsilon_K| \leq \epsilon$ und $|\varepsilon_{\Delta r}| \leq \epsilon$ gilt, erhält man

$$|\varepsilon_{\text{Rundung}}(\Delta r)| \leq \frac{2\epsilon}{\Delta r} . \tag{3.116}$$

Für große $\Delta r$ dominiert der Abschneidefehler und für kleine $\Delta r$ der Rundungsfehler den Gesamtfehler. Ein geeignetes $\Delta r$ liegt also zwischen diesen Bereichen, so dass der Gesamtfehler möglichst klein wird.

Da die hier beschriebenen Fehler in die Koeffizientenmatrix einfließen, gibt MATLAB® wieder eine Warnung aus, dass die Matrix schlecht skaliert (*badly scaled*) sei. Um die Ableitung des Schalldrucks mit dem Differenzenquotienten abschätzen zu können und einen möglichst kleinen Fehler dabei zu machen, ist ein frequenzabhängiges $\Delta r$ nötig. Damit wird $\Delta r$ immer kleiner je kleiner die Wellenlänge (mit steigender Frequenz) wird. Somit gibt die höchste Frequenz, die berechnet werden soll, das kleinste $\Delta r$ vor. Bei den Simulationen hat sich $\Delta r = \lambda/100$ als günstig erwiesen. Bei einer Frequenz von z. B. 3000 Hz ergibt sich ein $\Delta r$ von 0,0011 m. Dieses liegt noch weit über der Maschinengenauigkeit `eps`, so dass Rundungsfehler klein bleiben.

[1] engl. truncation error
[2] engl. roundoff error

**Stabilitätsbewertung**

> „Ein Algorithmus heißt gutartig oder stabil, wenn die durch ihn im Laufe der Rechnung erzeugten Fehler in der Größenordnung des durch die Kondition des Problems bedingten unvermeidbaren Fehlers bleiben."
> [10, S. 42]

Das hier aufgestellte Gleichungssystem ist linear und hat die Form $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{y}$, wobei $\vec{x}$ der gesuchte Lösungsvektor ist. Generell ist ein lineares Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn der Rang $r$ der Matrix $\boldsymbol{A}$ gleich dem Rang der erweiterten Matrix $[\boldsymbol{A},\vec{y}]$ ist. Die MATLAB® Funktion `rank(A)` liefert den Rang der Matrix $\boldsymbol{A}$. Um das lineare Gleichungssystem zu lösen, wird die Gleichung mit der invertierten Matrix von $\boldsymbol{A}$ multipliziert. Da die Invertierung der Matrix mit Hilfe der Cramerschen Regel sehr viele Rechenschritte beinhaltet, ist sie selbst mit der heutigen Computertechnologie schon für mittelgroße lineare Gleichungssysteme nicht mehr anwendbar. Daher wurden verschiedene numerische Methoden entwickelt, die in einem Bruchteil der Zeit die Invertierung ausführen können.

MATLAB® verwendet je nach linearem Gleichungssystem unterschiedliche Lösungsalgorithmen, um den gesuchten Vektor mittels `x=A\y` zu berechnen. Dabei ist entscheidend, welche Form die Koeffizientenmatrix aufweist. Im hier vorliegenden Fall eines gleichbestimmten Systems liegt eine quadratische Matrix vor, es handelt sich aber weder um eine Diagonal-, Band- oder Dreiecksmatrix noch um eine symmetrische, eine hermitische oder eine Hessenberg-Matrix. Daher wird das Gaußsches Eliminationsverfahren mit teilweiser Pivotisierung benutzt (siehe auch [26]).

Löst man das lineare Gleichungssystem der Form

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{y} \tag{3.117}$$

numerisch, so erhält man an Stelle des tatsächlichen Lösungsvektors $\vec{x}$ den Näherungsvektor $\vec{\tilde{x}}$. Das führt bei der Einsetzprobe nicht zum Nullvektor, sondern zu einem *Residuenvektor* [48]

$$\vec{r} := \boldsymbol{A}\vec{\tilde{x}} - \vec{y}\,. \tag{3.118}$$

Nun sei $\vec{\tilde{x}}$ der mit dem Fehler $\vec{\varepsilon}$ behaftete Lösungsvektor $\vec{x} = \vec{\tilde{x}} + \vec{\varepsilon}$, dann gilt

$$\boldsymbol{A}\vec{x} - \vec{y} = \boldsymbol{A}(\vec{\tilde{x}} + \vec{\varepsilon}) - \vec{y} = \boldsymbol{A}\vec{\tilde{x}} + \boldsymbol{A}\vec{\varepsilon} - \vec{y} = 0 \tag{3.119}$$

bzw.

$$\boldsymbol{A}\vec{\varepsilon} = -\vec{r}\,. \tag{3.120}$$

Schaut man sich nun die Norm der Größen an, erhält man

$$||\vec{y}||_2 = ||\boldsymbol{A}\vec{x}||_2 \leq ||\boldsymbol{A}||_2\,||\vec{x}||_2 \tag{3.121}$$

$$||\vec{\varepsilon}||_2 = \left|\left|-\boldsymbol{A}^{-1}\vec{r}\right|\right|_2 \leq \left|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\right|_2\,||\vec{r}||_2\,. \tag{3.122}$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung für den relativen Fehler $\delta$

$$\delta = \frac{||\vec{\varepsilon}||_2}{||\vec{x}||_2} \leq ||\boldsymbol{A}||_2\left|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\right|_2 \frac{||\vec{r}||_2}{||\vec{y}||_2} = \underbrace{\kappa(\boldsymbol{A})}_{\text{Konditionszahl}} \frac{||\vec{r}||_2}{||\vec{y}||_2}\,, \tag{3.123}$$

wobei die Konditionszahl mindesten 1 ist, da

$$1 \leq ||\boldsymbol{E}||_2 = \left|\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right|\right|_2 \leq ||\boldsymbol{A}||_2\left|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\right|_2 = \kappa(\boldsymbol{A})\,. \tag{3.124}$$

Diese Abschätzung bedeutet, dass neben einem kleinen Residuenvektor $\vec{r}$ die Konditionszahl ausschlaggebend für den relativen Fehler der Näherung $\vec{\tilde{x}}$ ist. Nur wenn die Konditionszahl klein ist, kann aus einem kleinen Residuenvektor auf einen kleinen Fehler geschlossen werden.

Die Konditionszahl $\kappa$ wurde bereits weiter oben in der Konditionsbewertung untersucht und ist nicht als klein anzusehen. Der Residuenvektor $\vec{r}$ hingegen ist für alle betrachteten Fälle klein, als Beispiel sind in Abb. 3.6 $||r||_2\,/\,||y||_2$ (links) und $||r||_2$ (rechts) für einen Klappenöffnungswinkel von 210° und einem Quellwinkel von 30° abgebildet.

Um dennoch auf einen kleinen Fehler ($< \epsilon_{\text{Schranke}}$) schließen zu können, wird der Prager-Oettli-Satz [44] zur Überprüfung der Ergebnisse eingesetzt. Dieser besagt, dass der berechnete (und mit Fehlern behaftete) Vektor $\vec{\tilde{x}}$ für ein lineares System $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{y}$ mit maximalen Fehlern $\boldsymbol{\varepsilon_A} = \epsilon_{\text{Schranke}} \cdot \boldsymbol{A} \geq 0$ und $\vec{\varepsilon}_y = \epsilon_{\text{Schranke}} \cdot \vec{y} \geq 0$ genau dann als „richtig“ zu akzeptieren ist, wenn

$$|\boldsymbol{A}\vec{\tilde{x}} - \vec{y}| = |\vec{r}| \leq \epsilon_{\text{Schranke}}\left(|\boldsymbol{A}||\vec{\tilde{x}}| + |\vec{y}|\right) \tag{3.125}$$

gilt. Lässt man Fehler von weniger als 1 dB zu, so muss $\epsilon_{\text{Schranke}} < 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ betragen. Eine obere Fehlerschranke von $\epsilon_{\text{Schranke}} = 0{,}000001 = 10^{-6}$ lieferte für alle Frequenzen trotz großer Konditionszahl Ergebnisse, die als richtig anzusehen sind. Auch die visuelle Überprüfung der Schallfelder bzw. der Einfügungsdämmmaße (siehe Abb. 6.1 bis Abb. 6.4) zeigt, dass die Ergebnisse physikalisch sinnvoll sind.

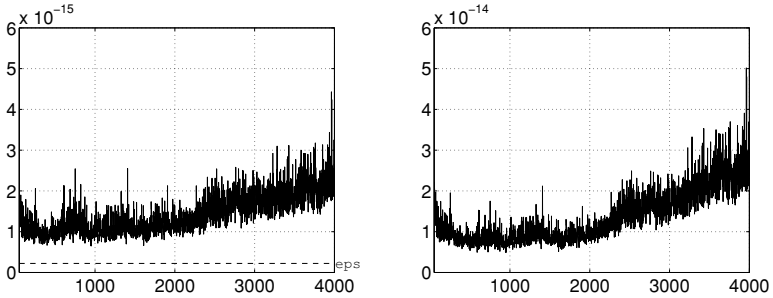


**Abbildung 3.6.:** $||\vec{r}||_2 \,/\, ||\vec{y}||_2$ (links) und $||\vec{r}||_2$ (rechts) bei der numerischen Berechnung der Koeffizienten für einen Klappenöffnungswinkel von 210° und einem Quellwinkel von 30°

### 3.6.3. Überprüfung der Übergänge

Auch wenn die vorangegangene Fehleranalyse gezeigt hat, dass der numerische Fehler recht klein ist, gilt das nur für die Berechnung der Koeffizienten und daraus resultierend für die Punkte auf den Kreisen. Auf die Größe des Fehlers zwischen den Punkten auf den Kreisen kann man daraus nicht schließen. Der relative Fehler beim Übergang von Bereich $r < r_K$ zu $r_K \leq r \leq r_Q$ ergibt sich hier zu

$$\varepsilon_p(r_K, \varphi_m) = \begin{cases} \frac{|p_3(r_K,\varphi_m) - p_1(r_K,\varphi_m)|}{||p_3(r_K,\varphi_m)||_2} & \text{für} \quad 0 < \varphi_m < \alpha_1 \\ \frac{|p_3(r_K,\varphi_m) - p_2(r_K,\varphi_m)|}{||p_3(r_K,\varphi_m)||_2} & \text{für} \quad \alpha_1 < \varphi_m < 2\pi \end{cases} . \tag{3.126}$$

Analog dazu kann der relative Fehler beim Übergang von Teilraum 3 zu Teilraum 4 aus

$$\varepsilon_v(r_K, \varphi_m) = \frac{|v_4(r_K,\varphi_m) - v_3(r_K,\varphi_m)|}{||v_4(r_K,\varphi_m)||_2} \tag{3.127}$$

berechnet werden.

In Abb. 3.7 sind der relative Fehler des Druckverlaufs auf dem inneren und der relative Fehler der Schnelle auf dem äußeren Kreis aufgetragen. Die Fehler an den Stützstellen sind in beiden Fällen nahe null. Auf dem inneren Kreis mit $r = r_K$ (linke Darstellung in Abb. 3.7) betragen die Fehler zwischen den Stützstellen weniger als 0,03 %. Lediglich an der

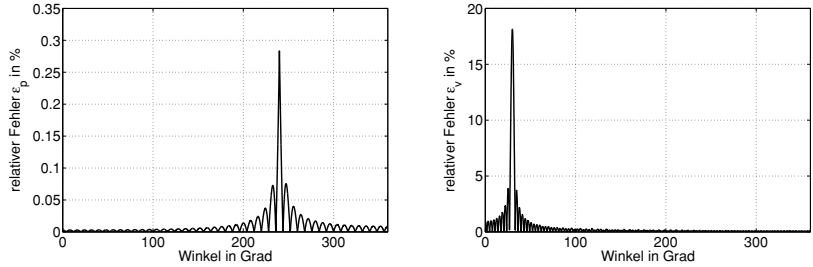


**Abbildung 3.7.:** Relative Fehler $\varepsilon_p$ auf dem inneren (links) und $\varepsilon_v$ auf dem äußeren (rechts) Kreis

Klappenposition (hier ein Beispiel mit 120° bei 4000 Hz) steigt der Fehler auf 0,28 % an. Auf Grund der Druckansätze in den einzelnen Teilbereichen ergibt sich eine Unstetigkeit, die nur allmählich angenähert wird. Auf dem äußeren Kreis mit $r = r_Q$ (rechte Abbildung, Quellwinkel $\varphi_Q = 30°$ bei 4000 Hz) beträgt der Fehler weniger als 1,5 %. Nur in der Nähe der Quelle und an der Quellposition wächst der relative Fehler auf maximal 18 % an. Der Fehler zwischen den Stützstellen beträgt damit maximal 1,5 dB auf dem Kreis mit $r = r_Q$ und die numerischen Ergebnisse sind als genau genug anzusehen.

## 3.7. Hardware

Die Berechnungen erfolgten auf einem handelsüblichen PC mit folgender Ausstattung:

**CPU** Intel® Core™2 Duo Prozessor Typ E8400 mit 3,0 GHz

**RAM** 8 GB

**Festplatte** 500 GB

**Betriebssystem** Ubuntu Linux

**Software** MATLAB®

Das größte Problem ist die Berechnungszeit, die im Laufe der Forschungsarbeit verringert und optimiert werden konnte. Die Berechnung für einen Frequenzbereich von 50 Hz bis 2000 Hz bei einer Klappen- und einer Quellposition dauerte auf diesem Rechner am Ende noch knapp 17 Minuten und für einen Frequenzbereich von 42 Hz bis 5600 Hz ca. 50 Minuten.

Bei der Berechnung des selben Frequenzbereichs mit einer ebenen Welle an Stelle einer Linienquelle verringert sich die Rechenzeit von 50 auf zehn Minuten.

# 4

# Experimentelle Untersuchung

Das bei den Simulationen genutzte Modell enthält gegenüber realen Schallschutzwänden einige Vereinfachungen. So wurde z. B. der Boden im numerischen Modell nicht berücksichtigt und die Wand ist sehr dünn. Um herauszufinden, ob die Simulationsergebnisse den Einfluss der klappenförmigen Aufsätze auf das Druckfeld gut beschreiben, werden die Ergebnisse anhand von Messungen im Labor überprüft.

Die Messungen finden im reflexionsarmen Raum (RAR) der Fachgebiete Technische Akustik der Technischen Universität Berlin statt, um die Schallausbreitung unter Freifeldbedingungen zu realisieren. Es handelt sich um einen Vollraum, der mit 1850 $m^3$ eine untere Grenzfrequenz (Terz-Mittenfrequenz) von 63 Hz hat. Die begehbare Fläche beträgt 126 $m^2$ und besteht aus einem Gitternetz.

## 4.1. Aufbau des Experiments

Unter Laborbedingungen erfolgt der Aufbau einer Schallschutzwand im Maßstab von etwa 1:3. Dieses experimentelle Modell der Schallschutzwand besteht aus Pressspanplatten mit einer Dicke von 19 mm. Die Wand hat eine Gesamtdicke von 140 mm und eine Höhe ohne Klappen von 1300 mm. Um die Schalldämmung der Wand zu erhöhen, wurde sie mit Mineralwolle

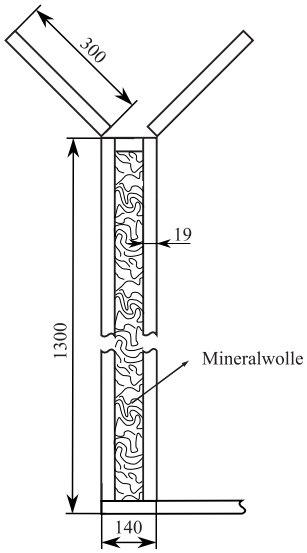


**Abbildung 4.1.:** Querschnitt des Schallschutzwand-Modells, alle Längenangaben in mm

gefüllt. Auch die Oberkante der Wand ist mit Pressspan verschlossen. Der Querschnitt des Modells ist in Abb. 4.1 schematisch abgebildet.

Diese Wand steht auf einem Boden aus Pressspanplatten, um die Schallausbreitung um die Unterkante der Wand zu verhindern. Der Boden befindet sich nur auf der Seite der Wand, auf der auch die Quelle betrieben wird (wird im Folgenden als „hinter der Wand“ bezeichnet). Die Wand wird im RAR so in einer Ecke positioniert, dass um die Seitenkanten der Wand möglichst keine Schallausbreitung stattfinden kann. Die Lücken zwischen den Mineralwollekeilen des reflexionsarmen Raumes und der Schallschutzwand sind mit Schaumstoff möglichst gut verschlossen. So erreicht man, dass das Schallfeld vor der Schallschutzwand (also auf der quellabgewandten Seite) hauptsächlich von der Beugung an der Oberkante der Wand beeinflusst wird. Der Aufbau, in Abb. 4.2 zu sehen, spiegelt somit die Beeinflussung von Schallfeldern durch Schallschutzwände und deren Aufsätze wieder.

An der Oberkante der Wand wird auf jeder Längsseite je eine 300 mm lange Klappe angebracht, die sich im Winkel verstellen lässt. Zur Justie-

rung der Klappen dienen Metallstifte, die in 10° Schritten in vorgebohrte Löcher an den Seitenteilen passen. Diese Details sind in Abb. 4.3 zu sehen.

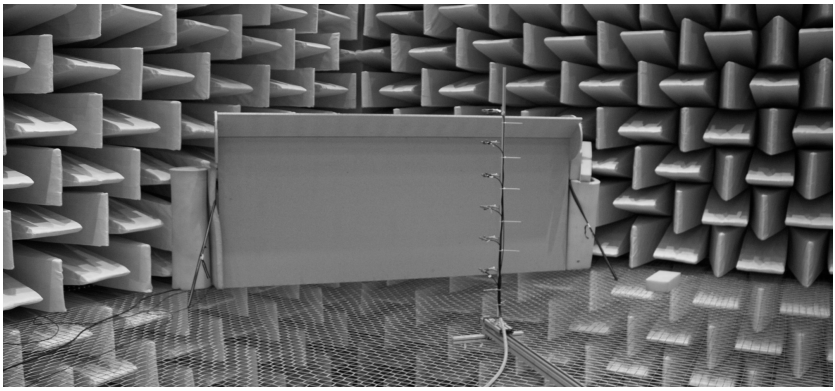

**Abbildung 4.2.:** Foto des Messaufbaus im reflexionsarmen Raum (RAR)

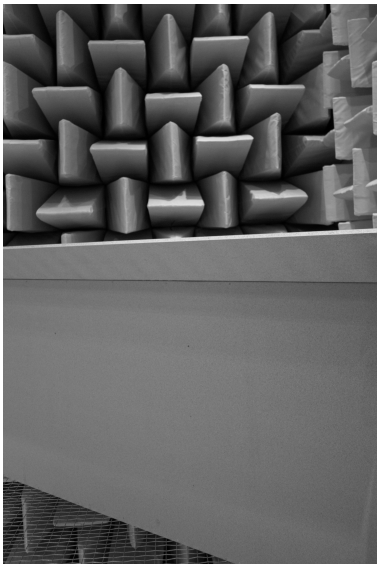

**Abbildung 4.3.:** links: vordere Klappe der Schallschutzwand; rechts oben: Fixierung der Klappe; rechts unten: Metallstift, der die Klappe in Position hält

Der Öffnungswinkel zählt, wie in der Theorie und der Simulation, von der quellzugewandten Seite. Bei kleinen Öffnungswinkeln ($< 180°$) zeigt die Klappe also in den quellzugewandten Raum (hinter der Wand). Auch bei zwei Klappen, zählen die jeweiligen Öffnungswinkel von der quellzugewandten Seite.

Als Messgröße dient der Schalldruck, der an mehreren Messpositionen vor der Schallschutzwand auf der quellabgewandten Seite gemessen wird. Die Messungen des Schalldrucks erfolgen auf einer Ebene senkrecht zur Wand.

Die sechs Mikrofone sind übereinander an einer Metallstange (Mikrofonstativ) mit Mikrofonhalterungen angebracht, siehe Abb. 4.4. Der Abstand zwischen den einzelnen Mikrofonen beträgt 200 mm, das unterste Mikrofon ist 500 mm über dem Gitternetz im reflexionsarmen Raum angebracht. Damit beträgt auch der Abstand zwischen unterer Wandkante und erstem Mikrofon 500 mm. Das sechste Mikrofon ist an oberster Position mit einem Abstand von 1500 mm zur Wandunterkante angebracht und somit 300 mm über der Kante der Wand ohne Klappen positioniert.

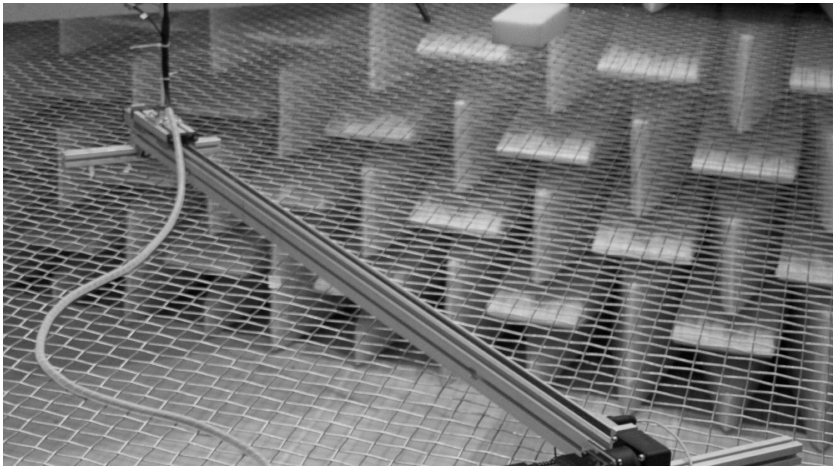

**Abbildung 4.4.:** Detailaufnahme des Positionierungssystems

Das Mikrofonstativ befindet sich auf einem Schlitten (auch in Abb. 4.4 zu sehen), der mit Hilfe eines Elektromotors auf einer Schiene verschoben werden kann. Dadurch besteht die Möglichkeit an 114 Messpositionen den Druck zu messen und so das Schallfeld vor der Schallschutzwand

zu bestimmen. Die schematische Zeichnung für den Aufbau inklusive der Lautsprecher- und Messpositionen mit allen Längenangaben ist in Abb. 4.5 zu finden.

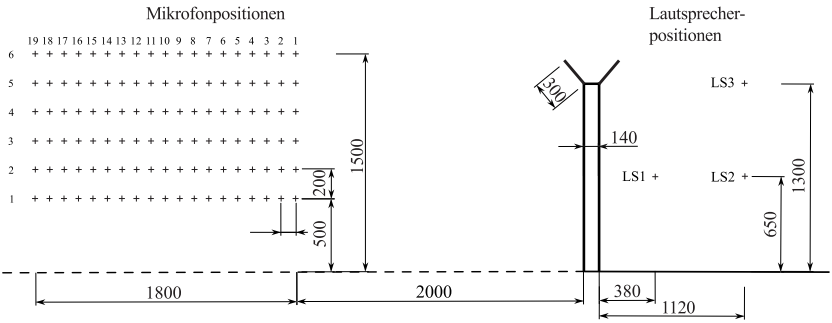


**Abbildung 4.5.:** Messpositionen und Abmessungen des Modells, Längenangaben in mm

Die waagerechten Messpositionen können auf diese Weise immer wieder angefahren werden, ohne den reflexionsarmen Raum betreten zu müssen, da die Steuerung über einen Laptop realisiert wurde. Dieser steht vor dem reflexionsarmen Raum und ermöglicht einen ungestörten Messablauf. Das System, das zur Verschiebung der Messmikrofone eingesetzt wird, besteht aus einem Schrittmotor, der sich über das Unipos System steuern lässt, und dem Schlitten mit den Mikrofonen. Dieses Unipos Steuerungssystem wiederum hat eine serielle Schnittstelle (RS-232), die mit einem Computer verbunden werden kann und dann über MATLAB® gesteuert wird.

Als Messsystem kommt das OROS 25 mit 16 Eingängen zum Einsatz, das über eine eigene Messsoftware OROS OR 763 v4.41 verfügt. Auch diese Software lässt sich mit MATLAB® ansteuern. Das hat den großen Vorteil, dass der gesamte Messablauf programmiert wird und selbständig abläuft. Nachdem die sechs Mikrofone alle Messpositionen einmal durchlaufen haben, werden die Klappen der Wand per Hand verstellt und fixiert. Anschließend startet man einen neuen Messdurchlauf, der wieder automatisch abläuft. Das Messsystem und die Ansteuerung der einzelnen Komponenten ist in Abb. 4.6 zu sehen.

Als Quellen dienten ein passiver Lautsprecher in einer Box (1-Weg-System) und ein aktiver Lautsprecher (Mehr-Wege-System). Der aktive Lautsprecher kommt an Lautsprecherposition LS1 und LS2 zum Einsatz, der passive Lautsprecher an Position LS1 und LS3 (siehe Abb. 4.5). Die

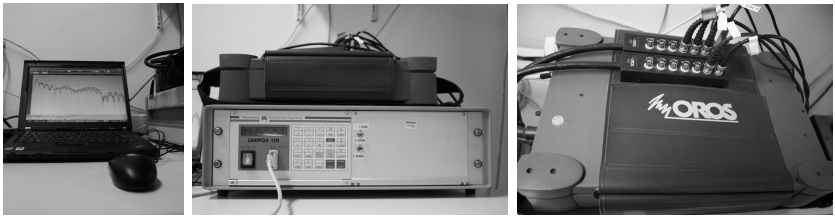


**Abbildung 4.6.:** Messsystem und Steuerung der Versuche im reflexionsarmen Raum

Messpositionen entsprechen etwa einem Quellwinkel von $\varphi_Q = 30°$ an Lautsprecherposition LS1, einem Winkel von $\varphi_Q = 60°$ an Position LS2 und $\varphi_Q = 90°$ an Lautsprecherposition LS3.

Der Lautsprecher wird auch über das OROS-Messsystem, das einen Rauschgenerator enthält, angesteuert. Gemessen wurde bis zu einer maximalen Frequenz von 5000 Hz mit einer Auflösung von $\Delta f = 1{,}5625$ Hz.

## 4.2. Aufsatz mit einer Klappe

Bei den Messungen wird zunächst nur der Öffnungswinkel der quellseitigen Klappe variiert, die zweite Klappe ist bei diesen Messungen heruntergeklappt (entspricht 0°). Die Klappe wird jeweils um 10° verstellt, den Anfang macht die Klappenposition bei 0°. Das entspricht dem Fall „keine Klappe“ und stellt die Referenzmessung dar. Der maximal mögliche Öffnungswinkel beträgt 180° und ist eine einseitige Verlängerung der Schallschutzwand. Anschließend wird der Öffnungswinkel der quellabgewandte Klappe verändert, um auch die Wirkung der Klappen bei Öffnungswinkeln zwischen 180° und 350° zu messen. Auch hier erfolgt die Änderung der Öffnungswinkel in 10°-Schritten.

Bei den Messungen wird das Verbesserungsmaß am Messpunkt $(x,y)$ aus dem gemessenen Druck mit Klappe und dem gemessenen Druck ohne Klappe (als Referenz) über

$$VM(x,y) = 10 \lg \left( \frac{|p_{\text{ohne Aufsatz}}(x,y)|^2}{|p_{\text{mit Aufsatz}}(x,y)|^2} \right) \tag{4.1}$$

ermittelt.

Die räumliche Mittelung des Schalldruckpegels erfolgt nach [40, S. 255]

$$L = 10\,\mathrm{lg}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 10^{L_n/10}\right), \tag{4.2}$$

wobei $N$ die Anzahl der Positionen im Raum ist. Zieht man wieder das Verbesserungsmaß bei der Auswertung heran, so ergibt sich für die räumliche Mittelung

$$\overline{VM} = 10\,\mathrm{lg}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} |p_{\text{ohne Aufsatz}}|^2}{\sum_{n=1}^{N} |p_{\text{mit Aufsatz}}|^2}\right). \tag{4.3}$$

### 4.2.1. Einfluss des Klappenöffnungswinkels und des Quellwinkels

Die Wirkung der untersuchten klappenförmigen Aufsätze hängt u. a. vom Öffnungswinkel der Klappe ab. Daher wird auch hier das Gesamtverbesserungsmaß im Frequenzbereich von 63 Hz bis 4000 Hz (Mittenfrequenzen und örtlich gemittelt) für jeden Klappenöffnungswinkel berechnet. Bei einem Quellwinkel von 30° (siehe Abb. 4.7) setzt eine Verbesserung durch eine Klappe ab einem Klappenöffnungswinkel von 30° ein. Die maximale Verbesserung von mehr als 6 dB erhält man für einen Klappenöffnungswinkel von 80°. Bis hin zu Klappenöffnungswinkeln von 270° erzielt man deutliche Verbesserungen durch die Klappe gegenüber einer einfachen Schallschutzwand.

Hier sieht man, dass bei ungünstiger Wahl des Klappenöffnungswinkels Verschlechterungen bis zu 0,9 dB auftreten. Bei den Messungen mit einem Quellwinkel von 30° trifft das vor allem für Winkel größer als 280° zu.

Bei einem Quellwinkel von 60° sieht man in Abb. 4.8 eine Verbesserung ab einem Klappenöffnungswinkel von 60°. Allerdings weit weniger ausgeprägt als bei einem Quellwinkel von 30°. In diesem Fall beträgt die maximale Verbesserung etwa 1,3 dB bei den Klappenöffnungswinkeln 80° und 230°. Verschlechterungen bis maximal 1,2 dB treten vor allem bei sehr kleinen Klappenöffnungswinkeln um die 30° auf. Aber auch bei Klappenöffnungswinkeln von 300° und 310° liegt eine Verschlechterung vor. Diese beträgt etwa 0,6 dB.

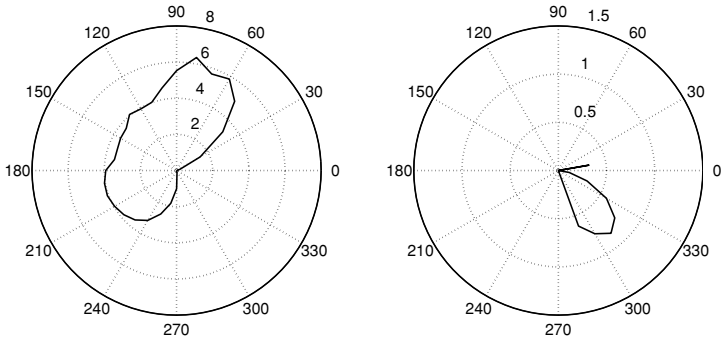


**Abbildung 4.7.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 30°

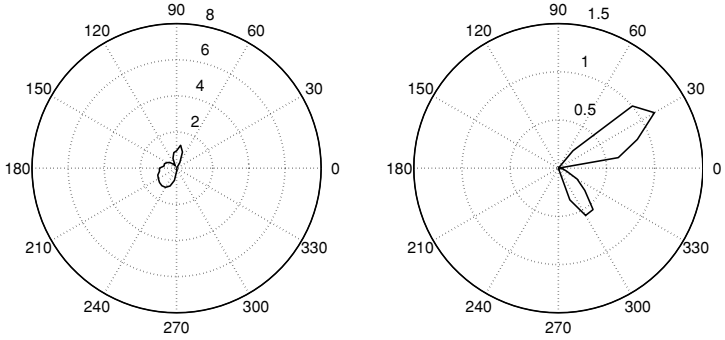


**Abbildung 4.8.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 60°

Die dritte Lautsprecherposition bei 90° zeigt, dass hohe Verbesserungen vor allem für Klappenöffnungswinkel um 180° auftreten (Abb. 4.9). Dabei ist festzustellen, dass ein Klappenöffnungswinkel von 180° die besten Ergebnisse liefert, hier erhält man eine Verbesserung von 8 dB.

Öffnungswinkel zwischen 110° und 250° liefern Verbesserungen von mehr als 2 dB. Allerdings führen Klappenöffnungswinkel zwischen 280° und 310° auch zu Verschlechterungen, diese beschränken sich aber auf weniger als 0,5 dB.

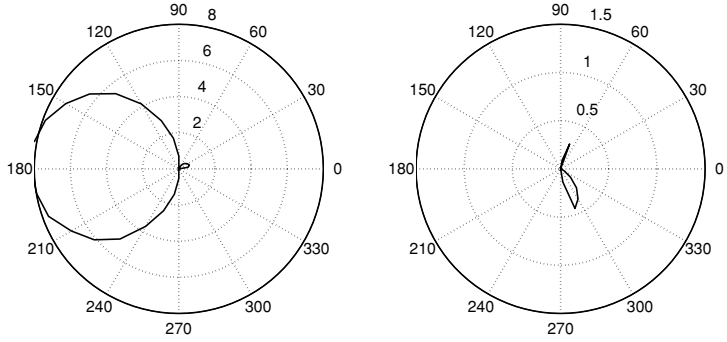


**Abbildung 4.9.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 90°

Für alle drei Quellpositionen erzielt man nennenswerte Verbesserungen erst wenn der Klappenöffnungswinkel größer oder gleich dem Quellwinkel ist.

### 4.2.2. Frequenzabhängigkeit

Da die Darstellungen aus dem vorangegangenen Abschnitt keine Rückschlüsse auf die Frequenzabhängigkeit der Klappen zulässt, werden für drei Klappenöffnungswinkel (80°, 180° und 210°) die Verbesserungen über die Frequenz dargestellt. Für die Quellwinkel 30° und 60° erhält man für alle drei Klappenwinkel insgesamt eine Verbesserung. Für einen Quellwinkel von 90° wird bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° keine Verbesserung erzielt.

Die dargestellten Verbesserungsmaße sind jeweils über alle Messpunkte gemittelt worden, um die frequenzabhängige Wirkung auf ein größeres Gebiet zu zeigen. In Abb. 4.10 ist das Terzspektrum für einen Klappenöffnungswinkel von 80° zu sehen. Nur unterhalb von 125 Hz sind

für einen Quellwinkel von 30° Verschlechterungen zu beobachten. Für höhere Frequenzen liegen die Verbesserungen durch die Klappen zwischen 7 dB und 20 dB. Das erklärt auch das hohe Gesamtverbesserungsmaß in Abb. 4.7.

Bei einem Quellwinkel von 60° erzielt man erst ab 500 Hz eine durchgehende Verbesserung, die auf maximal 7,5 dB ansteigt. Unterhalb von 500 Hz liegen sowohl leichte Verbesserungen (zwischen 200 Hz und 315 Hz) als auch zwei Veschlechterungen (bei 160 Hz und 400 Hz) mit bis zu 5 dB vor. Unterhalb von 125 Hz hat die Klappe keinen Einfluss auf die Abschirmwirkung der Wand.

Schaut man sich als drittes noch den Verlauf des Verbesserungsmaßes bei einem Quellwinkel von 90° an, stellt man fest, dass die Klappe vor allem bei mittleren und hohen Frequenzen kaum noch einen Einfluss auf die Abschirmwirkung hat. Im tieffrequenten Bereich erzielt man leichte Verbesserungen mit maximal 5,5 dB bei 200 Hz.

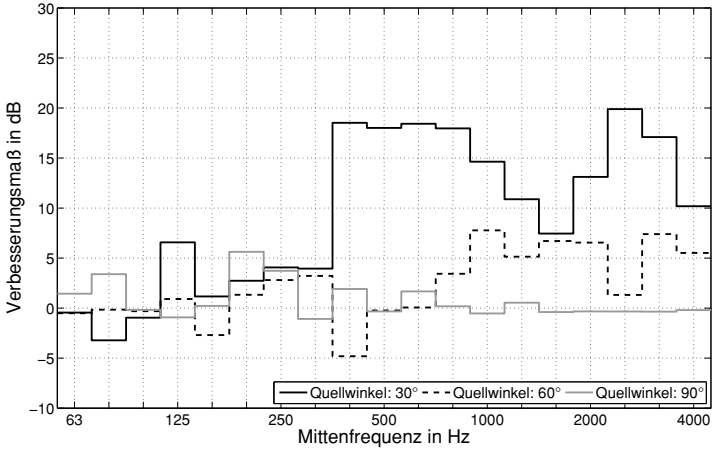


**Abbildung 4.10.:** Verbesserungsmaß für einen Klappenöffnungswinkel von 80°, gemittelt über alle Messpunkte

Bei einem Klappenöffnungswinkel von 180°, dargestellt in Abb. 4.11, steigt das Verbesserungsmaß bei einem Quellwinkel von 90° zu den hohen Frequenzen stark an. Hier werden Verbesserungen von über 20 dB erzielt. Bei einem Quellwinkel von 60° kommt es unterhalb von 250 Hz zu

geringen Verschlechterungen durch die Klappe, ab 250 Hz ist das Verbesserungsmaß dann positiv. Allerdings finden sich auch zwei Einbrüche, bei 500 Hz und bei 2500 Hz. Im Vergleich dazu steigt die Verbesserung, die durch die Klappe bei einem Quellwinkel von 30° erzielt wird, mit der Frequenz sehr viel stärker an. Hier erhält man ab 100 Hz eine Verbesserung, die in den Terzen 250 Hz und 315 Hz wiederum einbricht.

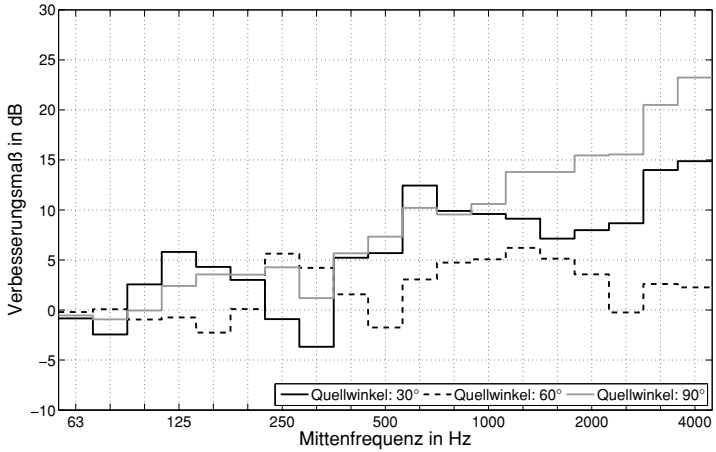


**Abbildung 4.11.:** Verbesserungsmaß für einen Klappenöffnungswinkel von 180°, gemittelt über alle Messpunkte

Das dritte Beispiel in Abb. 4.12 zeigt das Verbesserungsmaß für einen Klappenöffnungswinkel von 210°. Auch hier ist der frequenzabhängige Verlauf abhängig vom Quellwinkel. Bei einem Quellwinkel von 30° erreicht man in einzelnen Terzen Verbesserungen bis zu 13 dB. Bis auf bei 63 Hz, 80 Hz und 315 Hz ist das Verbesserungsmaß positiv und steigt mit der Frequenz. Bei einem Quellwinkel von 60° sieht das Bild anders aus. Der Anstieg zu den hohen Frequenzen ist weit weniger ausgeprägt als bei einem Quellwinkel von 30° oder 90°. Bei tiefen Frequenzen unterhalb von 200 Hz hat die Klappe kaum einen Einfluss auf die Abschirmwirkung der Schallschutzwand. Ab 200 Hz erzielt man Verbesserungen bis 6 dB. Die höchsten Werte erzielt man für einen Quellwinkel von 90°. Das Verbesserungsmaß steigt hier auf über 18 dB bei hohen Frequenzen. Der Verlauf steigt kontinuierlich mit der Frequenz. Allerdings ist die Wirkung der Klappe unterhalb von 125 Hz ein wenig schlechter als ohne Klappe.

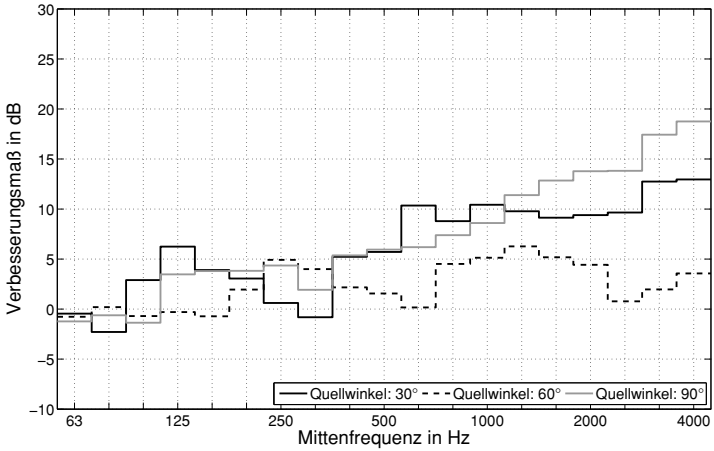


**Abbildung 4.12.:** Verbesserungsmaß für einen Klappenöffnungswinkel von 210°, gemittelt über alle Messpunkte

### 4.2.3. Räumliche Verteilung

Die räumliche Mittelung gibt einen Überblick über die Verbesserungen, die durch die klappenförmigen Aufsätze erzielt werden. Dennoch ist die Betrachtung der räumlichen Verteilung sinnvoll, um Verschlechterungen in interessierenden Gebieten auszuschließen. In den Abbildungen 4.13 bis 4.15 sind die Gesamtverbesserungsmaße (gemittelt über die Frequenz) für einen Klappenöffnungswinkel von 210° für die drei Quellwinkel zu sehen. Die Schallschutzwand befindet sich in diesen Abbildungen auf der rechten Seite bei $x = 0$. Die Klappe ist im Punkt (0,0) an der Schallschutzwand montiert. Die Messpositionen sind der Abb. 4.5 zu entnehmen.

Verbesserungen sind in Abb. 4.13 an allen Messpunkten zu finden. Damit wirkt sich das Anbringen eines klappenförmigen Aufsatzes auch auf weiter entfernte Gebiete aus. Die Wirkung der Klappe ist dichter an der Wand in diesem Fall noch etwas höher als weiter entfernt. Die Unterschiede betragen allerdings maximal 2 dB.

In Abb. 4.14 ist das Gesamtverbesserungsmaß für einen Quellwinkel von 60° bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° dargestellt. Hier beschränkt sich der Einfluss der Klappe auf den unteren Bereich. Auf den Bereichen oberhalb der Wand ($y > 0$) hat die Klappe kaum noch einen Einfluss, das Verbesserungsmaß liegt um 0 dB.

Bei einem Quellwinkel von 90° erhält man eine größere Verbesserung als in den beiden vorangegangenen Fällen. In Abb. 4.15 erkennt man im unteren Messbereich die größten Verbesserungen, nach oben nehmen diese etwas ab. Allerdings beeinflusst die Klappe hier auch die Bereiche oberhalb der Schallschutzwand positiv.

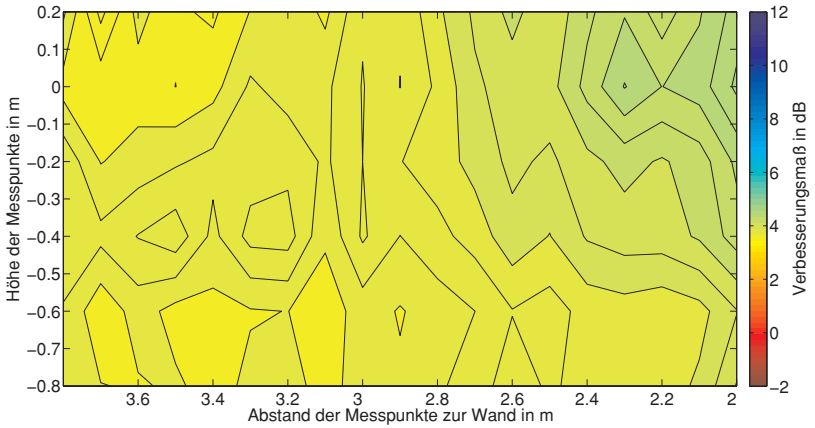


**Abbildung 4.13.:** Gesamtverbesserungsmaß für einen Klappenöffnungswinkel von 210° und einen Quellwinkel von 30°

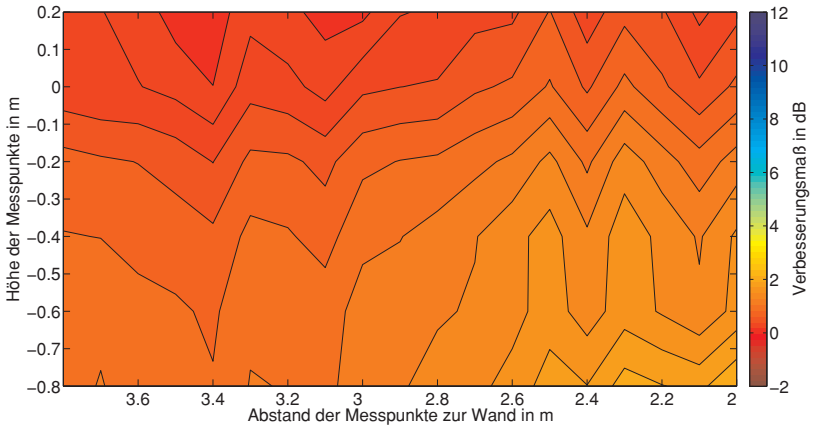


**Abbildung 4.14.:** Gesamtverbesserungsmaß für einen Klappenöffnungswinkel von 210° und einen Quellwinkel von 60°

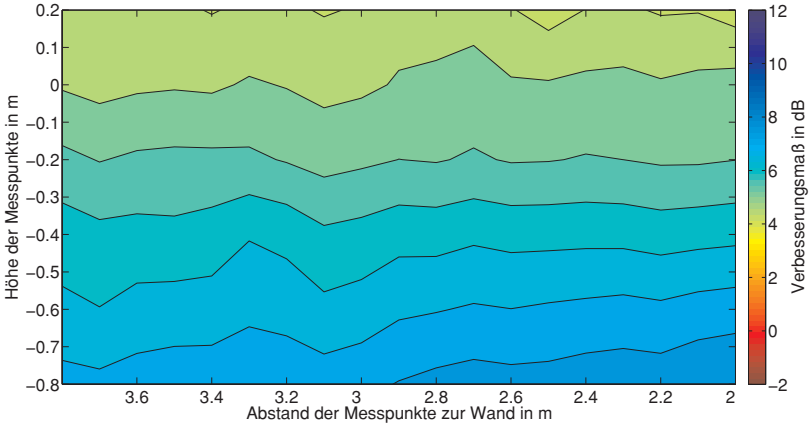


**Abbildung 4.15.:** Gesamtverbesserungsmaß für einen Klappenöffnungswinkel von 210° und einen Quellwinkel von 90°

Der Einfluss der Klappe wird im Folgenden für einzelne Messpunkte untersucht. Die Wahl fiel dabei auf die Punkte (1,1); (19,1); (8,3) und (8,6). Die Lage der Punkte im Messgitter ist der Abbildung 4.5 zu entnehmen. Der Klappenöffnungswinkel beträgt wieder 210°. Die Darstellung des Frequenzverlaufs erfolgt als Terzspektrum. Die Verläufe an den ausgewählten Messpunkten sind jeweils für eine Quellposition in einer Abbildung zusammengefasst.

In Abb. 4.16 sind die Terzspektren für einen Quellwinkel von 30° dargestellt. Die ermittelten Verbesserungsmaße schwanken zwischen den einzelnen Messpositionen nur wenig. Im tieffrequenten Bereich um 125 Hz erhält man das höchste Verbesserungsmaß für Punkte, die sehr weit oben liegen. Je niedriger und je dichter der Messpunkt an der Wand liegt, desto geringer ist für einen Quellwinkel von 30° das Verbesserungsmaß in dieser Terz. Aber auch in den Terzen 400 Hz und 630 Hz werden die höchsten Verbesserungen an dem Messpunkt, der am weitesten oben liegt, erzielt. Für den hochfrequenten Bereich oberhalb von 1000 Hz erhält man für tiefer liegende Messpunkte höhere Verbesserungsmaße, der Unterschied fällt allerdings geringer aus.

Bei einem Quellwinkel von 60° ist der Verlauf des Verbesserungsmaßes am Messpunkt (8,6) sehr ausgeprägt. Vor allem bei 315 Hz und 400 Hz liegt die aus Messungen ermittelte Verbesserung weit über der an den anderen gezeigten Messpunkten. Im übrigen Frequenzbereich liegen an

dieser höchsten Messposition allerdings die schlechtesten Ergebnisse vor. An allen anderen Messpositionen erhält man Verbesserungen bis knapp unter 5 dB.

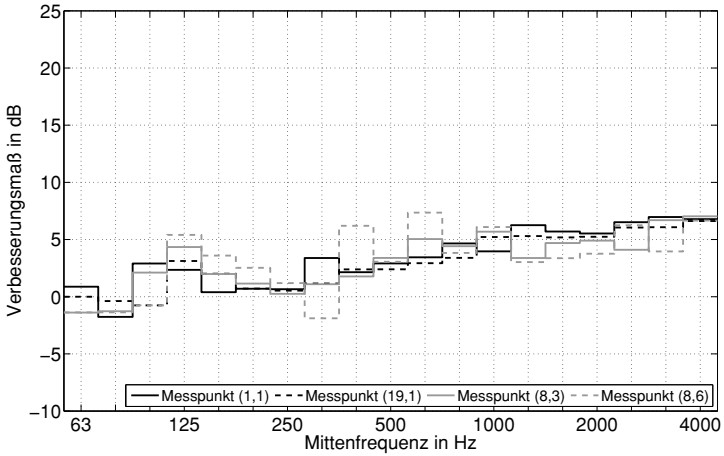


**Abbildung 4.16.:** Verbesserungsmaß an verschiedenen Messpositionen, Quellwinkel: 30°, Klappenöffnungswinkel: 210°

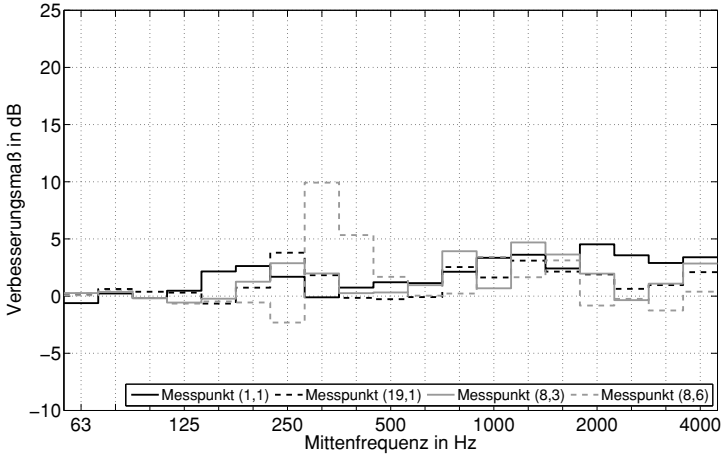


**Abbildung 4.17.:** Verbesserungsmaß an verschiedenen Messpositionen, Quellwinkel: 60°, Klappenöffnungswinkel: 210°

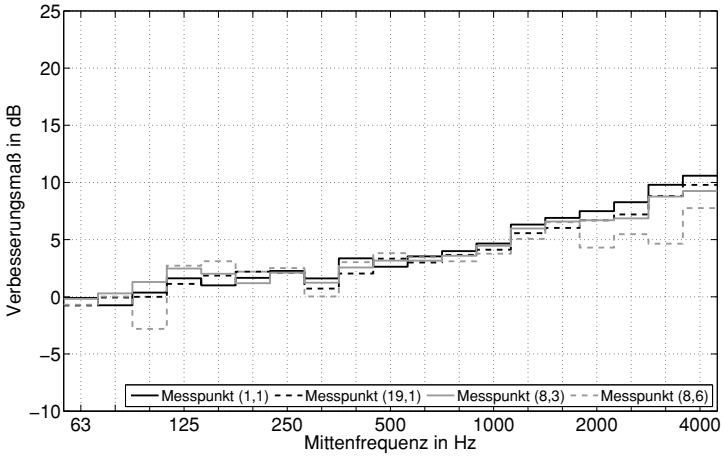


**Abbildung 4.18.:** Verbesserungsmaß an verschiedenen Messpositionen, Quellwinkel: 90°, Klappenöffnungswinkel: 210°

Liegt die Quelle sehr weit oben (dargestellt in Abb. 4.18 bei einem Quellwinkel von 90°) erzielt man für hohe Frequenzen Verbesserungen bis zu 10 dB. Im Messpunkt $(8, 6)$ liegt die erzielte Verbesserung um einige dB unter den Verbesserungen der anderen Punkte.

## 4.3. Aufsatz mit zwei gleich langen Klappen

Zusätzlich zu den Messungen mit einer Klappe wurden auch Messungen mit zwei Klappen durchgeführt. Da es hier 595 Kombinationsmöglichkeiten gibt, wurden sechs symmetrische Fälle ausgewählt. Die Kombinationen aus Klappenöffnungswinkeln sind in Tab. 4.1 aufgelistet. In dieser Tabelle ist auch das Gesamtverbesserungsmaß (gemittelt über alle Messpositionen und im Frequenzbereich 63 Hz bis 4000 Hz) zu finden. Die Kombination 180° – 180° diente dabei der Kontrolle, ob es einen Unterschied macht, die quellzugewandte oder die quellabgewandte Klappe bei 180° zu nutzen. Die Auswertung ist in Abschnitt 4.4 zu finden.

Am Gesamtverbesserungsmaß in Tab. 4.1 ist zu erkennen, dass eine Verbesserung durch den Aufsatz wie bei einer Klappe erst eintritt, wenn der Klappenöffnungswinkel der quellseitigen Klappe größer als der Quellwinkel ist. Mit zwei Klappen erzielt man zum Teil deutlich höhere

| Öffnungswinkel | | $VM_{\text{ges}}$ für Quellwinkel | | |
|---|---|---|---|---|
| Klappe 1 | Klappe 2 | 30° | 60° | 90° |
| 30° | 330° | 1,1 dB | −1,4 dB | 0,3 dB |
| 60° | 300° | 5,5 dB | −0,3 dB | −0,4 dB |
| 90° | 270° | 6,5 dB | 1,4 dB | 1,2 dB |
| 120° | 240° | 7,5 dB | 1,9 dB | 7,5 dB |
| 150° | 210° | 7,0 dB | 2,2 dB | 11,0 dB |
| 180° | 180° | 4,4 dB | 1,5 dB | 10,2 dB |

**Tabelle 4.1.:** Öffnungswinkelkombinationen und Gesamtverbesserungsmaße $VM_{\text{ges}}$ bei den Messungen mit zwei Klappen

Verbesserungsmaße als für einen Aufsatz mit einer Klappe (vergleiche Abschnitt 4.2.1). Vor allem bei einem Quellwinkel von 90° erhält man bei zwei Klappen ein 3 dB höheres Gesamtverbesserungsmaß.

### 4.3.1. Frequenzabhängigkeit

Die Terzspektren (gemittelt über alle Messpunkte) für alle sechs gemessenen Fälle mit zwei Klappen zeigen den frequenzabhängigen Einfluss der Klappen auf das Schallfeld. Bei einer Kombination aus einem sehr kleinen und einem sehr großen Klappenöffnungswinkel, dargestellt in Abb. 4.19, erzielt man lediglich für einen Quellwinkel von 30° eine Verbesserung. Bei einem Quellwinkel von 60° ist eine deutliche Verschlechterung ab 400 Hz zu erkennen. Die leichten Verbesserungen bei einem Quellwinkel von 90° werden durch die Verschlechterungen zwischen 315 Hz und 1000 Hz im Gesamtverbesserungsmaß aufgehoben.

Im zweiten Fall (siehe Abb. 4.20) ist der quellseitige Klappenöffnungswinkel mit 60° deutlich größer als der Quellwinkel von 30°. Dadurch erzielt man ab 400 Hz Verbesserungen von über 10 dB. Nur für sehr tiefe Frequenzen liegen in diesem Fall Verschlechterungen bis zu 3 dB vor. Für die beiden anderen Quellwinkel heben sich Verbesserungen und Verschlechterungen über den gesamten Frequenzbereich fast auf.

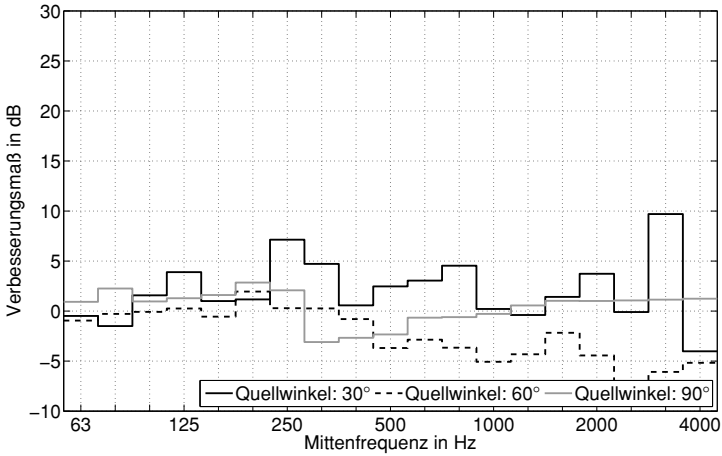


**Abbildung 4.19.:** Verbesserungsmaß für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 30° und 330°

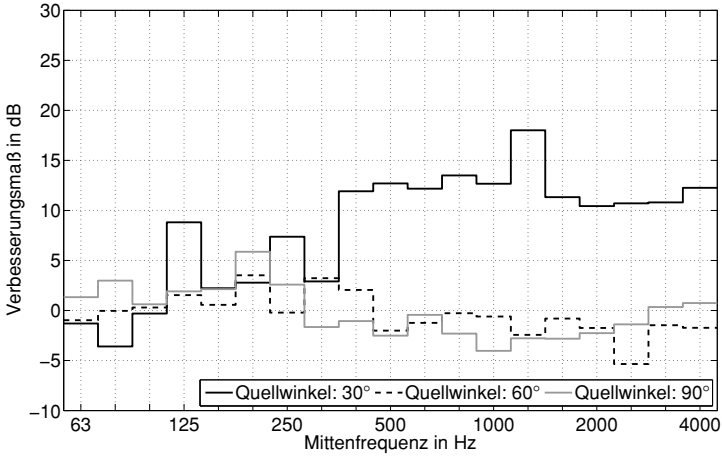


**Abbildung 4.20.:** Verbesserungsmaß für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 60° und 300°

In Abb. 4.21 ist der quellseitige Klappenöffnungswinkel dann groß genug, um für alle drei Quellwinkel über einen großen Frequenzbereich Verbesserungen zu erzielen. Allerdings erhält man für einen Quellwinkel von 30° im tieffrequenten Bereich wieder eine Verschlechterung, die

maximal 4 dB in der Terz bei 80 Hz beträgt. Zu bemerken ist hier noch, dass bei einem Quellwinkel von 90° vor allem eine positive Wirkung unterhalb von 500 Hz zu beobachten ist.

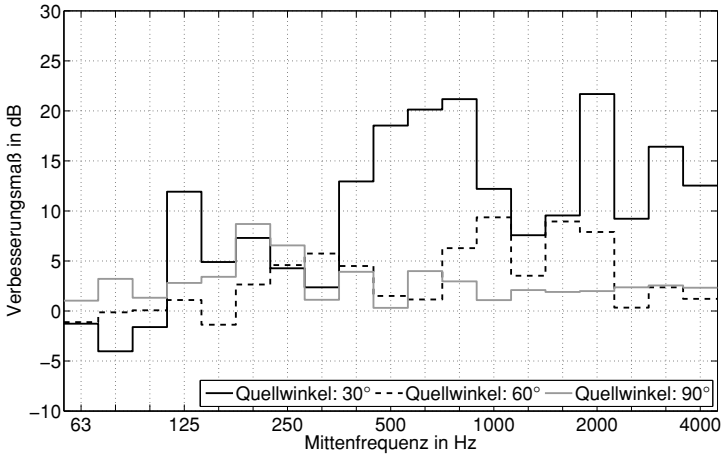


**Abbildung 4.21.:** Verbesserungsmaß für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 90° und 270°

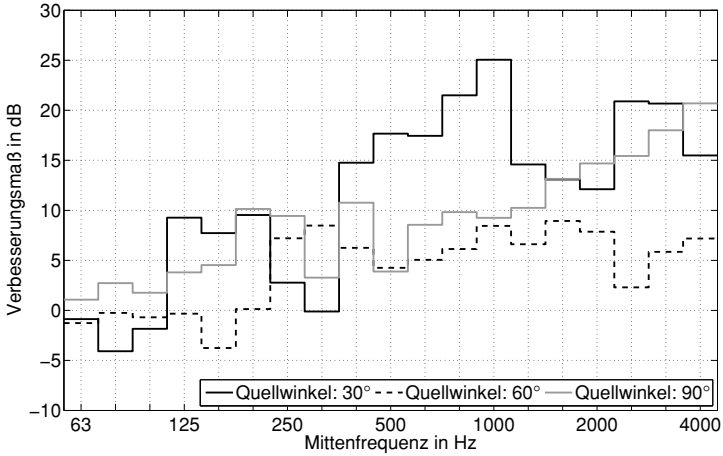


**Abbildung 4.22.:** Verbesserungsmaß für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 120° und 240°

Bei zwei Klappen mit Öffnungswinkeln von 120° und 240° (Abb. 4.22) erhält man auch für einen Quellwinkel von 90° hohe Verbesserungen, vor allem im hochfrequenten Bereich steigt das Verbesserungsmaß auf 10 dB bis 20 dB. Auch bei einem Quellwinkel von 30° erhält man hohe Verbesserungen, zum Teil bis 25 dB. Allerdings finden sich in diesem Terzspektrum auch stärkere Einbrüche (z. B. bei 315 Hz), die aber keine Verschlechterung darstellen. Lediglich im tieffrequenten Bereich haben die Klappen wieder einen negativen Einfluss auf das Schallfeld. Liegt die Quelle dazwischen (Quellwinkel: 60°), kann man durch zwei Klappen erst ab 250 Hz Verbesserungen erzielen. Diese liegen dann zwischen 4 dB und 9 dB.

Das höchste Gesamtverbesserungsmaß erhält man für Klappenöffnungswinkel von 150° und 210°. In Abb. 4.23 steigt das Verbesserungsmaß für die Quellwinkel 30° und 90° mit der Frequenz stark an. Die Maxima liegen im hochfrequenten Bereich bei 25 dB bis 30 dB. Bei einem Quellwinkel von 30° findet sich wieder ein Einbruch in den Terzen 250 Hz und 315 Hz. Das Minimum liegt hier bei −5 dB. Der Einfluss der Klappen auf das Schallfeld bei einem Quellwinkel von 60° steigt wieder erst ab 250 Hz stark an. Unterhalb von 250 Hz liegen Verschlechterungen von maximal 5 dB vor.

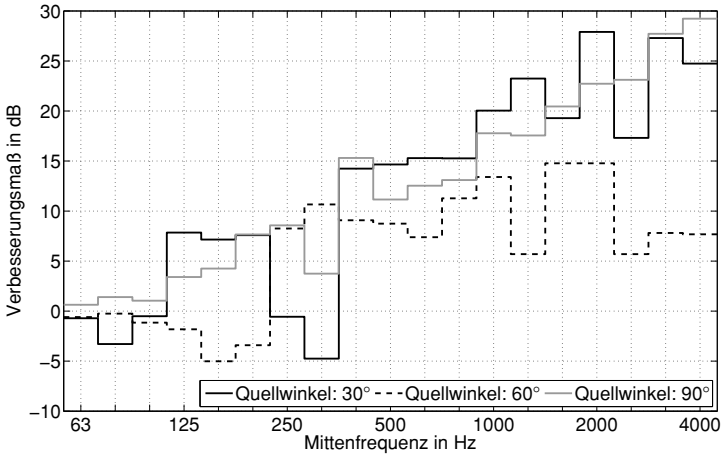


**Abbildung 4.23.:** Verbesserungsmaß für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 150° und 210°

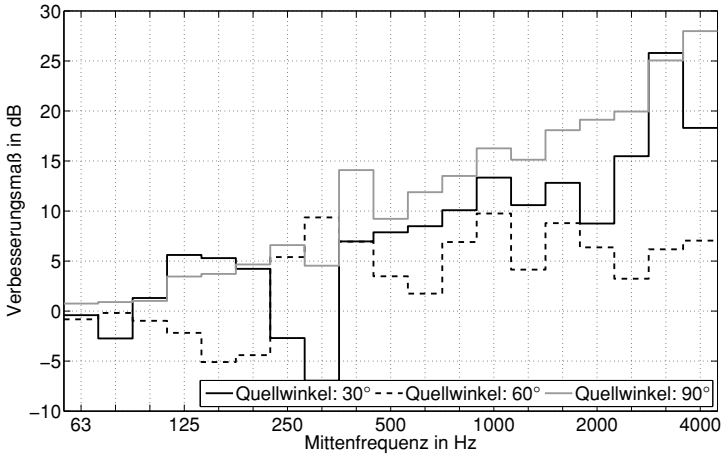


**Abbildung 4.24.:** Verbesserungsmaß für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 180° und 180°

In Abb. 4.24 sind die Terzspektrum für den letzten Fall dargestellt. Dabei sind beide Klappen bei einem Öffnungswinkel von 180° fixiert. Bei einem Quellwinkel von 90° steigt das Verbesserungsmaß mit der Frequenz bis auf 27 dB. Auch bei einem Quellwinkel von 30° steigt das Verbesserungsmaß mit der Frequenz an. Allerdings findet sich auch hier wieder ein Einbruch im Verbesserungsmaß in den Terzen 250 Hz und 315 Hz, der in diesem Fall mit −7 dB am stärksten ausgeprägt ist. Bei einem Quellwinkel von 60° liegt erst ab 250 Hz eine positive Verbesserung von maximal 10 dB vor. Im tieffrequenten Bereich unterhalb von 250 Hz erhält man eine Verschlechterung von bis zu 5 dB.

### 4.3.2. Räumliche Verteilung

Die örtliche Verteilung des Verbesserungsmaßes (als Gesamtpegel im Frequenzbereich 63 Hz bis 4000 Hz) ist in den Abbildungen 4.25 bis 4.27 zu sehen. Bei einem Quellwinkel von 30° in Abb. 4.25 ist gut zu erkennen, dass die Wirkung der Klappen sich vor allem auf den unteren Messbereich auswirkt. Die höchsten Verbesserungen wurden an der Position (2 m,−0,8 m) gemessen. Auch in Abb. 4.26 sind die Verbesserungen durch die Klappen deutlich erkennbar. Sie betragen bei einem Quellwinkel von 60° aber nur wenige dB. Die höchsten Werte

erzielt man bei einem Quellwinkel von 90° (siehe Abb. 4.27). Vor allem im unteren Bereich sind bis zu 20 dB Verbesserung möglich.

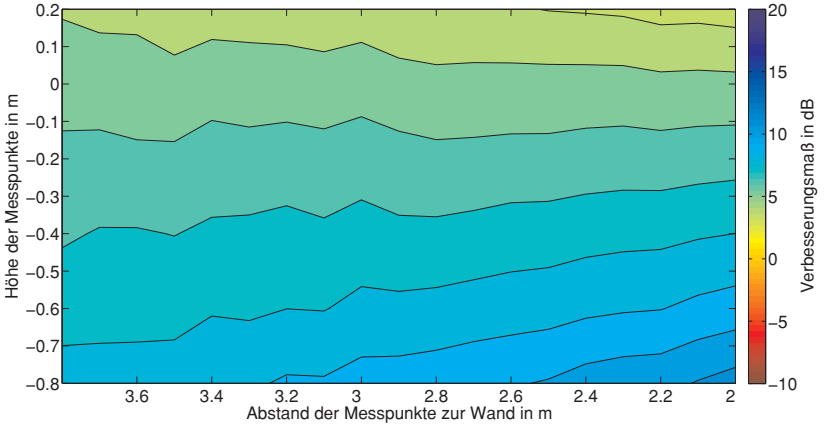


**Abbildung 4.25.:** Örtliche Verteilung des Verbesserungsmaßes für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 150° und 210° bei einem Quellwinkel von 30°

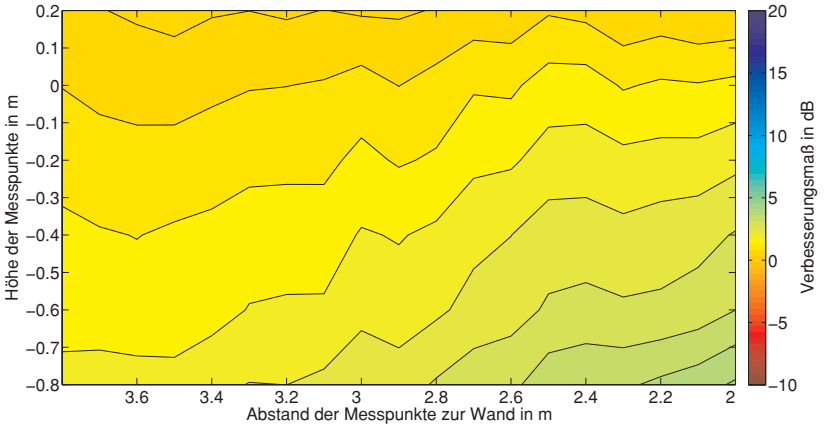


**Abbildung 4.26.:** Örtliche Verteilung des Verbesserungsmaßes für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 150° und 210° bei einem Quellwinkel von 60°

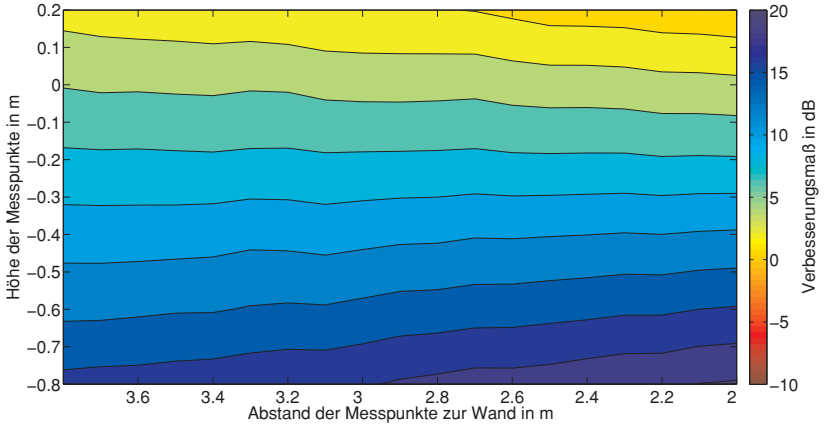


**Abbildung 4.27.:** Örtliche Verteilung des Verbesserungsmaßes für einen Aufsatz mit zwei Klappen und den Öffnungswinkeln 150° und 210° bei einem Quellwinkel von 90°

Vergleicht man diese Verläufe mit den Abbildungen 4.13 bis 4.15 für Aufsätze mit einer Klappe, stellt man fest, dass die räumliche Verteilung für Aufsätze mit zwei Klappen sehr viel glatter verlaufen. Eine zweite Klappe auf der quellabgewandten Seite wirkt sich also positiv auf die Verbesserung aus.

## 4.4. Messungen bei 180°

Da die bei den Messungen benutzte Wand eine Dicke von 140 mm hat, ergeben sich bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° gerade drei Fälle:

1. nur die quellseitige Klappe ist bei 180° fixiert, die zweite Klappe bleibt heruntergeklappt,
2. nur die quellabgewandte Klappe ist bei 180° fixiert, die zweite Klappe bleibt heruntergeklappt,
3. beide Klappen sind bei 180° (also senkrecht) fixiert.

Zunächst erfolgt der Vergleich zwischen der quellseitigen Klappe und der quellabgewandten Klappe (Vergleich von Fall 1 und Fall 2). Dargestellt wird dazu die Differenz der Verbesserungsmaße $\Delta VM$ gemittelt

über alle Messpunkte

$$\begin{aligned}\Delta VM =& 10\,\lg \frac{|p_{\text{quellseitige Klappe}}|^2}{|p_{\text{quellabgewandte Klappe}}|^2} \\ =& VM_{\text{quellseitige Klappe}} - VM_{\text{quellabgewandte Klappe}}\end{aligned} \tag{4.4}$$

In Abb. 4.28 sind die Differenzen der Verbesserungsmaße für verschiedene Quellwinkel dargestellt. Im tieffrequenten Bereich beträgt der Unterschied bei allen drei Quellwinkeln weniger als 2 dB. Die einzige Ausnahme bildet die Terz bei 160 Hz bei einem Quellwinkel von 60°, hier beträgt die Differenz etwa 3 dB. Während bei einem Quellwinkel von 90° die Unterschiede im Verbesserungsmaß von quellseitiger zu quellabgewandter Klappe in allen Terzen weniger als 2 dB, meistens sogar weniger als 1 dB betragen, sind die Unterschiede am deutlichsten bei einem Quellwinkel von 30° zu sehen. Hier wirkt sich die Lage der Klappe ab 400 Hz deutlich auf das Verbesserungsmaß aus. Dabei stellt man fest, dass die quellseitige Klappe ab 800 Hz die bessere Wahl ist. Die Verbesserung beträgt dann zwischen 2 dB und 7 dB im Vergleich zum Aufsatz mit quellabgewandter Klappe. Bei einem Quellwinkel von 60° ist die quellseitige Klappe die bessere Wahl. Nur in den Terzen 500 Hz und 630 Hz liefert die quellabgewandte Klappe die besseren Ergebnisse.

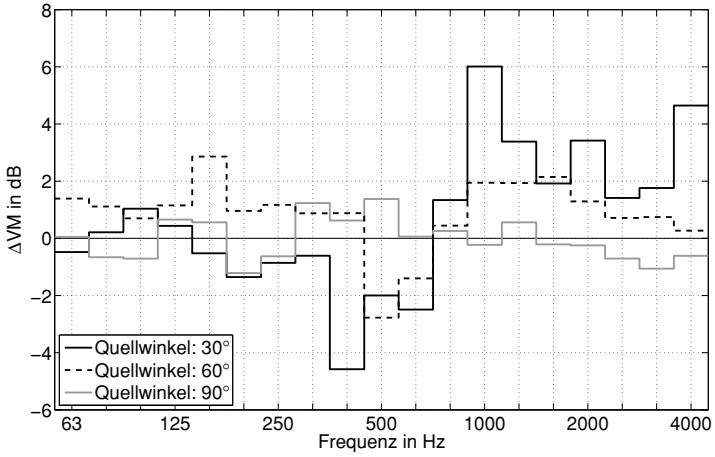


**Abbildung 4.28.:** Vergleich zwischen einem Aufsatz mit quellseitiger und quellabgewandter Klappe

Der Vergleich von Fall 1 mit Fall 3 erfolgt über die Differenz der Verbesserungsmaße $\Delta VM_1$

$$\begin{aligned}\Delta VM_1 =& 10\,\mathrm{lg}\,\frac{|p_{\text{quellseitige Klappe}}|^2}{|p_{\text{zwei Klappen}}|^2}\\ =& VM_{\text{quellseitige Klappe}} - VM_{\text{zwei Klappen}}\end{aligned} \tag{4.5}$$

bzw. beim Vergleich von Fall 2 mit Fall 3 über

$$\begin{aligned}\Delta VM_2 =& 10\,\mathrm{lg}\,\frac{|p_{\text{quellabgewandte Klappe}}|^2}{|p_{\text{zwei Klappen}}|^2}\\ =& VM_{\text{quellabgewandte Klappe}} - VM_{\text{zwei Klappen}}\,.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Für die Darstellung in Abb. 4.29 wird wieder der örtliche Mittelwert der Verbesserungsmaße benutzt. Beim Vergleich des Aufsatzes mit quellseitiger Klappe mit dem Aufsatz mit zwei Klappen weisen die Frequenzverläufe erst oberhalb der Terz 160 Hz einen deutlichen Einfluss der zweiten Klappe auf. Betrachtet man den Quellwinkel 30° wirkt sich die zweite Klappe zunächste negativ ($VM_{\text{eine Klappe}} - VM_{\text{zwei Klappen}} > 0$) auf das Verbesserungsmaß aus. Aber oberhalb von 630 Hz erzielt man sehr viel bessere Ergebnisse mit einer zweiten Klappe. Bei größeren Quellwinkeln (60° und 90°) erzielt man durch eine zweite Klappe im gesamten Frequenzbereich Verbesserungen. Einzige Ausnahme bilden die Terzen 200 Hz und 630 Hz bei einem Quellwinkel von 60°.

Auch beim Vergleich von zwei Klappen mit der quellabgewandten Klappe stellt man fest, dass bei einem Quellwinkel von 90° die zweite Klappe im gesamten Frequenzbereich höhere Verbesserungsmaße liefert. Die erzielte Verbesserung durch die zweite Klappe fällt für alle drei Quellwinkel etwas schlechter aus als beim Vergleich mit der quellseitigen Klappe, die Verläufe weisen ansonsten starke Ähnlichkeiten auf.

Daher ist auch eine Resonatorwirkung des Hohlraums zwischen den beiden Klappen auszuschließen. Ansonsten würde es sich hierbei um einen $\lambda/4$ Resonator handeln, der bei einer Tiefe von 30 cm eine Abstimmfrequenz von 283 Hz hätte. Diese Wirkung ist aber in den Messungen nicht nachweisbar. Um eine Resonatorwirkung zu erzielen, muss der Hohlraum zwischen den beiden Klappen noch zusätzlich unterteilt werden, erst dann kann eine Wirkung beobachtet werden, siehe auch [51].

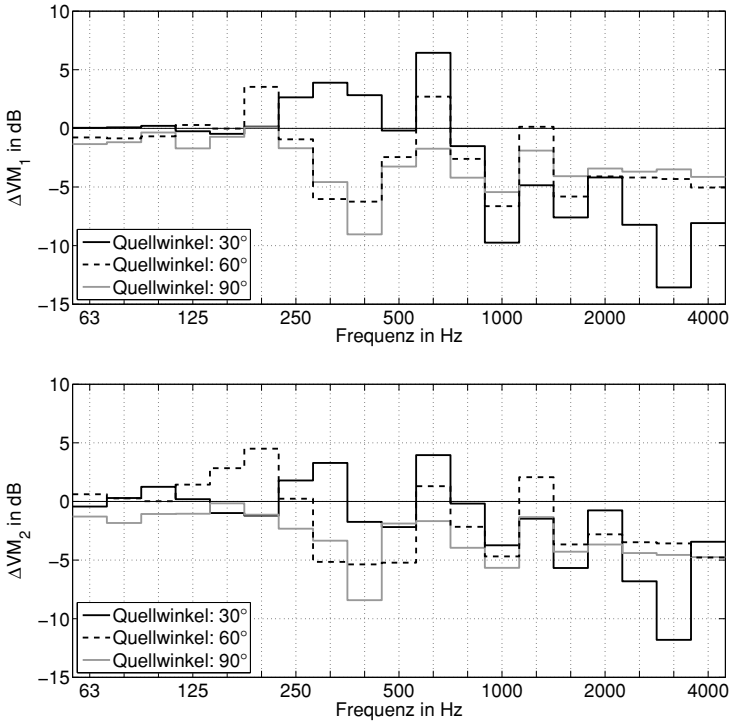


**Abbildung 4.29.:** Vergleich zwischen einem Aufsatz mit einer Klappe und einem Aufsatz mit zwei Klappen, oben mit quellseitiger Klappe, unten mit quellabgewandter Klappe

## 4.5. Mögliche Fehlerursachen bei den Messungen

Auch bei den Messungen sind Fehler nicht auszuschließen. Daher werden hier die möglichen Fehlerquellen betrachtet.

Der Aufbau des experimentellen Modells erfolgte in einer Raumecke. Auf Grund der Keilstruktur der Wände ist die Schallbeugung um die seitlichen Kanten der Wand trotz Einbringens von Füllmaterial nicht vollständig auszuschließen.

Die Bodenplatte unter der Quelle besteht aus einer 19 mm dicken Pressspanplatte. Die Koinzidenzgrenzfrequenz dieser Bodenplatte (Pressspan, Dicke $h = 19\,\mathrm{mm}$, Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in der Platte

$c_L = 2700\,\mathrm{m/s}$) beträgt

$$f_{cr} = \frac{c^2}{1{,}82 h c_L} \approx 1238\,\mathrm{Hz} \tag{4.7}$$

und liegt damit im gemessenen Frequenzbereich. Unterhalb der Koinzidenzgrenzfrequenz kann die Schalldämmung mit

$$R = 10\lg\left(\frac{m''\omega}{2\rho c}\right)^2 - 3\,\mathrm{dB} \tag{4.8}$$

für einen mittleren Schalleinfallswinkel von 45° abgeschätzt werden. Für tiefe Frequenzen liegt eine eher geringe Schalldämmung vor, die schnell mit 6 dB pro Oktave ansteigt. Die Schalldämmung bricht dann bei der Koinzidenzgrenzfrequenz ein und steigt oberhalb wieder an, da die Platte biegesteifes Verhalten aufweist. Die Schalldämmung ergibt sich zu

$$R = 10\lg\left(\frac{m''\omega}{2\rho c}\right)^2 + 5\lg\frac{f}{f_{cr}} + 10\lg 2\eta \tag{4.9}$$

und wird vom Verlustfaktor der Platte und dem Verhältnis von $f/f_{cr}$ beeinflusst.

Auf Grund der zweischaligen Bauweise der Schallschutzwand, kann es zu einem Dämmungseinbruch und damit zum Schalldurchgang durch die Wand kommen. Erst oberhalb der Resonanzfrequenz der Doppelwand ist die Schalldämmung hoch genug. Bei der Pressspan-Doppelwand ($m'' = 12{,}7\,\mathrm{kg/m^2}$) beträgt die Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho c^2}{m'' d}} \approx 52\,\mathrm{Hz} \tag{4.10}$$

und liegt damit unterhalb der Grenzfrequenz des reflexionsarmen Raums. Die Schalldämmung der Wand stellt bei den Untersuchungen also keine Fehlerquelle dar.

Die Klappe besteht im Gegensatz zur Wand nur aus einer Pressspanplatte. Daher gelten die Schalldämmungsbetrachtungen der einschaligen Bodenplatte auch für die Klappen.

Möglicherweise beeinflussen auch noch Reflexionen am Stativ und an dem Positioniersystem die Messergebnisse. Auf Grund der Abmessungen kann aber davon ausgegangen werden, dass der Einfluss sich eher hochfrequent auswirkt.

# 5

# Vergleich der Simulation mit der Messung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Simulationen mit denen der Experimente verglichen. Ziel ist es, zu überprüfen, ob das numerische Modell genutzt werden kann, um den Einfluss von klappenförmigen Aufsätzen auf die Beugung an der Schallschutzwand zu beschreiben. Das trifft zu, wenn sich der berechnete Einfluss dieser Klappen in den Messungen nachweisen lässt.

Die Simulationsergebnisse basieren auf einem Modell mit gleichen Abmessungen wie die Schallschutzwand, die bei den Experimenten genutzt wurde. Die Punkte, an denen in der Simulation das Schallfeld berechnet wird, entsprechen den Mikrofonpositionen bei den Messungen. Der Aufbau ist in Abb. 4.5 mit allen Längenangaben zu finden.

## 5.1. Aufsatz mit einer Klappe

Zunächst werden die Ergebnisse aus den Messungen und Simulationen für Aufsätze mit einer Klappe verglichen. Da der Klappenöffnungswinkel, wie schon bei der Messung gezeigt, eine entscheidende Rolle bei der Abschirmwirkung spielt, werden als erstes die Gesamtverbesserungsmaße aus Simulation und Messung für verschiedene Klappenöffnungswinkel

untersucht. Im Anschluss daran erfolgt eine frequenzabhängige Betrachtung sowohl für das räumlich gemittelte Verbesserungsmaß als auch für das Verbesserungsmaß an einzelnen Aufpunkten.

### 5.1.1. Vergleich für verschiedene Klappenöffnungswinkel

Einer der entscheidenden Parameter bei der Wirkung von klappenförmigen Aufsätzen ist der Klappenöffnungswinkel. Daher bietet sich an dieser Stelle ein Vergleich der Gesamtverbesserungsmaße aus den Messungen und den Simulationen für die drei Quellpositionen an.

Bei einem Quellwinkel von 30° sind in Abb. 5.1 die Ähnlichkeiten zwischen den Ergebnissen aus der Messung und den Simulationsergebnissen für eine Linienquelle deutlich zu erkennen. Die Abschirmwirkung durch die Klappe setzt in allen drei Fällen (auch für die ebene Welle) bei einem Klappenöffnungswinkel von 30° ein. Die im Experiment ermittelten Verbesserungsmaße liegen dabei noch über den berechneten Verbesserungen. Die Abweichungen betragen allerdings maximal 2 dB. Die Wirkung der Klappe wird durch die Berechnung des Verbesserungsmaßes mit Hilfe einer einfallenden ebenen Welle weit unterschätzt. In diesem Fall liefert die Vereinfachung des numerischen Modells nur ungenaue Ergebnisse. Die gemessenen Verschlechterungen (im rechten Polardiagramm von Abb. 5.1) werden durch die berechneten Ergebnisse im Fall einer Linienquelle sehr gut wiedergegeben.

In Abb. 5.2 ist der Vergleich der berechneten Verbesserungsmaße mit den Ergebnissen aus den Messungen für einen Quellwinkel von 60° zu sehen. Die berechneten Gesamtverbesserungsmaße im Fall einer Linienquelle überschätzen die Wirkung der Klappe, die messtechnisch bestimmt wurde. Die richtungsabhängige Wirkung ist tendenziell im Verlauf zu erkennen. Die Abweichungen zwischen den Messergebnissen und den berechneten Ergebnissen mit einer ebenen Welle fallen geringer aus. Die im rechten Diagramm abgebildeten Verschlechterungen zeichnen ein anderes Bild. Hier liegen die drei Kurven dichter beieinander. Für kleine Öffnungswinkel stimmen die Ergebnisse aus der Simulation mit einer ebenen Welle besser mit den aus Messungen ermittelten Ergebnissen überein, für große Winkel ist es umgekehrt.

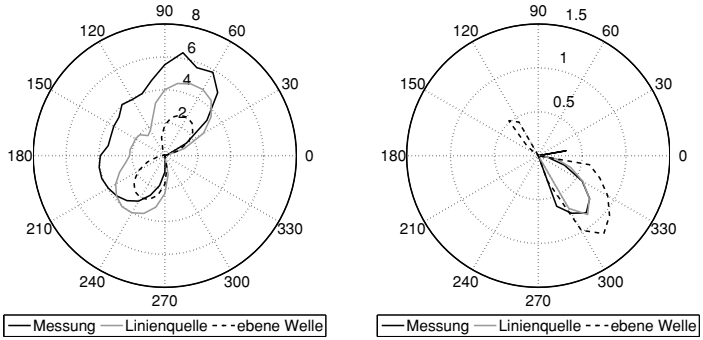


**Abbildung 5.1.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 30°

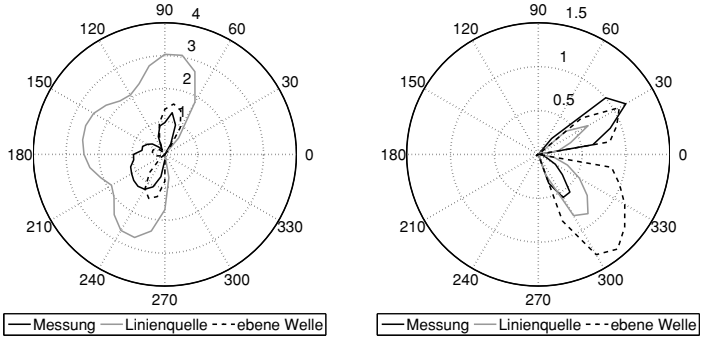


**Abbildung 5.2.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 60°

Bei einem Quellwinkel von 90° in Abb. 5.3 stimmen die messtechnisch bestimmten Verbesserungsmaße und die aus der Simulation mit einer Linienquelle gut überein. Eine maximale Abweichung von 2 dB ist bei 180° zu beobachten. Die Verschlechterung wird eher überschätzt. Da die Verschlechterungen sehr gering sind, betragen die Abweichungen maximal 1 dB. Bei der Simulation mit einer ebenen Welle erhält man bei einem Quellwinkel von 90° hingegen keine Verbesserungen.

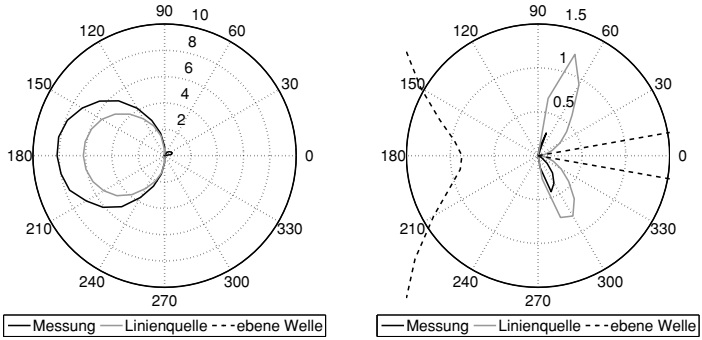


**Abbildung 5.3.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 90°

### 5.1.2. Frequenzabhängiger Vergleich

Die nächsten Abbildungen zeigen die Terzspektren der über alle Messpunkte bzw. Aufpunkte der Simulation gemittelten Verbesserungsmaße. Genau wie bei den Simulations- und Messergebnissen werden wieder die Klappenöffnungswinkel 80°, 180° und 210° exemplarisch betrachtet.

In Abb. 5.4 sind die Ergebnisse aus den Simulationen und der Messung für einen Klappenöffnungswinkel von 80° und einem Quellwinkel von 30° dargestellt. Die berechneten Verbesserungsmaße bilden den Frequenzverlauf der Messungen gut ab, Tendenzen sind klar zu erkennen. Die Abweichungen sind allerdings nicht zu vernachlässigen, da sie zum Teil bis zu 10 dB betragen. Dabei überschätzen die Berechnungsergebnisse aus der Simulation mit einer Linienquelle die tatsächlich gemessenen Verbesserungen bis zur Terz von 630 Hz. Für höhere Frequenzen können messtechnisch höhere Verbesserungen nachgewiesen werden. Vergleicht man die Ergebnisse aus der Simulation mit einer ebenen Welle mit den Messergebnissen, so erhält man fast durchgehend geringere Verbesserungsmaße aus der Simulation als tatsächlich gemessen wurden. Lediglich in einzelnen Terzen sind messtechnisch geringere Verbesserungen als aus der Simulation nachweisbar.

Bei einem Quellwinkel von 60° findet man gute Übereinstimmungen der Simulationsergebnisse mit den Messergebnissen ab 500 Hz (siehe

Abb. 5.5). Dabei liegen nur geringfügige Unterschiede zwischen der Simulation mit einer Linienquelle und einer ebenen Welle vor. Unterhalb von 500 Hz wird die Wirkung der Klappe durch die Simulationsergebnisse überschätzt. Dabei treten wieder Abweichungen von bis zu 10 dB auf.

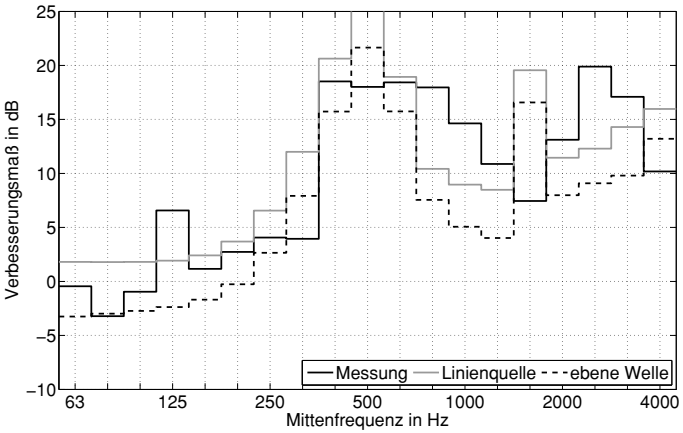


**Abbildung 5.4.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° und einem Quellwinkel von 30°

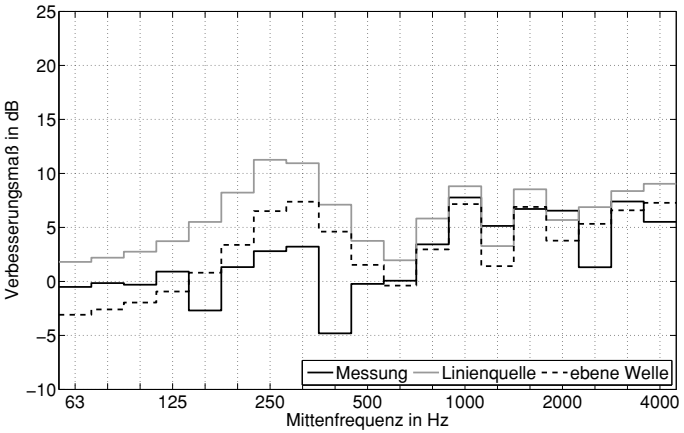


**Abbildung 5.5.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° und einem Quellwinkel von 60°

In Abb. 5.6 sind die Verbesserungsmaße für einen Quellwinkel von 90° dargestellt. Hier sieht man, dass die Ergebnisse aus der Berechnung mit einer ebenen Welle weit unter den gemessenen Werten liegen. Die Wirkung der Klappe wird auf Grund des senkrechten Schalleinfalls unterschätzt. Die Ergebnisse aus der Simulation mit einer Linienquelle bilden den im Labor gemessenen Verlauf sehr viel besser ab. Für die Klappenwirkung ist hier also die Krümmung der Welle entscheidend.

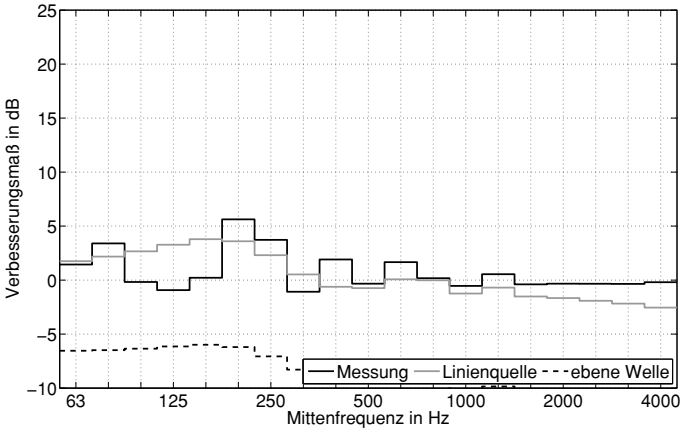


**Abbildung 5.6.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° und einem Quellwinkel von 90°

Abb. 5.7 zeigt den Vergleich bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° für einen Quellwinkel von 30°. Hierbei liegen die Abweichungen zwischen Linienquelle und ebener Welle bei knapp 5 dB. Die aus den Messungen bestimmten Verbesserungsmaße weisen deutlich mehr Schwankungen auf als die berechneten Werte. Ähnlich verhält es sich in Abb. 5.8 bei einem Quellwinkel von 60°. Die Abweichungen sind hier allerdings nicht ganz so groß.

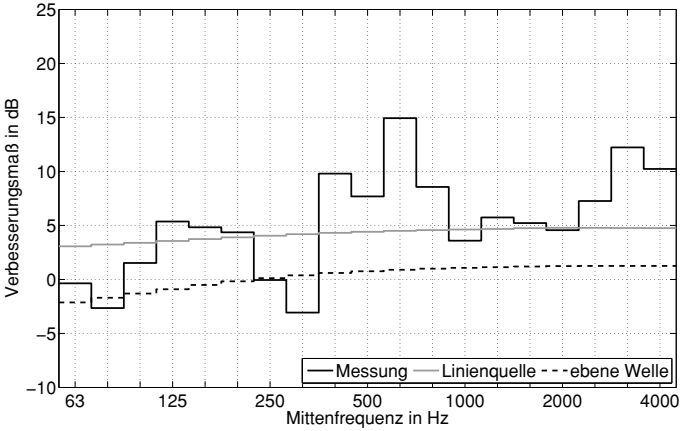


**Abbildung 5.7.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° und einem Quellwinkel von 30°

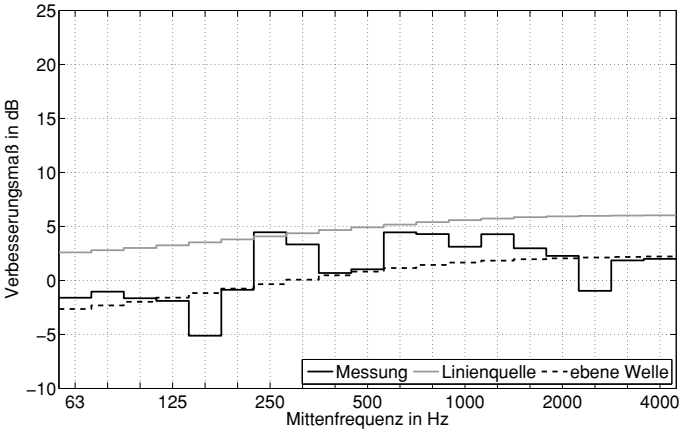


**Abbildung 5.8.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° und einem Quellwinkel von 60°

Bei einem Quellwinkel von 90° bilden die Simulationsergebnisse für die Linienquelle den Verlauf aus den Messungen mit geringen Abweichungen vor allem in den tiefen Frequenzen gut ab (Abb. 5.9). Lediglich der Einbruch in der Terz bei 315 Hz tritt nur bei den Messergebnissen auf.

Hierbei spielt der Unterschied zwischen Messaufbau und Modell die entscheidende Rolle (siehe Abschnitt 5.3). Die Simulationsergebnisse für die ebene Welle unterschätzen die Wirkung der Klappe sehr stark und sind an dieser Stelle nicht geeignet, die Wirkung abzuschätzen.

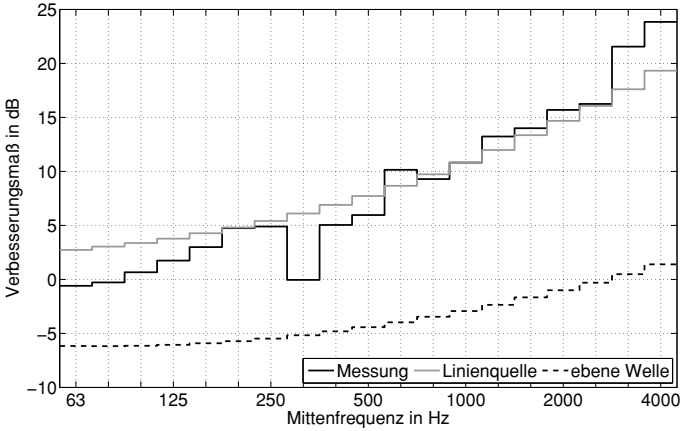


**Abbildung 5.9.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° und einem Quellwinkel von 90°

Die Unterschiede zwischen Messergebnissen und Simulationsergebnissen für einen Klappenöffnungswinkel von 180° sind vor allem auf die Dicke der Wand in der Messung zurückzuführen. Im numerischen Modell wird die halbunendliche Schneide als Grundmodell für eine schallharte Wand benutzt, die durch die Klappe bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° verlängert wird. Dabei gibt es im Modell keine Anschlussstellen zwischen Wand und Klappe und der klappenförmige Aufsatz entspricht einer perfekten Verlängerung der Wand. Im Experiment wird eine Wand aus Pressspan mit einer Gesamtdicke von 14 cm benutzt. Die Klappe, die als Verlängerung der Wand dient, ist lediglich aus einer Schicht Pressspan und kann im Unterschied zur Simulation nicht als perfekte Verlängerung der Schallschutzwand angesehen werden. Hier wird die quellseitige Klappe betrachtet, die mit Hilfe eines Scharniers an der Wand befestigt ist. Die Anschlussstelle wirkt sich daher auch auf die Messergebnisse aus. Hinzu kommt, dass die Klappe nicht exakt bei 180° fixiert werden kann (±2°) und sich dies auf die Messergebnisse auswirkt.

Im letzten Beispiel werden die Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° verglichen. Die Verbesserungsmaße für einen Quellwinkel von 30° sind in Abb. 5.10 dargestellt. Die Ergebnisse aus der Simulation mit Linienquelle weichen vor allem im tieffrequenten Bereich bis 100 Hz von den Messwerten ab. Im Gegensatz zur Messung brechen die Verbesserungsmaße aus den Simulationen rund um 200 Hz nicht ein und weichen daher um bis zu 8 dB von den Messergebnissen ab. Ab 400 Hz sind die Abweichungen zwischen den Messwerten und den Werten aus der Simulation mit einer Linienquelle gering und liegen bei maximal 3 dB.

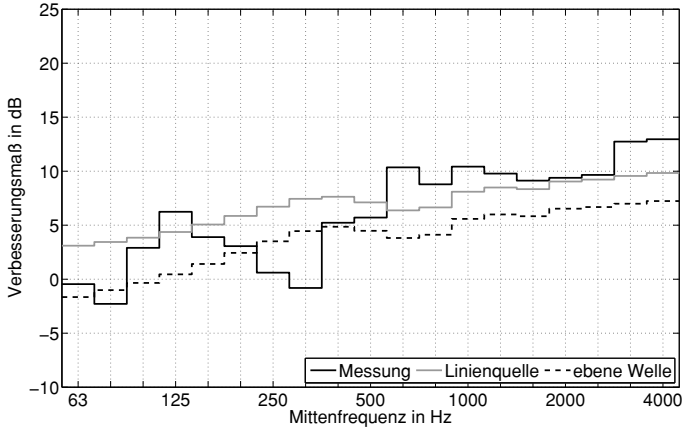


**Abbildung 5.10.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° und einem Quellwinkel von 30°

Bei einem Quellwinkel von 60° weichen die Ergebnisse aus den Simulationen mit Linienquelle wieder stärker von den Messergebnissen ab als die Verbesserungsmaße für eine ebene Welle (Abb. 5.11). Aber auch hier ist der Unterschied zwischen Linienquelle und Messung für hohe Frequenzen gering. In diesem Bereich ist die Abweichung zwischen den Simulationsergebnissen mit einer ebenen Welle und den Messergebnissen dann wieder höher.

In Abb. 5.12 sind die Terzspektren für einen Klappenöffnungswinkel von 210° bei einem Quellwinkel von 90° zu sehen. Hier bilden die Ergebnisse aus der Simulation mit einer Linienquelle die Messergebnisse sehr gut ab. Lediglich im tieffrequenten Bereich bis 100 Hz sind Abweichungen

von maximal 5 dB vorhanden. Die Ergebnisse aus der Simulation mit einer ebenen Welle liegen weit unter den beiden anderen Kurven und sind nicht geeignet, die aus Messungen ermittelten Verbesserungemaße abzubilden.

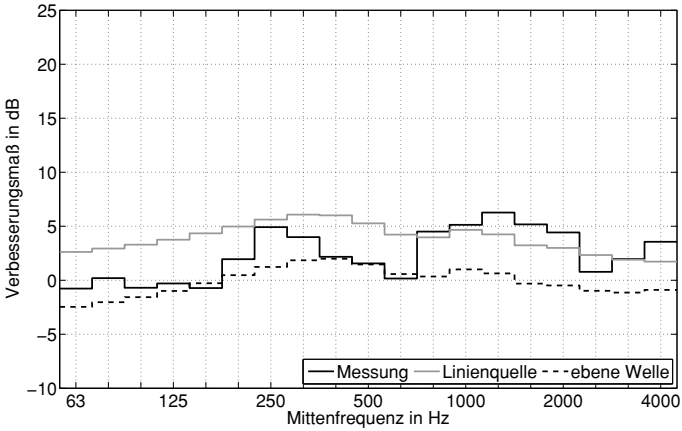


**Abbildung 5.11.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° und einem Quellwinkel von 60°

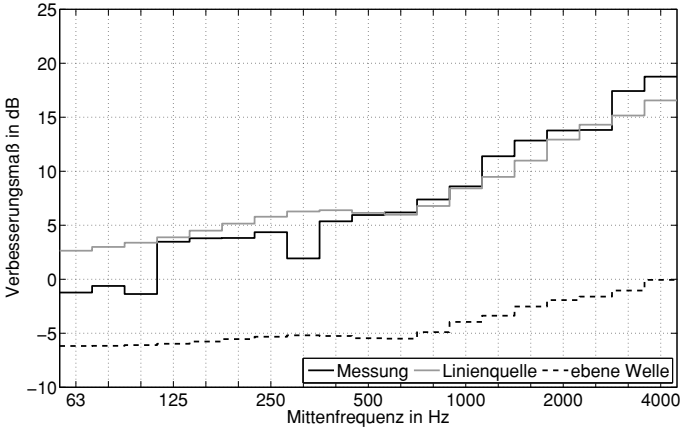


**Abbildung 5.12.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° und einem Quellwinkel von 90°

### 5.1.3. Vergleich an ausgewählten Messpositionen

Die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Abschnitt sind über alle Messpositionen gemittelte Verbesserungsmaße. Nun sollen die Ergebnisse aus den Messungen und den Simulationen noch exemplarisch an einigen Messpositionen verglichen werden. Von den 114 Positionen, an denen Drücke gemessen bzw. berechnet wurden (siehe Abb. 4.5), hat sich mit wenigen Ausnahmen übereinstimmendes Verhalten gezeigt. Exemplarisch werden deshalb die Punkte (8,3) und (19,1) betrachtet.

Zunächst werden die Verbesserungsmaße für einen Klappenöffnungswinkel von 80° betrachtet. In Abb. 5.13 sind die Terzspektren an Punkt (19,1) für einen Quellwinkel von 30° dargestellt. Man sieht deutlich, dass die berechneten Verbesserungsmaße die aus Messungen ermittelten Verbesserungsmaße gut abbilden. Dabei kommt es nur in einzelnen Terzen zu größeren Abweichungen. Die Ergebnisse aus der Simulation mit einer ebenen Welle bilden vor allem im tieffrequenten Bereich die gemessenen Werte gut ab. Für höhere Frequenzen sind die Abweichungen von den Ergebnissen aus der Simulation mit einer Linienquelle zu den gemessenen Werten geringer.

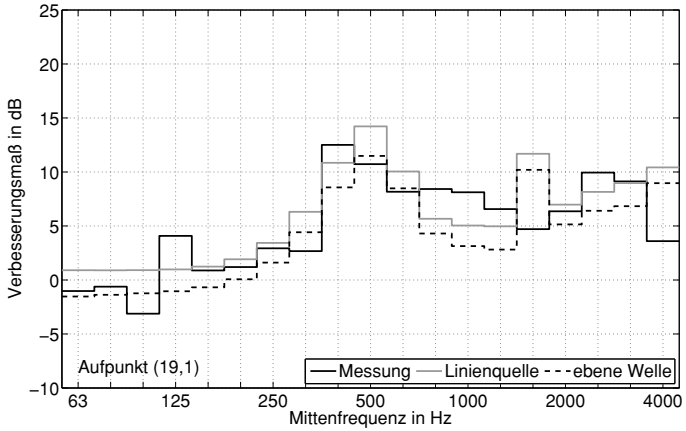


**Abbildung 5.13.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation für einen Quellwinkel von 30° bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° an der Messposition (19,1)

Schaut man sich einen zweiten Punkt für den gleichen Klappenöffnungswinkel und die gleiche Quellposition an (Abb. 5.14), stellt man fest, dass auch in diesem Fall die Messergebnisse gut durch die berechneten Verbesserungsmaße abgebildet werden. Die größten Abweichungen erhält man bei 125 Hz und 1600 Hz, wobei im ersten Fall die Messwerte anscheinend den „Ausreißer“ darstellen.

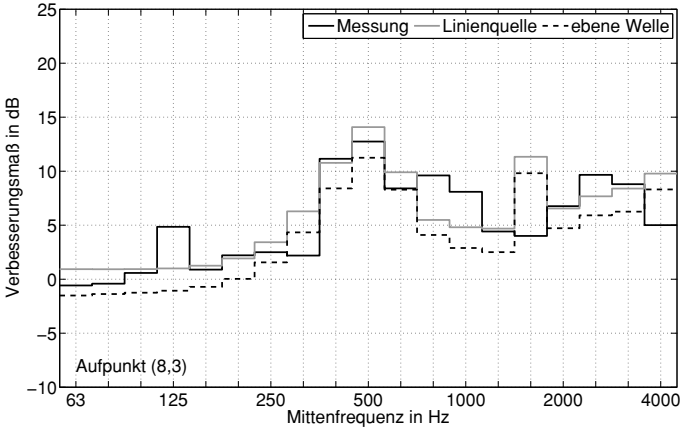


**Abbildung 5.14.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation für einen Quellwinkel von 30° bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° an der Messposition (8,3)

Die Ergebnisse an Messposition (8,3) sind in Abb. 5.15 für einen Klappenöffnungswinkel von 80° und einen Quellwinkel von 60° dargestellt. Die größten Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Verbesserungsmaßen sind hier im Frequenzbereich um 250 Hz zu beobachten. Die Unterschiede betragen weniger als 5 dB, ansonsten liegen die Werte dicht beieinander.

Bei einem Quellwinkel von 90° (siehe Abb. 5.16) weichen vor allem die Ergebnisse aus der Simulation mit ebener Welle stark von den aus Messungen ermittelten Verbesserungsmaßen ab. Die mit einer Linienquelle berechneten Verbesserungsmaße bilden die gemessenen Werte gut ab.

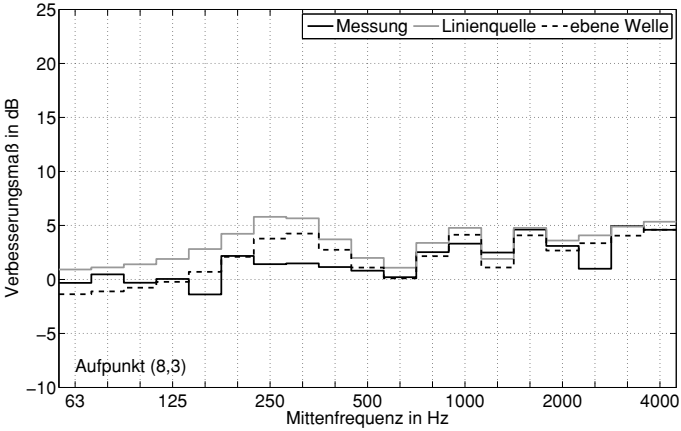


**Abbildung 5.15.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation für einen Quellwinkel von 60° bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° an der Messposition (8,3)

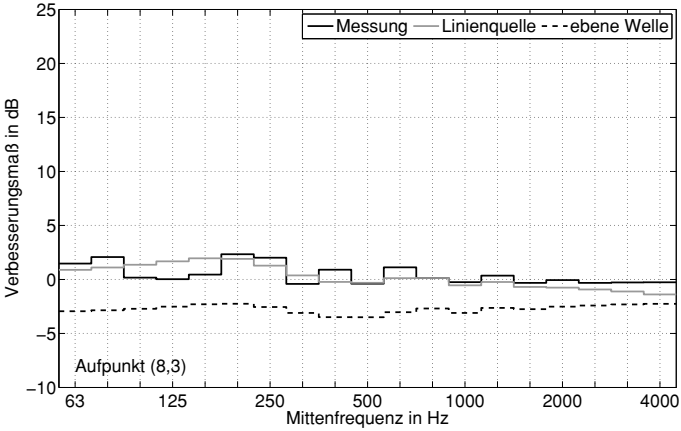


**Abbildung 5.16.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation für einen Quellwinkel von 90° bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° an der Messposition (8,3)

Auch im nächsten Fall (Klappenöffnungswinkel 180°, Abb. 5.17) bilden die mit einer Linienquelle berechneten Verbesserungsmaße die messtechnisch ermittelte Wirkung der Klappen gut ab. Da der Quellwinkel 90°

beträgt, ist die Abweichung der Simulationsergebnisse der ebenen Welle sehr viel größer und bilden das frequenzabhängige Verhalten schlecht ab.

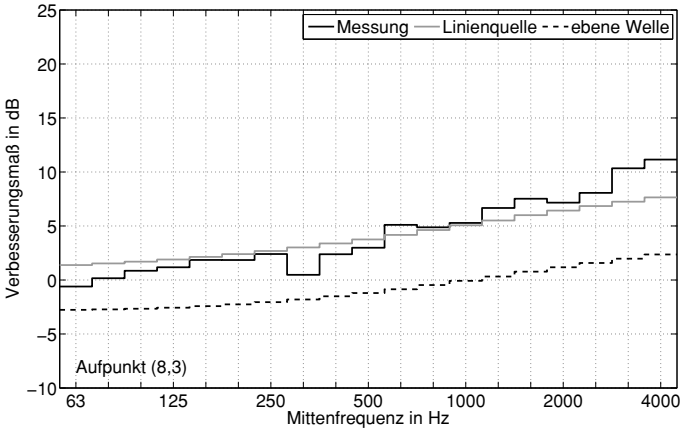


**Abbildung 5.17.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation für einen Quellwinkel von 90° bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° an der Messposition (8,3)

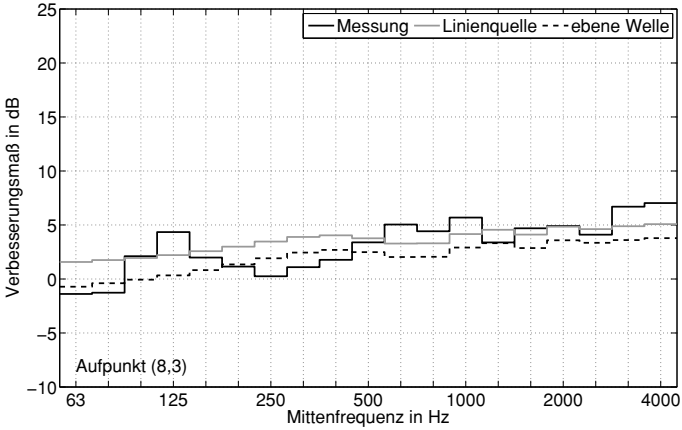


**Abbildung 5.18.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation für einen Quellwinkel von 30° bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° an der Messposition (8,3)

Bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° und einem Quellwinkel von 30° zeigt sich ein ähnliches Bild (Abb. 5.18). Vor allem oberhalb 500 Hz sind die Unterschiede zwischen Messung und Simulation sehr gering. Unterhalb von 100 Hz ist der Unterschied zwischen Messung und ebener Welle am geringsten und die Ergebnisse der Linienquelle liegen etwa 2 dB über den Messwerten.

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass die berechneten Verbesserungsmaße die aus Messungen ermittelten Verbesserungsmaße gut abbilden. Dabei sind die Abweichungen der Berechnungen mit einer Linienquelle geringer als die mit einer ebenen Welle. Vor allem bei einem Quellwinkel von 90° weichen die Simulationsergebnisse bei einer ebenen Welle stark von den gemessenen Verbesserungsmaßen ab. Der Abstand zwischen Quelle und Schallschutzwand ist in der Messung also nicht groß genug, um als einfallende ebene Welle aufgefasst zu werden. Prinzipiell ist das in Kapitel 3 vorgestellte numerische Modell gut geeignet, um die akustische Wirkung von Klappen zu berechnen. Die Abweichungen zwischen den berechneten und gemessenen Verbesserungsmaßen sind in den Unterschieden zwischen numerischem Modell und experimentellem Aufbau zu finden. Eine ausführliche Diskussion der Unterschiede ist in Abschnitt 5.3 zu finden.

## 5.2. Aufsatz mit zwei Klappen

Auch bei Aufsätzen mit zwei Klappen erfolgt hier der Vergleich der Ergebnisse aus Simulation und Messung. In Tab. 5.1 sind die Gesamtverbesserungsmaße (gemittelt über alle Aufpunkte und die Terzen von 63 Hz bis 4000 Hz) für alle gemessenen Fälle aufgetragen.

Vor allem für Kombinationen aus sehr kleinen und sehr großen Öffnungswinkeln (30° und 330°) erhält man nur im günstigsten Fall geringe Verbesserungen. Erst wenn der erste Klappenöffnungswinkel mindestens genauso groß wie der Quellwinkel ist, sind die erzielten Verbesserungen nennenswert. Auffällig ist, dass bei einem Quellwinkel von 60° die aus Messungen bestimmten Verbesserungen weit unter denen für die anderen beiden Quellpositionen liegen. Hier sei erwähnt, dass bei einem Quellwinkel von 60° ein aktiver Mehr-Wege Lautsprecher zum Einsatz kam. Die Auswirkungen dieses Lautsprechers auf die Messungen werden in Abschnitt 5.3 behandelt.

Auch bei zwei Klappen sieht man, dass bei einem Quellwinkel von 90° die Ergebnisse aus den Berechnungen mit der ebenen Welle stark

| Öffnungswinkel Klappe 1 | Öffnungswinkel Klappe 2 | Quell-winkel | Messung | $VM_{\text{ges}}$ Linienquelle | $VM_{\text{ges}}$ ebene Welle |
|---|---|---|---|---|---|
| 30° | 330° | 30° | 1,1 dB | 2,4 dB | 1,6 dB |
| | | 60° | −1,4 dB | −1,4 dB | −1,6 dB |
| | | 90° | 0,3 dB | −0,7 dB | −5,4 dB |
| 60° | 300° | 30° | 5,5 dB | 4,8 dB | 3,0 dB |
| | | 60° | −0,3 dB | 0,9 dB | 0,2 dB |
| | | 90° | −0,4 dB | −2,0 dB | −6,1 dB |
| 90° | 270° | 30° | 6,5 dB | 5,2 dB | 2,9 dB |
| | | 60° | 1,4 dB | 3,9 dB | 2,1 dB |
| | | 90° | 1,2 dB | 0,7 dB | −4,9 dB |
| 120° | 240° | 30° | 7,5 dB | 5,0 dB | 2,6 dB |
| | | 60° | 1,9 dB | 5,2 dB | 2,7 dB |
| | | 90° | 7,5 dB | 6,3 dB | −1,8 dB |
| 150° | 210° | 30° | 7,0 dB | 4,8 dB | 2,5 dB |
| | | 60° | 2,2 dB | 5,3 dB | 2,7 dB |
| | | 90° | 11,0 dB | 8,4 dB | −0,1 dB |
| 180° | 180° | 30° | 4,4 dB | 2,1 dB | 0,2 dB |
| | | 60° | 1,5 dB | 2,5 dB | 0,3 dB |
| | | 90° | 10,2 dB | 6,2 dB | −0,9 dB |

**Tabelle 5.1.:** Öffnungswinkelkombinationen und Gesamtverbesserungsmaße $VM_{\text{ges}}$ für Aufsätze mit zwei Klappen

von den Messergebnissen abweichen. Der bei den Messungen eingesetzte Lautsprecher erzeugt auf Grund des geringen Abstandes zur Wand bei einem Quellwinkel von 90° noch eine starke Krümmung des Wellenfeldes. Dadurch weichen die aus Messungen bestimmten Verbesserungen stark von denen aus der Simulation mit einer ebenen Welle ab.

Die Gesamtverbesserungsmaße sind lediglich Anhaltspunkte, um die Gesamtwirkung abzuschätzen. Als nächstes werden die frequenzabhängigen Verbesserungsmaße aus den Messungen und den Simulationen verglichen.

Schaut man sich den Verlauf des Verbesserungsmaßes in Abb. 5.19 an, sieht man, dass vor allem im mittleren Frequenzbereich die Ergebnisse aus der Simulation mit einer Linienquelle stark von den gemessenen Werten abweichen.

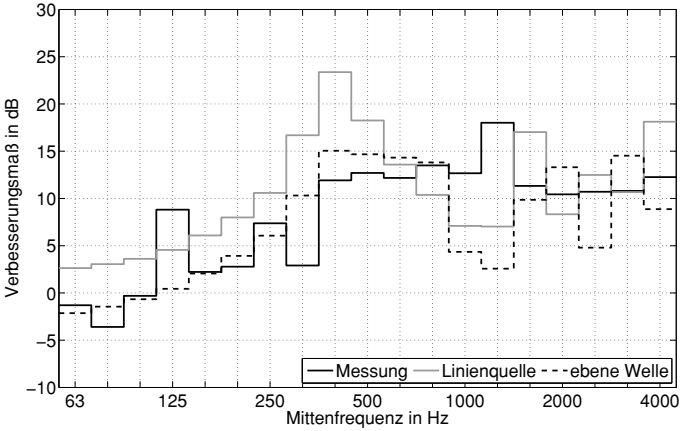


**Abbildung 5.19.:** Verbesserungsmaße aus Messung und Simulation bei Klappenöffnungswinkeln von 60° und 300° und einem Quellwinkel von 30°

## 5.3. Unterschiede zwischen Modell und Experiment

Die Vergleiche in diesem Kapitel haben gezeigt, dass die Verbesserungsmaße aus den Berechnungen weitgehend mit den gemessenen Werten übereinstimmen. Allerdings betragen die Abweichungen in Einzelfällen bis zu 5 dB. Daher werden hier die Unterschiede zwischen dem experimentellen Aufbau und dem in den Simulationen verwendeten Modell erläutert, um die Unterschiede zu erklären.

Das Modell in den Simulationen besteht aus einer halbunendlichen schallharten Schneide mit klappenförmigen Aufsätzen, die wiederum schallhart und unendlich dünn sind. Dieses Modell lässt sich im Laborexperiment nicht umsetzen. Hier wird mit einer endlich dicken Wand (zweischalig, 140 mm dick) aus Pressspanplatten gearbeitet.

Im Modell ist die Schalldämmung auf Grund der schallharten Wand unendlich hoch. Im Experiment sorgt die tiefe Resonanzfrequenz (52 Hz, siehe Abschnitt 4.5) des zweischaligen Aufbaus für eine genügend hohe Schalldämmung. Allerdings beeinflusst die Dicke der Wand die Messungen und führt zu Abweichungen zwischen Messung und Simulation.

Hinzu kommt noch, dass der Aufbau im Labor nicht beliebig lang sein kann. So kann es trotz Abdichtungen noch zu einer geringen Beugung

an den Seitenkanten kommen, die das Messergebnis beeinflussen. Da im Laboraufbau keine halbunendliche Schneide realisiert werden kann, steht die endliche Wand im Gegensatz zum theoretischen Modell auf einem einschaligen Boden aus Pressspanplatten. Dieser weist eine Koinzidenzgrenzfrequenz von 1238 Hz auf (siehe Abschnitt 4.5) und verhindert die Schallausbreitung nach unten, sorgt so aber für Reflexionen, die bei den Berechnungen nicht berücksichtigt werden. Dadurch erhält man bei der Messung mehr als einen Quellwinkel, da die Reflexionen als Überlagerung einer weiteren Quelle aufgefasst werden können.

Ein weiterer Unterschied besteht zwischen Modell und Experiment in der Quelle. Bei den Berechnungen kommen zwei Varianten vor, zum einen wird ein Linienmonopol genutzt und zum anderen eine ebene Welle, die schräg auf die Wand zuläuft. Beide Varianten lassen sich im Labor nur schwer umsetzen. Zum Einsatz kommt ein Lautsprecher, der eher eine Punktquelle (zumindest für tiefe Frequenzen) darstellt. Bei den Quellpositionen LS1 und LS3 (Quellwinkel 30° bzw. 90°) wird ein Ein-Wege-System genutzt, bei LS2 (60°) ein aktiver Lautsprecher mit Mehr-Wege-System. Letzterer erzeugt selbst schon Interferenzmuster im Schallfeld und sorgt so für Messunsicherheiten, die beim Vergleich mit den Simulationsergebnissen auch deutlich werden. Das Ein-Wege-System erzeugt ein gleichmäßigeres Schallfeld und die Abweichungen sind geringer. Die Abweichungen sind also eher in dem Vergleich von Punkt- und Linienquelle zu finden.

Insgesamt finden sich einige Unterschiede zwischen dem theoretischen Modell und dem experimentellen Aufbau. Allerdings sind dennoch die Abweichungen gering genug, um zu sagen, dass die Wirkung der Klappen mit dem vorgestellten Modell berechnet werden kann.

# 6

# Untersuchung der Wirksamkeit der Aufsätze

Nachdem in Kapitel 5 gezeigt wurde, dass das numerische Modell die Wirkung der Aufsätze genau genug abschätzt, erfolgen hier weiterführende Untersuchungen der klappenförmigen Aufsätze. Dabei wird gezeigt, welchen Einfluss die Aufsätze auf das Schallfeld haben und welche Verbesserungen sich im Modell ergeben. Außerdem wird untersucht, in welchen Fällen die Berechnung mit einer ebenen Welle an Stelle der Berechnung mit einer Linienquelle genutzt werden kann. Die Ergebnisse werden auch mit der Fernfeldnäherung verglichen, um zu zeigen, für welche Aufpunkte diese genau genug ist.

In den folgenden Abschnitten werden der Einfluss des Klappenöffnungswinkels $\alpha$ und des Quellwinkels $\varphi_Q$, der Klappenlänge $r_K$ und des Quellabstandes $r_Q$ auf das Beugungsfeld untersucht. Ziel ist es, geeignete Parameterkombinationen zu finden, die eine Planung von Aufsätzen zur Verbesserung von Schallschutzwänden ermöglichen. Die folgenden Parameter können variiert werden und haben einen Einfluss auf die Ergebnisse:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | Klappenöffnungswinkel | $f$ | Frequenz |
| $r_K$ | Klappenlänge | $(r,\varphi)$ | betrachtete Punkte (Aufpunkt) |
| $\varphi_Q$ | Quellwinkel | | |
| $r_Q$ | Quellabstand | | |

Die benutzten Größen werden in den einzelnen Abschnitten angegeben, da unterschiedliche Parameter je nach Untersuchung gewählt wurden. Zunächst wird jedoch ein Einblick in die Veränderung des Schallfeldes durch die Schallschutzwand gegeben, bevor die einzelnen Parameter im Detail untersucht werden.

## 6.1. Veränderung des Schallfeldes durch die Schallschutzwand

Das Einfügungsdämmmaß $R_E$ beschreibt die Veränderung des Schallfeldes durch die Schallschutzwand. Dabei werden der Fall „mit Wand“ und „ohne Wand“ miteinander verglichen. In den folgenden Abschnitten wird im Detail auf die Wirkung der Klappe eingegangen. Um vorab einen Eindruck zu bekommen, was passiert, wenn man eine Schallschutzwand mit Klappe in ein Schallfeld einbringt, werden hier ein paar Beispiele gegeben.

In den Abbildungen 6.1 und 6.2 sind die Einfügungsdämmmaße bei $r_K/\lambda = 0{,}3$ zu sehen. Auf der Seite der Quelle ist die Überlagerung der Wellen, die durch die Reflexion entsteht, gut zu erkennen. Im Schattengebiet wird das Schallfeld durch die Schallschutzwand deutlich abgeschwächt. Vergleicht man diese Abbildung mit Abb. 6.2, so kann man auch den Einfluss der Klappe erkennen. Das Schallfeld verändert sich sobald man den Klappenöffnungswinkel verändert.

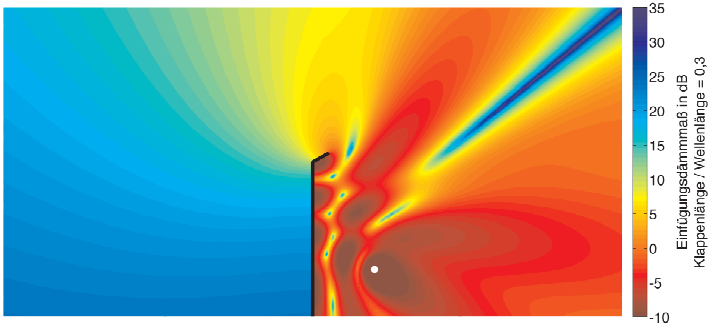


**Abbildung 6.1.:** Einfügungsdämmmaß für $r_K/\lambda = 0{,}3$, einem Klappenöffnungswinkel von 120° und einem Quellwinkel von 30°, die Quelle ist als weißer Kreis dargestellt

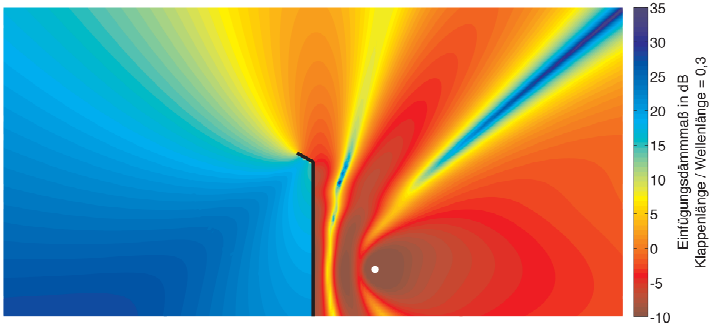


**Abbildung 6.2.:** Einfügungsdämmmaß für $r_K/\lambda = 0{,}3$, einem Klappenöffnungswinkel von 240° und einem Quellwinkel von 30°, die Quelle ist als weißer Kreis dargestellt

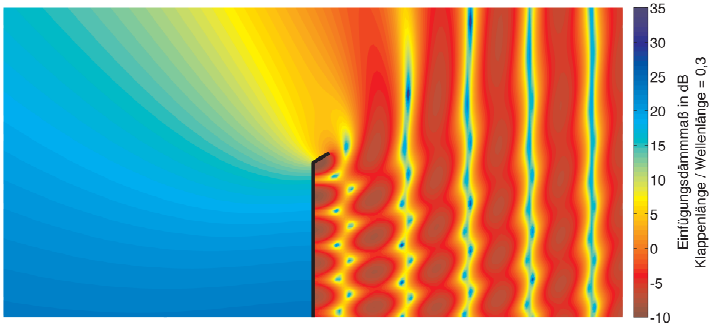


**Abbildung 6.3.:** Einfügungsdämmmaß für $r_K/\lambda = 0{,}3$ und einem Klappenöffnungswinkel von 120° bei einer einfallenden ebenen Welle (30°)

Die Berechnungen erfolgen, wie in den beiden Bildern erkennbar, mit einer Linienquelle. Alternativ ist es auch möglich, die gleichen Berechnungen mit einer einfallenden ebenen Welle zu machen. Ein Beispiel ist in der Abbildung 6.3 zu sehen, auch hier beträgt der Klappenöffnungswinkel 240°. Auf der Quellseite sind es ebene Wellenfronten, die auf die Wand zulaufen und dort reflektiert werden.

Außerdem ist es möglich die Berechnungen für unterschiedliche Verhältnisse $r_K/\lambda$ zu berechnen, um die frequenzabhängige Wirkung der

Klappen zu untersuchen. In Abb. 6.4 ist die Wirkung der Schallschutzwand bei einem Verhältnis von $r_K/\lambda = 1{,}0$ zu sehen.

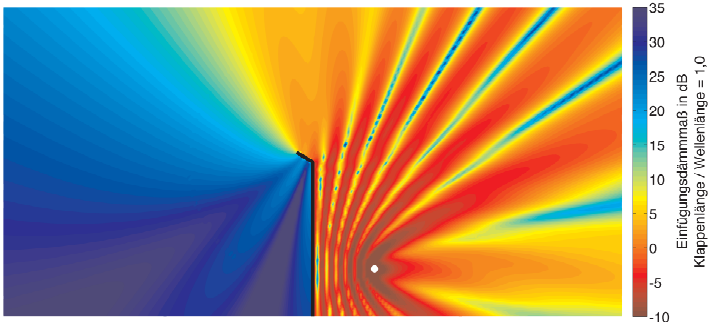


**Abbildung 6.4.:** Einfügungsdämmmaß für $r_K/\lambda = 1{,}0$, einem Klappenöffnungswinkel von 240° und einem Quellwinkel von 30°, die Quelle ist als weißer Kreis dargestellt

## 6.2. Einfluss des Klappenöffnungs- und des Quellwinkels

Die in MATLAB® programmierten Routinen sind in der Lage, den Schalldruck bei Aufsätzen mit beliebigem Öffnungswinkel der Klappe (zwischen 0° und 360°) zu berechnen. Die Berechnung erfolgt für Winkel von 10° bis 350° in 10°-Schritten. Der Vergleich der verschiedenen Fälle erfolgt mit Hilfe des Gesamtverbesserungsmaßes $VM_{\text{ges}}$ im Frequenzbereich von 63 Hz bis 4000 Hz in Terzen. Die Klappenlänge beträgt 0,3 m, das entspricht für den betrachteten Frequenzbereich einem Verhältnis von etwa $0{,}05 \leq r_K/\lambda \leq 4{,}5$.

Das Gesamtverbesserungsmaß, das durch die Klappe entsteht, ist in Abb. 6.5 auf der linken Seite für einen Quellwinkel von 30° zu sehen, die rechte Abbildung zeigt die Verschlechterung, die sich durch die Klappe ergibt. Die Darstellung erfolgt in einem Polardiagramm, um den Einfluss des Klappenöffnungswinkels besser zu visualisieren. Bei einem Klappenöffnungswinkel, der kleiner als der Quellwinkel ist, hat die Klappe so gut wie keinen Einfluss auf das Schallfeld. Erst wenn der Klappenöffnungswinkel 30° beträgt, erhält man eine deutliche Verbesserung gegenüber einer Wand ohne Klappe. Bei einem Klappenöffnungswinkel von 60° erzielt

man mit 4,5 dB die maximale Gesamtverbesserung für einen Quellwinkel von 30° (gemittelt über den Frequenzbereich von 63 Hz bis 4000 Hz). Eine ähnlich hohe Verbesserung von knapp unter 4 dB erhält man bei einem Klappenöffnungswinkel von 240°.

Interessant ist auch das rechte Polardiagramm in Abb. 6.5. Dort ist die Verschlechterung, die sich durch die Klappe ergibt, aufgetragen. Bei einem Quellwinkel von 30° ergeben sich erst bei Klappenöffnungswinkeln von 300° und mehr eine Verschlechterung. Diese beträgt aber in allen Fällen weniger als 1 dB.

In diesem Fall sind also sehr kleine und sehr große Öffnungswinkel der Klappe ungünstig. Im besten Fall hat die Klappe keinen Einfluss auf das Schallfeld hinter der Schallschutzwand, im schlechtesten Fall erhält man aber eine Verschlechterung von bis zu 0,7 dB.

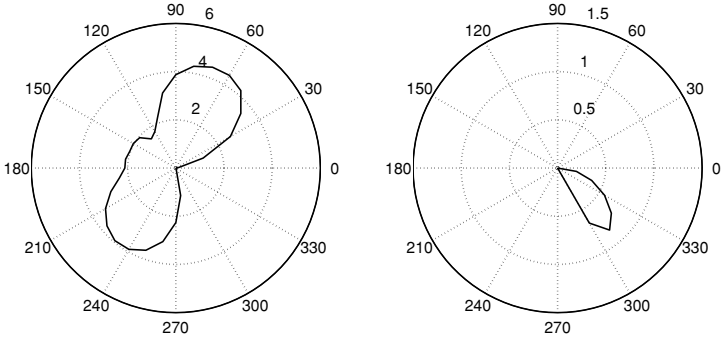


**Abbildung 6.5.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 30°

Bei einem Quellwinkel von 60° (siehe Abb. 6.6) verschieben sich die Maxima zu größeren Klappenöffnungswinkeln. Aber auch hier sieht man, dass erst wenn der Klappenöffnungswinkel größer als der Quellwinkel wird, eine hohe Verbesserung erzielt wird (linkes Diagramm). Die Maxima liegen in diesem Fall bei 80° und 250° in denen eine Verbesserung von etwa 3 dB erzielt wird. Eine Verschlechterung tritt wieder nur für sehr kleine oder große Klappenöffnungswinkel ($\leq 300°$) auf und beträgt auch in diesem Fall weniger als 1 dB.

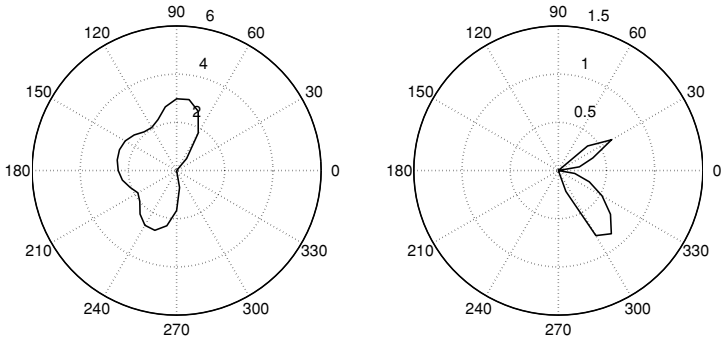


**Abbildung 6.6.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 60°

Im dritten Fall beträgt der Quellwinkel 90° und hier zeigt sich (Abb. 6.7), dass bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° die maximale Verbesserung von 6 dB erreicht wird. Im Gegensatz zu den zuvor betrachteten Fällen erhält man hier aber auch für Klappenöffnungswinkel $\leq 70°$ eine Verschlechterung. Sie beträgt maximal 1,2 dB.

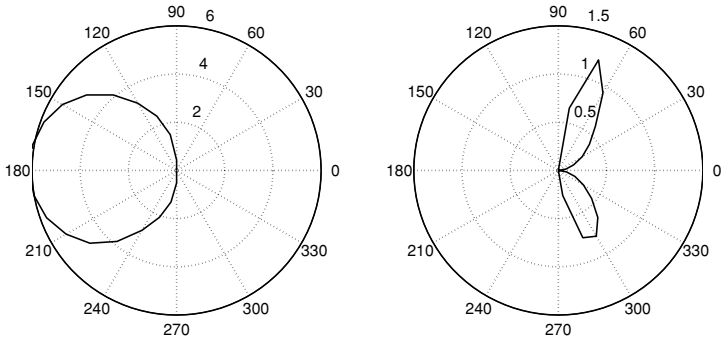


**Abbildung 6.7.:** links: Gesamtverbesserung in dB rechts: Verschlechterung in dB, jeweils aufgetragen über den Öffnungswinkel bei einem Quellwinkel von 90°

**Erkenntnis:**

Der Klappenöffnungswinkel muss größer sein als der Quellwinkel, um eine deutliche Verbesserung durch eine Klappe zu erzielen. Bei sehr kleinen Klappenöffnungswinkeln kann es auch zu einer Verschlechterung gegenüber dem Fall „ohne Klappe“ kommen. Eine Erhöhung der Schallschutzwand führt nicht automatisch zu einer Verbesserung hinter der Wand (siehe Abb. 6.5), hier kommt es maßgeblich auf den Quellwinkel an. Außerdem sind Klappenöffnungswinkel mit mehr als 270° für alle Quellwinkel ungünstig.

## 6.3. Einfluss des Quellabstandes

Mit zunehmendem Quellabstand nähern sich die Ergebnisse aus den Berechnungen mit Linienquelle den Ergebnissen aus den Berechnungen mit einer ebenen Welle an. Interessant ist ab welchem Abstand man bei der Berechnung auf die Linienquelle verzichten und die schnellere Berechnung mit einer ebenen Welle nutzen kann. Zunächst wird der Einfluss des Quellabstandes auf das Schallfeld an einer Schallschutzwand ohne Aufsätze untersucht. Anschließend erfolgt die Untersuchung mit Aufsatz.

In Abb. 6.8 sind die Pegeldifferenzen zwischen der Berechnung mit Linienquelle und der Berechnung mit ebener Welle an zwei Aufpunkten hinter der Wand für einen Quellwinkel von 30° dargestellt. Dabei werden zwei Aufpunkte betrachtet. Aufpunkt 1 (mit $r = 0{,}7\,\mathrm{m}$ und $\varphi = 315°$) liegt in Teilraum 3 und Aufpunkt 2 (mit $r = 14{,}1\,\mathrm{m}$ und $\phi = 315°$) in Teilraum 4. Dargestellt werden die Abweichungen zwischen den Drücken, die sich bei Anwendung einer Linienquelle und einer ebenen Welle ergeben, also

$$\Delta L = 20\,\mathrm{lg}\left(\frac{p_{\mathrm{Linienquelle}}}{p_{\mathrm{ebene\ Welle}}}\right) . \tag{6.1}$$

Der Koordinatenursprung liegt wieder an der Oberkante der Wand.

Bereits ab einem Quellabstand von einer Wellenlänge beträgt der Unterschied zwischen der Berechnung mit einer Linienquelle und einer ebenen Welle nur 0,5 dB. Dabei spielt die Position des Aufpunktes keine Rolle. Die Pegeldifferenz verringert sich mit steigender Frequenz schnell, so dass die ebene Welle zur Berechnung der Wirkung einer Schallschutzwand ohne großen Fehler eingesetzt werden kann. Dieses Verhalten ist auch für

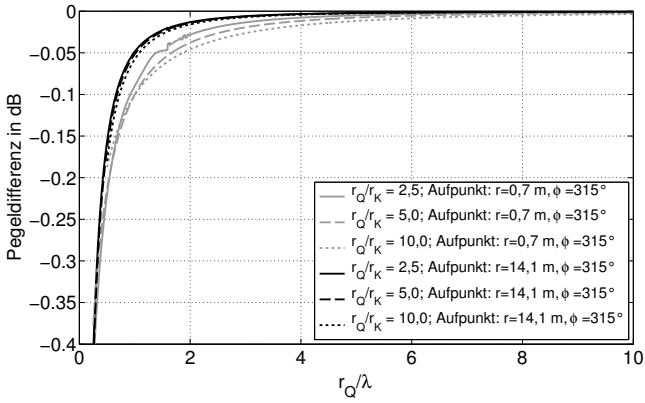


**Abbildung 6.8.:** Vergleich einer ebenen Welle mit einer Linienquelle bei einer Schallschutzwand ohne Aufsatz an zwei verschiedenen Aufpunkten für einen Quellwinkel von 30°

andere Aufpunktwinkel $\phi$ zu beobachten. Dabei spielt es so gut wie keine Rolle, ob der betrachtete Aufpunkt in Teilraum 3 oder 4 liegt. So ist die Berechnung des Schallfeldes auch für weit entfernte Quellen möglich. Mit einer Linienquelle ist das nicht möglich, da die numerische Berechnung der Besselfunktionen für sehr hohe Ordnungen, die für weit entfernte Quellen benötigt werden, ungenau wird. Mit zunehmender Frequenz erhöht sich die Anzahl der benötigten Ordnungen der Besselfunktion weiter.

Bei einem Quellwinkel von 90° zeigt sich ein etwas anderes Bild. Je weiter der Aufpunkt hinter der Wand vom Koordinatenursprung entfernt liegt, desto besser stimmen die Ergebnisse für die ebene Welle und die Linienquelle überein. Zu sehen ist das in Abb. 6.9, in der die Pegeldifferenzen für vier Aufpunkte mit steigendem Abstand $r$ und immer größerem Aufpunktwinkel $\phi$ bei einem Quellabstand von $r_Q/r_K = 10$ dargestellt sind. Die Pegeldifferenzen sind für alle vier Aufpunkte aber sehr gering, so dass auch an Aufpunkten in der Nähe des Koordinatenursprungs die Ergebnisse der ebenen Welle und der Linienquelle gut übereinstimmen.

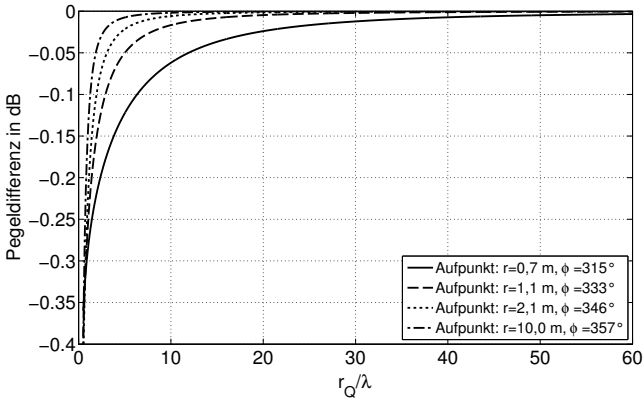


**Abbildung 6.9.:** Vergleich einer ebenen Welle mit einer Linienquelle bei einer Schallschutzwand ohne Aufsatz an mehreren Aufpunkten für einen Quellwinkel von 90° und einem Quellabstand von $r_Q/r_K = 10$

Schaut man sich in Abb. 6.10 die Pegeldifferenzen für vier Aufpunkte mit steigendem Abstand $r$ aber sinkendem Aufpunktwinkel $\phi$ an, so stellt man fest, dass die Differenz mit der Entfernung des Aufpunktes zum Koordinatenursprung zunimmt. Liegt der Aufpunkt in Teilraum 3 (trifft in Abb. 6.10 auf die ersten drei Aufpunkte zu), ist die Pegeldifferenz auch für tiefe Frequenzen kleiner als 1,5 dB. Beim Vergleich für Aufpunkte im Teilraum 4 (hier der vierte Aufpunkt mit $r = 10\,\mathrm{m}$ und $\phi = 273°$) stellt man fest, dass die Pegeldifferenz stark ansteigt im Vergleich zu den Verläufen an den anderen drei Aufpunkten. Dieser Effekt wird größer, je dichter die Quelle am Koordinatenursprung platziert wird, in der Darstellung ist $r_Q/r_K = 10$.

Für kleine Quellwinkel macht man einen kleinen Fehler, wenn man statt der Berechnung des Schallfeldes mittels Linienquelle eine ebene Welle ansetzt. Nähert sich der Quellwinkel allerdings dem 90° Winkel, so wird der Fehler schnell sehr groß. Vor allem für Punkte, die in Teilraum 4 ($r > r_Q$) liegen, sind Fehler von mehreren dB zu erwarten. Daher ist hier der Einsatz der ebenen Welle zur Berechnung nicht möglich. In der Praxis enden Schallschutzwände in der Regel oberhalb der Quellposition, daher bietet die ebene Welle in den meisten Fällen eine ausreichende Abschätzung. In Einzelfällen (LKWs und andere hohe Fahrzeuge) kann es aber auf Grund der Position der Quelle zu einer falschen Abschät-

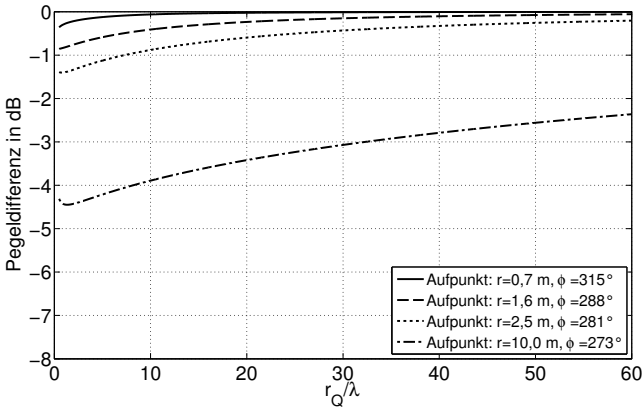


**Abbildung 6.10.:** Vergleich einer ebenen Welle mit einer Linienquelle bei einer Schallschutzwand ohne Aufsatz an mehreren Aufpunkten für einen Quellwinkel von 90° und einem Quellabstand von $r_Q/r_K = 10$

zung der Wirkung dieser Schallschutzwand kommen. Um diese Fälle zu berücksichtigen, ist der Einsatz der Linienquelle sicherlich geeigneter.

Da in dieser Arbeit der Einfluss von klappenförmigen Aufsätzen diskutiert wird, stellt sich die Frage, ob der Einfluss des Quellabstandes bei Wänden mit Aufsätzen der gleiche ist. In Abb. 6.11 sind die Pegeldifferenzen zwischen den Berechnungen mit Linienquelle und ebener Welle bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° für verschiedene Quellabstände dargestellt. Auch hier sind wieder die zwei gewählten Aufpunkte ($r = 0{,}7\,\mathrm{m}$; $\phi = 315°$ und $r = 14{,}1\,\mathrm{m}$; $\phi = 315°$) im Vergleich zu sehen. Wie man gut erkennen kann, sind die Unterschiede zwischen den Aufpunkten schwach ausgeprägt. Die Differenz zwischen Linienquelle und ebener Welle wird mit steigendem Quellabstand kleiner, steigt aber nicht wie bei der einfachen Schallschutzwand mit der Frequenz stark an sondern lediglich im tieffrequenten Bereich. Für Quellen mit $r_Q/r_K = 10$ liegt der Fehler bei unter 0,5 dB, wenn man zur Berechnung eine ebene Welle an Stelle der Linienquelle nutzt. Bei einem Verhältnis von $r_Q/r_K = 5$ liegt die Pegeldifferenz unter 1 dB.

Bei einem Quellwinkel von 90° und einem Klappenöffnungswinkel von 210° beobachtet man stärkere Schwankungen. In Abb. 6.12 sind die Verläufe über $r_Q/\lambda$ dargestellt. Die Abweichungen zwischen ebener Welle und Linienquelle sind selbst bei großen Quellabständen noch sichtbar,

auch wenn sie abnehmen. Es scheint als ob sich die Verläufe mit dem Quellabstand über einen größeren Bereich $r_Q/\lambda$ strecken. Um diesen Effekt zu zeigen, wurde hier im Vergleich zu den anderen Darstellungen der größere Ausschnitt $r_Q/\lambda \in [0; 60]$ gewählt. Bei einem Quellwinkel von 90° sind die Abweichungen zwischen den einzelnen Aufpunkten deutlich erkennbar, nehmen mit wachsendem Quellabstand aber ab.

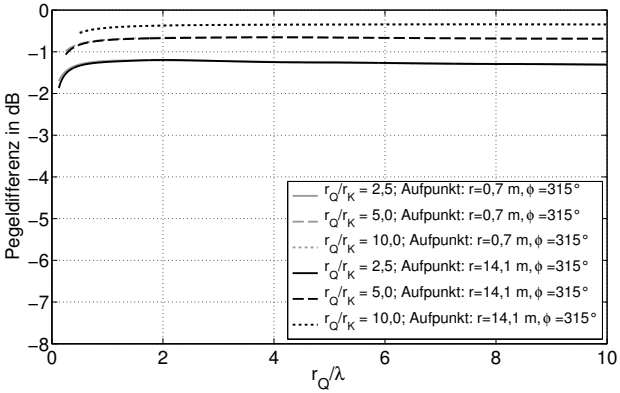


**Abbildung 6.11.:** Vergleich einer ebenen Welle mit einer Linienquelle bei einer Schallschutzwand mit Aufsatz an mehreren Aufpunkten (Klappenöffnungswinkel 210°, Quellwinkel 30°)

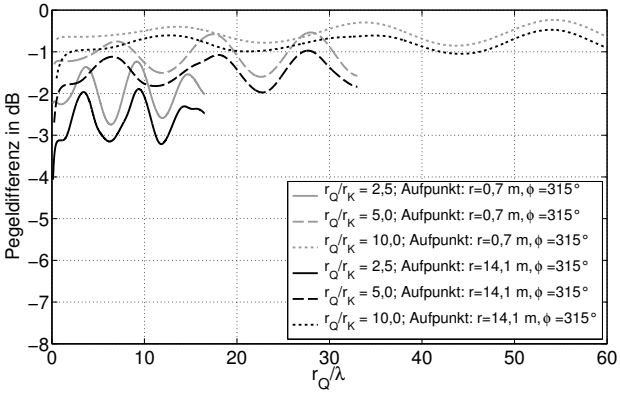


**Abbildung 6.12.:** Vergleich einer ebenen Welle mit einer Linienquelle bei einer Schallschutzwand mit Aufsatz an mehreren Aufpunkten (Klappenöffnungswinkel 210°, Quellwinkel 90°)

Schaut man sich noch die Verläufe bei einem zweiten Klappenöffnungswinkel an (in Abb. 6.13 für einen Klappenöffnungswinkel von 80°), erkennt man bei einem Quellwinkel von 30° starke Schwankungen, die sich auch mit steigender Frequenz nicht vermindern. Hier zeigt sich ganz deutlich, dass der Klappenöffnungswinkel einen sehr starken Einfluss auf den Verlauf hat. Allerdings scheint der Öffnungswinkel nicht der einzige Einflussfaktor zu sein. Als zweiter Parameter spielt auch noch die Klappenlänge eine Rolle. Daher wird im nächsten Abschnitt der Einfluss der Klappenlänge auf das Beugungsfeld untersucht.

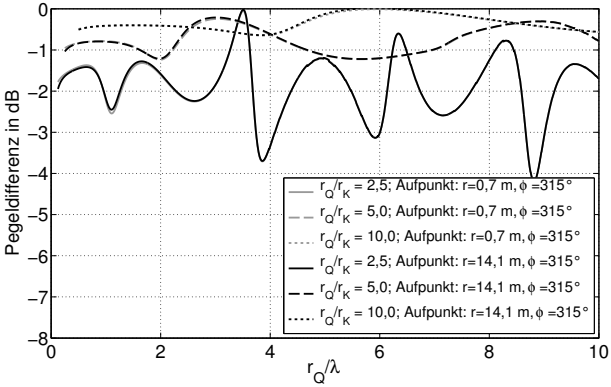


**Abbildung 6.13.:** Vergleich einer ebenen Welle mit einer Linienquelle bei einer Schallschutzwand mit Aufsatz an mehreren Aufpunkten (Klappenöffnungswinkel 80°, Quellwinkel 30°)

**Erkenntnis:**

Der Quellabstand spielt bei einfachen Schallschutzwänden ohne klappenförmige Aufsätze nur bei Quellen, die in der Nähe der Schallschutzwand positioniert sind oder einen Quellwinkel in der Nähe von 90° haben, eine wichtige Rolle. Bei Quellwinkeln um die 90° hängt der Fehler, den man beim Einsatz einer ebenen Welle macht, vom Aufpunkt ab. Punkte in der Nähe der Wand weisen geringere Abweichungen auf als Punkte, die sehr weit von der Wand entfernt liegen.

Bei Schallschutzwänden mit klappenförmigen Aufsätzen spielt die Krümmung der Wellenfront eine größere Rolle. Hier sind die Abweichungen zwischen den Ergebnissen aus der Berechnung mit einer Linienquelle und einer ebenen Welle sehr viel stärker ausgeprägt und der Quellabstand

ist nicht der einzige Parameter, der einen Einfluss auf den Unterschied hat. Vor allem der Klappenöffnungswinkel beeinflusst die Verläufe stark. Daher eignet sich die Berechnung der Wirkung von klappenförmigen Aufsätzen mit einer ebenen Welle nur für Quellen, die mehr als zwanzig Klappenlängen entfernt positioniert sind.

## 6.4. Einfluss der Klappenlänge

Schon der vorangegangene Abschnitt zeigte, dass die Klappenposition einen starken Einfluss auf das Schallfeld hat. Neben dem Öffnungswinkel spielt auch die Klappenlänge eine entscheidende Rolle. Diese soll hier untersucht werden.

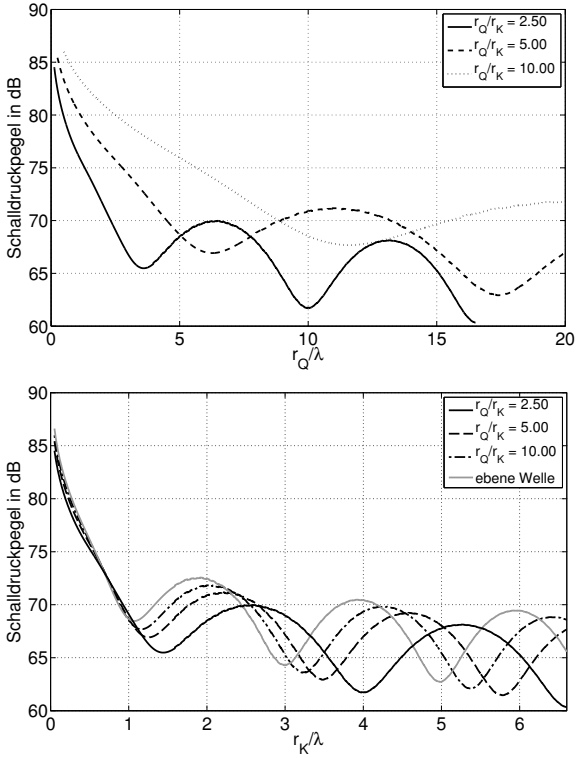


**Abbildung 6.14.:** Einfluss der Klappenlänge bei einer Schallschutzwand mit Aufsatz (Klappenöffnungswinkel 150°, Quellwinkel 30°)

In Abb. 6.14 sind die mit $p_Q = 1\,\mathrm{Pa}$ berechneten Schalldruckpegel für einen Klappenöffnungswinkel von 150° in zwei Varianten dargestellt. In der linken Abbildung erfolgt die Darstellung über $r_Q/\lambda$, die Berechnung für die ebene Welle wurde wegen $r_Q \to \infty$ nicht dargestellt. Gut zu erkennen ist, dass sich die Verläufe mit zunehmendem Quellabstand bzw. kürzerer Klappe $r_Q/r_K$ immer weiter auseinanderziehen.

Stellt man stattdessen die Schalldruckpegel über $r_K/\lambda$ dar, erkennt man, dass sich die Berechnungen mit Linienquelle und ebener Welle mit zunehmendem Quellabstand annähern. Die Minima im Verlauf verschieben sich mit zunehmendem Quellabstand zu tieferen Frequenzen, das bewirkt allerdings auch große Abweichungen bei der Darstellung der Pegeldifferenz zwischen der Berechnungen mit Linienquelle und ebener Welle. Mit klappenförmigen Aufsätzen ist im Gegensatz zu einfachen Schallschutzwänden der Fehler bei der Verwendung einer ebenen Welle nur für sehr große Quellabstände ($r_Q \gg 10 r_K$) oder sehr tiefe Frequenzen ($r_K/\lambda < 1$) klein (siehe Abb. 6.15).

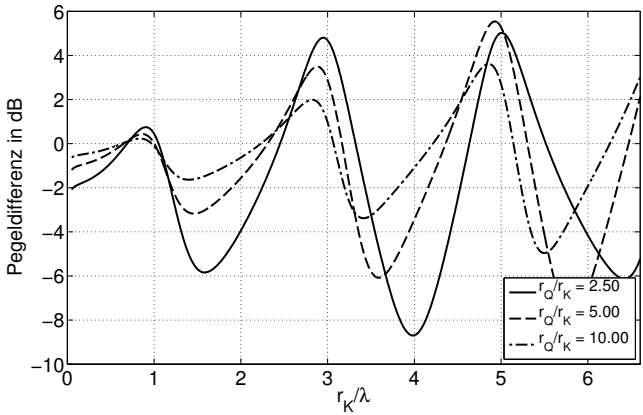


**Abbildung 6.15.:** Pegeldifferenz zwischen Linienquelle und ebener Welle bei einem Quellwinkel von 30° und einem Klappenöffnungswinkel von 160°

Um die Wirkung der Klappenlänge besser einschätzen zu können, wird in den Abbildungen 6.16 bis 6.18 das Verbesserungsmaß über den Klappenöffnungswinkel und $r_K/\lambda$ für verschiedene Empfängerpositionen dargestellt. Bei einem Quellwinkel von 30° sieht man, dass sich für lange Klappen (in Bezug auf die Wellenlänge) höhere Verbesserungsmaße vor

allem für Klappenöffnungswinkel zwischen 50° und 100° erzielen lassen. Hier erkennt man auch gut, dass man für sehr kleine und sehr große Klappenöffnungswinkel hauptsächlich Verschlechterungen erhält. Vergleicht man in Abb. 6.16 die obere und untere Darstellung (oben Empfängerposition (1,1); unten Empfängerposition (19,1)) miteinander, so sieht man, dass mit zunehmendem Abstand zur Wand auch die Verbesserung etwas kleiner wird. Das heißt, dass der Einfluss der Klappe auf das Schallfeld in der Nähe der Wand größer ist als an Empfangspositionen, die weiter weg liegen.

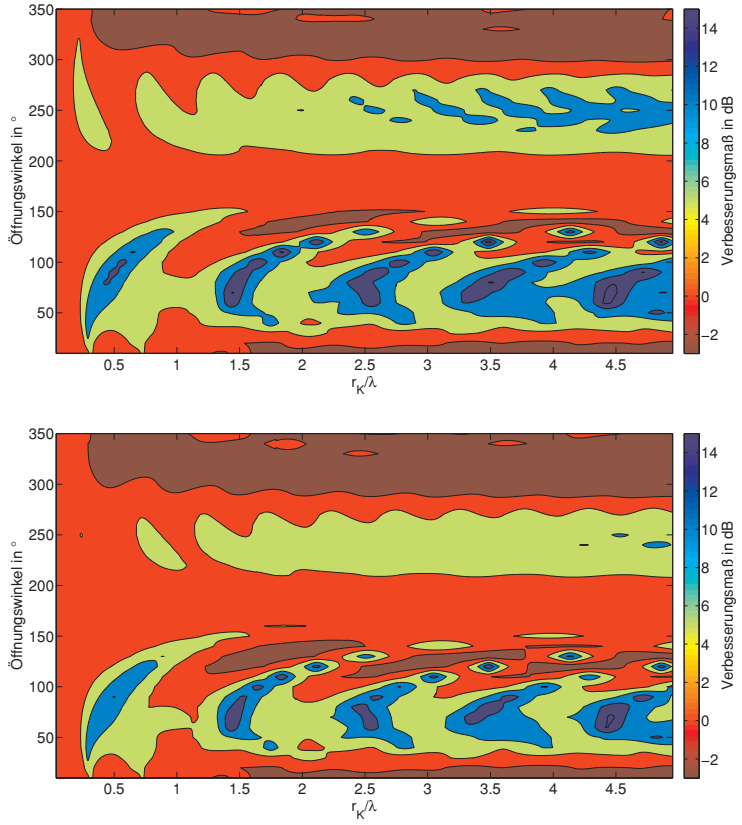


**Abbildung 6.16.:** Einfluss der Klappenlänge auf das Verbesserungsmaß bei einem Quellwinkel von 30° (oben Empfängerposition (1,1); unten Empfängerposition (19,1))

Bei einem Quellwinkel von 60° (Abb. 6.17) werden die Bereiche, für die man Verbesserungen erzielt, schmaler im Vergleich zu einem Quellwinkel von 30°. Auch hier ist wieder die Empfängerposition (19,1) dargestellt. Man erhält für Klappenöffnungswinkel um 180° nur geringe Verbesserungen bis maximal 3 dB, die höchsten Verbesserungen erzielt man bei Klappenöffnungswinkeln um 90°. Der Bereich, in dem man Verbesserungen erreicht, wird mit steigender Frequenz schmaler. Auch hier sieht man, dass sehr kleine und sehr große Klappenöffnungswinkel Verschlechterungen bewirken.

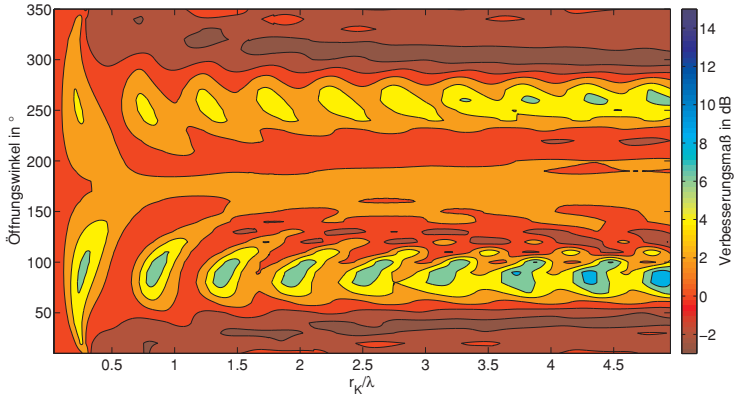


**Abbildung 6.17.:** Einfluss der Klappenlänge auf das Verbesserungsmaß bei einem Quellwinkel von 60° an der Empfängerposition (19,1)

Im dritten Fall in Abb. 6.18 konzentriert sich die Verbesserung auf den Bereich um 180°. Je höher die Frequenz wird, desto breiter wird auch der Bereich, aus dem der Klappenöffnungswinkel gewählt werden kann, um eine Verbesserung durch die Klappe zu erzielen. Auch hier treten für sehr kleine und sehr große Klappenöffnungswinkel wieder Verschlechterungen auf.

**Erkenntnis:**

Mit zunehmendem Verhältnis $r_K/\lambda$ nimmt auch die Verbesserung zu. Allerdings trifft das nicht für jeden Klappenöffnungswinkel zu. Hierbei spielt nicht nur der Klappenöffnungswinkel sondern auch der Quellwinkel eine große Rolle. Bei größeren Quellwinkeln erhält man geringere

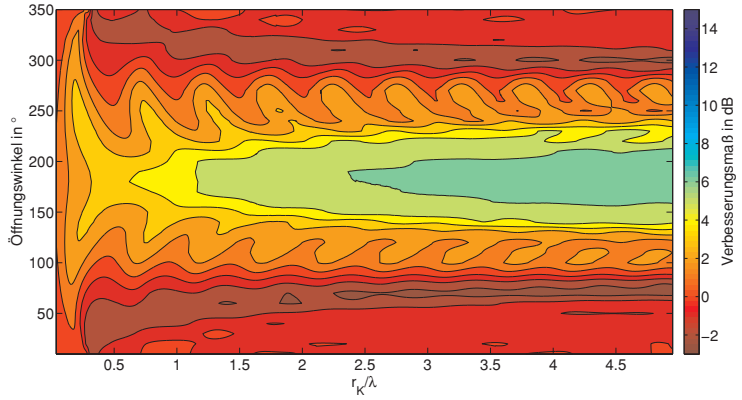


**Abbildung 6.18.:** Einfluss der Klappenlänge auf das Verbesserungsmaß bei einem Quellwinkel von 90° an der Empfängerposition (19,1)

Verbesserungen, da die Quelle dann in Höhe der oberen Kante der Schallschutzwand positioniert ist und die Wirkung des Aufsatzes verringert wird, die Wand ist also nicht „hoch genug“. Bei kleineren Quellwinkeln kann man mit klappenförmigen Aufsätzen durch geeignete Wahl des Klappenöffnungswinkels vor allem für große Verhältnisse $r_K/\lambda$ eine hohe Verbesserung erzielen. Betrachtet man die in diesem Abschnitt gezeigten Bilder, kann man auch feststellen, dass die Bereiche mit den positiven Verbesserungsmaßen mit steigendem Quellwinkel in Richtung 180° wandern und sich quasi „zusammenschieben“.

Bei kleinen Quellwinkeln (hier bei 30°) erhält man schon ab einem Verhältnis von $r_K/\lambda = 0{,}25$ für einige Klappenöffnungswinkel eine hohe Verbesserung. Je größer der Quellwinkel dann wird, desto kleiner ist das Verhältnis $r_K/\lambda$, bei dem bereits eine Verbesserung erzielt wird. Allerdings erhält man, zumindest bei einem Quellwinkel von 60°, dann auch Bereiche im Frequenzverlauf, für die man kleine Verschlechterungen in Kauf nehmen muss.

## 6.5. Einfluss der Empfängerposition (Fernfeldnäherung)

In der Praxis sind nicht nur Empfängerpositionen in der Nähe der Wand interessant, auch der Einfluss auf weit entfernte Gebiete spielt eine

große Rolle. Daher wird hier der Einfluss der Empfängerposition auf das Verbesserungsmaß untersucht.

Im Kapitel 2 wurde bereits die Fernfeldnäherung besprochen. Der betrachteten Fernfeldnäherung liegt bei einem Schallschirm ohne Aufsätzen eine ebene Welle zugrunde. Hinzu kommen nun noch für weit entfernt liegende Aufpunkte Näherungen für die Fresnelintegrale und die Hankelfunktion. Dabei stellt sich bei der Berechnung die Frage, ab welchem Abstand zur Wand die Fernfeldnäherung eingesetzt werden kann. Theoretisch betrachtet gilt die Näherung für $r \to \infty$, bei der numerischen Berechnung kann die Näherung der Hankelfunktion eingesetzt werden, wenn das Argument $kr$ viel größer als die Ordnung der Hankelfunktion wird. Das trifft für Aufpunkte mit $r >> 4r_K = N_{\text{Klappe}}$ und damit für $r/r_K >> 4$ zu. Bei der Fernfeldnäherung für den halbunendlichen Schirm wird die Näherung für Hankelfunktionen genutzt. Für diese Näherung gilt dann allerdings $r >> 4r_Q$. Hier werden unterschiedliche Empfängerpositionen bei verschiedenen Klappenöffnungswinkeln mit den Berechnungen der Fernfeldnäherungen verglichen, um zu überprüfen, ob der Einsatz der Fernfeldnäherung möglich ist.

In Abb. 6.19 wird der Einfluss des Abstandes zur Wand auf die Verbesserungsmaße an den Empfängerpositionen (siehe Abb. 4.5) für einen Quellwinkel von 30° und einen Klappenöffnungswinkel von 80° untersucht. Zusätzlich ist die Fernfeldnäherung in die Abbildung eingezeichnet. Wie man sehen kann, unterscheiden sich die mit einer Linienquelle berechneten Verbesserungsmaße von denen der Fernfeldnäherung. Die Unterschiede betragen bis zu 4 dB. Hier reicht ein Verhältnis $r/r_K = 12{,}7$ nicht aus, um den Aufpunkt als „weit von der Wand entfernt“ ansehen zu können.

Als zweites Beispiel ist in Abb. 6.20 der Vergleich des Verbesserungsmaßes für einen Quellwinkel von 30° und einen Klappenöffnungswinkel von 210° dargestellt. In diesem Fall ist deutlich zu erkennen, dass sich die Maxima mit zunehmendem Abstand zur Wand zu tieferen Frequenzen verschieben. Lediglich im tieffrequenten Bereich für $r_K/\lambda < 0{,}25$ hat der Abstand der Aufpunkte zur Wand so gut wie keinen Einfluss. Vergleicht man die Kurven mit der Fernfeldnäherung, stellt man fest, dass auch im tieffrequenten Bereich ein Unterschied von mindestens 1,5 dB vorliegt. Je höher die Frequenz ist, desto größer wird auch die Pegeldifferenz zwischen Fernfeldnäherung und Linienquelle.

Für größere Klappenöffnungswinkel hingegen beschreibt die Fernfeldnäherung sehr gut die Wirkung auf das Schallfeld. In Abb. 6.21 ist der Vergleich für einen Klappenöffnungswinkel von 250° bei einem Quell-

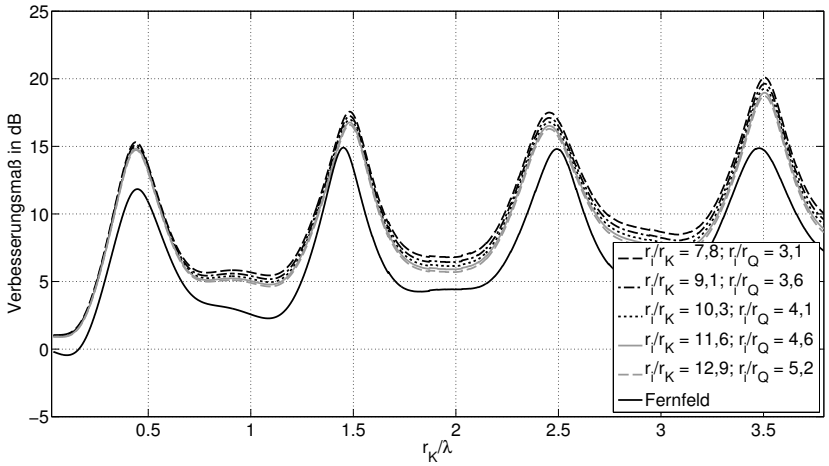


**Abbildung 6.19.:** Auswirkung des Abstandes der Empfängerposition auf das Verbesserungsmaß bei einem Klappenöffnungswinkel von 80° und einem Quellwinkel von 30°

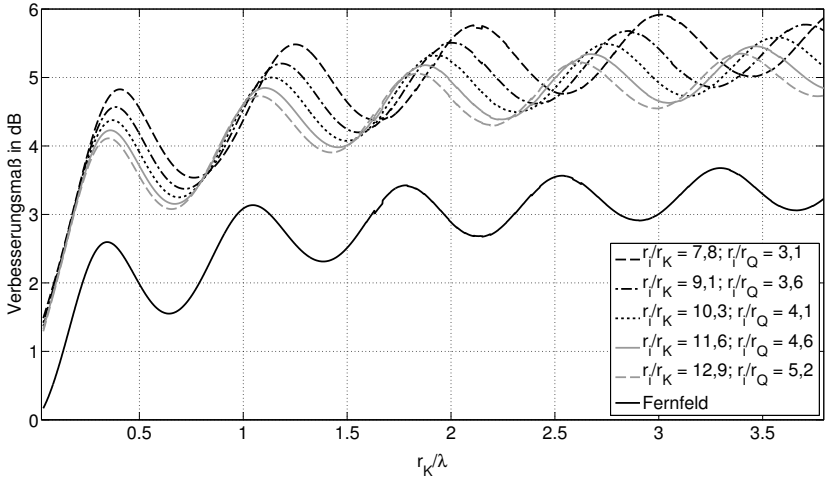


**Abbildung 6.20.:** Auswirkung des Abstandes der Empfängerposition auf das Verbesserungsmaß bei einem Klappenöffnungswinkel von 210° und einem Quellwinkel von 30°

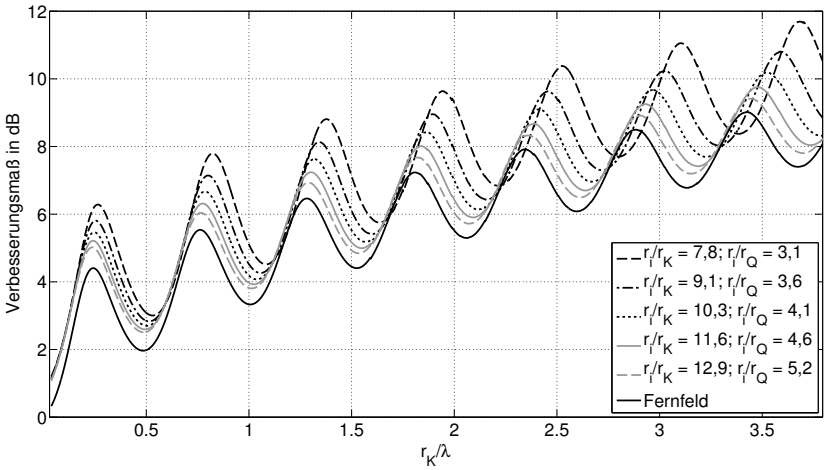


**Abbildung 6.21.:** Auswirkung des Abstandes der Empfängerposition auf das Verbesserungsmaß bei einem Klappenöffnungswinkel von 250° und einem Quellwinkel von 30°

winkel von 30° zu finden. Die Differenz zwischen einem weiter von der Wand entfernt liegenden Aufpunkt und der Fernfeldnäherung beträgt in diesem Fall etwa 0,5 dB über den gesamten Frequenzbereich. Das gleiche Verhalten zeigt sich bei einem Quellwinkel von 60° ab einem Klappenöffnungswinkel von 270°. Nur bei einem Quellwinkel von 90° sind die Ergebnisse nicht so eindeutig. Hier ist die Verwendung der Fernfeldnäherung ein Problem, da auch hier die Näherung für ebene Wellen benutzt wird. Zu der Abweichung durch die Nutzung der ebenen Welle kommt dann noch die Abweichung durch die Näherungsbetrachtung für den Anteil, den die Klappe auf das Schallfeld hat.

In den Abbildungen stellt man bei den Berechnungen mit einer Linienquelle fest, dass die Wirkung des Aufsatzes mit dem Aufpunktwinkel zunimmt. In den Abbildungen 6.19 bis 6.21 wird der Aufpunktwinkel mit steigendem Abstand der Aufpunkte immer kleiner, die magentafarbende Linie stellt also den Aufpunkt mit dem kleinsten Winkel dar. Je kleiner der Winkel ist, desto stärker verschieben sich mit steigender Frequenz auch die Maxima hin zu tieferen Frequenzen. Für tiefe Frequenzen trifft das nicht zu, hier ist der Einfluss des Abstandes zur Wand sehr gering.

**Erkenntnis:**

Die Fernfeldnäherung bei Schallschutzwänden mit klappenförmigen Aufsätzen liefert erst für große Klappenöffnungswinkel Ergebnisse, die nur gering von den Berechnungen mit einer Linienquelle abweichen. Dabei spielen zwei Faktoren beim Fehler der Näherung eine Rolle, die Annahme einer ebenen Welle und die Näherung der Hankelfunktionen für große Argumente. Die Vermutung, dass es vor allem auf die Verhältnisse $r/r_K$ und $r/r_Q$ bei der Näherung ankommt, konnte nicht bestätigt werden. Vor allem für große Quellwinkel ($\varphi_Q = 90°$) sind die Abweichungen zwischen den Ergebnissen aus den Berechnungen mit Linienquelle und der Fernfeldnäherung groß.

Die Fernfeldnäherung ist für Schallschutzwände mit klappenförmigen Aufsätzen nicht geeignet, um die Wirkung der Aufsätze abzuschätzen.

## 6.6. Vergleich mit dem Umweggesetz

Die VDI 2720-1 [79] nutzt einen geometrischen Ansatz, dessen Grundlage das Umweggesetz bildet, bei der Berechnung der Wirkung von Schallschutzwänden. Die in Abschnitt 2.7 gemachte Erweiterung für klappenförmige Aufsätze wird hier genutzt, um abzuschätzen, ob eine geometrische Betrachtung für Aufsätze genutzt werden kann.

In Abb. 6.22 ist neben dem mit einer Linienquelle berechneten Verbesserungsmaß auch noch das aus dem Umweg bestimmte Verbesserungsmaß eingezeichnet. Wie bereits erwähnt, ist die mit dem Umweg berechnete Verbesserung frequenzunabhängig und unterschätzt die durch einen klappenförmigen Aufsatz erzielte Verbesserung sehr stark. Dieser Effekt ist bei allen Klappenöffnungswinkeln zu finden.

**Erkenntnis:**

Eine geometrische Betrachtung erfasst das akustische Verhalten von klappenförmigen Aufsätzen nicht. Betrachtet man die Wirkung der Aufsätze mit diesem geometrischen Ansatz, erhält man eine frequenzunabhängige Verbesserung, die sich aus dem Verhältnis der Umwege mit und ohne Aufsatz berechnet. Der wellentheoretische Ansatz und die Messungen für diese Arbeit haben gezeigt, dass die klappenförmigen Aufsätze eine starke Frequenzabhängigkeit aufweisen. Eine geometrische Erweiterung der bestehenden Normung für klappenförmige Aufsätze ist für die Planung also unzureichend.

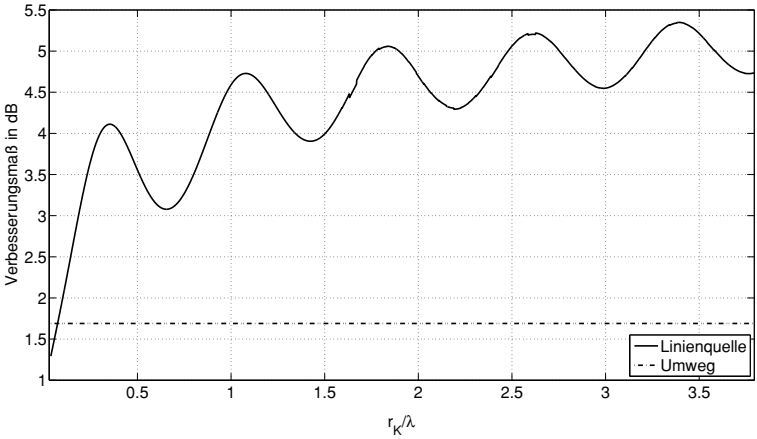


**Abbildung 6.22.:** Verbesserungsmaße berechnet mit einer Linienquelle und aus dem Umweggesetz

## 6.7. Vergleich mit einer gleich hohen Wand

Bisher wurden Schallschutzwände mit klappenförmigen Aufsätzen mit Schallschutzwänden ohne Aufsatz miteinander verglichen, um das Verbesserungsmaß zu bestimmen. Interessant ist aber auch, ob es sinnvoller ist eine Klappe als Aufsatz zu nutzen oder die Wand lediglich ein Stück zu erhöhen. Dazu wird die Wand mit Aufsatz mit einer gleich hohen einfachen Wand verglichen (siehe Abb. 6.23).

Bei diesem Vergleich spielen nur klappenförmige Aufsätze mit Öffnungswinkeln größer als 90° und kleiner als 270° eine Rolle, da sich in allen anderen Fällen die Höhe der Schallschutzwand mit Aufsatz nicht von der ohne Aufsatz unterscheidet. Bei einem Klappenöffnungswinkel von 180° besteht kein Unterschied zwischen beiden Fällen, daher wird dieser Fall hier nicht weiter betrachtet. Für die senkrechte Erhöhung gilt

$$h_K = r_K \sin(\alpha - 90°)\,. \tag{6.2}$$

Die Berechnung erfolgte wieder für Terzen im Bereich von 63 Hz bis 4000 Hz an den Aufpunkten entsprechend der Abb. 4.5.

Wieder werden die Gesamtverbesserungsmaße, gemittelt über den genannten Frequenzbereich und alle Aufpunkte, herangezogen, um beide

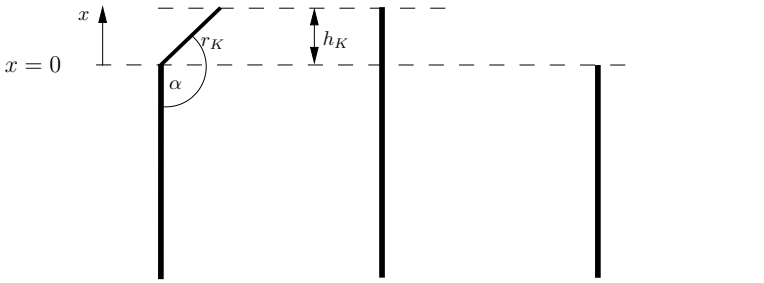


**Abbildung 6.23.:** Vergleich einer Wand mit Aufsatz, einer gleich hohen einfachen Schallschutzwand und einer einfachen Wand ohne Aufsatz

Fälle miteinander zu vergleichen. Die Ergebnisse ($VM_{\text{Klappe}}$ für den Fall mit klappenförmigem Aufsatz und $VM_{\text{erhöht}}$ für den Fall der senkrecht erhöhten Wand) sind in Tab. 6.1 für die Quellwinkel 30° und 60° aufgelistet. Dabei stellt man fest, dass mit wachsender Erhöhung (110° bis 170°) das Verbesserungsmaß kontinuierlich ansteigt. Beim klappenförmigen Aufsatz ist das nicht so, hier erhält man das höchste Verbesserungsmaß bei einem Quellwinkel von 30° für einen Klappenöffnungswinkel von 230°. Generell ist bei einem Quellwinkel von 30° das Gesamtverbesserungsmaß, dass man mit einem klappenförmigen Aufsatz erreicht, höher als durch Erhöhung der Schallschutzwand. Die maximale Gesamtverbesserung beträgt 4 dB bei den Klappenöffnungswinkeln 230° und 240°.

Bei einem Quellwinkel von 60° liegen die mit der Klappe erzielten Verbesserungsmaße außer in drei Fällen (190° bis 210°) über denen der erhöhten Schallschutzwand. Das Maximum mit einem klappenförmigen Aufsatz erzielt man hier bei einem Klappenöffnungswinkel von 250°, es beträgt knapp 3 dB. Die maximale Wirkung in den berechneten Fällen liegt bei 2,4 dB. Bei der Erhöhung gilt wieder, je höher die Wand, desto besser die Wirkung. Bei klappenförmigen Aufsätzen gilt das nicht.

Schaut man sich die Terzspektren an Aufpunkt (19,1) für einen Quellwinkel von 30° und einen Klappenöffnungswinkel von 240° an, dargestellt in Abb. 6.24, sieht man, dass die Erhöhung der Wand etwa 1 dB bringt. Der Aufsatz erzielt in jeder Terz mindestens 1,5 dB, ist aber viel stärker frequenzabhängig. Mit der Frequenz steigt das Verbesserungsmaß stark an, hat bei 630 Hz ein lokales Minimum mit einer Verbesserung von 3 dB

| Klappen-öffnungswinkel | Quellwinkel 30° | | Quellwinkel 60° | |
|---|---|---|---|---|
| | $VM_{\text{Klappe}}$ | $VM_{\text{erhöht}}$ | $VM_{\text{Klappe}}$ | $VM_{\text{erhöht}}$ |
| 110° | 2,26 dB | 0,83 dB | 2,28 dB | 0,98 dB |
| 120° | 1,76 dB | 1,17 dB | 2,09 dB | 1,37 dB |
| 130° | 1,59 dB | 1,46 dB | 2,12 dB | 1,70 dB |
| 140° | 1,98 dB | 1,70 dB | 2,33 dB | 1,97 dB |
| 150° | 2,06 dB | 1,89 dB | 2,50 dB | 2,18 dB |
| 160° | 2,05 dB | 2,03 dB | 2,56 dB | 2,33 dB |
| 170° | 2,14 dB | 2,11 dB | 2,54 dB | 2,42 dB |
| 190° | 2,41 dB | 2,11 dB | 2,31 dB | 2,42 dB |
| 200° | 2,92 dB | 2,03 dB | 2,07 dB | 2,33 dB |
| 210° | 3,45 dB | 1,89 dB | 1,87 dB | 2,18 dB |
| 220° | 3,83 dB | 1,70 dB | 2,01 dB | 1,97 dB |
| 230° | 4,05 dB | 1,46 dB | 2,39 dB | 1,70 dB |
| 240° | 4,01 dB | 1,17 dB | 2,67 dB | 1,37 dB |
| 250° | 3,73 dB | 0,83 dB | 2,69 dB | 0,98 dB |
| 260° | 3,18 dB | 0,46 dB | 2,36 dB | 0,54 dB |

**Tabelle 6.1.:** Gesamtverbesserungsmaße aus dem Vergleich einer Schallschutzwand mit Aufsatz und einer gleich hohen Wand ohne Aufsatz

und erzielt für hohe Frequenzen ein maximales Verbesserungsmaß von etwa 9 dB.

Bei einem Quellwinkel von 60°, dargestellt in Abb. 6.25, liegt das maximale Verbesserungsmaß für einen Klappenöffnungswinkel von 240° bei 315 Hz und beträgt knapp 4 dB. Wieder ist der Frequenzverlauf Schwankungen unterworfen. Die Verbesserungsmaße liegen generell über denen der Schallschutzwand mit Erhöhung, fallen aber auf Grund des größeren Quellwinkels kleiner aus als im vorangegangenen Beispiel. Bei nicht zu großen Quellwinkeln sind klappenförmige Aufsätze also sinnvoll, um die Wirkung einer Schallschutzwand zu erhöhen. Die Planung ist jedoch aufwändiger als die einer einfachen Wand.

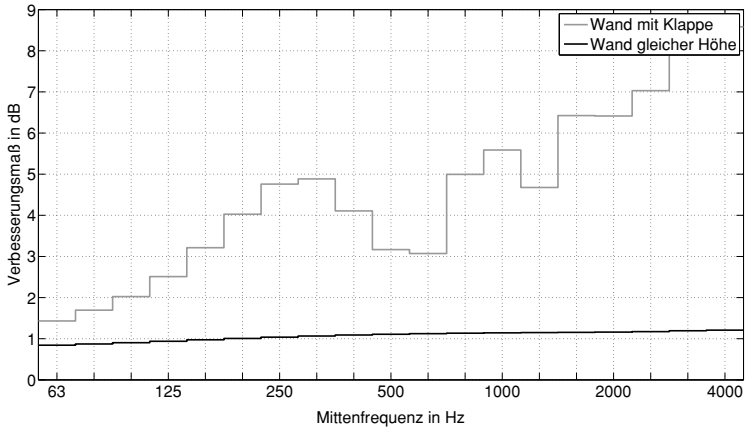


**Abbildung 6.24.:** Verbesserungsmaße für einen klappenförmigen Aufsatz und der Erhöhung der Schallschutzwand bei einem Quellwinkel von 30° und einem Klappenöffnungswinkel von 110° am Aufpunkt (19,1)

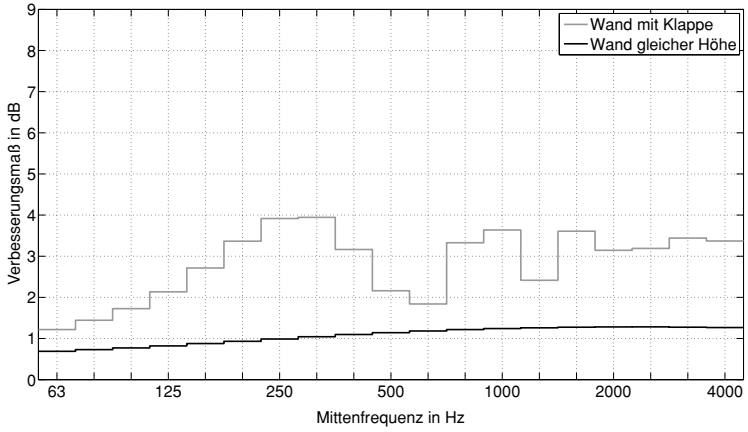


**Abbildung 6.25.:** Verbesserungsmaße für einen klappenförmigen Aufsatz und der Erhöhung der Schallschutzwand bei einem Quellwinkel von 60° und einem Klappenöffnungswinkel von 110° am Aufpunkt (19,1)

## 6.8. Einsatz in der Praxis

Bisher konnte gezeigt werden, dass die Wirkung von klappenförmigen Aufsätzen vor allem vom Quellwinkel und vom Klappenöffnungswinkel abhängt. Dabei sind die erzielten Verbesserungen höher, je kleiner der Quellwinkel ist. Hier stellt sich die Frage, wie man den Klappenöffnungswinkel und die Klappenlänge bei bekannter Lage der Quellposition wählt, um eine möglichst hohe Verbesserung mit einem klappenförmigen Aufsatz zu erzielen. Dabei ist auch die Zusammensetzung des Quellspektrums wichtig, da die Aufsätze in ihrer Wirkung auf dieses abgestimmt werden müssen, um eine möglichst hohe Wirkung zu erzielen.

### 6.8.1. Die Quelle

Schallschutzwände werden hauptsächlich an Verkehrswegen eingesetzt, um Menschen vor zu hoher Lärmbelastung zu schützen. Damit kommen als Quellen vor allem PKWs und LKWs auf Straßen und Züge auf Schienenwegen vor. Das Spektrum kann je nach Quellzusammensetzung (LKW-Anteil am Gesamtverkehrsaufkommen, Güterzug, Personenzug) stark variieren. Hinzu kommen noch Faktoren wie Straßenbelag, Geschwindigkeit und andere. Je nach Quelle ist eine Gewichtung zu finden, die repräsentativ ist und eine Abstimmung des Aufsatzes auf die vorhandene bzw. zu erwartende Situation ermöglicht. Dabei kann zum Beispiel die DIN EN 1793 Teil 3 [69] herangezogen werden, in der das standardisierte Verkehrsspektrum definiert wird.

### 6.8.2. Wahl der Aufsatzparameter

Beim Einsatz von klappenförmigen Aufsätzen in der Praxis ist es wichtig, Entscheidungshilfen oder Richtlinien zur Wahl der Aufsatzparameter zu haben. Dabei bestimmen die Parameter „Klappenlänge“ und „Klappenöffnungswinkel“ die Wirkung des Aufsatzes an den relevanten Empfängerpositionen.

Die Analysen in dieser Arbeit haben gezeigt, dass $\varphi_Q < \varphi_K < 270°$ sein muss, um hohe Verbesserungsmaße erzielen zu können. Hierbei spielen Kenntnisse über die Quellen eine wichtige Rolle. Unter der oben gemachten Annahme, dass $\varphi_{Q,\max} = 60°$ ist, steht fest, dass nur $60° < \varphi_K < 270°$ für die Wahl des Klappenöffnungswinkels sinnvoll ist, um eine positive Wirkung zu erzielen.

Diese Forderungen schränken den Bereich für den Klappenöffnungswinkel ein, lassen aber noch genügend Spielraum bei der Planung. Auf eine computergestützte Berechnung kann allerdings nicht verzichtet werden. Die Darstellung des Gesamtverbesserungsmaßes über den Öffnungswinkel (siehe 6.2) hat sich als günstig erwiesen, um den Klappenöffnungswinkel für einen Aufsatz zu bestimmen. Gemittelt wird dabei jeweils über die Empfängerpositionen und über das berechnete Spektrum.

Plant man einen Aufsatz mit mehr als einer Klappe, so sind Kriterien zur Optimierung der Klappenöffnungswinkel unumgänglich. Dieses Problem zu lösen übersteigt den Umfang dieser Arbeit und sollte gesondert untersucht werden.

Die Wahl der Länge der Klappe hängt maßgeblich vom Spektrum der Quelle ab. Hierbei kommt das Verhältnis von Klappenlänge zu Wellenlänge $r_K/\lambda$ zum Einsatz, um eine geeignete Wahl zu treffen. In Abschnitt 6.8.3 wird anhand eines Beispiels das Vorgehen bei der Gewichtung verdeutlicht.

In der Praxis sind zudem die Gebiete entscheidend, die vor Schall geschützt werden sollen. Daher müssen auch repräsentative Aufpunkte bei der Planung festgelegt werden. Nur so kann ein Aufsatz mit einer hohen Verbesserung gezielt geplant werden. Dabei ist nicht nur das Gebiet direkt hinter der Schallschutzwand schützenswert sondern auch Gebiete, die weiter entfernt liegen. Eine Kontrollposition an solchen Stellen ermöglicht eine Aussage über die Auswirkung des Baus der Schallschutzwand. Vor allem bei der Optimierung von klappenförmigen Aufsätzen ist es wichtig, nicht nur an einem Punkt hinter der Schallschutzwand einen möglichst geringen Schalldruckpegel zu erzielen.

### 6.8.3. Fallbeispiel

Diese Überlegungen werden hier an einem Beispiel verdeutlicht. Dazu werden die Abmessungen aus dem in [51] benutzten Beispiel verwendet (siehe Abb. 6.26). Die Klappe hat eine Länge von 0,5 m, der Winkel in der Zeichnung ist lediglich ein Beispiel, um den Aufbau zu verdeutlichen. Der Quellwinkel beträgt 70°, d. h. die Schallschutzwand ist nicht sehr hoch in Bezug auf die Quellposition.

Als Quelle wird das in [69] beschriebene standardisierte Verkehrslärmspektrum als Grundlage benutzt und wie im Folgenden erläutert, etwas angepasst. Das standardisierte Verkehrslärmspektrum wird bei der

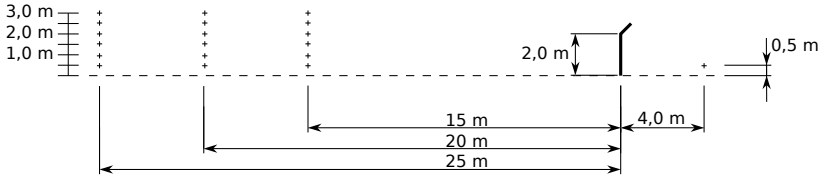


**Abbildung 6.26.:** Abmessungen des Beispiels

Bestimmung eines Einzahlwertes für die Schalldämmung einer Schallschutzwand nach [68] als Gewichtung eingesetzt. Hier soll dieses Spektrum als Grundlage zur Bildung eines typischen Spektrums für Verkehrslärm dienen. Dazu wird der Pegel des standardisierten Spektrums um 60 dB angehoben ($L_{\text{Verkehr}}$ siehe Tab. 6.2) .

Die Abschirmwirkung der Wand ohne Aufsatz wird nach der VDI 2720 [79] berechnet. Alternativ kann man auch die Größe $p_Q$ bzw. den Volumenfluss der Quelle entsprechend der Gewichtung anpassen. Der Schalldruckpegel ohne Aufsatz wird aus der Gewichtung und dem Abschirmmaß $D_z$ nach VDI 2720 [79] mit A-Bewertung bestimmt

$$L_{\text{ohne Aufsatz}} = L_{\text{Verkehr}} - D_z \tag{6.3}$$

Der Schalldruckpegel für eine Wand mit Aufsatz lässt sich dann mittels

$$L_{\text{mit Aufsatz}} = L_{\text{Verkehr}} - D_z - VM_{\text{Aufsatz}} \tag{6.4}$$

berechnen. In Abb. 6.27 sind die Spektren zu sehen, die sich aus diesen Berechnungen bei verschiedenen Klappenöffnungswinkeln ergeben. Man sieht deutlich, dass die Klappe bei allen Öffnungswinkeln eine Verbesserung gegenüber dem Fall „ohne Aufsatz“ bringt. Schaut man sich die Pegeldifferenz

$$\Delta L = L_{\text{mit Aufsatz}} - L_{\text{ohne Aufsatz}} \tag{6.5}$$

an (Abb. 6.28), stellt man fest, dass Verbesserungen bis zu 3,5 dB erzielt werden können. Je kleiner die Werte der Pegeldifferenz werden, desto größer ist die Verbesserung, die durch den klappenförmigen Aufsatz erzielt wird. In beiden Darstellungen ist auch der Fall „Verlängerung der Wand“ (Klappenöffnungswinkel von 180°) zu finden. Vor allem bei der Pegeldifferenz wird deutlich, dass durch einen Aufsatz weit höhere Verbesserungen erzielt werden können als durch eine Verlängerung. Dieser Effekt wurde

| $f_m$ in Hz | $L_{\text{standard}}$ in dB(A) | $L_{\text{Verkehr}}$ in dB(A) |
|---|---|---|
| 100 | -20 | 40 |
| 125 | -20 | 40 |
| 160 | -18 | 42 |
| 200 | -16 | 44 |
| 250 | -15 | 45 |
| 315 | -14 | 46 |
| 400 | -13 | 47 |
| 500 | -12 | 48 |
| 630 | -11 | 49 |
| 800 | -9 | 51 |
| 1000 | -8 | 52 |
| 1250 | -9 | 51 |
| 1600 | -10 | 50 |
| 2000 | -11 | 49 |
| 2500 | -13 | 47 |
| 3150 | -15 | 45 |
| 4000 | -16 | 44 |
| 5000 | -18 | 42 |
| gesamt | | 60,2 |

**Tabelle 6.2.:** Standardisiertes Verkehrslärmspektrum und angepasstes Verkehrslärmspektrum

auch schon in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt, trifft aber auch bei der Anwendung von Aufsätzen bei gewichteten Spektren zu. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich für alle anderen Aufpunkte.

In diesem Beispiel mit einem Verkehrslärmspektrum wurde bei der Wahl der Klappenlänge das Maximum bei 1000 Hz berücksichtigt. Bei dieser Frequenz liegt eine Wellenlänge von $\lambda = 0{,}34\,\text{m}$ vor. Bei einem Quellwinkel von 70°, der am dichtesten bei dem schon untersuchten Quellwinkel von 60° liegt, kann man Abb. 6.17 heranziehen. Bei einer Klappenlänge von 0,34 m würde man gerade nicht die höchste Verbesserung bei 1000 Hz ($r_K/\lambda = 1$) erhalten. Hier bietet sich an, die Klappe etwas länger zu machen, so dass man für 1000 Hz bei etwas weniger als $r_K/\lambda = 1{,}5$ liegt (in den Berechnungen mit $r_K = 0{,}5\,\text{m}$ ergibt sich dann ein $r_K/\lambda = 1{,}47$).

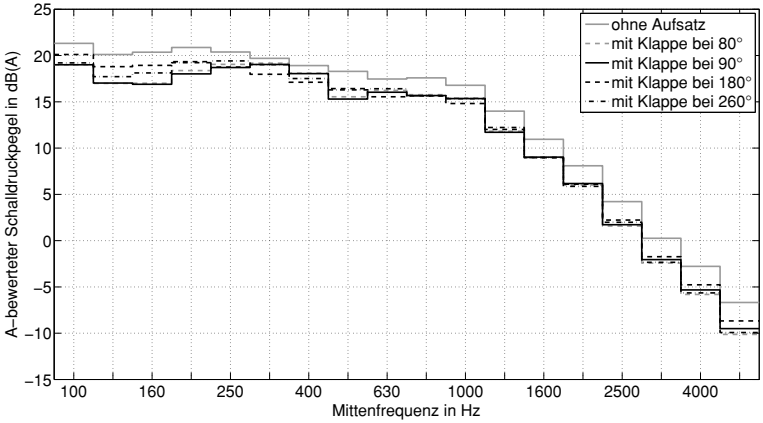


**Abbildung 6.27.:** A-bewerteter Schalldruckpegel für verschiedene Aufsatzkonfigurationen und ohne Aufsatz in einer Entfernung von 25 m und einer Höhe von 1,5 m unterhalb der Schirmkante

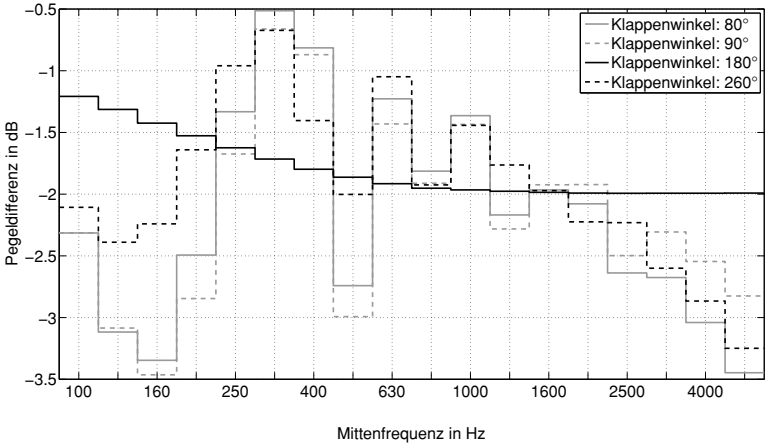


**Abbildung 6.28.:** Pegeldifferenz $\Delta L$ für verschiedene Aufsatzkonfigurationen in einer Entfernung von 25 m und einer Höhe von 1,5 m unterhalb der Schirmkante

### 6.8.4. Limitation

Den Berechnungen mit einer Linienquelle sind numerisch Grenzen gesetzt. Dabei ist entscheidend, wie hoch die maximale Anzahl der Ordnungen $N_{\text{Schirm}} = 4kr_Q$ bei der Berechnung der Koeffizienten ist. Es entstehen zwei mögliche Schwierigkeiten. Erstens werden die Funktionswerte mit steigender Ordnung $N$ immer kleiner. Dadurch entstehen in der Matrix, die bei der Berechnung der Koeffizienten aufgebaut wird, große Abweichungen zwischen dem maximalen und dem minimalen Wert. Das wiederum beeinflusst die Kondition des Systems und damit die Genauigkeit. Zweitens liefert der Algorithmus zur Berechnung der Bessel- und Neumannfunktionen in MATLAB® für sehr hohe Ordnungen nur ungenaue Werte. Beide Effekte beeinflussen die berechneten Schalldrücke. Sowohl die Frequenz als auch der Quellabstand fließen hier in die Berechnung ein. Eine Möglichkeit diesem Problem zu begegnen, ist die Skalierung des Aufbaus, d. h. die Klappenlänge und der Quellabstand werden durch einen Faktor vergrößert bzw. verkleinert. Hierbei ist zu beachten, dass die Wirkung frequenzabhängig ist, durch eine Betrachtung der Verbesserung über $r_K/\lambda$ ist eine Abschätzung aber möglich.

# 7 Ergebnisse

Schallschutzwände waren und sind nach wie vor ein geeignetes Mittel, um Menschen vor Lärm zu schützen. Dabei werden Aufsätze zunehmend eine wichtige Rolle spielen, um die Wirkung von Schallschutzwänden zu verbessern ohne sie unnötig hoch bauen zu müssen.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass man mit klappenförmigen Aufsätzen die Beugung an der Oberkante von Schallschutzwänden beeinflussen kann. Damit die Wirkung der Schallschutzwand durch diese Aufsätze verbessert wird, benötigt man allerdings geeignete Verfahren zur Berechnung. Das in dieser Arbeit entwickelte Modell (siehe Kapitel 2 und Kapitel 3), dem ein wellentheoretischer Ansatz zugrunde liegt, eignet sich gut, um die Wirkung dieser Aufsätze abzuschätzen.

Im Vergleich von numerischen und messtechnischen Ergebnissen zeigt sich, dass die Messergebnisse die berechneten Werte bestätigen. Die zum Teil recht hohen Verbesserungsmaße für die klappenförmigen Aufsätze können auch in Laborexperimenten nachgewiesen werden. Die aus den Messungen bestimmten Gesamtverbesserungsmaße betrugen bis zu 6 dB bei einem Quellwinkel von 30°, für einen Quellwinkel von 60° fielen sie mit weniger als 1,5 dB deutlich geringer aus. Der Vergleich zeigt, dass das vorgestellte Modell, das der Simulation zu Grunde liegt, das Verhalten von klappenförmigen Aufsätzen sehr gut beschreibt.

Untersuchungen bezüglich der Parameter zeigen, dass der Klappenöffnungswinkel größer als der Quellwinkel sein muss ($\varphi_K > \varphi_Q$), um

eine Verbesserung mit den klappenförmigen Aufsätzen zu erzielen. Diese Erkenntnis kann bei der Planung als Richtlinie angesehen werden. Das ersetzt allerdings nicht eine gezielte Untersuchung bezüglich des Klappenöffnungswinkels.

Des Weiteren konnte in Abschnitt 6.7 gezeigt werden, dass klappenförmige Aufsätze Vorteile gegenüber einer Erhöhung der Schallschutzwand bringen. Hier gilt, je kleiner der Quellwinkel ist, desto höher fällt die Verbesserung durch einen klappenförmigen Aufsatz aus. Im günstigsten untersuchten Fall erzielt man mit einer Klappe eine 2,9 dB höhere Verbesserung als mit einer Erhöhung der Schallschutzwand.

Für einen Quellwinkel von 30° konnten Gesamtverbesserungsmaße von bis zu 4 dB, in einzelnen Terzen bis zu 9 dB erzielt werden. Dabei fallen die Verbesserungen für tiefe Frequenzen geringer aus als für hohe. Je höher die Quelle positioniert ist, also je größer der Quellwinkel wird, desto kleiner fallen die Verbesserungen durch eine Klappe aus. Bei einem Quellwinkel von 90° erzielt man die höchsten Verbesserungen von bis zu 6 dB für einen Klappenöffnungswinkel von 180°, also einer senkrechten Verlängerung der Schallschutzwand.

Neben den Berechnungen mit einer Linienquelle sind auch Näherungsverfahren untersucht worden. Hier zeigte sich, dass die Verwendung einer ebenen Welle an Stelle der Linienquelle bei einfachen Schallschutzwänden schon für kleine Quellabstände eine gute Näherung mit Abweichungen von weniger als 0,5 dB liefert. Bei der Betrachtung von klappenförmigen Aufsätzen sind die Abweichungen sehr viel größer.

Die Unterschiede zwischen den Simulationen mit einer Linienquelle und einer ebenen Welle zeigen sich vor allem bei großen Quellwinkeln (gezeigt wurde das bei $\varphi_Q = 90°$, siehe Abschnitt 6.3). Hier wird die Wirkung der Aufsätze mittels ebener Welle stark unterschätzt. Erst bei einem Verhältnis von $r_Q/r_K = 10$ beträgt der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsmethoden weniger als 1 dB. Ein Quellwinkel von 90° bedeutet allerdings auch, dass die Wand selbst nur noch eine geringe Wirkung auf das Schallfeld hat, die Wand ist sozusagen nicht hoch genug. Daher ist dieser Fall als Extremfall anzusehen, der in der Praxis keine oder nur in Ausnahmesituationen eine Rolle spielt.

Bei der Betrachtung von weit entfernt liegenden Aufpunkten kam die Fernfeldnäherung zum Einsatz. Der Vorteil besteht in sehr kurzen Rechenzeiten bei der Simulation. Allerdings sind die Abweichungen von den Ergebnissen, die mit einer Linienquelle berechnet wurden, nur für sehr große Klappenöffnungswinkel (ab 260°) klein.

Ein anderer Ansatz, der in dieser Arbeit betrachtet wurde, ist die Erweiterung des Umweggesetzes. Das Umweggesetz basiert auf der geometrischen Verlängerung des Weges zwischen Quelle und Empfänger durch die Schallschutzwand. Auch ein klappenförmiger Aufsatz verlängert für Klappenöffnungswinkel, die größer als der Quellwinkel sind, den Weg zwischen Quelle und Empfänger. Die Untersuchung zeigt, dass dieser geometrische Ansatz die Wirkung nicht abschätzen kann und für Planungen ungeeignet ist.

Bei der Planung von Schallschutzwänden mit klappenförmigen Aufsätzen stehen mehr Einflussparameter zur Verfügung als bei der Planung einer einfachen Schallschutzwand. Die Möglichkeiten, die man dadurch erhält, vor allem bezüglich einer Anpassung an das Frequenzspektrum, sind vielfältig. Eine einfache Planungsgrundlage, wie sie die VDI 2720 [79] für Schallschutzwände ohne Aufsätze darstellt, existiert allerdings nicht. Die hier vorgestellte Berechnungsmethode eignet sich sehr gut, um die Wirkung der Aufsätze abzuschätzen. In Abschnitt 6.8.3 wurde ein Einblick in die Planung von Aufsätzen gegeben und gezeigt, dass mit einem klappenförmigen Aufsatz eine bessere Abschirmwirkung als mit einer einfachen Schallschutzwand erzielt werden kann.

# 8 Ausblick

Bei der Untersuchung von klappenförmigen Aufsätzen sind Fragen, die über den in dieser Arbeit behandelten Rahmen hinausgehen, aufgetreten. Diese lassen sich in drei Kategorien einordnen:

- Erweiterung des Modells
- Optimierung
- Programmierung

Die untersuchten Beispiele bestanden in dieser Arbeit lediglich aus einer Schallschutzwand. In der Praxis kommen aber auch Situationen vor, in denen zwei Schallschutzwände parallel zueinander einen Verkehrsweg an zwei Seiten umgeben. Dabei spielen mehrfache Reflexionen eine große Rolle, die in dem hier betrachteten numerischen Modell nicht berücksichtigt werden. Dazu gehört auch die Berücksichtigung des Bodens.

Die eingesetzten Algorithmen sind in der Lage, die Wirkung von Aufsätzen mit mehr als einer Klappe zu berechnen. Auf Grund der hohen Anzahl an Möglichkeiten bezüglich des Klappenöffnungswinkels und der Klappenlänge scheinen Optimierungsalgorithmen sinnvoll, um geeignete Parameterkombinationen zu finden. Erste Tests mit genetischen Algorithmen (GA) in MATLAB® waren vielversprechend. Eine intensive Auseinandersetzung mit dem Thema ist dabei aber unumgänglich.

Die hier entwickelten Algorithmen sind bisher nicht zu einem einheitlichen Simulationspaket zusammengeführt worden. Da sämtliche Berechnungen mit MATLAB® erfolgten, ist es wünschenswert, eine MATLAB® Toolbox zu entwickeln, die Algorithmen zur Berechnung der Beugung an Schallschutzwänden bereitstellt. Wird die Möglichkeit zur Erweiterung der Toolbox integriert, können auch Ergebnisse anderer Arbeiten langfristig gesichert werden.

# A

# Symbolverzeichnis

## A

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ | Öffnungswinkel zwischen der Schallschutzwand und einer Klappe bzw. zwischen zwei Klappen | [°] |
| $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ | Teilmatrix der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ | |
| $\boldsymbol{A}$ | Koeffizientenmatrix | |
| $\vec{a}$ | Konstantenvektor | |
| $a_{\mathcal{K}}$, $a_n$, $a_{K,Sn}$ | Konstanten | |
| $A_{1\,mn}$, $A_{2\,mn}$ | Matrixelement in Spalte $m$ und Zeile $n$ der Matrizen $\boldsymbol{A}_1$ bzw. $\boldsymbol{A}_2$ | |
| $A_n$ | Konstanten | |

## B

| | | |
|---|---|---|
| $\beta$ | Beugungswinkel | [°] |
| $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$ | Teilmatrix der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ | |
| $\vec{b}$ | Konstantenvektor | |
| $b_{\mathcal{K}}$, $b_n$, $b_{K,Sn}$ | Konstanten | |
| $B_{1\,mn}$, $B_{2\,mn}$ | Matrixelement in Spalte $m$ und Zeile $n$ der Matrizen $\boldsymbol{B}_1$ bzw. $\boldsymbol{B}_2$ | |

| | |
|---|---|
| $B_n$ | Konstanten |

**C**

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$ | Teilmatrix der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ |
| $\vec{c}$ | Konstantenvektor |
| $c$ | Schallgeschwindigkeit [m/s] |
| $C(x)$, $S(x)$ | Fresnel-Integrale |
| $C_{1\,mn}$, $C_{2\,mn}$ | Matrixelement in Spalte $m$ und Zeile $n$ der Matrizen $\boldsymbol{C}_1$ bzw. $\boldsymbol{C}_2$ |
| $c_L$ | Schallausbreitungsgeschwindigkeit in Platte |
| $C_n$ | Konstanten |
| $c_n$, $c_{K,Sn}$ | Konstanten |

**D**

| | |
|---|---|
| $\delta$, $\delta_x$, $\delta_y$ | relativer Fehler |
| $\delta(\varphi - \varphi_Q)$ | Delta-Distribution |
| $\boldsymbol{D_1}$, $\boldsymbol{D_2}$ | Teilmatrix der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ |
| $\vec{d}$ | Konstantenvektor |
| $D_{1\,mn}$, $D_{2\,mn}$ | Matrixelement in Spalte $m$ und Zeile $n$ der Matrizen $\boldsymbol{D}_1$ bzw. $\boldsymbol{D}_2$ |
| $D_n$ | Konstanten |
| $d_n$ | Konstanten |

**E**

| | |
|---|---|
| $\epsilon$ | numerischer Fehler |
| $\epsilon_{\text{Schranke}}$ | Fehlerschranke |
| $\eta$ | Verlustfaktor |
| $\boldsymbol{E}$ | Einheitsmatrix |
| $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ | Teilmatrix der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ |
| $E_{\mathcal{K}}$, $E_n$ | Konstanten |
| $e_{\mathcal{K}}$, $e_n$ | Konstanten |
| e | Eulerzahl |

**F**

| | |
|---|---|
| $F_{\mathcal{K}}$, $F_n$ | Konstanten |
| $f_{\mathcal{K}}$, $f_n$ | Konstanten |
| $f_0$ | Resonanzfrequenz |
| $f_{cr}$ | kritische Frequenz |

**G**

| | |
|---|---|
| $g_n$, $G_n$ | Konstanten |

**H**

| | |
|---|---|
| $H_n^{(1)\prime}(x)$ | Ableitung der Hankelfunktion zweiter Art n-ter Ordnung nach dem Argument |
| $H_n^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ | Hankelfunktion erster Art n-ter bzw. $\nu$-ter Ordnung |
| $H_n^{(2)\prime}(x)$ | Ableitung der Hankelfunktion zweiter Art n-ter Ordnung nach dem Argument |
| $H_n^{(2)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ | Hankelfunktion erster Art n-ter bzw. $\nu$-ter Ordnung |
| $h_{A,\mathrm{rel}}$ | vertikaler Abstand zwischen Schallschutzwand und Empfänger [m] |
| $h_K$ | Höhe der Klappe |
| $h_{Q,\mathrm{rel}}$ | vertikaler Abstand zwischen Schallschutzwand und Quelle [m] |

**J**

| | |
|---|---|
| $j$ | imaginäre Einheit |
| $J_n'(x)$ | Ableitung der Besselfunktion n-ter Ordnung nach dem Argument |
| $J_n(x)$, $J_\nu(x)$ | Besselfunktion n-ter bzw. $\nu$-ter Ordnung |

**K**

| | |
|---|---|
| $\kappa$ | Konditionszahl |
| $\mathcal{K}$ | Konstante |
| $K$ | Nummer des Kreises |
| $k$ | Wellenzahl $[\mathrm{m}^{-1}]$ |

| | | |
|---|---|---|
| $K_{12}$, $K_{22}$, $K_{23}$ | Länge der Kanten beim erweiterten Umweggesetz für Klappen | |
| $K_1$, $K_2$, $K_n$ | Länge der Kanten beim Umweggesetz | |

**L**

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta L$ | Differenz der Schalldruckpegel | [dB] |
| $\lambda$ | Wellenlänge | [m] |
| $L$ | Schalldruckpegel | [dB] |
| $l_A$ | horizontaler Abstand zwischen Schallschutzwand und Empfänger | [m] |
| $l_Q$ | horizontaler Abstand zwischen Schallschutzwand und Quelle | [m] |

**M**

| | | |
|---|---|---|
| $M$ | Anzahl der benutzten Punkte bei der Simulation | |
| $m''$ | Flächenmasse | [kg/m$^2$] |

**N**

| | | |
|---|---|---|
| $N$ | Anzahl der benutzten Moden bei der Simulation | |
| $n$, $\nu$ | Ordnung der Bessel-, Neumann- oder Hankelfunktionen | |
| $N'_n(x)$ | Ableitung der Neumannfunktion n-ter Ordnung nach dem Argument $x$ | |
| $N_n(x)$, $N_\nu(x)$ | Neumannfunktion n-ter bzw. $\nu$-ter Ordnung | |

**O**

| | | |
|---|---|---|
| $\omega$ | Kreisfrequenz | [s$^{-1}$] |

**P**

| | | |
|---|---|---|
| $\phi$ | Aufpunktwinkel | [°] |
| $\Phi(\varphi)$ | winkelabhängige Funktion für den Separationsansatz | |
| $\varphi$ | Winkel | [°] |
| $\varphi_K$ | Klappenöffnungswinkel | [°] |

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_Q$ | Quellwinkel | [°] |
| $p$ | Schalldruck | [Pa] |
| $p_Q$ | Druck am Koordinatenursprung ohne Schallschutzwand | [Pa] |

**Q**

| | | |
|---|---|---|
| $Q$ | Volumenfluss | [$m^3/s$] |
| $Q'$ | Volumenfluss pro Längeneinheit | [$m^2/s$] |

**R**

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta r$ | kleiner radialer Abstand | [m] |
| $\rho$ | Dichte von Luft | [$kg/m^3$] |
| $\vec{r}$ | Residuenvektor | |
| $R$ | Schalldämmmaß | |
| $r$ | Radius | [m] |
| $R(r)$ | radiusabhängige Funktion für den Separationsansatz | |
| $R_E$ | Einfügungsdämmmaß | [dB] |
| $r_K$ | Länge der Klappe | [m] |
| $r_Q$ | Abstand der Quelle zum Koordinatenursprung | [m] |

**S**

| | | |
|---|---|---|
| $S(x)$, $C(x)$ | Fresnel-Integrale | |
| $S_K$ | Nummer des Segments | |

**T**

| | | |
|---|---|---|
| $t$ | Zeit | [s] |

**U**

| | | |
|---|---|---|
| $U$ | Umweg | [m] |
| $U_K$ | Umfang des Kreises mit Radius $r_K$ | [m] |

**V**

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta v$ | Quellgröße | |

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta VM$ | Differenz zweier Verbesserungsmaße | [dB] |
| $\overline{VM}$ | räumlich gemitteltes Verbesserungsmaß | [dB] |
| $VM$ | Verbesserungsmaß | [dB] |
| $VM_{\mathrm{ges}}$ | Gesamtverbesserungsmaß, gemittelt über den betrachteten Frequenzbereich und alle betrachteten Aufpunkte | [dB] |
| $v$ | Schnelle | [m/s] |

**X**

| | |
|---|---|
| $\vec{x}$ | gesuchter Vektor des linearen Gleichungssystems |
| $x$ | kartesische Koordinate |

**Y**

| | |
|---|---|
| $\vec{y}$ | Vektor auf der rechten Seite des linearen Gleichungssystems |
| $y$ | kartesische Koordinate |

**Z**

| | | |
|---|---|---|
| $Z$ | Impedanz | [Ns/m$^3$] |
| $z$ | kartesische Koordinate | |

# B

# Mathematische Grundlagen

## B.1. Eigenschaften der Bessel-, Neumann- und Hankelfunktionen

Aus [1, S. 360, Gln. 9.1.15 - 9.1.17]:

Wronski-Determinante

$$\begin{aligned} W\{J_\nu(x),J_{-\nu}(x)\} =& J_{\nu+1}(x)J_{-\nu}(x) + J_\nu(x)J_{-(\nu+1)}(x) \\ =& -2\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi x} \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned} W\{J_\nu(x),Y_\nu(x)\} =& J_{\nu+1}(x)Y_\nu(x) - J_\nu(x)Y_{\nu+1}(x) \\ =& \frac{2}{\pi x} \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned} W\{H_\nu^{(1)}(x),H_\nu^{(2)}(x)\} =& H_{\nu+1}^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x) - H_\nu^{(1)}(x)H_{\nu+1}^{(2)}(x) \\ =& -\frac{4j}{\pi x} \end{aligned} \tag{B.3}$$

Rekursive Definitionen:

$$\mathcal{C}_{\nu-1}(x) + \mathcal{C}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\mathcal{C}_\nu(x) \tag{B.4}$$

$$\mathcal{C}_{\nu-1}(x) - \mathcal{C}_{\nu+1}(x) = 2\mathcal{C}'_\nu(x) \tag{B.5}$$

$$\mathcal{C}'_\nu(x) = \mathcal{C}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}\mathcal{C}_\nu(x) \tag{B.6}$$

$$\mathcal{C}'_\nu(x) = -\mathcal{C}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}\mathcal{C}_\nu(x) \tag{B.7}$$

## B.2. Herleitung für die Darstellung mit Fresnel-Integralen

Mit $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$ wird aus Gl. (2.37)

$$\begin{aligned} p_1 =& p_Q(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\,jn\pi/4}}{\varepsilon_n}J_{\frac{n}{2}}(kr)\left[\cos\left(\frac{n}{2}(\varphi-\varphi_Q)\right)+\cos\left(\frac{n}{2}(\varphi+\varphi_Q)\right)\right] \\ =& p_Q(0)\left[\frac{1}{2}J_0(kr)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\,jn\pi/4}J_{\frac{n}{2}}(kr)\cos\left(\frac{n}{2}(\varphi-\varphi_Q)\right)\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}J_0(kr)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\,jn\pi/4}J_{\frac{n}{2}}(kr)\cos\left(\frac{n}{2}(\varphi+\varphi_Q)\right)\right] \end{aligned} \tag{B.8}$$

Nach [16, S. 973, Nr. 8.511 5.] ist

$$\frac{1}{2}J_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\,jk\pi/4}J_{\frac{k}{2}}(z)\cos(k\theta) = \sqrt{\frac{j}{\pi}}\mathrm{e}^{\,jz\cos(2\theta)}\int_{-\infty}^{\sqrt{2z}\cos\theta}\mathrm{e}^{\,-jt^2}\,\mathrm{d}t \tag{B.9}$$

und man kommt damit auf

$$\begin{aligned} p_1 =& p_Q(0)\sqrt{\frac{j}{\pi}}\mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi-\varphi_Q)}\int_{-\infty}^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right)}\mathrm{e}^{\,-jt^2}\,\mathrm{d}t \\ &+p_Q(0)\sqrt{\frac{j}{\pi}}\mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi+\varphi_Q)}\int_{-\infty}^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right)}\mathrm{e}^{\,-jt^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{1}{=} p_Q(0)\sqrt{\frac{j}{\pi}}\mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi-\varphi_Q)}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\,-jt^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right)}\mathrm{e}^{\,-jt^2}\mathrm{d}t\right)\\
&+p_Q(0)\sqrt{\frac{j}{\pi}}\mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi+\varphi_Q)}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\,-jt^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right)}\mathrm{e}^{\,-jt^2}\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

Bestimmt man zwei Integrale mit $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\,-a^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ [7] und zerlegt die e-Funktionen unter den beiden anderen Integralen nun noch mit $\mathrm{e}^{\,\pm j\phi}=\cos(\phi)\pm j\sin(\phi)$, erhält man

$$
\begin{aligned}
p_1 =&\, p_Q(0)\mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi-\varphi_Q)}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{j}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right)}\cos(t^2)\mathrm{d}t\right.\\
&\left.-j\sqrt{\frac{j}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right)}\sin(t^2)\mathrm{d}t\right)+p_Q(0)\mathrm{e}^{\,jkr\cos(\varphi+\varphi_Q)}\\
&\cdot\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{j}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right)}\cos(t^2)\mathrm{d}t\right.\\
&\left.-j\sqrt{\frac{j}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right)}\sin(t^2)\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

und unter Ausnutzung der Fresnel-Integrale

$$
S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x}\sin(t^2)\mathrm{d}t \qquad C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x}\cos(t^2)\mathrm{d}t\,, \tag{B.12}
$$

[1] Mit der Substitution $t=-u$ und $dt=-du$ erhält man nach dem Vertrauschen der Grenzen aus $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\,-jt^2}dt=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\,-ju^2}du$

schließlich

$$p_1 = p_{\text{Schirm}}(r,\varphi) = p_Q \frac{1+j}{2} \left( \mathrm{e}^{jkr\cos(\varphi-\varphi_Q)} \phi_+ + \mathrm{e}^{jkr\cos(\varphi+\varphi_Q)} \phi_- \right) \tag{B.13}$$

mit

$$\phi_+ = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi-\varphi_Q}{2}\right) \tag{B.14}$$

$$\phi_- = \frac{1-j}{2} + C\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right) - j\,S\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\varphi+\varphi_Q}{2}\right). \tag{B.15}$$

## B.3. Fresnel-Integrale

In [39] benutzte Darstellung der Fresnel-Integrale:

$$C_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t \qquad S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t\,. \tag{B.16}$$

In [50] benutzte Darstellung der Fresnel-Integrale:

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t \qquad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t\,. \tag{B.17}$$

Umrechnung zwischen beiden Darstellungen:

$$C(x) = C_1\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \qquad S(x) = S_1\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \tag{B.18}$$

$$\Rightarrow C_1(x) = C\left(x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \qquad \Rightarrow S_1(x) = S\left(x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right). \tag{B.19}$$

Die Fresnel-Integrale haben folgende Eigenschaften:

$$C(-x) = -\,C(x) \qquad S(-x) = -\,S(x)\,. \tag{B.20}$$

# Literaturverzeichnis


[1] Abramowitz, M. ; Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. New York : Dover, 1964

[2] Angermann, Anne ; Beuschel, Michael ; Rau, Martin: *Matlab - Simulink - Stateflow. Grundlagen, Toolboxen, Beispiele*. 5., aktualisierte. Oldenbourg, 2007. – ISBN 3486582720

[3] ARD: *Tagesthemen - Lärmschutz*. ARD. `http://www.tagesschau.de/multimedia/sendung/tt512.html`. Version: 16.04.2008 22.15 Uhr, Abruf: 28.04.2008. – Fernsehsendung

[4] Baulac, Marine ; Defrance, Jerome ; Jean, Philippe: Optimization of multiple edge barriers with genetic algorithms coupled with a Nelder-Mead local search. In: *Journal of Sound and Vibration* 300 (2007), Nr. 1-2, S. 71–87

[5] Baulac, Marine ; Defrance, Jerome ; Jean, Philippe: Optimisation with genetic algorithm of the acoustic performance of T-shaped noise barriers with a reactive top surface. In: *Applied Acoustics* 69 (2008), Nr. 4, S. 332–342

[6] Born, Max: *Optik*. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 1972

[7] Bronstein, I. N. ; Semendjajew, K. A. ; Musiol, G. ; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001

[8] Butler, G.F.: A note on improving the attenuation given by a noise barrier. In: *Journal of Sound and Vibration* 32 (1974), Nr. 3, S. 367–369

[9] Crombie, D. H. ; Hothersall, D. C.: The Performance Of Multiple Noise Barriers. In: *Journal of Sound and Vibration* 176 (1994), September, Nr. 4, S. 459–473

[10] Dahmen, W. ; Reusken, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 2008

[11] Europäische Komission *Künftige Lärmschutzpolitik* KOM/96/0540 . Green Paper

[12] Fiedler, C.: Abschirmwände mir absorbierender Verkleidung – Modellmessungen zur Verbesserung der Abschirmwirkung von Schallschirmen. In: *Zeitschrift für Lärmbekämpfung* 30 (1983), S. 177 – 181

[13] Fujiwara, K.: Influence of covering materials on the noise reducing efficiency of a barrier with absorbing edge. In: *Inter Noise*, 1989

[14] Fujiwara, K. ; Hothersall, D.C. ; Kim, C.: Noise Barriers with Reactive Surfaces. In: *Applied Acoustics* 53 (1998), Nr. 4, S. 255 – 272

[15] Fujiwara, K. ; Ishiduka, T.: Noise Shielding Efficiency of Barrier with Multiple Absorbing Edge Obstacle. In: *Inter Noise*, 1999

[16] Gradshteyn, I. S. ; Ryzhik, I. M.: *Table of integrals, series, and products*. New York : Academic Press, 1980. – ISBN 0–12–294760–6

[17] Hasebe, M.: A study on the sound reduction by T-profile noise barriers. In: *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)* 14 (1993), Nr. 2, S. 113 – 115

[18] Hasebe, M.: Sound reduction by a T-profile noise barrier. In: *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)* 16 (1995), Nr. 3, S. 173 – 179

[19] Hayek, Sabih I.: Mathematical modeling of absorbent highway noise barriers. In: *Applied Acoustics* 31 (1990), Nr. 1-3, S. 77–100

[20] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen Einführung in Lehre und Gebrauch*. B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage, Wiesbaden, 2006

[21] Hothersall, D.C. ; Chandler-Wilde, S.N. ; Hajmirzae, M.N.: Efficiency of single noise barriers. In: *Journal of Sound and Vibration* 146 (1991), Nr. 2, S. 303 – 322

[22] Hothersall, D.C. ; Crombie, D.H. ; Chandler-Wilde, S.N.: The Performance of T-Profile and Associated Noise Barriers. In: *Applied Acoustics* 32 (1991), S. 269 – 287

[23] Hutchins, D.A. ; Jones, H.W. ; Russell, L.T.: Model studies of barrier performance in the presence of ground surface. Part II – Different shapes. In: *J. Acoust. Soc. Am. (JASA)* 75 (1984), Nr. 6, S. 1817–1826

[24] Hutchins, D.A. ; Jones, H.W. ; Russell, L.T.: Model studies of barrier performance in the presence of ground surfaces. Part I – Thin, perfectly reflecting barriers. In: *J. Acoust. Soc. Am. (JASA)* 75 (1984), Nr. 6, S. 1807–1816

[25] Imelmann, Ch.: Der Einfluß einer absorbierenden Oberfläche auf die Einfügungsdämmung von Abschirmwänden und -wällen. In: *Zeitschrift für Lärmbekämpfung* 31 (1984), S. 74 – 82

[26] Kiusalaas, Jaan: *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*. Cambridge University Press, 2005

[27] Kotzen, B. ; English, C.: *Environmental Noise Barriers: A Guide to their Acoustic and Visual Design*. E & FN Spon, London, 1999

[28] Kurze, U. J. ; Anderson, G.S: Sound Attenuation by Barriers. In: *Applied Acoustics* 4 (1971), S. 35 – 53

[29] Li, K. M. ; Wong, H. Y.: The Acoustic Performance of a Cranked Barrier: An Approximate Integral Formulation. In: *ACTA ACUSTICA united with ACUSTICA* 91 (2005), S. 680 – 688

[30] Maekawa, Z.: Noise reduction by screens. In: *Applied Acoustics* 1 (1968), Juli, Nr. 3, S. 157–173

[31] Mathworks Support: *Why does the BESSELH function return innacurate/erroneous results?* Technical Solutions. `http://www.mathworks.com/support/solutions/en/data/1-2CBBZV/?solution=1-2CBBZV`. Version: 9.8.2010. – Solution ID: 1-2CBBZV

[32] May, D. N. ; Osman, M. M.: Highway Noise Barriers: New Shapes. In: *Journal of Sound and Vibration* 71 (1980), Nr. 1, S. 73 – 101

[33] May, D.N. ; Osman, M.M.: The performance of sound absorptive, reflective, and T-Profile noise barriers in Toronto. In: *Journal of Sound and Vibration* 71 (1980), Nr. 1, S. 65–71

[34] Mehra, S. R.: Aufblasbare Schallschirme. In: *IBP-Mitteilung* 28 (2001), Nr. 386, S. 1 – 2

[35] Mehra, S. R.: Lärmpegelerhöhung durch eine Lärmschutzwand. In: *IBP-Mitteilung* 28 (2001), Nr. 392, S. 1 – 2

[36] Moler, Cleve: The Tetragamma Function and Numerical Craftsmanship. In: *Mathworks Newsletters - MATLAB News & Notes* (2002), February. `http://www.mathworks.de/company/newsletters/news_notes/clevescorner/winter02_cleve.html`

[37] Morse, P. M. ; Ingard, K. U.: *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1986

[38] Möser, M.: Die Wirkung von zylindrischen Aufsätzen an Schallschirmen. In: *ACUSTICA* 81 (1995), S. 565–586

[39] Möser, M.: *Technische Akustik*. 7. erweiterte und aktualisierte Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007

[40] Möser, Michael (Hrsg.): *Messtechnik der Akustik*. 1. Auflage. Springer, Berlin, 2010

[41] Nyborg, W. L. ; Mintzer, D.: Review of Sound Propagation in the lower Atmosphere / Brown University, Wright Air Development Center. 1955 (54 - 602). – WADC Technical Report 54 - 602

[42] Okubo, T. ; Yamamoto, K.: Procedures for determining the acoustic efficiency of edge-modified noise barriers. In: *Applied Acoustics* 68 (2007), Juli, Nr. 7, S. 797–819

[43] Pfitzner, C.: *Mess- und Berechnungsverfahren zur Bestimmung des Beugungsfeldes*, Technische Universität Berlin, Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik, Bachelorarbeit, 2010

[44] Preuss, Wolfgang ; Wenisch, Günter: *Lehr- und Übungsbuch Numerische Mathematik*. Fachbuchverlag Leipzig, 2001

[45] Quarteroni, Alfio ; Sacco, Riccardo ; Saleri, Fausto: *Numerische Mathematik 1*. Springer, 2002. – ISBN 978–3–540–67878–6

[46] Rawlins, A.D.: Diffraction of sound by a rigid screen with a soft or perfectly absorbing edge. In: *Journal of Sound and Vibration* 45 (1976), Nr. 1, S. 53 – 67

[47] Rettinger, M.: Noise Level Reductions of Barriers. In: *Noise Control* 3 (1957), Nr. 5, S. 50–52

[48] Schwarz, H. R. ; Köckler, N.: *Numerische Mathematik*. 7. überarbeitete Auflage. Vieweg+Teubner, 2009. – ISBN 978–3–8348–0683–3 (Print) 978–3–8348–9282–9 (Online)

[49] Sommerfeld, A.: Mathematische Theorie der Diffraction. (Mit einer Tafel). In: *Mathematische Annalen* 47 (1896), S. 317–374

[50] Volegov, Peter L.: *FCS Computes Fresnel integrals*. Matlab Central. `http://www.mathworks.de/matlabcentral/fileexchange/6580`. Version: 2002. – Stand 15. Juli 2009

[51] Volz, R.: *Schallabweisende Aufsätze zur Verbesserung der Dämmwirkung von Schallschirmen*. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 2002

[52] Volz, R. ; Möser, M.: Schallschirme mit zylinderförmigen Aufsätzen - erste Ergebnisse. In: *Fortschritte der Akustik – DAGA 97*, 1997

[53] Volz, R. ; Möser, M.: Aufsätze für Schallschirme. In: *Fortschritte der Akustik – DAGA 98*, 1998

[54] Volz, R. ; Möser, M.: Aufsätze für Schallschirme - Messungen an einer Lärmschutzwand. In: *Fortschritte der Akustik – DAGA 00*, 2000

[55] Volz, R. ; Möser, M.: Aufsätze für Schallschirme - verschieden abgestimmte Resonatoren. In: *Fortschritte der Akustik – DAGA 00*, 2000

[56] Watts, G. R.: Acoustic performance of a multiple edge noise barrier profile at motorway sites. In: *Applied Acoustics* 47 (1996), Nr. 1, S. 47–66

[57] Watts, G. R. ; Crombie, D. H. ; Hothersall, D. C.: Acoustic Performance Of New Designs Of Traffic Noise Barriers: Full Scale Tests. In: *Journal of Sound and Vibration* 177 (1994), Oktober, Nr. 3, S. 289–305

[58] Wirt, L. S.: The Control of Diffracted Sound by Means of Thnadners (Shaped Noise Barriers). In: *Acustica* 42 (1979), Nr. 2, S. 73–88

[59] World Health Organization (Hrsg.): *Environmental Health Criteria*. World Health Organization Geneva, 1980. – ISBN 92 4 154072 9

# Gesetze und Normen


[60] Gesetz zur Umsetzung der EG-Richtlinie *über die Bewertung und Bekämpfung von Umgebungslärm* (idF v. 24. 6. 2005)

[61] BImSchG *Bundes-Immissionsschutzgesetz* (idF v. 23. 10. 2007)

[62] 16. BImSchV *Verkehrslärmschutzverordnung* (idF v. 19. 9. 2006)

[63] 24. BImSchV *Verkehrswege-Schallschutzmaßnahmenverordnung* (idF v. 23. 9. 1997)

[64] 34. BImSchV *Verordnung über die Lärmkartierung* (idF v. 6. 3. 2006)

[65] Vornorm DIN CEN/TS 1793-4 2003. *Lärmschutzeinrichtungen an Straßen – Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften, Teil 4: Produktspezifische Merkmale – In-situ-Werte der Schallbeugung*

[66] Vornorm DIN CEN/TS 1793-5 2003. *Lärmschutzeinrichtungen an Straßen – Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften, Teil 5: Produktspezifische Merkmale – In-situ-Werte der Schallreflexion und Luftschalldämmung*

[67] Norm DIN EN 1793 Teil 1 1997. *Lärmschutzeinrichtungen an Straßen Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften, Teil 1: Produktspezifische Merkmale der Schallabsorption*

[68] Norm DIN EN 1793-2 1997. *Lärmschutzeinrichtungen an Straßen – Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften, Teil 2: Produktspezifische Merkmale der Luftschalldämmung*

[69] Norm DIN EN 1793-3 1997. *Lärmschutzeinrichtungen an Straßen – Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften, Teil 3: Standardisiertes Verkehrslärmspektrum*

[70] Vornorm DIN prEN 1793 Teil 1 2010. *Lärmschutzeinrichtungen an Straßen Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften, Teil 1: Produktspezifische Merkmale der Schallabsorption*

[71] Vornorm DIN prEN 1793-2 2010. *Lärmschutzeinrichtungen an Straßen – Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften, Teil 2: Produktspezifische Merkmale der Luftschalldämmung in diffusen Schallfeldern*

[72] Normentwurf DIN prEN 1793-6 2010. *Lärmschutzeinrichtungen an Straßen – Prüfverfahren zur Bestimmung der akustischen Eigenschaften, Teil 6: Produktspezifische Merkmale – In-situ-Werte der Luftschalldämmung*

[73] Richtlinie 2002/49/EG des europäischen Parlaments und des Rates *über die Bewertung und Bekämpfung von Umgebungslärm* (idF v. 25. 6. 2002)

[74] Norm IEEE Standard 754 2008. *IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic*

[75] Norm ISO 10847 1997. *Akustik - Bestimmung des Einfügungsdämpfungsmaßes im Einsatzfall von Schallschirmen aller Art im Freien*

[76] RLS-90 *Richtlinien für den Lärmschutz an Straßen* (idF v. 1992)

[77] Schall 03 *Richtlinie zur Berechnung der Schallimmissionen von Schienenwegen* (idF v. 1990)

[78] TA Lärm 1998. *Technische Anleitung zum Schutz gegen Lärm – Sechste Allgemeine Verwaltungsvorschrift zum Bundes-Immissionsschutzgesetz*

[79] VDI 2720 Blatt 1 1997. *Schallschutz durch Abschirmung im Freien*